

Tese de Doutorado

ASPECTOS NÃO-EXTENSIVOS DE OBSERVÁVEIS  
FINANCEIRAS: MODELAGENS ANALÍTICA E  
NUMÉRICA

Sílvio Manuel Duarte Queirós

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, 2006

-----

-

-----

Tese de Doutorado submetida ao Centro Brasileiro  
de Pesquisas Físicas sob orientação do  
Professor **Doutor Constantino Tsallis**  
para a obtenção do título de  
Doutor em Física por **Sílvia Manuel Duarte Queirós.**

2006

# Agradecimentos

Ao meu orientador CONSTANTINO TSALLIS: por me ter recebido no seu grupo; me ter dado a oportunidade de desenvolver um trabalho que me motivou do princípio ao fim; ter partilhado comigo não apenas todo o seu imenso saber científico, mas também inúmeros pormenores de um verdadeiro cidadão do mundo que me fizeram crescer, quer como físico, quer como pessoa;

Aos meus pais, ARTUR e MANUELA, exemplos de dedicação e abnegação pelos filhos;

À minha esposa, SOURAYA e tudo aquilo nos une e sempre nos unirá;

À minha irmã, JOANA;

À Fundação para a Ciência e Tecnologia pelo apoio financeiro fundamental para o desenvolvimento desta obra;

Aos elementos que contituem ou constituíram o grupo de Física Estatística do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), especificamente: GARIN F.G. AÑAÑOS, CELIA ANTENEDO, FULVIO BALDOVIN, ERNESTO P. BORGES, EDGARDO BRIGATTI, MARCELA CAMPISTA, EVALDO M.F. CURADO, LUIS G. MOYANO, FERNANDO D. NOBRE, NUNO M. C. PEREGRINO, DIOGO O. SOARES-PINTO, NEMÉSIO M. OLIVEIRA NETO, CÉSAR I.S. RIBEIRO, MARCO AURÉLIO REGO-MONTEIRO e JEFERSON DE SOUZA; e colegas que tive a oportunidade de conhecer no decurso deste trabalho: CHRISTIAN BECK, LISA BORLAND, J. DOYNE FARMER, PLAMEN CH. IVANOV, RÊNIO S. MENDES, WELLES MORGADO, FRANCISCO A. TAMARIT, UGUR TIRNAKLI, HUGO TOUCHETTE e CARLOS ZARRO. Em algum, ou vários momentos, os seus comentários ou colaboração foram importantes para a obtenção

dos resultados a apresentar;

Ao pessoal de apoio do CBPF particularmente, ALMÉRIO, LUZIA, REGININHA e VANDA pela sua incomparável disponibilidade para a resolução dos pequenos problemas do dia-a-dia;

À ‘Dra.’ STELLA que, com as suas agulhas, permitiu que eu pudesse retomar uma rotina de vida normal, ao meu cunhado ANDRÉ e ao ‘Dr.’ VALMIR pela disponibilidade sempre demonstrados.

*Nota após defesa:*

São também profundamente agradecidos os comentários realizados pela banca examinadora composta pelos Professores: HANS J. HERRMANN, ITZHAK RODITI, IVAN S. OLIVEIRA, ROGÉRIO ROSENFELD.

A tese que em seguida se apresenta é baseada nos seguintes trabalhos científicos:

- P01** S.M. Duarte Queirós: *On anomalous distributions in intra-day financial time series and Non-extensive Statistical Mechanics*, Physica A **344**, 279 (2004)
- P02** S.M. Duarte Queirós and C. Tsallis: *Bridging a paradigmatic financial model and non-extensive entropy*, Europhys. Lett. **69**, 893 (2005)
- P03** S.M. Duarte Queirós: *On the connection between ARCH time series and Non-extensive Statistical Mechanics*, Physica A **344**, 619 (2004)
- P04** S.M. Duarte Queirós: *On the emergence of a generalised Gamma distribution. Application to traded volume in financial markets*, Europhys. Lett. **71**, 339 (2005)
- P05** S.M. Duarte Queirós: *On non-Gaussianity and dependence in financial time series: a nonextensive approach*, Quantitatit. Finance **5**, 475 (2005)
- P06** S.M. Duarte Queirós and C. Tsallis: *On the connection between financial processes with stochastic volatility and nonextensive statistical mechanics*, Eur. Phys. J. B **48**, 139 (2005)
- P07** S.M. Duarte Queirós and C. Tsallis: *Edge of chaos of the classical kicked top map: Sensitivity to initial conditions*, em: *Complexity, Metastability and Nonextensivity* editado por: C. Beck, A. Rapisarda and C. Tsallis (World Scientific, Singapore, 2005), pp. 135

**P08** J. de Souza, L.G. Moyano, and S.M. Duarte Queirós: *On statistical properties of traded volume in financial markets*, Eur. Phys. J. B **50**, 165 (2006)

**P09** S.M. Duarte Queirós, L.G. Moyano, J. de Souza, and C. Tsallis: *A non-extensive approach to the dynamics of financial observables*, Eur. Phys. J. B, DOI: 10.1140/epjb/e2006-00205-y (2006)

**P10** L.G. Moyano, J. de Souza, and S.M. Duarte Queirós: *Multi-fractal structure of traded volume in financial markets*, Physica A **371**, 118 (2006)

**P11** S.M. Duarte Queirós, E.M.F. Curado, and F.D. Nobre: *A multi-interacting-agent model for financial markets*, Physica A, DOI: 10.1016/j.physa.2006.04.098 (2006)

**P12** S.M. Duarte Queirós: *From time series to superstatistics: Upgrading the criterion for evaluating long-time scales*, Notas de Física CBPF-NF-018/06 (2006) [Submetido para publicação]

## Resumo

Este trabalho reporta a análise de observáveis de origem financeira nomeadamente, as variações de preço, ou de índices de bolsas, e o volume de acções transaccionado durante um certo intervalo de tempo. O estudo é feito dentro do contexto da mecânica estatística não-extensiva. A aplicação da não-extensividade é fundamentada nas propriedades estatísticas inerentes a este formalismo: não-Gaussianidade das distribuições de probabilidade (estacionárias), funções de correlação lentamente decrescentes no tempo e estrutura multi-fractal.

Assim, através da análise empírica de séries temporais reais, é possível: *(i)* atribuir às dependências não-lineares entre as variações de preço, que influenciam o valor das volatilidades, a lenta convergência para a Gaussiana na distribuição das flutuações de preço; *(ii)* descrever a função de correlação do volume transaccionado através de uma soma de duas exponenciais com tempos característicos diferentes, indicando que grandes e pequenas flutuações têm origens diferentes; *(iii)* determinar peso da não Gaussianidade, das correlações lineares e não-lineares no carácter multi-fractal das séries de flutuações de preço e volume transaccionado.

A partir daqui, desenvolvem-se modelos estocásticos à escala mesoscópica e microscópica para as duas observáveis. Os modelos têm como objectivo maior a justificação dinâmica do índice entrópico, que caracteriza a entropia não-extensiva, e que surge na análise das distribuições de probabilidade. Para o caso das flutuações de preço, o índice entrópico é relacionado com a magnitude da resposta do meio microscópico em relação às flutuações de preço. Para o caso do volume transaccionado o índice entrópico é relacionado com flutuações no valor médio (local)

causadas pela evolução do volume de actividade.

## Abstract

The work herein presented reports on the analysis of financial observables namely, price fluctuations and traded volume. The study is done within non-extensive statistical mechanics formalism. The application of such framework is based on statistical features inherent to non-extensivity: non-Gaussianity of the probability density functions, slow decay of the self-correlation functions, and multi-fractal structure.

Through empirical analysis of real time series it is possible to: *(i)* assign to non-linear dependences between price fluctuations, which influence volatility, the slow convergence into the Gaussian of price fluctuations distribution; *(ii)* describe the correlation function of traded volume with a sum of two exponential functions with different characteristic times; *(iii)* determine the weight of non-Gaussianity, linear and non-linear correlation on the time series multi-fractal nature.

With that, mesoscopic and microscopic stochastic models are presented for both of the observables. The models have the aim of introduce a dynamical justification for the entropic index which characterises non-extensive entropy. In the case of price fluctuations, this index is related to the magnitude of the microscopic response regarding the evolution of the variable. In the case of traded volume the entropic index is related to variations in the mean (local) value caused by the time dependence of activity volume.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	História da interacção entre Física e Finança . . . . .	4
1.2	Estrutura e objectivos . . . . .	7
1.3	Terminologia e funcionamento de um mercado financeiro . . . . .	9
1.3.1	Formação de preços de securities em mercados financeiros . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Estatística Não-Extensiva</b>	<b>16</b>
2.1	Enquadramento histórico . . . . .	16
2.1.1	Consequências e aplicações do conceito de entropia . . . . .	21
2.1.2	Limites de aplicabilidade dos conceitos de entropia (de Boltzmann) . . . . .	23
2.2	Generalização de Boltzmann-Gibbs: a entropia $S_q$ . . . . .	25
2.2.1	Propriedades de $S_q$ . . . . .	26
2.2.2	Funções associadas a $S_q$ . . . . .	30
2.2.3	$S_q$ como um gerador de distribuições . . . . .	33
2.2.4	Relação de $S_q$ com a derivada de Jackson . . . . .	37
2.3	Formas entrópicas relativas . . . . .	38
2.3.1	Generalizando Kullback-Leibler . . . . .	40
2.4	Relação de $S_q$ com a caracterização de sistemas não-lineares . . . . .	44
2.4.1	Exemplo: Sensibilidade às condições iniciais do pião clássico perturbado . . . . .	48
2.5	Uma possível fundamentação dinâmica para a mecânica estatística não-extensiva: a superestatística . . . . .	55
2.5.1	Determinação da escala $T$ pelo critério BCS . . . . .	60

<b>3</b>	<b>Análise Empírica de Observáveis Financeiras</b>	<b>69</b>
3.1	Introdução e perspectiva histórica . . . . .	69
3.2	Distribuições de lucro no contexto não-extensivo . . . . .	74
3.2.1	Mercados líquidos . . . . .	75
3.2.2	Mercados ilíquidos: A Bolsa de Lisboa . . . . .	93
3.3	Volume transaccionado num contexto não-extensivo . . . . .	102
3.3.1	Correlação e dependência do volume . . . . .	104
3.4	Estrutura multi-fractal . . . . .	109
3.4.1	Resultados para o volume . . . . .	114
3.4.2	Resultados para os lucros . . . . .	116
3.5	O triplete não-extensivo e observáveis financeiras . . . . .	117
<b>4</b>	<b>Modelos Heterosquedásticos para Lucro</b>	<b>120</b>
4.1	O processo <i>ARCH</i> . . . . .	122
4.2	O processo <i>GARCH</i> . . . . .	125
4.3	Conexão entre as distribuições em processos heterosquedásticos e não-extensividade	129
4.3.1	Distribuição para retornos . . . . .	129
4.3.2	Distribuição para a volatilidade . . . . .	133
4.4	Grau de dependência em processos heterosquedásticos . . . . .	140
<b>5</b>	<b>Modelos Mesoscópicos para Volume e Lucro</b>	<b>146</b>
5.1	Propostas dinâmicas para descrição de volumes . . . . .	146
5.1.1	Proposta I . . . . .	146
5.1.2	Proposta II . . . . .	153
5.2	Proposta dinâmica para a descrição de lucros . . . . .	162
5.2.1	Mercado estável . . . . .	166
5.2.2	Com aversão . . . . .	173
5.3	Situações de iliquidez . . . . .	175
<b>6</b>	<b>Modelo Microscópico: Dinâmica de Opinião</b>	<b>178</b>
6.1	O modelo . . . . .	179

6.2	Resultados . . . . .	187
<b>7</b>	<b>Conclusões e Perspectivas Futuras</b>	<b>198</b>
<b>A</b>	<b>Apêndice relativo ao Capítulo 6</b>	<b>209</b>
A.1	Análise dos mapas (6.8) e ( 6.9) . . . . .	209
A.2	Determinação do expoente da cauda de $p(x)$ eq. (6.12) . . . . .	212

# Lista de Figuras

2.1	Órbita do pião perturbado com $\alpha = 2.3$ , onde as regiões caótica e regular são visíveis. O espaço de fase esférico é projectado sobre o plano $x - z$ multiplicando as coordenadas $x$ e $z$ para cada ponto por $R/r$ onde $R = \sqrt{2(1 -  y )}$ e $r = \sqrt{1 - y^2}$ . Dependência temporal da sensibilidade $\xi$ para as condições iniciais (com $\ \Delta\vec{r}(0)\  = 10^{-10}$ ) para a região dita regular ( $\blacktriangle$ ; evolução <i>linear</i> ), limiar do caos ( $\blacklozenge$ ; evolução <i><math>q_s</math>-exponencial</i> ), e região caótica ( $\blacktriangledown$ , evolução <i>exponencial</i> ).[em <b>P07</b> ] . . . . .	50
2.2	Dependência temporal da média da sensibilidade às condições iniciais, $\langle \xi \rangle$ , para valores típicos de $\alpha$ (50 pontos na fronteira entre as regiões). <i>Inserções</i> : Os mesmos dados, mas usando os mesmos dados mas em ordenadas representadas em $\ln_{q_s}$ , onde $\ln_q(x) \equiv (x^{1-q} - 1) / (1 - q)$ ( $\ln_1 = \ln$ ). Com esta ordenada, o declive da linha recta é simplesmente $\lambda_{q_s}$ . [em <b>P07</b> ] . . . . .	52
2.3	A dependência em $\alpha$ de $q_s$ . Para um valor crítico próximo de $\alpha_c \simeq 3.2$ , $q_s$ atinge o valor unitário (correspondente a um espaço de fase totalmente caótico) mantendo esse valor para todo o $\alpha \geq \alpha_c$ . [em <b>P07</b> ] . . . . .	53
2.4	Representação de órbitas típicas para diversos valores de $\alpha$ . Com o crescimento de $\alpha$ verifica-se a emergência de regiões caóticas que , para $\alpha_c \geq \alpha_c \simeq 3.2$ , preenche todo o espaço de fase. [em <b>P07</b> ] . . . . .	54

2.5	Lado esquerdo: Excerto de uma série temporal onde os elementos, $x$ , são associados à mesma distribuição Gaussiana dentro de um intervalo de duração $T = 250$ . O desvio padrão, $\sigma$ , relacionado com o parâmetro intensivo, $\beta$ , varia de acordo com a densidade de probabilidade indicada no texto. Lado direito: $\kappa(\tau)$ vs. $\tau$ . É visível a sucessão de singularidades de acordo com a condição (2.39) sendo que a última singularidade de valor igual a 3 coincide com o valor real $T$ enquanto que o primeiro valor é igual a 48. Singularidades para pequenos valores de $\tau$ que verificam a condição (2.38) não são visíveis, pois encontram-se mascaradas pelo efeito estatístico de $\tau$ pequeno. Este efeito também introduz erro na curtosis das singularidades em que $\kappa(\tau) = 3$ que se mostram um pouco abaixo desse valor. A série temporal completa tem $10^7$ elementos. [em <b>P12</b> ] . . .	65
2.6	Lado esquerdo: Excerto de uma série temporal de $10^7$ elementos onde, $x$ , associadas a uma série temporal não super-estatística com uma função de densidade probabilidade que é uma $q$ -Gaussiana com $q = 1.3$ e variância unitária. Lado direito: $\kappa(\tau)$ vs. $\tau$ . Para este caso não se observa a sucessão de singularidades tal como surge numa série temporal superestatística. A condição BCS $\kappa(T) = 3$ não só leva a um valor virtual para $T$ , mas também a uma classificação do processo estocástico como superestatístico. A figura inserida mostra a região em que $\kappa(\tau) = 3$ , $\tau \simeq 12.5$ . A saturação de $\kappa(\tau = \infty, L = \infty) = \frac{15-9q}{7-5q} = 6.6$ . [em <b>P12</b> ] . . . . .	67
3.1	Lado esquerdo: Evolução do índice diário desde 1 Maio de 1966 até 14 Agosto de 2002. Lado direito: Variação do logaritmo do índice durante o mesmo período. [em <b>P05</b> ] . . . . .	76
3.2	Os símbolos representam o histograma construído a partir das séries temporais dos lucros do DJIA e as linhas representam o ajuste usando os valores da série temporal apresentados na tab. 3.1. As curvas são deslocadas na ordenada de um factor de 3 para melhor visualização. [em <b>P05</b> ] . . . . .	80

3.3	Os símbolos representam o histograma construído a partir das séries temporais dos lucros do NYSE e as linhas representam o ajuste usando os valores da série temporal apresentados na tab. 3.1. As curvas são deslocadas na ordenada de um factor de 3 para melhor visualização. [em <b>P05</b> ]	81
3.4	Representação de $q - 1$ vs. $T$ para os lucros do DJIA e do NYSE usando os valores das tabs. 3.1 e 3.2. Avaliando a partir desta figura pode afirmar-se que o NYSE aparenta ter uma maior persistência na não-Gaussianidade. [em <b>P05</b> ]	81
3.5	Representação de $R_q$ vs. $q$ para o índice DJIA relativa a vários horizontes temporais no índice. [em <b>P05</b> ]	84
3.6	Representação de $R_q$ vs. $q$ para o índice NYSE relativa a vários horizontes temporais no índice. [em <b>P05</b> ]	85
3.7	Representação de $1 - q^{op}$ vs. $T$ para o índice DJIA segundo os valores da tab. 3.3 em escala $\log - \log$ . A linha completa representa o melhor ajuste e apresenta um declive de $-0.396 \pm 0.003$ , a linha tracejada representa uma extrapolação da linha a cheio verificando-se que passa próximo do valor de $q^{op}$ para $T = 1000$ dias. [em <b>P05</b> ]	85
3.8	Representação de $1 - q^{op}$ vs. $T$ para o índice NYSE segundo os valores da tab. 3.3 em escala $\log - \log$ . A linha completa representa o melhor ajuste e apresenta um declive de $-0.417 \pm 0.006$ . [em <b>P05</b> ]	86
3.9	Representação de $\chi_T^2$ vs. $T^{-1}$ (quadrados). A linha representa a função $\chi_T^2 = 3 \times 10^{-5} T^{-1}$ , onde $\chi^2$ é o valor do erro quando se ajusta a distribuição $p(r_T)$ com uma Gaussiana. Este erro deve tender para zero e forma linear com $T^{-1}$ quando $T \rightarrow \infty$ . O facto da aproximação ao limite ser mais lenta é uma indicação de dependência nas variáveis.	90
3.10	Os quadrados representam os valores de $q$ apresentados na tab. 3.1 e os círculos o valor de $q$ que melhor se ajusta às séries temporais obtidas a partir da convolução de uma outra série gerada a partir da rotina de FORTAN <code>ran3</code> tal que para $T = 1$ , $q = 1.545$ . O processo para geração desta série resulta na aplicação de uma condição semelhante à aplicada para problema de sistemas ferromagnéticos em contacto com banho térmico.	91

3.11	Representação de $R_q$ vs. $q$ para as flutuações de índice DJIA para vários horizontes temporais. A figura interna apresenta a derivada de $R_q$ em relação a $q$ . O valor do máximo não tem um comportamento monótono e varia em torno de $1.28 \pm 0.005$ . [em <b>P05</b> ]	92
3.12	Representação de $R_q$ vs. $q$ para as flutuações de índice NYSE para vários horizontes temporais. A figura interna apresenta a derivada de $R_q$ em relação a $q$ . O valor do máximo não tem um comportamento monótono e varia em torno de $1.12 \pm 0.005$ . [em <b>P05</b> ]	93
3.13	Representação da função de auto-correlação para o valor absoluto das flutuações de índice diário, $C = \frac{\langle  r_1(t)   r_1(t+T)  \rangle - \langle  r_1(t)  \rangle^2}{\langle  r_1(t) ^2 \rangle - \langle  r_1(t)  \rangle^2}$ , para o DJIA e NYSE numa escala log – log. As linhas representam os melhores ajustes e apresentam declives $-0.333 \pm 0.013$ para o DJIA e $-0.345 \pm 0.026$ para o NYSE. [em <b>P05</b> ]	94
3.14	Evolução do índice PSI-20 entre Fevereiro de 1996 e Junho de 2002.	95
3.15	Densidade de probabilidade para as flutuações do índice da Bolsa de Valores de Lisboa entre 1 de Fevereiro de 1996 e 28 de Março de 2002 (aproximadamente 4 milhões de pontos). A linha completa representa a solução da eq. (3.16) e é claramente a melhor aproximação a densidade de probabilidade dos dados (círculos) quando comparados com os melhores ajustes feitos pelas distribuições: Gaussiana, $q$ -Gaussiana ( $q = 2.51$ ), exponencial e $q$ -exponencial ( $q = 1.59$ ) que também são apresentados. [em <b>P01</b> ]	99
3.16	Densidade de probabilidade acumulada para as flutuações de índice (normalizadas) da Bolsa de Valores de Lisboa (símbolos). O ajuste foi feito utilizando a expressão $P_{\geq}(r_1) \sim \exp_{q_{\geq}}[-\beta_{q_{\geq}} r_1]$ $q_{\geq} = \frac{1}{2-q} \beta_{q_{\geq}} = (2-q) \beta_q$ , correspondente a uma função de distribuição de probabilidade $p(r_1) \sim \exp_q[-\beta_q r_1]$ (linha completa). O valor obtido para $q_{\geq}$ foi de $1.01 \pm 0.005$ , indicação de que a distribuição se pode considerar como exponencial ( $\chi^2 = 1.6 \times 10^{-6}$ e $R^2 = 0.99981$ ). Como comparação apresenta-se na linha a tracejado a densidade de probabilidade acumulada relativa a uma Gaussiana $P_{\geq}(r_1) = \frac{1}{2} \left( \sigma - \text{erf} \left[ \frac{x}{\sqrt{2}\sigma} \right] \right)$ com $\sigma = 1$ .	101

3.17	Evolução do volume transaccionado diário (normalizado) da Microsoft Corporation no NASDAQ desde 21 Janeiro 2000 até 21 Janeiro 2005. Cada divisão da escala da abcissa representa 6 meses. [em <b>P04</b> ]	102
3.18	Os símbolos representam a função de correlação média para as 30 companhias analisadas e a linha representa o ajuste feito com uma função que representa a soma de duas exponenciais, eq. (3.23), com tempos característicos $\gamma^{-1} = 27$ and $T = 844$ o que dá uma razão de cerca de 32 ( $R^2 = 0.991$ and $\chi^2 = 2 \times 10^{-5}$ e tempo em minutos). [em <b>P09</b> ]	107
3.19	Lado esquerdo: Entropia mútua generalizada de Kullback-Leibler e normalizada, $R_{q'}$ , vs. índice entrópico, $q'$ , para a International Business Machines (IBM). Na inserção, como mera ilustração, a derivada de $R_{q'}$ em relação a $q'$ para $T = 1$ . O máximo corresponde a $q^{op} = 1.58$ . Lado direito: Os símbolos representam o índice de dependência, $q^{op}$ , vs. $T$ (em minutos) mediada sobre as 30 séries temporais. A linha representa uma função logaritmica de ajuste, $q^{op} = 1.59 + 0.11 \log(T)$ , (o coeficiente de correlação 0.9944) indicando o crescimento lento de $q^{op}$ . [em <b>P08</b> ]	108
3.20	Lado esquerdo: Espectro multi-fractal $f(\alpha)$ vs. $\alpha$ . Lado direito: Expoentes de escala $\tau(q)$ . vs. $q$ mediada sobre as 30 companhias. A legenda na direita é válida para a esquerda. As séries pura e embaralhada apresentam um forte carácter multi-fractal, enquanto que a série embaralhada+fase aleatória apresenta uma largura estreita na abcissa $\alpha$ . Este facto está relacionado com o comportamento quase linear de $\tau_{emb-alea}(q)$ e também devido à forte contribuição da não-Gaussianidade da distribuição de probabilidade do volume transaccionado para a multi-fractalidade da observável. [em <b>P10</b> ]	115

- 3.21 Lado esquerdo: Espectro multi-fractal  $f(\alpha)$  vs.  $\alpha$ . Lado direito: Expoentes de escala  $\tau(q)$ . vs.  $q$  mediada sobre as 30 companhias. A legenda na direita é válida para a esquerda. As séries pura e embaralhada apresentam um forte carácter multi-fractal, enquanto que a série embaralhada+fase aleatória apresenta uma largura estreita na abcissa  $\alpha$ . Este facto está relacionado com o comportamento quase linear de  $\tau_{emb-alea}(q)$  e também devido à forte contribuição da não-Gaussianidade da distribuição de probabilidade do volume transaccionado para a multi-fractalidade da observável. [em **P09**] . . . . . 117
- 4.1 Lado esquerdo: Dois exemplos de séries temporais geradas pelo processo  $ARCH(1)$  para um ruído Gaussiano,  $q_n = 1$ . A magnitude da memória (peso do valor  $z_{t-1}$ , i.e.  $b > 0$ ) aumenta a probabilidade da obtenção de grandes valores de  $|z_t|$ , ou seja, de caudas longas em  $P(z)$ . O valor mais elevado para  $t = 237$  não é virtualmente observável quando  $b = 0$ . Lado direito: Dependência temporal da volatilidade,  $\sigma$ , para os processos  $ARCH(1)$  da figura ao lado. O maior valor de  $\sigma$  ocorre para  $t = 238$ . [em **P02**] . . . . . 125
- 4.2 Lado esquerdo: Séries típicas para um processo  $GARCH(1, 1)$  obtidas a partir de um ruído Gaussiano,  $q_n = 1$ . É verificável que a introdução do parâmetro  $c$  aumenta a probabilidade de obtenção de grandes valores  $|z_t|$ , aumentando assim as caudas em  $P(z)$ . Lado direito: Dependência da da volatilidade,  $\sigma$ , para os processos apresentados na figura do lado. Pode ver-se claramente a diferença entre  $c = 0$  e  $c \neq 0$ , ou seja entre  $ARCH(1)$  e  $GARCH(1, 1)$ . Para o mesmo valor de  $b$  podem obter-se maiores valores de  $\sigma$ , o que torna as caudas em  $P(z)$  mais longas. [em **P06**] . . . . . 127
- 4.3 Lado esquerdo: Correlação entre  $z_t$  e  $z_{t+T}$  vs. distância temporal  $T$ . Todos os valores, excepto quando  $T = 0$ , estão ao nível de ruído. Lado direito: Correlação entre valores absolutos dos retornos em função da distância temporal. Para este caso, a correlação apresenta um decaimento com  $T$ . Os valores utilizados para o processo  $GARCH(1, 1)$  foram  $b = 0.4$  e  $c = 0.4$ . [em **P06**] . 127

4.4	Ilustração superestatística para os 10 primeiros passos de um processo $GARCH(1, 1)$ com $a = b = 0.4$ e ruído Gaussiano. Para este caso, cada passo temporal (cada célula), é caracterizada por uma dada largura (linha a cheio) da Guassiana local que se encontra associada ao valor de $z$ obtido (círculos). [em <b>P06</b> ]	130
4.5	Diagramas $(q, b, c)$ de processos $GARCH(1, 1)$ com $\langle z^2 \rangle = 0$ para $q_n = 1$ (Lado esquerdo) e $q_n = 1.2$ (Lado direito). No último caso o valor máximo possível para $b$ (com $c = 0$ ) é $b = \frac{1}{\sqrt{4.2}} \simeq 0.488$ . [em <b>P06</b> ]	132
4.6	Diagrama $(q, q_n, b)$ de processos $ARCH(1)$ com $\langle z^2 \rangle = 0$ . Quando $b = 0$ obtém-se a recta $q = q_n$ . [em <b>P02</b> ]	132
4.7	Histogramas/Densidade de probabilidade de processos $GARCH(1, 1)$ com $q_n = 1$ e valores típicos para os pares $(b; c)$ . Em sentido horário: $(0.1; 0.1)$ , $q = 1.021$ ( $\chi^2 = 2.35 \times 10^{-9}$ ); $(0.1; 0.88)$ , $q = 1.287$ ( $\chi^2 = 4.59 \times 10^{-10}$ ); $(0.4; 0.1)$ , $q = 1.26$ ( $\chi^2 = 2.44 \times 10^{-9}$ ); $(0.4; 0.4)$ , $q = 1.38$ ( $\chi^2 = 3.22 \times 10^{-7}$ ). [em <b>P06</b> ]	134
4.8	Histogramas/Densidade de probabilidade de processos $GARCH(1, 1)$ com $q_n = 1.2$ e valores típicos para os pares $(b; c)$ . Em sentido horário: $(0.1; 0.1)$ , $q = 1.211$ ( $\chi^2 = 8.67 \times 10^{-10}$ ); $(0.1; 0.5)$ , $q = 1.221$ ( $\chi^2 = 6.01 \times 10^{-10}$ ); $(0.3; 0.25)$ , $q = 1.310$ ( $\chi^2 = 8.11 \times 10^{-9}$ ); $(0.3; 0.45)$ , $q = 1.35$ ( $\chi^2 = 7.36 \times 10^{-9}$ ). [em <b>P06</b> ]	135
4.9	Os símbolos a preto representam a distribuição de probabilidade acumulada, $P_{\geq}(\sigma^2)$ obtida por simulação numérica de um ruído Gaussiano com $b = c = 0.4$ . A cinzento é apresentada a distribuição acumulada referente à eq. (4.23) em que $(\kappa, \lambda, \bar{\sigma}^2) = (0.444, 2.125, 1)$ satisfazem as eqs. (4.24) e (4.25). [em <b>P06</b> ]	138
4.10	Os símbolos a preto representam a distribuição de probabilidade acumulada, $P_{\geq}(\sigma^2)$ obtida por simulação numérica de um ruído $q_n$ -Gaussiano ( $q_n = 1.15$ ) com $(b, c) = (0.5, 0)$ . A cinzento é apresentada a dsitribuição acumulada referente à eq. 4.23 em que $(\kappa, \lambda, \bar{\sigma}^2) = (0.365, 2.371, 1)$ satisfazem as eqs. (4.24) e (4.25)e $q_{\sigma} = 1$ . [em <b>P06</b> ]	140

4.11	Entropia mútua generalizada de Kullback-Leibler normalizada $R_{q'}$ vs. $q'$ para vários processos $GARCH(1, 1)$ com valores típicos $(q_n, b, c)$ . Lado esquerdo: $q_n = 1$ e $(b, c)$ são os seguintes: 1-(0, 0), 2-(0.05,0),3-(0.1,0.2),4-(0.15,0),5-(0.2,0),6-(0.2,0.2),7-(0.25,0), 8-(0.3, 0), 9-(0.4, 0), 10-(0.4, 0.1), 11-(0.4, 0.2), 12-(0.4, 0.4), 13-(0.5, 0), 14-(0.2, 0.688), 15-(0.35, 0), 16-(0.1, 0). Lado direito: $q_n = 1.2$ e $(b, c)$ são os seguintes: 1-(0, 0), 2-(0.1, 0), 3-(0.1, 0.1), 4-(0.15, 0), 5-(0.2, 0), 6-(0.25, 0), 7-(0.3, 0.1), 8-(0.377, 0), 9-(0.3, 0.45), 10-(0.48, 0.0). As inserções contêm a derivada $dR_{q'}/dq'$ (numericamente obtida) para as primeiras quatro curvas como mera ilustração. [em <b>P06</b> ]	142
4.12	Representação de $q^{op}$ vs. $q$ para os valores de $(q_n, b, c)$ indicados na figura anterior. Uma das setas indica dois exemplos obtidos por diferentes tripletos, $(1, 0.4, 0)$ e $(1, 0.2, 0.6888)$ e que apesar de diferentes tempos de decaimento da covariância no ponto $(q, q^{op})$ (discrepância para lá da terceira casa decimal). As outras setas indicam outros dois tripletos (além dos referidos no texto) que apresentam o mesmo tempo de decaimento para a covariância de $z_t^2$ . O facto de não coincidirem indica, mais uma vez, que $q^{op}$ e a covariância são quantidades diferentes. [em <b>P06</b> ]	143
4.13	Representação de $q^{op}$ vs. $b$ (processo $ARCH(1)$ ) para retornos separados de $\tau = 1, 2, 4, 8$ . Pode ver-se que as curvas para os diferentes $\tau$ não colapsam ao contrário do que acontece com as curvas de lucro. As linhas tracejada e pontilhada são meramente indicativas. [em <b>P03</b> ]	145
5.1	Excerto da realização numérica para o volume (normalizado) a 1 minuto das 10 companhias com maior nível de transacção no NASDAQ durante 2001. Em cima: a evolução temporal de $\omega$ ; Em baixo: a evolução temporal do volume, $v$ . A razão entre o tempo de actualização de $\omega$ e a escala para $v$ atingir o equilíbrio é de $10^2$ . [em <b>P04</b> ]	151
5.2	Os pontos representam a distribuição de probabilidade do volume (normalizado) a 1 minuto das 10 companhias com maior nível de transacção no NASDAQ durante 2001. A linha representa o ajuste com a eq. (5.1) usando os valores indicados no texto (Após OBT em [163]).	152

5.3	Frequência relativa, $H(v)$ vs. $v$ para a realização apresentada na fig. 5.1. Os símbolos foram obtidos numericamente e a linha por $\int_{v-\Delta v}^{v+\Delta v} P(v') dv'$ com $\Delta v = 5 \times 10^{-3}$ . [em <b>P04</b> ]	152
5.4	Os símbolos representam $M_2$ vs. $v$ e a linha a representação da função $f(x) = \frac{3}{4}x^2$ apresentada <b>apenas</b> como guia para a vista	154
5.5	Os símbolos representam a função de correlação do volume da Pfizer (PFE) e a linha o ajuste com a eq. (3.23) com os seguintes valores para os parâmetros: $C_1 = 0.24, T_1 = 25, C_2 = 0.32, T_2 = 825, \chi^2 = 1.4 \times 10^{-4}$ e $R^2 = 0.9789$ .	158
5.6	Em cima: Excerto do perfil do volume para o PFE ( $t$ em unidade de minutos). Em baixo: Exerto da simulação realizada utilizando os valores apresentados na tab. 5.1 ( $t$ em unidades de 25 minutos). [em <b>P08</b> ]	159
5.7	Os símbolos representam a distribuição de probabilidade referentes aos séries de dados da Pfizer (PFE) (deslocada de um facto de 10 para melhor distinção) e da Du Pont (DD) que representam, respectivamente, o melhor ( $R^2 = 0.9953, \chi^2 = 0.0002$ ) e o pior ( $R^2 = 0.9763$ e $\chi^2 = 0.001$ ) [em <b>P04</b> ]	159
5.8	Lado esquerdo: A linha a cheio corresponde à série temporal do volume da PFE e a linha tracejada à evolução temporal do valor médio local (quaduplicado para melhor visibilidade) que é calculado utilizando janelas de tamanho $T^* = T_2 = 825$ . Lado direito: A linha a cheio corresponde às variações do volume (em módulo) entre registos separados de 1 minuto e a linha a tracejado tem o mesmo significado que na figura ao lado. Como se pode ver o cenário conjecturado de que as grandes flutuações de $v$ estariam relacionadas com os maiores de $\omega$ é satisfatoriamente verificada.	160
5.9	Em cima: Os símbolos representam a distribuição de probabilidade vs. $r$ do conjunto DJ30 e a linha a distribuição de probabilidades obtida através de uma série temporal gerada a partir da eq. (5.25) que é representada no painel direito. Embaixo: segundo momento de Kramers-Moyal $M_2 \approx \tau \theta [p(r)]^{(1-q)} = \tau \frac{k}{2-q} [(5-3q)\sigma^2 + (q-1)r^2]$ que permite a determinação do valor de $k$ . Valores dos parâmetros: $\tau = 1 \text{ min}, k = 2.40 \pm 0.04, \sigma = 0.930 \pm 0.08$ e $q = 1.31 \pm 0.02$ . [em <b>P09</b> ]	171

5.10	Função $F$ do DFA-1 vs. tamanho da janela $T$ para a série gerada (círculo) e os dados do DJ30 (quadrados). Os declives correspondem ao Expoente de Hurst. Para $T \lesssim 20$ minutos tem-se $H = 0.54 \pm 0.02$ para a replica e $H = 0.52 \pm 0.02$ para os dados. Após esta escala de tempo o expoente decai para $0.513 \pm 0.004$ para ambos. . . . .	172
5.11	$r^2$ (possível medida da volatilidade) vs. $t$ para o excerto apresentado na fig. 5.9.	173
5.12	Os símbolos correspondem ao segundo momento de Kramers-Moyal para os dados e a linha ao ajuste através eq. (5.29) considerando a situação estacionária dada pela eq. (5.35). Os parâmetros são: $\tau = 1$ min, $\theta \approx 2.67$ , $q \approx 1.3$ , $k = 5.5$ , $\beta = 0.12$ e $\alpha_2 = 0.02$ . . . . .	175
6.1	(a) Distribuição de probabilidade dos lucros $x(t)$ do DJ30; a linha completa corresponde à distribuição da eq. (6.11). (b) Representação em escala log-log da distribuição de probabilidade onde é visível o comportamento assintótico da distribuição de probabilidade mostrando o comportamento assintótico da eq. (6.8); A linha recta apresenta um declive de $-6.56$ , o que corresponde a um expoente de $\alpha = 5.56$ . Os quadrados (círculos) correspondem a valores de lucro negativos (positivos) e são ajustados com as mesmas distribuições usadas em (a), representadas aqui por linhas tracejadas (pontilhadas) que são praticamente indistinguíveis a olho nu. [em <b>P11</b> ] . . . . .	187
6.2	Séries de lucro $x(t)$ geradas a partir de uma actualização paralela de $N$ agentes, para os casos (a) $N = 50$ ; (b) $N = 500$ . Os parâmetros considerados na eq. (6.7) foram: $A = 1.5$ , $h = 0.01$ e $B = 0.25$ . [em <b>P11</b> ] . . . . .	189
6.3	As séries de lucro $x(t)$ geradas a partir do mapa (6.8), para os casos (a) $B = 0$ ; (b) $B = 0.25$ . Para ambos casos, os casos $A = 1.5$ e $h = 0.01$ são usados. [em <b>P11</b> ] . . . . .	190
6.4	Densidade de probabilidade para $x(t)$ (rescalado pela sua variância), para os casos (a) $B = 0$ ; (b) $B = 0.25$ . Em ambos os casos foram utilizados os valores $A = 1.5$ e $h = 0.01$ . Os ajustes utilizados foram: em (a) uma distribuição de Tsallis, eq. (6.17), enquanto para (b) a linha completa corresponde à distribuição descrita pela eq. (6.18). [em <b>P11</b> ] . . . . .	191

6.5	Valores absolutos da função de auto-correlação dos lucros, $C_x(\tau)$ , e para a volatilidade, $C_v(\tau)$ , para os casos $B = 0$ [(a) e (c)] e $B = 0.25$ [(b) e (d)]. Círculos a cheio (vazios) representam valores positivos (negativos) da correlação. Em todos os casos os valores utilizados foram $A = 1.5$ e $h = 0.01$ . [em <b>P11</b> ] . . . . .	194
6.6	O valor absoluto da função de correlação para lucros do DJ30 (quadrados) é comparado com o valor obtido através do modelo apresentado usando parâmetros $A = 1.3$ , $B = 0.22$ , e $h = 0.01$ (círculos). [em <b>P11</b> ] . . . . .	195
6.7	A função de correlação lucro-volatilidade $\mathcal{L}(\tau)$ , para os casos (a) $B = 0$ ; (b) $B = 0.25$ . Em ambos os casos, os valores utilizados foram $A = 1.5$ and $h = 0.01$ . [em <b>P11</b> ] . . . . .	196
6.8	O inverso dos tempos característicos $\tau^*$ (quadrados) e $\tau'$ (círculos), associado às funções de função correlação $C_x(\tau)$ e $\mathcal{L}(\tau)$ , respectivamente, são apresentados para vários de $B$ no intervalo $[0.1, 1.0]$ . Os restantes parâmetros são fixos em $A = 1.3$ e $h = 0.01$ . Para $B \geq 0.4$ , as barras de erro tornam-se menores do que os símbolos. [em <b>P11</b> ] . . . . .	197
A.1	O máximo expoente de Lyapunov, $\lambda_{\max}$ , associado aos mapas definidos nas eqs. (A.1) (linha completa) e (A.2) (linha tracejada) é vs. $A$ , para o caso $h = B = 0$ . [em <b>P11</b> ] . . . . .	211
A.2	O máximo expoente de Lyapunov, $\lambda_{\max}$ , associado aos mapas definidos nas eqs. (A.1) (linha completa) e (A.2) (linha tracejada) é vs. $A$ , para o caso $h = 0$ e $B = 0.22$ . [em <b>P11</b> ] . . . . .	213

# Lista de Tabelas

1.1	Exemplo de um livro de ordens. O sub-índice “P” representa procura e “O” representa oferta. Assim, $S_P$ é o chamado <i>bid-price</i> e $S_O$ o <i>ask-price</i> (em unidades arbitrárias). A indicação <i>mercado</i> corresponde a ordens de mercado. . . . .	13
3.1	Resultados obtidos pelo processo de ajuste para os lucros do DJIA. . . . .	78
3.2	Resultados obtidos pelo processo de ajuste para os lucros do NYSE. . . . .	79
3.3	Resultados da aplicação da forma generalizada e normalizada da entropia mútua de Kullback-Leibler ao índice DJIA (esquerda) e NYSE (direita). . . . .	83
4.1	Erro percentual no momento de sexta-ordem entre as densidades de probabilidade numérica e da eq. (4.20) apresentadas nas figs. 4.7 e 4.8. . . . .	136
5.1	Valores obtidos por ajuste das distribuições de probabilidade ( $q$ , $\theta$ e $\alpha$ ) e pela análise das correlações ( $\gamma T^*$ ). . . . .	157

# Capítulo 1

## Introdução

Segundo o dicionário da língua portuguesa, *Física* (substantivo feminino) provém da forma latina da palavra grega *physiké, physica*, que significa “*da Natureza*” [1]. Consequentemente, definindo Natureza como o conjunto de tudo o que forma o Universo, as interações entre os seus elementos e os fenómenos que nele se produzem, tudo pode, em princípio, ser estudado pela ciência Física. Isto compreende fenómenos que ocorrem a escalas tão diferentes como a interação entre os constituintes mais básicos da matéria [2], à dinâmica de Galáxias [3]. Entre estas duas escalas, incluem-se, obviamente fenómenos à escala humana, podendo, neste caso referir-se a própria interação entre seres humanos que nunca como hoje foi tão regida pela capacidade material/financeira de cada indivíduo. Pode então afirmar-se que o dinheiro tornou-se um elemento de suma importância no comportamento de (pelo menos) um sub-sistema natural [4].

Essa importância do dinheiro nos dias que correm pode ser avalizada pela popularização dos mercados financeiros onde tudo ou quase tudo pode ser transformado em dinheiro, desde uma

tempestade na Ásia a um discurso menos conseguido de um líder mundial. Este transformar em dinheiro afecta todos os dias o quotidiano e a própria subsistência de milhões de pessoas sendo portanto merecedor de um olhar, profundo, atento e rigoroso vindo das mais diversas áreas científicas.

Por exemplo, um sociólogo pode questionar-se como as variações de preço ocorridas num mercado de capitais contribuem ou não para a consolidação do fosso que separa ricos e pobres; um analista político pode avaliar as consequências do comportamento dos mercados na actuação de governos (e vice-versa) e um economista pode tentar relacionar os períodos de crescimento ou decréscimo dos índices financeiros com os chamados “ciclos económicos” ou então como as variações de preços influenciam outros produtos financeiros. Para um físico, dois ingredientes presentes em mercados financeiros são altamente apelativos: a complexidade deste tipo de sistema e o perfil das séries temporais de grande parte das grandezas nele observáveis com perfis em tudo semelhantes ao movimento Browniano. Assim, são tipicamente “físicas” perguntas: **Qual a distribuição associada às flutuações do índice da Bolsa de Valores de São Paulo (IBOVESPA)? Porque é que tal distribuição emerge? Quais os mecanismos dinâmicos que originam essa distribuição? Como é que esses mecanismos se comportam no tempo?**

Questões como a acima apresentada, em conjunto com outras que surgirão no decurso do texto, têm sido levantadas por vários físicos em particular por aqueles ligados à Física Estatística, que é profundamente baseada no conceito de probabilidade e que tem como objectivo a descrição do comportamento complexo de sistemas naturais através de leis de evolução sim-

ples dependentes de parâmetros que definem o sistema [5][6][7][8][9].

Um mercado financeiro é, sem dúvida, um sistema complexo [10] caracterizado por um número indefinido de graus de liberdade em que tudo parece depender de tudo, por vezes descrito por estados “ordenados” (tecnicamente definido como *herding*) em tudo similares a fenómenos cooperativos e repleto de interações competitivas. Desta forma, conceitos associados à Física Estatística apresentam-se como fortes candidatos para uma descrição adequada da dinâmica e conseqüentemente das propriedades estatísticas de observáveis relacionadas com mercados financeiros[11][12][13].

A última grande revolução no tratamento de mercados financeiros deve-se ao surgimento e generalização dos meios informáticos que tornou possível o armazenamento de enormes quantidades de dados [15]. Com isso, o desenvolvimento de modelos financeiros simplesmente baseados em consistência lógica foi abandonado em detrimento de uma nova postura: (i) Análise sistemática das séries temporais na busca de comportamentos típicos; (ii) Desenvolvimento de modelos capazes de reproduzir os comportamentos observados em (i). Esta nova postura colocou o estudo de finanças num plano bem mais próximo das ciências naturais quando comparada com a anterior fortemente influenciada pela ciências sociais. Noutras palavras, a concepção de que os mercados teriam que obedecer às teorias financeiras definidas sobre teoremas e axiomas, foi substituída pelo espírito das ciências naturais: a teoria deve ser capaz de descrever o mais fielmente possível os fenómenos reais[5]. Neste caso os físicos serão, porventura, a classe científica mais treinada na abordagem (i)+(ii) onde o ponto (i) pode ser comparado ao tratamento

de dados que qualquer experimentalista faz. A diferença é que neste caso quer o aparato, quer as condições experimentais, não têm como ser controladas. Além do mais, o raciocínio físico é baseado na procura das principais causas que determinam o comportamento de um determinado sistema (*o backbone do problema*)[4], a arte de fazer aproximações analíticas, a aproximação gradual ao sistema real através da introdução de novos elementos nos modelos e a capacidade de fazer analogias entre sistemas aparentemente díspares. Estas condições são preponderantes quando se pretende teorizar sobre um sistema com tamanho grau de complexidade como é um mercado financeiro. Assim, não é de estranhar que cada vez mais pessoas com formação Física sejam procuradas por bancos e agências de investimento para o desenvolvimento de modelos que lhes permitam melhores desempenhos.

## 1.1 História da interacção entre Física e Finança

Não obstante o interesse de físicos e cientistas congéneres por assuntos relativos a Economia se ter tornado nos últimos anos mais do que evidente, a verdade é que a interacção entre as duas ciências apresenta ao longo da História vários episódios [7].

Em 1720, a South Sea Company ofereceu converter títulos da dívida pública da Grã-Bretanha, então muito elevada, em acções suas. Na mira de mirabolantes negócios de ouro e prata na América do Sul, que a companhia se propunha realizar em regime de monopólio, milhares de britânicos aderiram. Entre Fevereiro e Julho de 1720 o preço das acções daquela sociedade subiu sete vezes. Mas os espanhóis controlavam as minas de ouro e prata do Peru e do México

e o esquema falhou, levando ao colapso das ações da companhia e à prisão do ministro inglês das Finanças. Um dos lesados, ISAAC NEWTON, melancolicamente terá dito: “Sou capaz de calcular o movimento dos corpos celestiais, mas não a loucura das pessoas.”. Hoje em dia é trivial entender-se porque é que um físico determinista como NEWTON, contemporâneo do desconhecimento de conceitos como estocasticidade e teoria de probabilidades era incapaz de entender e descrever um sistema complexo como é um mercado financeiro.

Outro exemplo clássico, mas de sucesso, pode ser apontado a CARL FRIEDRICH GAUSS. O cálculo das pensões para as viúvas dos professores da Universidade de Göttingen, onde GAUSS foi professor, é uma das aplicações clássicas de teoria de probabilidades a análise de risco. Temendo a falência do fundo devido ao aumento do número das viúvas e do valor das pensões, os administradores solicitaram a GAUSS que fizesse uma análise do estado do fundo e que sugerisse um conjunto de medidas para o salvar. Após um estudo exaustivo dos dados, GAUSS chegou à conclusão que o fundo gozava de excelente saúde a ponto de indicar como possível um aumento das pensões.

Embora para a comunidade física a primeira derivação de uma teoria fechada para o caminho aleatório, na forma do movimento Browniano, foi apresentada em 1905 por ALBERT EINSTEIN, a verdade é que 5 anos antes, um doutorando de HENRI POINCARÉ de nome LOUIS BACHELIER apresentou numa tese intitulada “*Teoria da especulação*” [16] um formalismo matemático em tudo semelhante ao de EINSTEIN. Nessa tese, BACHELIER desenvolveu um modelo analítico, semelhante à equação para o movimento Browniano em que a partícula é sujeita a

uma força motora, para a evolução dos preços dos títulos de dívida pública do Governo Francês e estudava as hipóteses de sucesso em operações de especulação com produtos financeiros semelhantes a futuros e opções. Apesar de os estudos empíricos do modelo de BACHELIER se mostrarem positivos, o seu trabalho permaneceu esquecido por quase 60 anos sendo apenas resgatado com o surgimento da Econometria.

Na verdade, o modelo de BACHELIER foi redescoberto por M.F.M. OSBORNE em 1959 que o reapresentou num seminário sobre o movimento Browniano em mercados financeiros no Departamento de Física do Estado Sólido do U.S. Naval Research Laboratory. Na sequência, outro físico, FISHER BLACK, juntamente com ROBERT MERTON (com graduação em Física) e MYRON SCHOLES, foram capazes de desenvolver uma fórmula para preços de opções. Mesmo baseado num pressuposto que mais tarde se mostrou errado<sup>1</sup>, o modelo de Black-Scholes é considerado como um dos pilares da Econometria e da Matemática Financeira amplamente utilizado durante anos a fio e é até hoje base de muitos modelos desenvolvidos para aplicação em mercados financeiros. Por tal foi outorgado em 1997 o Prémio em Ciências Económicas do Banco da Suécia em Memória de Alfred Nobel a SCHOLES<sup>2</sup>. Outro físico de formação, mas cujas contribuições se destacam infinitamente mais na área financeira é ROBERT F. ENGLE. Este foi, provavelmente, uma das primeiras pessoas a captar o perfil intermitente em séries temporais tendo desenvolvido os primeiros modelos heterosquedásticos que mais à frente nesta tese serão estudados. Também a ENGLE foi outorgado o Prémio em Ciências Económicas do

---

<sup>1</sup> Voltaremos a falar deste ponto no capítulo 3.

<sup>2</sup> o prémio foi dividido com R. C. MERTON. F. BLACK não foi atribuído tal prémio devido à morte deste

Banco da Suécia em Memória de Alfred Nobel. A aplicação de conceitos introduzidos originalmente em física e física matemática para entender sistemas financeiros tem recebido diversas contribuições. Neste domínio há que distinguir as contribuições lideradas por J. DOYNE FARMER, J.-P. BOUCHAUD, H.E. STANLEY, C. TSALLIS e Y.-C. ZHANG. Em especial, há que distinguir o papel dos dois primeiros como impulsionadores de uma interacção estreita entre físicos e “financistas” quer com a criação de companhias de sucesso como a *Prediction Company* [17] e a *Science & Finance* [18], quer com o papel fundamental na criação da revista *Quantitative Finance* [19], onde se podem encontrar regularmente artigos de pesquisa publicados por renomados físicos e economistas.

## 1.2 Estrutura e objectivos

Embora cada vez mais surjam trabalhos muito interessantes e com alto grau de especificidade em finança quantitativa [5](teorias de preço de opções [20][21], análise de risco [22][23], etc.) realizados por físicos, tal abordagem distancia-se do objectivo central deste trabalho: *a caracterização de grandezas mensuráveis em mercados financeiros e a determinação dos principais factores que contribuem para os comportamentos observados*. Apesar das intenções do trabalho apresentado serem acima de tudo académicas, a qualidade dos resultados poderá ser o berço do desenvolvimento de modelos comerciais.

A perspectiva aqui exposta, resulta de um olhar físico sobre mercados financeiros como um sistema complexo fora-de-equilíbrio e por tal passível de ser estudado à luz do formalismo não-

extensivo baseado na *Entropia de Tsallis* [24]. O estabelecimento da conexão entre mercados financeiros e a teoria de Tsallis é feito partindo da análise sistemática de diversas propriedades estatísticas de séries temporais financeiras e posterior definição de modelos mesoscópicos baseados em equações diferenciais estocásticas e modelos com cariz microscópico baseados no comportamento dos constituintes individuais do sistema. O texto encontra-se organizado da seguinte forma: no capítulo 2 far-se-á a introdução da mecânica estatística não-extensiva baseada na entropia proposta por CONSTANTINO TSALLIS em 1988, a sua contextualização na evolução dos conceitos em Física Estatística, formulações alternativas à original e propriedades quer da entropia, quer de outras funções matemáticas estreitamente relacionadas com a entropia não-extensiva (para subsistemas independentes). Apresentar-se-á a sua relação com dinâmicas simples nomeadamente mapas conservativos no limiar do caos, bem como a generalização da medida de Kullback-Leibler que permite uma avaliação quantitativa do grau de dependência entre variáveis aleatórias. O capítulo 3 tratará do estudo das propriedades estatísticas de observáveis financeiras como o *lucro* (return)<sup>3</sup>; *volume transaccionado* (traded volume). Quantidades como distribuições de probabilidade, funções de correlação, grau de dependência e estrutura multi-fractal de lucro, volume transaccionado e volatilidade serão analisadas e a partir desta análise será possível estabelecer uma ligação entre a complexidade de mercados financeiros e a estatística não-extensiva. No capítulo 4 introduzir-se-ão dinâmicas estocásticas designadas por modelos hesterosquedásticos e a sua ligação com entropia não-extensiva. O capítulo 5 tratará de

---

<sup>3</sup>Equivalente à variação percentual de preço ao longo de um determinado intervalo de tempo.

dinâmicas diferenciais estocásticas que podem ser utilizadas para a descrição da evolução intradiária de observáveis financeiras. O capítulo 6 trará uma abordagem de cariz microscópica ao estudo das flutuações de preços em mercados financeiros. Aqui, usando um modelo baseado no famoso modelo de interacção de spins com interacções aleatórias serão reproduzidos alguns comportamentos típicos de flutuações de preços em mercados financeiros. Para o capítulo 7 são endereçadas as conclusões obtidas com os resultados apresentados, bem como a indicação de trabalho a ser realizado futuramente.

### **1.3 Terminologia e funcionamento de um mercado financeiro**

Antes da apresentação do trabalho realizado e devido à especificidade do sistema analisado é conveniente, para uma leitura mais fácil, da apresentação do funcionamento básico de um mercado e de algum do jargão financeiro que proliferará ao longo do texto [25].

Um mercado financeiro, habitualmente designado de Bolsa, representa uma organização para compra e venda de bens financeiros. Estes dividem-se basicamente em duas grandes classes: *securities* ou *derivados* (*derivatives*). No primeiro incluem-se acções (títulos correspondentes a uma certa fracção do valor da empresa), títulos de dívida (usualmente dívida pública), moeda e produtos não-financeiros e tanto dispare como petróleo, ouro ou sumo de laranja congelado que são negociados como um objecto de valor financeiro e não como bens de consumo nem como matéria-prima. A partir da evolução dos preços de cada um destes produtos podem definir-se diferentes índices que permitem avaliar o estado de um determinado mercado, sector

ou economia nacional. Por exemplo, o índice Dow Jones Industrial Average (DJIA) é composto a partir de uma média pesada dos preços das 30 maiores empresas estado-unidenses que são transaccionadas no mercado de pregão de Nova York (NYSE - New York Stock Exchange) e no mercado electrónico NASDAQ (National Association of Securities Dealers Automated Quotation)<sup>4</sup>. Outro índice a destacar é o Standard & Poor's 500 (SP500) formado a partir das 500 empresas com maior liquidez negociadas no NYSE. Existem índices sectoriais e índices regionais como o Dow Jones Stoxx 50 que avalia o desempenho das 50 melhores empresas Europeias independentemente do país. O mesmo acontece para bens e para títulos de dívida. Todos estes índices são habitualmente associados a produtos financeiros derivados. Isso é feito através da definição de fundos de investimento compostos por títulos das companhias que compõe um dado índice.

Os derivados, tal como o seu nome indica, são instrumentos financeiros cujo valor depende habitualmente do preço de algo mais fundamental, usualmente um *security* e que foram criados para diminuir o risco em investimentos financeiros. Os derivados podem ser transaccionados em mercados estabelecidos onde existem regras gerais pré-definidas ou então, através de contratos particulares com regras mais específicas e adequadas às pretensões dos contratantes. O primeiro caso é definido como transacção dentro do livro (*on the book*), enquanto que o segundo tipo é designado como transacção fora do livro (*off the book*).

Este trabalho está essencialmente focado na análise de preços de acções e índices. Em

---

<sup>4</sup>As companhias constituintes do índice bem como o seu peso são determinados pelos editores do *The Wall Street Journal* e podem ser consultados em <http://www.djindexes.com>

primeiro lugar, porque tem sido desenvolvida uma série de trabalhos de carácter empírico sobre estas duas quantidades, mas onde há um défice em propostas dinâmicas que permitam entender tais observações. Em segundo lugar, porque é menos dependente de outros factores como no caso dos bens que são altamente vinculados a fenómenos como a sazonalidade e armazenamento ou de títulos de dívida dependentes das taxas de juros e políticas económicas dos países.

### 1.3.1 Formação de preços de securities em mercados financeiros

Num mercado financeiro os agentes transaccionam os *securities* colocando à venda ou procurando comprar determinadas quantidades (volume) de títulos,  $V_i$ , a determinado preço,  $S_i$ . Este pode ser de tipo *especulador*, i.e., assumem riscos para conseguirem lucro ou do tipo *arbitrageur*, que tenta fazer dinheiro com risco zero e habitualmente com investimento zero<sup>5</sup>. Existem também os chamados *hedgers* que procuram a realização de lucro a risco zero, mas que utilizam para tal os produtos derivados onde um investimento inicial é necessário.

A combinação volume/preço, designada por *ordem*, pode ser de três tipos:

- *Ordem ilimitada* - São ordens sem indicações específicas. O produto é comprado (vendido) ao preço de mercado e é executada assim que uma ordem coincidente é introduzida no livro. Como o preço pode variar entre a introdução e a execução da ordem, uma ordem ilimitada não está protegida em relação a variações súbitas de preço.

---

<sup>5</sup>Isto pode ser conseguido através de transacções em mercados diferentes. Por exemplo através da compra de acções de uma determinada companhia em Paris a um preço  $S_F$  e venda em Nova York a um preço  $S_{NY}$ , com  $S_F < S_{NY}$ .

- *Ordem limitada* - São ordens que contêm indicações específicas para preços limite. No caso de ordem de compra indica o preço máximo que o agente está disposto a pagar e no caso de venda indica o preço mínimo pretendido.
- *Ordem de paragem* - São ordens ilimitadas que protegem os agentes em quedas bruscas ou subidas inesperadas de um determinado título.

As ordens depois de colocadas no livro são executadas segundo as regras do mercado. Basicamente essas regras dividem-se em dois grupos: o chamado pregão em voz e o pregão electrónico que utilizam dois sistemas para evolução dos preços com filosofias diferentes. Para o primeiro caso, que basicamente ainda resiste no NYSE e em parte do mercado de Londres (o chamado *upstairs market*), as regras são comuns e baseiam-se na maximização do volume transaccionado, daí dizer-se que o preço é orientado pelas ordens (*order-driven market*). Para o pregão electrónico, dadas as suas características, os mercados apresentam regras mais complexas e específicas para cada mercado. Essas regras são colocadas de forma a que seja garantida a liquidez. Por exemplo, a transacção no mercado alemão [7] segue um conjunto de 30 regras.

### **Formação de preço em pregão**

No pregão as ordens de compra são organizadas de forma descendente de acordo com o seu limite sendo atribuído um valor de infinito para as ordens ilimitadas. As ordens de venda são ordenadas de forma ascendente de acordo com o seu limite atribuindo-se um valor de zero para as ordens ilimitadas que podem ser visualizadas por todos. Esta função é executada por

Tabela 1.1: Exemplo de um livro de ordens. O sub-índice “P” representa procura e “O” representa oferta. Assim,  $S_P$  é o chamado *bid-price* e  $S_O$  o *ask-price* (em unidades arbitrárias). A indicação *mercado* corresponde a ordens de mercado.

$V_P(S_P)$	$S_P$	$V_O(S_O)$	$S_O$
200	<i>mercado</i>	300	<i>mercado</i>
500	15	300	11
300	14	200	11
100	14	400	12
200	13	100	13
400	12	200	14
100	10	300	15

um *especialista* que tem como função a promoção de um mercado justo e ordenado. Partindo daqui, podem formar-se as funções cumulativas de procura,  $C_P(S^*)$ , e oferta,  $C_O(S^*)$  definidas como

$$C_P(S^*) = \sum_i V_i(S_i), \quad \forall S_i \geq S^*,$$

e

$$C_O(S^*) = \sum_i V_i(S_i), \quad \forall S_i \leq S^*.$$

Desta forma, o preço de mercado num pregão é o preço que permite a execução do máximo de ordens com o mínimo resíduo de volume não executado de acordo como os limites das ordens.

Imagine-se o livro de ordens de um especialista para uma determinada acção tal como apresentado na tab. 1.1.

Para este caso, o preço que maximizaria o volume transaccionado seria o preço de 13. O que corresponde a uma satisfação de todas as ordens com um preço de compra maior ou igual a 13 e com um preço de venda inferior ou igual ao mesmo valor. Como os valores dos volumes cumulativos de oferta e procura são iguais para 13, a satisfação das ordens seria completa. Suponha-se agora que se dá um *cancelamento* (previsto na negociação) da ordem de compra de 300 unidades com o preço de 14. A intersecção das curvas dar-se-ia agora para um valor de 12.4. Considerando apenas valores inteiros, o preço de mercado seria então de 12. Isto corresponderia a uma satisfação parcial da ordem de compra a 12, que das 400 unidades pretendidas apenas poderia ter acesso a 200. O excedente pode então ser transformado numa nova ordem ou então ser imediatamente retirado. Alternativamente, o *especialista*, no espírito das suas funções de manter um fluxo de ordens satisfeitas que garanta a maior liquidez possível, pode assumir o papel de interventor no mercado (*Principal*) e comprar ou vender<sup>6</sup> um certo volume ou então assumir-se como *Catalisador* do mercado e procurar um investidor que possa garantir o balanço de volumes.

### **Formação num mercado electrónico**

Contrariamente ao que acontece no NYSE, onde existe um espaço físico para a negociação, no NASDAQ esta dá-se através de uma rede de comunicações. Contudo, a maior diferença entre o NYSE e o NASDAQ está no facto de no último os investidores não comprarem nem venderem entre eles, mas através do um *fazedor de mercado* (*market maker*). Na prática, as

---

<sup>6</sup>Para cada título negociado existe um especialista que detém uma determinada quantidade de títulos que lhe permita desbloquear situações de iliquidez ou de desequilíbrio que geralmente são negociados ao preço de mercado.

diferenças entre um especialista e um fazedor de mercado são quase nenhuma, apesar de em teoria os seus papéis são de facto distintos. Enquanto que, ao especialista está atribuído o papel de organização de fluxo de volume para cada título, aos fazedores de mercado é atribuída a função de determinar um preço de compra e um de venda para cada título. Se no caso do NYSE existe apenas um especialista por título, no caso do NASDAQ existem em média 14 fazedores de mercado por título que competem entre eles através dos seus preços podendo negociar entre eles e utilizar um quinhão do volume para manter a liquidez. As informações sobre especialistas e fazedores de mercado podem ser encontrados nos sítios de ambos os mercados.

## Capítulo 2

# Estatística Não-Extensiva

Nas últimas décadas a mecânica estatística tem vindo a alargar os propósitos para os quais havia sido originalmente concebida: a utilização de estatística em sistemas com um elevado número de elementos cuja dinâmica microscópica é definida por um Hamiltoniano. Embora a capacidade de relacionar os estados microscópicos dos componentes individuais de um sistema com as suas propriedades macroscópicas seja actualmente utilizada nas mais diversas áreas do conhecimento, a sua principal aplicação continua (e continuará) a ser a determinação das propriedades termodinâmicas através da correspondência entre o conceito de entropia e o número de estados microscópicos possíveis [26].

### 2.1 Enquadramento histórico

O conceito de entropia,  $S$ , oriundo do grego “tropí” ( $\tau\rho\omicron\pi\acute{\iota}$ ) que significa transformação, foi introduzido em 1865 por RUDOLF JULIUS EMMANUEL CLAUSIUS [27] no contexto da Termodinâmica cujo fundador principal pode considerar-se NICOLAS LÉONARD SADI CARNOT

[28]. A introdução do conceito foi motivada pelos seus estudos em transformações reversíveis e irreversíveis como uma medida da quantidade de energia de um sistema físico que não pode ser utilizada para produção de trabalho. Mais especificamente, CLASIUS definiu variação de entropia de um sistema termodinâmico durante um processo reversível onde uma dada quantidade de calor,  $\delta Q$ , é transferida a temperatura constante  $T$  como

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T},$$

que surge no *Teorema de Clausius*[29].

Pode então considerar-se  $S$  como o pilar da Termodinâmica<sup>1</sup>, pois todos seus princípios estão, directa ou indirectamente, relacionados com esse conceito. Com a aplicação, no final do século XIX, dos conceitos de termodinâmica a fenómenos electro-magnéticos, elasticidade, reacções químicas e transições de fase através dos trabalhos de LORENTZ, GIBBS, NERNST e HELMHOLTZ [26], tornou-se pouco aceitável que uma área científica com tamanhas aplicações fosse simplesmente baseada na experiência de engenheiros com máquinas de vapor [31]. Essa onda de criticismo levou CONSTANTIN CARATHÉODORY a introduzir em 1908 [32] um tratamento mais científico através de um conjunto de axiomas baseado nas propriedades de integrabilidade dos diferenciais de PFAFFIAN, que ficou conhecido por *Princípio da inatingibilidade adiabática*. Apesar de ser matematicamente complicada, o que originou insipiência geral,

---

<sup>1</sup>Apesar CARNOT ter sido, aparentemente, o primeiro a questionar-se sobre transferência de calor em ciclos, GIBBS considerava que, com o Teorema de Clausius, base do segundo princípio da termodinâmica, “a ciência da Termodinâmica passou a ser uma realidade”[30].

esta formulação foi rapidamente aceite por figuras como BORN, LANDÉ e CHANDRASEKHAR. Após uma simplificação apresentada por TURNER, SEARS e LANDSBERG, ela tornou-se popular e é a definição que hoje em dia se encontra nos livros de Termodinâmica [33]:

- O estado macroscópico de um fluido é caracterizado por um conjunto de quantidades extensivas nomeadamente, energia interna, volume e quantidade de matéria (e.g. número de partículas);
- Existe uma função dessas quantidades macroscópicas à qual se denominará *entropia* e que apresenta o seu valor máximo para os estados de equilíbrio;
- A entropia de um sistema composto é aditiva sobre cada um dos componentes sendo também uma função contínua, diferencial e monótona crescente em relação à energia;
- Para temperaturas iguais ao zero absoluto a entropia é nula.

A conexão do conceito de entropia com o mundo microscópico foi feita por LUDWIG BOLTZMANN. Ao estudar a aproximação de um gás ideal ao equilíbrio, BOLTZMANN verificou que a distribuição de velocidades das moléculas de um gás,  $f(v)$ , tendia sempre para a Maxwelliana [34]. Este resultado foi obtido através da introdução de uma função da distribuição de estados das moléculas, a função  $E$ , depois chamada função  $H$  [35]. Baseado em questões dinâmicas, BOLTZMANN defendeu que esta função decresceria até que  $f(v)$  atingisse a Maxwelliana. Contudo, a sua prova era baseada no simples facto da função  $h(x, y) = (x - y)(\ln y - \ln x)$  ser sempre negativa para  $x$  e  $y$  positivos. A partir daqui, BOLTZMANN concluiu que a sua função

corresponderia a uma extensão da definição de entropia para estados fora do equilíbrio. O facto da função  $H$  ser decrescente no tempo levantou diversas questões a propósito da natureza irreversível dos sistemas físicos e a sua compatibilidade com os princípios da mecânica que serão abordados à frente.

Consciente destas questões, BOLTZMANN tentou alicerçar as suas conclusões em bases mais sólidas levando em conta as frequências relativas de estados de equilíbrio com estados fora-de-equilíbrio.

Foi então que, por volta de 1877, assumindo a *hipótese de caos molecular* (*Stosszahlansatz*), BOLTZMANN mostrou que se  $W$  representasse o número de estados no qual cada molécula tem um determinado estado microscópico (posição e velocidade) compatível com o estado macroscópico do sistema definido por quantidades termodinâmicas mensuráveis (pressão ou temperatura), então a entropia  $S$  do sistema (leia-se gás) é proporcional ao logaritmo de  $W$  [36][37],

$$S = k \ln W,$$

expressão conhecida como *Princípio de Boltzmann*, onde  $k$  foi mais tarde designada por PLANCK como *constante de Boltzmann*[38].

A introdução do logaritmo provém do facto de que para dois sistemas independentes,  $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$ , a entropia total corresponde à soma das entropias individuais,

$$S(A + B) = S(A) + S(B).$$

Sendo  $W$  o número de estados microscópicos correspondentes a um determinado estado macroscópico,  $W$  pode ser visto como a probabilidade de ocorrência de um estado termodinâmico. Juntando-se o facto de que em sistemas fechados e adiabáticos  $S$  cresce em direcção a um máximo correspondente ao equilíbrio térmico, tem-se que os sistemas tendem para estados de entropia máxima. Por outro lado, suponha-se um sistema fechado composto por duas partes sendo que o grau de organização de um dos subsistemas é maior do que o outro. Dado que estados de moléculas ordenadas (geralmente correspondentes a baixas temperaturas) têm menos probabilidade de ocorrência do que estados de maior desorganização e agitação (temperaturas elevadas), um aumento de entropia significa um aumento no grau de desordem do sistema, ou a uma equiparação das temperaturas.

Mais tarde, GIBBS estendeu o estudo para sistemas não-isolados em contacto com reservatórios (de quantidades extensivas) generalizando a forma da entropia para

$$S = -k \sum_i p_i \ln p_i \equiv S_{BG},$$

onde  $p_i$  representa a probabilidade do estado  $i$ . Para o caso de equiprobabilidade,  $p_i = \frac{1}{W}$ , a entropia de Boltzmann-Gibbs, como é conhecida a equação acima, reduz-se ao princípio de Boltzmann[39].

A interpretação estatística da entropia por BOLTZMANN, baseada em considerações probabilísticas, está em concordância com o princípio do crescimento de entropia, mas num sentido mais lato (leia-se estatístico) ao contrário do que acontecia na Termodinâmica de Clausius. Neste sentido, a evolução espontânea de um sistema para um estado macroscópico de entropia

mais pequena, embora pouco provável deixa de ser impossível.

### 2.1.1 Consequências e aplicações do conceito de entropia

Desde a apresentação das suas ideias sobre entropia, BOLTZMANN gerou um enorme interesse não só em diferentes áreas da Física tradicional bem como em outras áreas do conhecimento.

Por exemplo, a entropia permitiu inferir sobre a evolução do Universo por HELMHOLTZ, numa das primeiras aplicações de Termodinâmica à Cosmologia mais tarde glorificadas por HAWKING. Ao estudar o princípio da dissipação, HELMHOLTZ [40] formulou a sua *Teoria da morte térmica*, no qual postulava que o Universo deveria evoluir para um estado de temperatura constante e aí ficar *ad eternum*. Esta teoria implicava a existência de um estado inicial de entropia mínima e por isso a existência de um início do Universo perfeitamente distinguível que deveria ter sido criado por causas actuantes até hoje.

O denominado “Demónio de Maxwell”<sup>2</sup> [41], que surgiu como teste para verificar a validade dos princípios da entropia para fenómenos a pequena escala, teve uma influência fundamental na expansão do conceito de entropia a outras áreas. A solução de SZILARD [42] para o problema (a primeira amplamente considerada como aceitável) na qual ele mostrou que o processo de inspecção por parte do demónio acarretava um aumento de entropia que compensava, pelo menos, a decréscimo de entropia pela troca das moléculas entre os dois subsistemas, foi fun-

---

<sup>2</sup>Sistema que contém um gás em equilíbrio termodinâmico dividido em duas partes A e B ligadas por um pequeno buraco que pode ser aberto por um “ser” capaz de seguir a trajetória de cada molécula permitindo que as moléculas com mais velocidade passem de A para B e que apenas as mais lentas passem de B para A, criando assim uma (aparente) diminuição da entropia do sistema.

damental para o estabelecimento de uma relação entre a entropia e medição. Esta associação culminou na contribuição de CLAUDE SHANNON [43] para a teoria da informação e a noção de entropia negativa (*negentropy*) como uma medida da informação que se possui sobre o sistema, assim como a entropia corresponde a uma medida da falta de informação sobre a estrutura do sistema. A partir do trabalho de SHANNON e mais tarde de LEON BRILLOUIN [44] a entropia passou a ser utilizada como um gerador de distribuições de probabilidade largamente utilizadas em teoria de decisão, engenharia, bem como em outras áreas tecnológicas.

No âmbito da aplicação generalizada do conceito de entropia não pode deixar-se em branco os papéis desempenhados por JAYNES [45], que olhou a mecânica estatística como uma forma de indução estatística ao invés de uma teoria física, e por TRIBUS [46] que demonstrou a possibilidade de se recuperar o conceito termodinâmico de entropia partindo do conceito de informação da entropia para sistemas abertos ou fechados.

Como apontamento a propósito da aplicação do conceito de entropia às ciências sociais, pode referir-se o trabalho de HENRY ADAMS [47] sobre a descrição da história da humanidade a partir de leis sócio-físicas. ADAMS teorizou que a mente humana teria passado por três fases: teológica, metafísica e positiva, que comparou as fases sólida, líquida e gasosa. Baseado em GIBBS, ADAMS defendeu que estas três fases co-existiam em equilíbrio. Por exemplo, o período do Renascimento, onde existiram mudanças profundas quer ao nível do pensamento quer ao nível do estético, foi para ADAMS não mais do que uma transição de fase, apologizando que futuros historiadores deveriam procurar obter formação em áreas como a matemática

e física em particular nas ideias de LORD KELVIN, MAXWELL e GIBBS.

### 2.1.2 Limites de aplicabilidade dos conceitos de entropia (de Boltzmann)

Mesmo antes da interpretação estatística da entropia por BOLTZMANN, a universalidade do conceito<sup>3</sup> já era questionada por vários cientistas entre os quais MAXWELL através do seu Demónio. Ainda antes de BOLTZMANN, THOMSON (LORD KELVIN)[48] e LOSCHMIDT [49] levantaram objecções quanto à irreversibilidade ligada ao crescimento da entropia. Eles enfatizavam o facto de existir uma inconsistência entre a irreversibilidade entrópica e a reversibilidade temporal que provinha das leis de Newton e por conseguinte das leis de colisão molecular que sustentavam a derivação do teorema  $H$ . Era defendido que, para qualquer movimento ou sequência de estados em que a função  $H$  decresce, existe, por inversão temporal, uma sequência na direcção oposta na qual  $H$  cresce. Desta forma, uma prova da Segunda Lei da Termodinâmica (leia-se princípio de crescimento da entropia) puramente baseada em questões dinâmicas não poderia ser obtida. Estes argumentos foram objecto de contestação por BOLTZMANN por mais do que uma ocasião. Numa primeira vez, utilizando argumentos estatísticos, BOLTZMANN defendeu que a distribuição de MAXWELL, correspondente ao equilíbrio, era claramente dominante ao ponto de qualquer condição inicial evoluir certamente para o estado de equilíbrio através de um

---

<sup>3</sup>Num dos primeiros artigos de C. TSALLIS que tive a oportunidade de ler era destacado na introdução a questão da eternidade e da universalidade das leis físicas. Apesar de eternas, a mecânica newtoniana, a relatividade restrita a mecânica quântica não são certamente universais, exibindo os seus limites de aplicabilidade.

Desta forma é de se esperar que também para a mecânica estatística baseada no Princípio de Boltzmann exista um limite de aplicabilidade.

aumento da entropia <sup>4</sup>. Mais tarde, foi através de uma revisão do teorema  $H$  e a introdução de propriedades de descontinuidade. Apesar dos seus esforços, os argumentos de BOLTZMANN não foram convincentes para pares como EHRENFEST [50] que considerava não existir uma prova rigorosa sobre a fundamentação da mecânica estatística.

A derivação da irreversibilidade macroscópica através da dinâmica foi alvo de contestação por parte de vários físicos entre os quais EINSTEIN [51]. De facto, a introdução de assumpções estatísticas *a priori* tal como o Stosszahlansatz, apesar de não serem inconsistentes com os princípios da mecânica não são deriváveis a partir desta, fazendo deste um problema ainda em aberto.

Na realidade, o princípio de Boltzmann encontra-se intimamente relacionado com a assumpção, de que a trajectória do sistema preencha completamente a superfície equienergética [52]. Esta hipótese é a mais directa para se resolver o problema ergódico, *i.e.*, demonstrar a igualdade nas médias de fase e de tempo para qualquer função, mas não é a solução genérica para a questão. Na realidade, apenas em 1971 se conseguiu demonstrar, por YAKOV G. SINAI [53], a ergodicidade para um modelo de gás perfeito, o que atesta a complexidade do problema. Se por um lado existe mais de um século de sucessos na ciência, alicerçados no princípio de Boltzmann, por outro, não é possível ser-se contundente quanto à singularidade de tal princípio. Noutras palavras, é perfeitamente plausível que existam outras soluções para o problema ergódico que

---

<sup>4</sup>Na verdade a obtenção da relação entre entropia e número de estados microscópicos compatíveis com o estado macroscópico do sistema obtida por BOLTZMANN surgiu como uma equação intermediária na sua tentativa em responder à crítica de LOSCHMIDT .

conduzam a princípios alternativos ao de BOLTZMANN ou sistemas para os quais simplesmente não se verifica a igualdade de médias, sistemas *não-ergódicos*.

## 2.2 Generalização de Boltzmann-Gibbs: a entropia $S_q$

Neste âmbito e inspirado nas equações para dimensões fractais generalizadas de objectos multi-fractais foi introduzido em 1988, por CONSTANTINO TSALLIS [24], a seguinte generalização da entropia de Boltzmann-Gibbs(-Shannon), correntemente chamada de *entropia de Tsallis* ou *entropia não-extensiva*. A ideia que regeu o desenvolvimento da entropia não-extensiva foi a introdução de uma medida do grau de ignorância em relação a sistemas com tendência. Assim, considere-se a probabilidade de ocorrência de um dado estado  $i$ ,  $p_i$ . A potenciação da probabilidade por um factor  $q$  introduz uma tendência no conjunto das probabilidades, *i.e.*, sendo  $0 < p_i < 1$ , tem-se que  $p_i^q > p_i$  se  $q < 1$  e  $p_i^q < p_i$  se  $q > 1$ . Noutras palavras,  $q < 1$  beneficia os eventos pouco prováveis em relação ao mais prováveis e vice-versa. Essa medida de informação deveria ser invariante perante permutações (por exemplo uma forma linear) e deveria valer zero para um sistema no qual a certeza fosse completa. Para além disso, ela deveria recuperar a entropia de Boltzmann-Gibbs para o caso em que não existe tendência  $q = 1$ . Sob estas condições o resultado obtido foi

$$S_q = k \frac{1 - \sum_j [p_j]^q}{q - 1}. \quad (2.1)$$

Nestas circunstâncias o factor de tendência deverá ser chamado de *índice entrópico*,  $q$ , sendo

definido no conjunto dos números reais. É facilmente verificável que no limite em que  $q$  tende para 1 a entropia de Boltzmann-Gibbs<sup>5</sup> é recuperada.

### 2.2.1 Propriedades de $S_q$

#### Não-Negatividade

Um sistema que apresenta certeza completa é caracterizado por um estado com probabilidade 1 para esse estado e probabilidade zero para todos os restantes. Desta forma,  $S_q = 0$  qualquer que seja o valor de  $q$ .

Para sistemas com incerteza, sendo a probabilidade normalizada, tem-se  $p_i < 1$  para qualquer estado. Quando  $q > 1$  quer o numerador ( $\sum_j [p_j]^q < 1$ ), quer o denominador são positivos logo  $S_q$  é positiva. Quando  $q < 1$  quer o numerador ( $\sum_j [p_j]^q > 1$ ), quer o denominador são negativos, logo  $S_q$  é positiva.

#### Concavidade e convexidade

Tendo em conta que  $\sum_j p_j = 1$ , à parte da constante, a entropia (2.1) pode ser escrita como  $\sum_j \frac{p_j - [p_j]^q}{q-1}$ . A segunda derivada da função,  $f(x) = \frac{x-x^q}{q-1} = x \frac{(1-x^{q-1})}{q-1}$ , é negativa para  $q > 0$  e positiva para  $q < 0$ . Deste modo, para  $q > 0$

$$(p_i'') \frac{(1 - (p_i'')^{q-1})}{q-1} > \lambda p_i \frac{(1 - (p_i)^{q-1})}{q-1} + (1 - \lambda) \lambda p_i' \frac{(1 - (p_i')^{q-1})}{q-1} \quad (0 < \lambda < 1).$$

---

<sup>5</sup>Adiante mostrar-se-á que para  $q \rightarrow 1$  todo o formalismo que se pode desenvolver a partir de  $S_q$  equivale ao de Boltzmann-Gibbs. Desta forma, é facilmente entendível que este formalismo representa uma generalização e não uma alternativa à mecânica estatística tradicional.

Somando para todos os estados tem-se que,

$$S_q(\{p_i''\}) > \lambda S_q(\{p_i''\}) + (1 - \lambda) S_q(\{p_i'\}),$$

o que prova a concavidade de  $S_q$  para  $q > 0$ . Para  $q < 0$  as desigualdades são inversas e daí concluí-se da convexidade de  $S_q$  para índices entrópicos negativos. Esta propriedade mostra-se fundamental para a construção de uma mecânica estatística.

### **Extremo para o equiprobabilidade**

Pela propriedade anterior verifica-se que para o caso de equiprobabilidade dos  $W$  microestados possíveis que  $S_q$  é um máximo para  $q > 0$  e um mínimo para  $q < 0$ , ou seja um extremo em qualquer das situações.

### **Expansibilidade**

A introdução de mais um estado acessível com probabilidade nula não altera o valor da entropia,

$$S_q(\{p_1, p_2, \dots, p_W\}) = S_q(\{p_1, p_2, \dots, p_W, p_{W+1} = 0\}).$$

Esta propriedade decorre do facto de a soma em (2.1) realizar-se apenas para valores positivos de  $p_i$  e é apenas verificável para  $q > 0$ .

### **Estabilidade ou robustez experimental**

Considerem-se duas distribuições de probabilidade  $\{p_i\}$  e  $\{p_i'\}$  associadas a  $W$  estados microscópicos. Estas duas distribuições dizem-se  $\mu$  próximas se a sua  $\mu$ -distância,  $d_\mu(p_i, p_i')$ ,

definida como

$$d_\mu(\{p_i\}, \{p'_i\}) \equiv \left[ \sum_{i=1}^W |p_i - p'_i|^\mu \right]^{1/\mu} < \delta,$$

( $0 < \delta \ll 1$ ) [54]. Considere-se a discrepância relativa entre as entropias correspondentes às duas distribuições,

$$\Delta(\mu, W, \delta) \equiv \frac{S(\{p_i\}) - S(\{p'_i\})}{\sup[S(\{p_i\})]}.$$

Para  $q > 0$   $\sup[S(\{p_i\})] = \frac{W^{1-q}-1}{1-q}$ . É intuitivamente esperado que se existe uma pequena variação entre as duas distribuições de probabilidade,  $d_\mu(p_i, p'_i) \ll 1$ , a discrepância entre as duas entropias, para um número grande de estados  $W$ , seja infinitesimal para qualquer medida  $\mu > 0$ ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{W \rightarrow 0} \Delta(\mu, W, \delta) \equiv 0. \quad (2.2)$$

A verificação dos limites (2.2) caracteriza a estabilidade do funcional entrópico. Tal foi feito por LESCHE para a entropia de Boltzmann-Gibbs com  $\mu = 1$  e verificado para  $S_q$  com  $q, \mu > 0$ . Esta propriedade é fisicamente muito importante, pois sendo a Física uma ciência eminentemente experimental, é fundamental que as suas grandezas sejam robustas em relação a flutuações nas medições. É importante também sublinhar que outras entropias como a de RENYI [55], habitualmente utilizadas no contexto de estruturas fractais [56][57], não verificam esta propriedade [58][59].

**Não-aditividade**

A entropia,  $S_q$ , total de um sistema composto por duas partes  $A$  e  $B$  independentes tal que a probabilidade conjunta é dada por,  $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$ , vale:

$$\frac{S_q(A+B)}{k_B} = \frac{S_q(A)}{k_B} + \frac{S_q(B)}{k_B} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k_B} \frac{S_q(B)}{k_B}.$$

Ou seja, para  $q \neq 1$  a entropia de um sistema independente é *não-extensiva*. Para  $q > 1$   $S_q$  diz-se *sub-extensiva* e para  $q < 1$  *super-extensiva*. É importante referir-se que para sistemas não-independentes, apresentando tipos especiais de correlações que induzem uma ocupação invariante de escala do espaço de fase, a entropia  $S_q$  pode tornar-se aditiva e por conseguinte extensiva, verificando assim os conceitos macroscópicos de entropia inicialmente propostos por CLASIUS. Desta forma, a caracterização da não-extensividade/extensividade de  $S_q$  deve ser acompanhada da caracterização da dependência do sistema [60].

Esta propriedade está intimamente relacionada com uma outra, a *composibilidade*, que é também verificada pela entropia de Boltzmann-Gibbs.

É importante referir-se que esta propriedade está relacionada com a introdução de álgebras generalizadas por L. NIVANEN ET AL.[61] e E.P. BORGES[62][63].

**Teorema de unicidade de  $S_q$** 

Em 1948 SHANNON [43] através de um conjunto de hipóteses apresentou um teorema sobre a unicidade para a “sua” entropia que mais foi escrito numa forma mais compacta por KHINCHIN[64]. Para ambas as versões foram introduzidas generalizações por SANTOS [65] e

ABE [66], respectivamente. Apresenta-se em seguida a versão de ABE,

Considere-se uma forma entrópica  $S(\{p_i\})$  que satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $S(\{p_i\})$  é uma função contínua de  $\{p_i\}$ ;
2.  $S(p_i = \frac{1}{W}, \forall_i)$  aumenta monotonamente com o número de possibilidades  $W$ ;
3.  $S(\{p_1, p_2, \dots, p_W\}) = S(\{p_1, p_2, \dots, p_W, p_{W+1} = 0\})$ ;
4.  $\frac{S(A+B)}{k_B} = \frac{S(A)}{k_B} + \frac{S(B|A)}{k_B} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k_B} \frac{S_q(B|A)}{k_B}$ , onde  $S(A+B) \equiv S\left(\left\{\sum_{j=1}^{W_B} p_{ij}^{A+B}\right\}\right)$   
e a entropia condicional  $S(B|A) \equiv \frac{\sum_{i=1}^{W_A} [p_i^A]^q S(\{p_{ij}^{A+B}/p_i^A\})}{\sum_{i=1}^{W_A} [p_i^A]^q}$  em que  $k > 0$ .

Então e somente então

$$S_q = \frac{1 - \sum_{i=1}^W [p_i]^q}{q - 1}.$$

## 2.2.2 Funções associadas a $S_q$

Considere-se a mais simples das condições diferenciais ordinárias [67]

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad (y(0) = 1), \quad (2.3)$$

cuja solução é simplesmente

$$y = 1.$$

A simplicidade da eq. (2.3) pode reduzir-se igualando o membro esquerda da equação a uma constante diferente de zero, e.g.,

$$\frac{dy}{dx} = 1 \quad (y(0) = 1). \quad (2.4)$$

Para este caso a solução é

$$y = x + 1,$$

com inversa

$$y = x - 1.$$

Evoluindo na complexidade pode considerar-se

$$\frac{dy}{dx} = y \quad (y(0) = 1), \quad (2.5)$$

cuja solução é

$$y = \exp(x)$$

e a sua inversa

$$y = \ln(x).$$

Estes três casos podem ser descritos por uma única equação com apenas um parâmetro. A

equação, não-linear, é,

$$\frac{dy}{dx} = y^q \quad (y(0) = 1, q \in \mathbb{R}). \quad (2.6)$$

A solução da eq. (2.6) é

$$y = [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)}, \quad (2.7)$$

denominada como *q-exponencial*,  $\exp_q[x]$  ou  $e_q^x$  [68], e que se reduz à função exponencial,

$y = \exp[x]$ , quando  $q = 1$ . Dado o seu contra-domínio ser por definição puramente real,

a função  $\exp_q[x]$  é apenas definida para valores tais que  $1 + (1 - q)x \geq 0$ . Para valores  $1 + (1 - q)x < 0$ , considera-se  $\exp_q[x] = 0$ , condição conhecida na literatura como *restrição de Tsallis (Tsallis cut-off)*. As eqs. (2.3), (2.4) e (2.5) podem ser obtidas a partir de (2.6) considerando, respectivamente,  $q = -\infty$ ,  $q = 0$  e  $q = 1$ .

A função inversa da  $q$ -exponencial, o  $q$ -logaritmo,  $\ln_q[x]$ , é calculado como

$$y = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \equiv \ln_q[x]. \quad (2.8)$$

Pelas condições da  $q$ -exponencial  $x$  está restrito aos números reais não-negativos e  $\ln_1[x] = \ln[x]$ . O  $q$ -logaritmo verifica a propriedade de pseudo-adição ou  $q$ -adição,

$$\ln_q(uv) = \ln_q(u) + \ln_q(v) + (1 - q) \ln_q(u) \ln_q(v).$$

### **Ligação entre $\exp_q[x]$ , $\ln_q[x]$ e $S_q$**

As funções  $q$ -exponencial e  $q$ -logaritmo não foram introduzidas casualmente. Para começar relembre-se que segundo a sec. 2.2.1 a entropia  $S_q$ , a menos da constante  $k$  que daqui em diante valerá 1, pode ser escrita como,

$$S_q = \sum_i p_i \frac{(1 - [p_i]^{q-1})}{q - 1} = - \sum_i p_i \ln_q(p_i) = \sum_i p_i \ln_q(1/p_i).$$

Ou seja, tal como SHANNON definiu a *surpresa* associada a um determinado acontecimento  $i$  como  $\ln(1/p_i)$ , criando uma correspondência entre a entropia  $S$  e a média da surpresa associada a uma determinada configuração de eventos, a entropia  $S_q$  pode ser associada à média de uma

quantidade,  $\ln_q(1/p_i)$ , denominada *q-surpresa* que tem valor nulo quando existe apenas um estado possível e apresenta um valor extremo para o caso de equiprobabilidade de  $W$  estados,

$$S_q = \ln_q(W),$$

em completa analogia com o princípio de Boltzmann. Mais especificamente, para o caso de equiprobabilidade, pode verificar-se que:

- para  $q > 1$ ,  $S_q$  apresenta uma assíntota horizontal em  $\frac{1}{q-1}$ ;
- para  $q \leq 1$ ,  $S_q$  diverge;
- para  $q \rightarrow -\infty$ ,  $S_q$  coincide com a ordenada;
- para  $q \rightarrow +\infty$ ,  $S_q$  coincide com a abcissa.

### 2.2.3 $S_q$ como um gerador de distribuições

Tal como acontece com qualquer entropia, em particular a de Boltzmann-Gibbs, também a entropia  $S_q$  pode ser utilizada como um gerador de distribuições utilizando para tal o método dos multiplicadores de Lagrange. Para tal, é conveniente definir-se o *q-valor médio de uma observável  $X$*  como,

$$\langle x \rangle_q = \int x P(x) dx,$$

em que  $P(x)$  corresponde à  $q$ -distribuição associada,

$$P(x) = \frac{[p(x)]^q}{\int [p(x)]^q dx},$$

conhecida na literatura (internacional) como *escort probability* (as integrações dão-se em todo o domínio acessível)[69]. A introdução de  $P(x)$  está relacionada com a satisfação de certas propriedades que permitam estabelecer uma ligação entre  $S_q$  e a mecânica estatística respeitando princípios básicos tais como a invariância do valor da probabilidade de um estado  $i$  de energia  $E_i$ , por deslocamento do mínimo da escala de energia [70].

### Optimização por imposição do valor médio e da variância

Seja então  $x$  uma variável aleatória definida no conjunto dos números reais tal que

$$\langle x \rangle_q \equiv \int x P(x) dx \equiv \bar{\mu}_q,$$

e

$$\left\langle \left( x - \langle x \rangle_q \right)^2 \right\rangle_q \equiv \int \left( x - \langle x \rangle_q \right)^2 P(x) dx = \bar{\sigma}_q^2.$$

Definindo o habitual funcional  $\Phi[p]$  do método dos multiplicadores de Lagrange como [71],

$$\Phi[p] \equiv \frac{1 - \int [p(x)]^q dx}{q - 1} - \alpha \int p(x) dx - \beta_q \int \left( x - \langle x \rangle_q \right)^2 \frac{[p(x)]^q}{\int [p(x)]^q dx} dx,$$

e impondo  $\frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0$  obtém-se,

$$p^*(x) = \mathcal{A}_q \left[ 1 + (q - 1) \mathcal{B}_q (x - \bar{\mu}_q)^2 \right]^{\frac{1}{1-q}}, \quad (q < 3), \quad (2.9)$$

onde

$$\mathcal{A}_q = \begin{cases} \frac{\Gamma\left[\frac{5-3q}{2-2q}\right]}{\Gamma\left[\frac{2-q}{1-q}\right]} \sqrt{\frac{1-q}{\pi}} \mathcal{B}_q & \Leftarrow q < 1 \\ \sqrt{\frac{1}{\pi}} \mathcal{B}_q & \Leftarrow q = 1 \\ \frac{\Gamma\left[\frac{1}{q-1}\right]}{\Gamma\left[\frac{3-q}{2q-2}\right]} \sqrt{\frac{q-1}{\pi}} \mathcal{B}_q & \Leftarrow q > 1 \end{cases},$$

e

$$\mathcal{B}_q = [(3 - q) \bar{\sigma}_q^2]^{-1}.$$

A condição  $q < 3$  garante a normalização de  $p^*(x)$ . Para  $q > 1$ , a distribuição  $p^*(x)$  é leptocúrtica apresentando o momento de ordem  $m$  finito para índices entrópicos  $q < \frac{3+m}{1+m}$  e por conseguinte comportamento em lei de potência assintótico [72]. Para a igualdade  $q = \frac{3+m}{1+m}$  e  $\bar{\mu}_q = 0$ , a distribuição (2.9) equivale à distribuição- $t$  de Student com  $m$  graus de liberdade ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) com curtósis,  $\kappa = \frac{\langle x^4 \rangle}{\langle x^2 \rangle^2}$ ,

$$\kappa = \frac{15 - 9q}{7 - 5q}. \quad (2.10)$$

Por outro lado, para  $q = \frac{n-4}{n-2}$ , a distribuição (2.9) corresponde à distribuição- $r$  com  $n$  graus de liberdade ( $n = 3, 4, 5, \dots$ ). Assim, para  $q < 1$ , (2.9) apresenta suporte compacto que é definido sob a condição  $|x - \bar{\mu}_q| \leq \sqrt{\frac{3-q}{1-q} \bar{\sigma}_q^2}$ .

É conveniente referir-se também que a relação entre o segundo momento generalizado,  $\bar{\sigma}_q^2$ , e o segundo momento,  $\bar{\sigma}_1^2 \equiv \bar{\sigma}^2$ , estão relacionados pela relação,

$$\bar{\sigma}^2 = \bar{\sigma}_q^2 \frac{3-q}{5-3q}, \quad \left( q < \frac{5}{3} \right). \quad (2.11)$$

### Relação com grandezas termodinâmicas

A otimização da entropia  $S_q$ , usando para tal os mesmos processos pelos quais se extrema a entropia de Boltzmann-Gibbs para os conjuntos canónico e grande-canónico (bem como os seus derivados), conduz à obtenção da ligação entre a entropia não-extensiva e um conjunto

de quantidades, como temperatura e potenciais essenciais ao estabelecimento de uma relação entre  $S_q$  e a Termodinâmica, permitindo desta forma a definição de uma mecânica estatística não-extensiva [73].

Desta forma

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S_q}{\partial U_q} \equiv \frac{1}{k\beta},$$

em que

$$U_q = \sum_{i=1}^W P_i E_i.$$

A energia livre generalizada vale

$$F_q \equiv U_q - T S_q = -\frac{1}{\beta} \ln_q Z_q,$$

sendo  $Z_q$  a função de partição generalizada que se relaciona com a  $q$ -energia média como,

$$U_q = -\frac{\partial [\ln_q Z_q]}{\partial \beta}.$$

Finalmente pode definir-se o calor específico como

$$C_q = T \frac{\partial S_q}{\partial T} = \frac{\partial U_q}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 F_q}{\partial T^2}.$$

Para além das relações apresentadas também os principais teoremas e relações foram respectivamente provados e verificados no contexto da não-extensividade. Especificamente, verificou-se a  $q$ -invariância para: a estrutura de transformações de Legendre da termodinâmica [73]; o teorema  $H$  (irreversibilidade macroscópica),  $\frac{dS_q}{dt} \geq (<) 0$  para  $q \geq (<) 0$  [74]; o teorema de

Ehrenfest [75]; a relação de Clausius; a factorização da função de semelhança; o teorema de reciprocidade de Onsager [76][77]; a relação de causalidade [77]; a relação de Pesin [78]; desigualdade de Bogoliubov [79] e estabilidade do calor específico [80].

Alternativamente, foi verificada a  $q$  dependência para: o calor específico [81]; a susceptibilidade magnética [82]; o teorema de flutuação-dissipação [82]; a expansão de Chapman-Enskog [83]; a equação de Vlasov [84][85]; as equações de Langevin e Fokker-Planck [86][87][88][89][90][91][92][93]; ressonância estocástica [94]; a informação mútua de Kullback-Leibler [95][74].

Em adição várias técnicas mostram-se aplicáveis no tratamento de sistemas não-extensivos: teoria de resposta linear; expansão perturbativa; método variacional; funções de Green de muitos corpos; integrais de caminho; Monte Carlo e dinâmica molecular, entre outras. Aplicações destas técnicas podem ser encontradas na bibliografia electrónica[96] ou em vários livros [97][98][99][100].

## 2.2.4 Relação de $S_q$ com a derivada de Jackson

Numa abordagem desprovida de rigor matemático, pode afirmar-se que a operação de derivação,

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

avalia o comportamento da função em relação a translações (infinitesimais) da variável, mais especificamente o quanto a função varia por uma variação  $h$  da variável. Uma outra forma de se avaliar alterações no valor da função relativamente a variações no valor da variável foi introduzida por JACKSON [101],

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}.$$

Se a derivada tradicional avalia o comportamento perante translações, a derivada de Jackson avalia o comportamento da função perante ampliação(redução) da variável. Para o limite  $q \rightarrow 1$ , a derivada de Jackson coincide com a derivação ordinária.

É facilmente verificável que

$$S_{BG} = -\frac{d}{dx} \left( \sum_{i=1}^W p_i^x \right) \Big|_{x=1},$$

e que

$$S_q = -D_q \left( \sum_{i=1}^W p_i^x \right) \Big|_{x=1}. \quad (2.12)$$

A propriedade acima indicada é de facto muito apelativa, porquanto a entropia  $S_q$  foi introduzida num contexto multi-fractal, sistemas com invariância de escala, e a sua optimização por via do método dos multiplicadores de Lagrange conduz a distribuições assintoticamente em lei de potência (pelo menos para  $q > 1$ ), estreitamente relacionadas com invariância de escala. Esta intersecção de ideias obtidas por diferentes meios e métodos é indicativa da consistência do conceito entropia não-extensiva.

## 2.3 Formas entrópicas relativas

Em certos problemas é útil quantificar-se a diferença entre duas distribuições  $\{p_i\}$  e  $\{p'_i\}$ . Tal pode ser feito como na secção 2.2 ou então recorrendo a uma quantidade conhecida como *entropia de Kullback-Leibler* [102], também chamada *entropia relativa*, *entropia mútua* ou *entropia cruzada* e é obtida da seguinte forma:

Conidere-se a entropia  $S_{BG}$  como a média da surpresa associada a um sistema que apresenta uma determinada distribuição de probabilidades  $\{p'\}$

$$S = \sum_i p'_i \ln \frac{1}{p'_i} = \sum_i p'_i s_i.$$

Suponha-se que o sistema é ligeiramente alterado ou que é realizada uma nova medição obtendo-se um novo conjunto,  $\{p_i\}$ , de distribuições associadas aos vários estados permitidos. Partindo desta nova medição, pode definir-se para cada estado um novo valor para a surpresa  $s_i = \ln \frac{1}{p_i}$ , e assim uma variação da surpresa

$$\Delta s_i = s'_i - s_i.$$

Daqui pode calcular-se o valor médio desta variação considerando a distribuição  $\{p_i\}$ ,

$$K(\{p\}, \{p'\}) = \sum_i p_i \Delta s_i = - \sum_i p_i \ln \frac{p'_i}{p_i}. \quad (2.13)$$

A entropia  $K(\{p\}, \{p'\})$  pode ser encarada como uma métrica no espaço de probabilidades.

Para que tal analogia seja válida é necessário que

$$K(\{p\}, \{p'\}) \geq 0, \quad (2.14)$$

já que distâncias negativas não têm significado físico. Esta propriedade pode ser verificada levando em conta que  $\ln r \geq 1 - \frac{1}{r}$  (fazendo  $r = \frac{p'_i}{p_i}$ ). A igualdade na condição (2.14) dá-se quando  $p'_i = p_i$ . Uma propriedade importante da versão contínua de  $K(\{p\}, \{p'\})$ , que  $S_{BG}$  não apresenta, é a invariância relativamente a uma transformação de variáveis  $x \rightarrow \tilde{x} = f(x)$ .

Considerando a distribuição uniforme  $p'_i = p' = \frac{1}{W}$  ( $\forall_i$ ) é fácil verificar-se que

$$K\left(\{p\}, p' = \frac{1}{W}\right) = \ln W - S_{BG}(\{p\}),$$

de onde se pode verificar que uma maximização de  $S_{BG}(\{p\})$  corresponder uma minimização de  $K(\{p\}, p' = \frac{1}{W})$ .

Como principais desvantagens de  $K(\{p\}, \{p'\})$  pode apresentar-se a sua não simetria e o facto de ela apresentar problemas de finitude quando apenas um dos valores da probabilidade referente a um estado  $i$ ,  $p_i$  ou  $p'_i$  é nulo. O primeiro caso pode resolver-se considerando a simetriação  $\frac{K(\{p\}, \{p'\}) + K(\{p'\}, \{p\})}{2}$ . O segundo caso foi resolvido através da introdução de uma medida de informação chamada de *divergência de Jensen-Shannon*.

### 2.3.1 Generalizando Kullback-Leibler

A entropia relativa de Kullback-Leibler pode ser generalizada no contexto não-extensivo[95].

Para tal considere-se em vez da surpresa  $s_i = \ln \frac{1}{p_i}$ , a  $q$ -surpresa  $s_i^q = \ln_q \frac{1}{p_i}$ . Assim, a variação da  $q$ -surpresa vale

$$\Delta s_i^q \equiv s_i' - s_i = \frac{(1 - [p_i']^{1-q}) - (1 - [p_i]^{1-q})}{1 - q}.$$

Calculando a  $q$ -média de  $\Delta s_i^{(q)}$  com relação à distribuição  $\{p\}$ ,

$$C \equiv E_p \left[ \Delta s_i^{(q)} \right] = \sum_i [p_i]^q \Delta s_i^{(q)} = \sum_i [p_i]^q \frac{[p_i]^{1-q} - [p_i']^{1-q}}{1 - q} \quad (2.15)$$

e usando a definição de  $q$ -logaritmo (2.8) obtém-se a  $q$ -entropia mútua de Kullback-Leibler,

$$K_q(\{p\}, \{p'\}) = - \sum_i p_i \ln_q \frac{p'_i}{p_i}. \quad (2.16)$$

Foi demonstrado por TSALLIS e após, de uma forma alternativa, por BORLAND, PLASTINO e TSALLIS [74] que  $K_q(\{p\}, \{p'\})$  é positiva para  $q > 0$ , negativa para  $q < 0$  e nula quando  $q = 0$  ou  $p'_i = p_i$  ( $\forall_i, q$ ). Foi também demonstrado que  $K_q(\{p\}, \{p'\})$  é concava para  $q > 0$  e convexa para  $q < 0$ . Pode também demonstrar-se facilmente que  $K_q(\{p\}, \{p'\})$  não é simétrica. Para além destas, outras propriedades relacionadas com o teorema  $H$  podem ser analisadas, nomeadamente, que para sistemas puramente deterministas, a entropia mútua é independente do tempo.

**$K_q$  como medida de dependência** Considere-se agora que a variável em causa é bidimensional. Nesse caso a distribuição de probabilidades de referência poderá ser o produto das duas probabilidades marginais,

$$p' = p_1(x) p_2(y),$$

em que

$$p_1(x) = \int p(x, y) dy$$

$$p_2(y) = \int p(x, y) dx$$

e  $p(x, y)$  é a probabilidade conjunta. Sob este prisma, é fácil verificar que a  $q$ - generalização da entropia de Kullback-Leibler pode ser utilizada como uma medida do grau de dependência tal como acontece para o funcional original. Por uma questão de conformidade com a notação usual neste caso a forma entrópica de Kullback-Leibler passará a ser representada por  $I(x, y)$ .

Recorrendo à eq. (2.13) pode verificar-se que a entropia de Kullback-Leibler pode ser escrita

como,

$$\begin{aligned} I(x, y) &= S(x) + S(y) - S(x, y), \\ &= S(x) - S(x|y), \\ &= S(y) - S(y|x). \end{aligned}$$

Pela primeira equação é imediato verificar-se que  $I(x, y)$  apenas se anula quando as variáveis  $x$  e  $y$  são independentes, *i.e.*,  $p(x, y) = p_1(x) p_2(y)$ .  $S(x)$  e  $S(y)$  referem-se a entropias das distribuições marginais e  $S(x, y)$  a entropia da distribuição conjunta. As entropias do tipo  $S(x|y)$  são calculadas como

$$S(x|y) = - \sum_{x,y} p(x, y) \ln p(x|y) \equiv -E_{p(x,y)} [\ln p(x|y)]$$

em que  $E_{\Pi} [Y]$  representa o valor médio de  $Y$  em relação à distribuição  $\Pi$ .

Para este caso a  $q$ -generalização,  $I_q(x, y)$ , pode ser escrita como,

$$I_q(x, y) = \sum_{x,y} \frac{[p(x, y)]^q}{1 - q} \{1 - [p_1(x) p_2(y)]^{1-q}\} - \{1 - [p(x, y)]^{1-q}\}. \quad (2.17)$$

Aplicando a relação  $1 - ab = (1 - a) + (1 - b) - (1 - a)(1 - b)$  no primeiro termo entre  $\{\}$  e a definição de  $q$ -logaritmo, eq. (2.8), tem-se,

$$I_q(x, y) = -E_{p(x,y)}^q [\ln_q p_1(x) + \ln_q p_2(y) + (1 - q) \ln_q p_1(x) \ln_q p_2(y) - \ln_q p(x, y)] \quad (2.18)$$

em que a média segue a notação apresentada em (2.15). Escrevendo a probabilidade conjunta  $p(x, y)$  como  $p(x) p(y|x)$  e usando as propriedades de pseudo-soma do  $q$ -logaritmo a eq. (2.18) pode escrever-se como,

$$I_q(x, y) = -E_{p(x,y)}^q [\ln_q p_1(x) - \ln_q p_q(y|x) - (1 - q) (\ln_q p_1(x) \ln_q p(y|x) - \ln_q p_1(x) \ln_q p_2(y))]. \quad (2.19)$$

Com estas expressões, (2.18) e (2.19), é possível determinar-se os valores máximo e mínimo de  $I_q(x, y)$ . O valor mínimo,  $I_q(x, y) = 0$ , corresponde exactamente ao caso em que  $p(x, y) = p_1(x)p_2(y)$ . O caso de valor máximo, ocorre quando existe uma dependência determinística, entre as duas variáveis, ou seja, distância máxima relativamente a independência. Para esse caso, a entropia condicional

$$S_q^{(p(x|y))} = \sum_y [p(x|y)]^q \ln_q p(x|y),$$

deverá ser nula pois a incerteza de  $x$  dado o valor de  $y$  é zero. Esta nulidade implica que  $E_{p(x,y)}^q [\ln p_q(y|x)]$  e  $E_{p(x,y)}^q [\ln_q p_1(x) \ln_q p_2(y)]$  são também nulos. Desta forma o máximo de  $I_q(x, y)$  vale

$$I_q^{MAX}(x, y) = -E_{p(x,y)}^q [\ln_q p_1(x) + (1 - q) \ln_q p_1(x) \ln_q p_2(y)].$$

Dado  $I_q(x, y)$  apresentar um limite superior e um limite inferior, pode definir-se uma razão  $R_q$ [74],

$$R_q = \frac{I_q}{I_q^{MAX}} \in [0, 1], \quad (2.20)$$

que defina o grau de dependência entre duas variáveis. Para  $R_q$  existe um índice entrópico *ótimo*,  $q^{op}$ , para um dado grau de dependência, tal o gradiente de  $R_q$  é mais sensível e com isso mais capaz de determinar pequenas variações do grau de dependência. Este método ( $q > 0$ ) apresenta-se como: *consistente*, já que  $R_q$  varia monotonamente com o grau de dependência entre as variáveis; *versátil*, dado apresentar um parâmetro,  $q^{op}$ , que pode ser ajustado para

um determinado grau de dependência; *otimizado*, pois os seus valores máximo e mínimo de  $R_q$  correspondente a dependência e independência total. Quanto aos valores de  $q^{op}$  é fácil verificar que para variáveis  $x$  e  $y$  independentes  $R_q = 0$  ( $\forall q > 0$ ), logo, no limite de independência  $q^{op} = \infty$ . No caso de dependência  $R_q = 1$  ( $\forall q > 0$ ) e por isso no limite de dependência total  $q^{op} = 0$ .

A propriedade mais interessante das entropias mútuas, a possibilidade de ser utilizada como medida do grau de dependência entre variáveis, será apresentada mais adiante no contexto dos resultados empíricos.

## 2.4 Relação de $S_q$ com a caracterização de sistemas não-lineares

Não-linearidade é um fenómeno omnipresente na Natureza. Exemplos podem ser encontrados em turbulência de fluidos[69], extinção e sobrevivência de espécies em sistemas ecológicos[103], finanças[105][104], entre muitos outros. Porquanto, o estudo de mapas não-lineares de baixa dimensionalidade desempenha um papel significativo na compreensão de problemas complexos como aqueles referidos acima.

Num contexto clássico, a caracterização de um sistema dinâmico consiste na análise da sua sensibilidade às condições iniciais. Nesta perspectiva, o conceito de *caos* foi introduzido como *sinónimo de forte sensibilidade às condições iniciais*[106]. Concretamente, um sistema é classificado como caótico se a distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos crescer exponencialmente com o tempo.

O formalismo teórico apropriado para o estudo de comportamento caótico e regular de um sistema não-linear está, desde há muito, completamente estabelecido. Contudo, o mesmo não pode ser escrito quando se fala da região entre as regiões regular e caótica conhecida como *limiar do caos*. Apenas recentemente a caracterização do limiar do caos foi feita de forma adequada através de conceitos relacionados com a mecânica estatística não-extensiva.

Defina-se então, analiticamente, sensibilidade às condições iniciais  $\xi(t)$ , como

$$\xi(t) \equiv \lim_{\|\Delta\vec{r}(0)\| \rightarrow 0} \frac{\|\Delta\vec{r}(t)\|}{\|\Delta\vec{r}(0)\|}, \quad (2.21)$$

em que  $\Delta\vec{r}(t)$  representa a diferença no instante  $t$  entre duas trajectórias no espaço de fase.

Quando um sistema se encontra num estado caótico,  $\xi$  aumenta, como referido anteriormente, de acordo com uma lei exponencial,

$$\xi(t) \equiv e^{\lambda_1 t} \quad (\lambda_1 > 0), \quad (2.22)$$

onde  $\lambda_1$  (o subscripto 1 será clarificado em seguida) corresponde ao expoente máximo de Lyapunov definido como,

$$\lambda_1 \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \frac{\|\vec{r}'(i)\|}{\|\vec{r}'(0)\|}, \quad (2.23)$$

onde  $\vec{r}'(i)$  representa o vector tangente no ponto  $\vec{r}(i)$ .

A eq. (2.21) pode, sob o ponto de visto matemático, ser considerada como a solução da equação diferencial,

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi. \quad (2.24)$$

É de notar que o *estado caótico* esteja associado a uma função *exponencial do tempo*, da mesma forma que a *entropia de Boltzmann-Gibbs*, que foi obtida sobre a hipótese de *caos molecular*, está intimamente relacionada com *distribuições* que são a *exponencial de uma função da observável em causa*.

Relativamente ao limiar do caos, exceptuado algum trabalho pioneiro, durante vários anos apenas se referiu que correspondia a um estado em que o expoente máximo de Lyapunov era nulo e no qual as trajectórias divergem como uma lei de potência do tempo[107].

Embora o expoente  $\lambda_1$  seja nulo, foi possível observar, no contexto da mecânica estatística não-extensiva[108][109][110][111][112][113][114][115], que a divergência entre trajectórias poderia ser convenientemente descrita através da função  $q$ -exponencial,

$$\xi(t) \equiv [1 + (1 - q_s) \lambda_{q_s} t]^{1/(1-q_s)} = \exp_{q_s}(\lambda_{q_s} t) \quad (\lambda_{q_s} > 0; q_s < 1), \quad (2.25)$$

onde  $\lambda_{q_s}$  representa o coeficiente generalizado de Lyapunov no qual o subscrito  $s$  indica sensibilidade.

Tal como verificado anteriormente, esta dependência pode ser obtida como solução de uma equação diferencial, eq. (2.6). Novamente existe um paralelismo entre a dependência funcional de  $\xi(t)$  e da distribuição de probabilidade que maximiza uma dada forma entrópica neste caso,  $S_q$  (ver secção 2.2.3).

O paralelismo vai além da sensibilidade às condições e pode ser verificado para a taxa de produção de entropia.

A partir da entropia  $S_{BG}$  é possível definir a taxa de produção de entropia, relacionada com a preservação da medida de um sistema dinâmico, conhecida como entropia de Kolmogorov-Sinai,

$$KS \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{W \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle S_{BG} \rangle (t)}{t}. \quad (2.26)$$

em que  $W$  representa o número de estados acessíveis em que a probabilidade de um determinado estado  $i$  para um dado tempo  $t$  vale  $p_i(t) = \frac{N_i(t)}{N}$ . PESIN [116] demonstrou que a entropia de Kolmogorov-Sinai para sistemas caóticos é igual à soma dos  $d^{(+)}$  expoentes de Lyapunov positivos

$$KS_1 = \sum_{l=1}^{d^{(+)}} \lambda_1^{(l)}.$$

Em analogia com o que acontece para  $S_{BG}$ , é possível definir para  $S_q$  uma generalização da entropia de Kolmogorov-Sinai,

$$KS_{q_e} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{W \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle S_{q_e} \rangle (t)}{t}. \quad (2.27)$$

Para uma variedade de sistemas conservativos/dissipativos no limiar do caos ou em estados definidos como caos fraco é possível verificar, numérica e/ou analiticamente [117][114][113][118], que apenas se obtém um valor finito e positivo para  $KS_{q_e}$ , com  $q_e \neq 1$  ( $e$  indica *entropia*). Para  $q > q_e$ ,  $KS_{q_e}$  anula-se e para  $q < q_e$ ,  $KS_{q_e}$  diverge. A partir de  $KS_q$  pode definir-se um

Teorema *à la* Pesin, tal que

$$KS_{q_e} = \sum_{l=1}^{d^{(+)}} \lambda_{q_s^{(l)}},$$

em que  $\lambda_{q_s^{(1)}}, \lambda_{q_s^{(2)}}, \dots, \lambda_{q_s^{(n)}}$  representam os  $n$  coeficientes generalizados de Lyapunov positivos. Este teorema foi comprovado analiticamente para sistemas unidimensionais e numericamente para sistemas com mais dimensões. Mais, para sistemas unidimensionais verificou-se que

$$q_e = q_s,$$

e que

$$KS_{q_e} = KS_{q_s} = \lambda_{q_s}.$$

Para um sistema com  $d \geq 2$  e  $n$  coeficientes generalizados de Lyapunov positivos espera-se que a relação para os índices entrópicos referentes à sensibilidade e entropia seja dada por [113]

$$\frac{1}{1 - q_e} = \sum_{l=1}^n \frac{1}{1 - q_s^{(l)}}.$$

### 2.4.1 Exemplo: Sensibilidade às condições iniciais do pião clássico perturbado

O pião clássico perturbado corresponde a um mapa definido sobre uma esfera de raio unitário,

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , que corresponde à seguinte aplicação

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= z_t \\ y_{t+1} &= x_t \sin(\alpha z_t) + y_t \cos(\alpha z_t) \quad , \\ z_{t+1} &= -x_t \cos(\alpha z_t) + y_t \sin(\alpha z_t) \end{aligned} \quad (2.28)$$

em que  $\alpha$  representa a *intensidade da perturbação*. É facilmente verificável que o Jacobiano (o determinante da matriz Jacobiana),

$$J = \left| \frac{\partial (x_{t+1}, y_{t+1}, z_{t+1})}{\partial (x_t, y_t, z_t)} \right| = 1,$$

o que significa que o mapa é *conservativo*. Desta forma, ele é bastante semelhante a sistemas conservativos hamiltonianos cujo o espaço de fase é composto de uma mistura de fases regular (conhecidos na literatura como *KAM-tori*[107]) e caótica tal como pode ser verificado na fig. 2.1.

Dependendo da região em que se inicia a trajetória três tipos diferentes de evolução temporal de  $\xi$  podem ser verificados. Se a condição inicial se situa numa região regular, a sensibilidade às condições iniciais evolui com uma dependência linear do tempo. Caso a condição inicial se situe numa região de mar caótico então,  $\xi$ , cresce exponencialmente saturando ao cabo de poucas iterações (quando comparado com o caso regular) correspondendo a  $q_s = 1$ . Numa região de fronteira entre estes dois regimes também é possível colocarem-se duas condições iniciais e avaliar a forma como as duas se separam. Para esta situação, verifica-se que o crescimento segue uma lei de potência assintótica descrita pela equação (2.25) com  $0 < q_s < 1$ , *i.e.*, uma  $q_s$ -exponencial. Primeiramente, na fig. 2.1 estão apresentadas três duplas de condições iniciais infinitesimalmente separadas  $\|\Delta\vec{r}(0)\| = 10^{-10}$  com  $\alpha = 2.3$  e nos restantes painéis a evolução de  $\xi$  para os três casos.

É importante referir-se que a versão quântica do pião quântico corresponde à primeira comprovação numérica da existência de um comportamento  $q$ -exponencial para um sistema

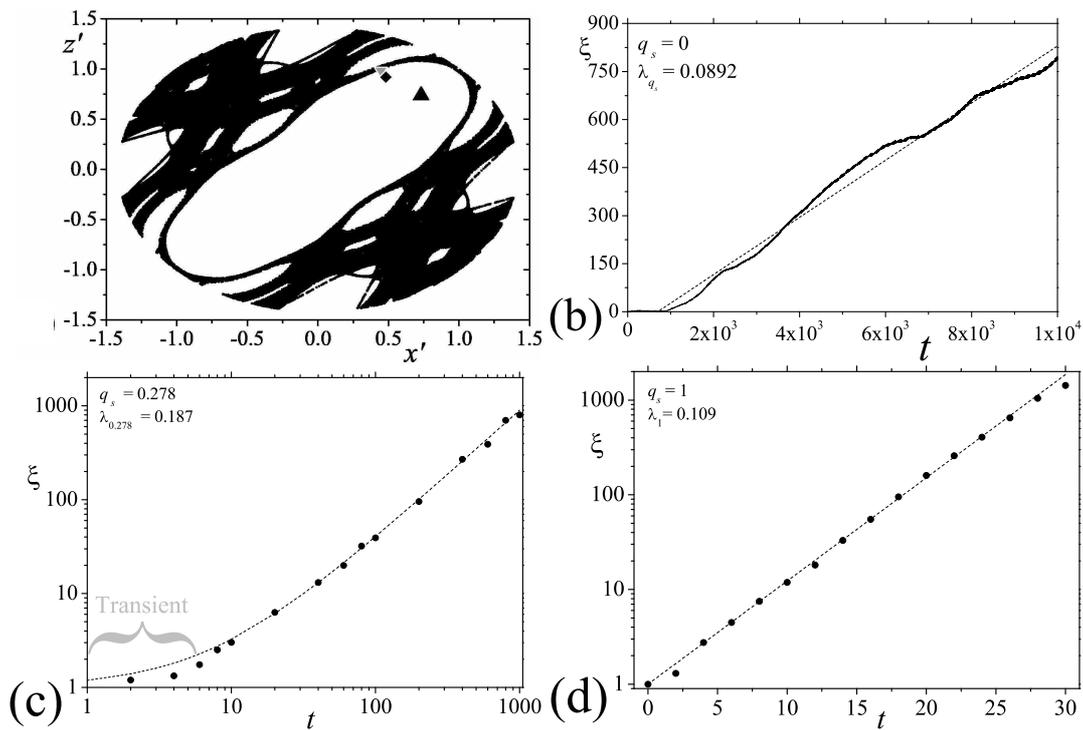


Figura 2.1: Órbita do pião perturbado com  $\alpha = 2.3$ , onde as regiões caótica e regular são visíveis. O espaço de fase esférico é projectado sobre o plano  $x-z$  multiplicando as coordenadas  $x$  e  $z$  para cada ponto por  $R/r$  onde  $R = \sqrt{2(1-|y|)}$  e  $r = \sqrt{1-y^2}$ . Dependência temporal da sensibilidade  $\xi$  para as condições iniciais (com  $\|\Delta\vec{r}(0)\| = 10^{-10}$ ) para a região dita regular ( $\blacktriangle$ ; evolução *linear*), limiar do caos ( $\blacklozenge$ ; evolução  $q_s$ -*exponencial*), e região caótica ( $\blacktriangledown$ , evolução *exponencial*).[em P07]

quântico no limiar do caos [121][122]. No caso dos sistemas quânticos em vez de se considerar a evolução da distância entre dois pontos inicialmente próximos, é analisado o valor do módulo da sobreposição de duas funções de onda cujos Hamiltonianos são infinitesimalmente diferentes [123]. Para este caso, verificou-se que a função de sobreposição no limiar do caos quântico apresenta um comportamento  $q$ -exponencial.

A sensibilidade às condições iniciais no limiar do caos foi estudada para diferentes valores do parâmetro  $\alpha \in [0, 4]$ . Para cada valor de  $\alpha$  fez-se a média de  $\xi$  para um conjunto de condições iniciais (50 amostras). Mais precisamente, com o auxílio das órbitas típicas para cada valor de  $\alpha$ , foram determinados um conjunto de pontos na fronteira entre as regiões regular e caótica. Então, a partir destes pontos obtiveram-se as médias de  $\xi$  em cada instante de tempo.

Resultados típicos  $\xi$  vs.  $t$  para diferentes valores de  $\alpha$  são apresentados na fig. 2.2. Para  $\alpha = 0$  o mapa é integrável e por conseguinte  $q = 0$  [113][119]. À medida que  $\alpha$  aumenta, aumenta também o grau de perturbação na dinâmica do sistema, o que implica também um aumento da fracção caótica no espaço de fase. Acima de um valor crítico,  $\alpha_c \simeq 3.2$ , a região caótica preenche todo o espaço de fase o que significa uma saturação do valor de  $q_s = 1$  para  $\alpha \geq \alpha_c$ . Na fig. 2.3 é apresentada a evolução de  $q_s$  com o parâmetro  $\alpha$  e na fig. 2.4 órbitas típicas correspondentes a diferentes valores de  $\alpha$ .

Este tipo de resultados é também observado para sistemas não-lineares compostos por dois mapas *standard* simpléticos acoplados [113] e poderão ser úteis na compreensão, dentro do contexto da mecânica estatística não-extensiva, de sistemas metaestáveis eternos que se po-

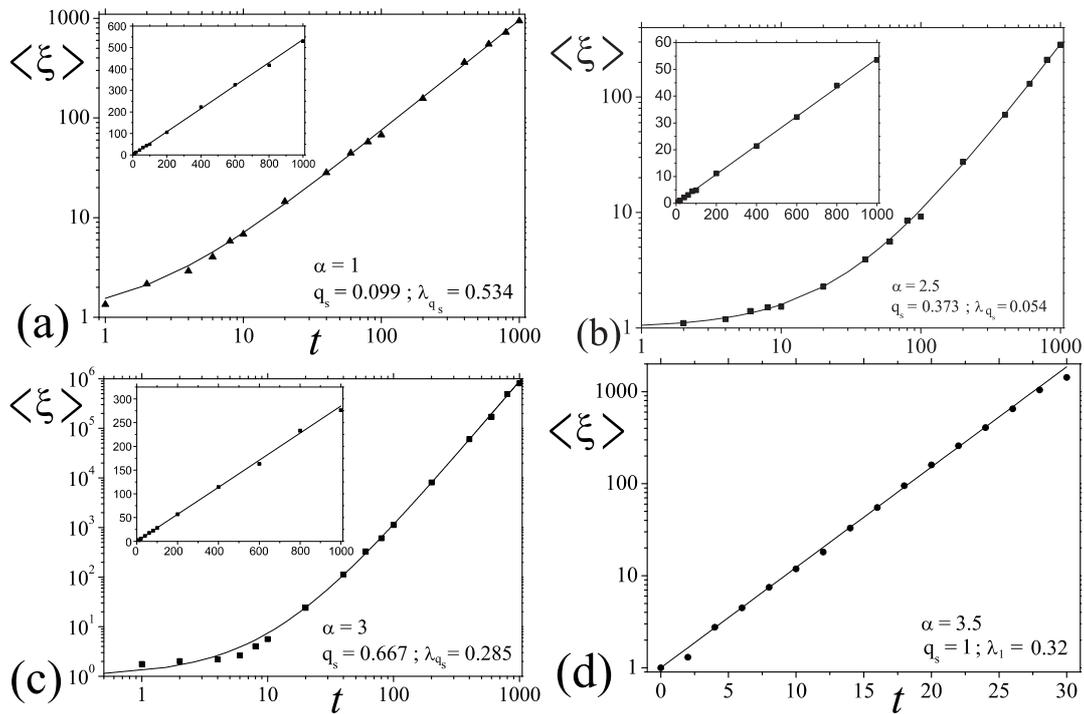


Figura 2.2: Dependência temporal da média da sensibilidade às condições iniciais,  $\langle \xi \rangle$ , para valores típicos de  $\alpha$  (50 pontos na fronteira entre as regiões). *Inserções:* Os mesmos dados, mas usando os mesmos dados mas em ordenadas representadas em  $\ln_{q_s}$ , onde  $\ln_q(x) \equiv (x^{1-q} - 1) / (1 - q)$  ( $\ln_1 = \ln$ ). Com esta ordenada, o declive da linha recta é simplesmente  $\lambda_{q_s}$ . [em P07]

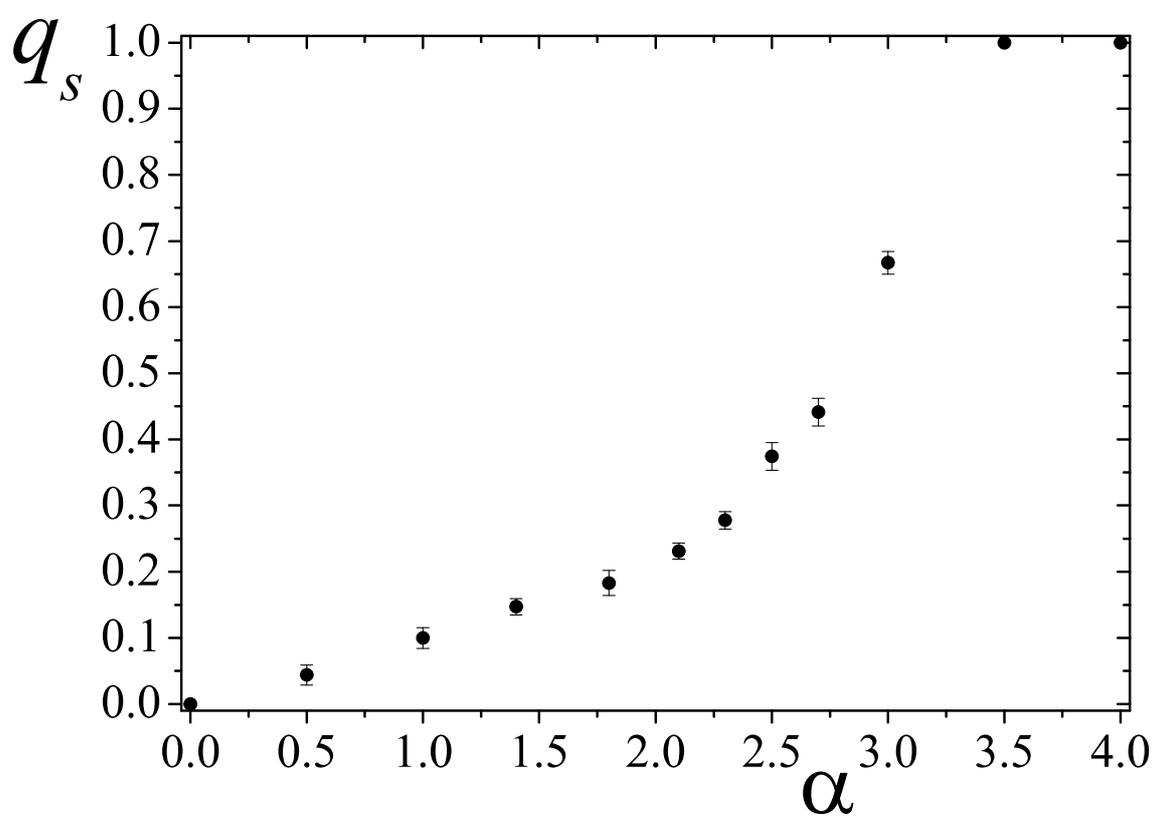


Figura 2.3: A dependência em  $\alpha$  de  $q_s$ . Para um valor crítico próximo de  $\alpha_c \simeq 3.2$ ,  $q_s$  atinge o valor unitário (correspondente a um espaço de fase totalmente caótico) mantendo esse valor para todo o  $\alpha \geq \alpha_c$ . [em P07]

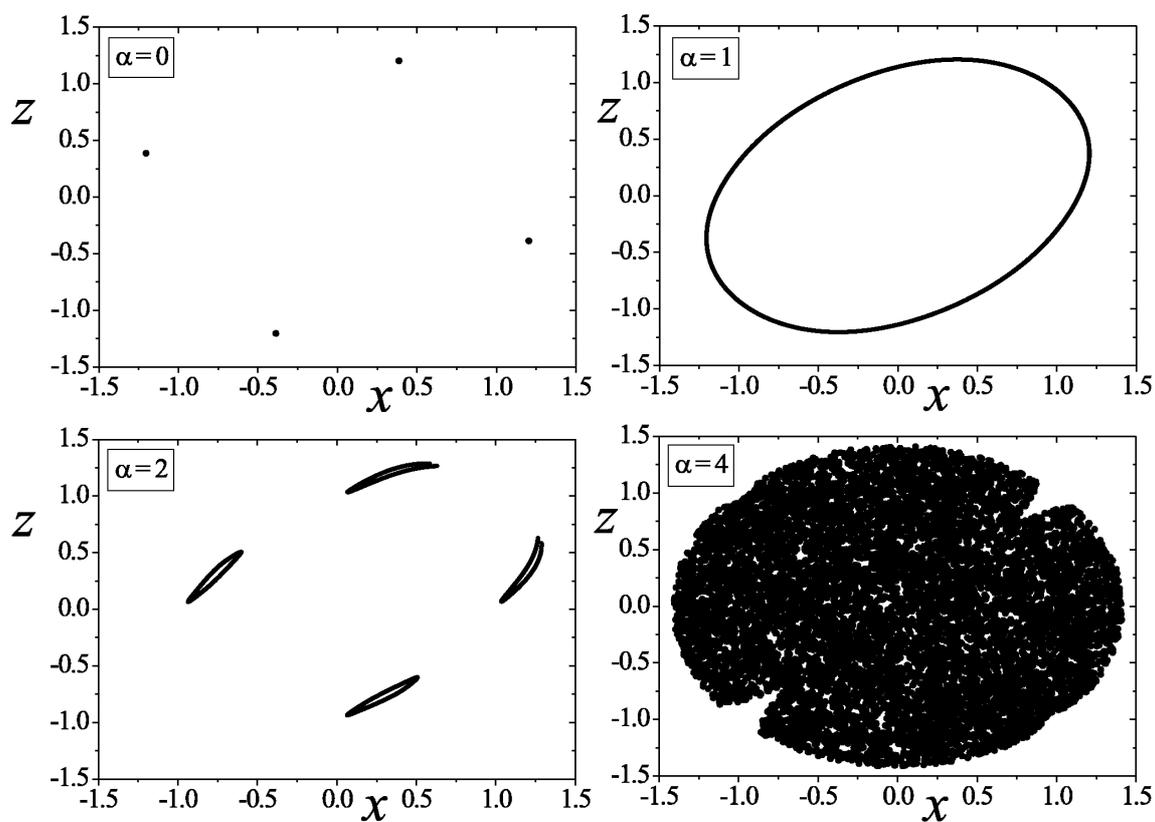


Figura 2.4: Representação de órbitas típicas para diversos valores de  $\alpha$ . Com o crescimento de  $\alpha$  verifica-se a emergência de regiões caóticas que, para  $\alpha_c \geq \alpha_c \simeq 3.2$ , preenche todo o espaço de fase. [em P07]

dem obter a partir do acoplamento de vários mapas simpléticos, bem como em hamiltonianos clássicos de um sistema isolado de muitos corpos com interações de longo-alcance [124].

## 2.5 Uma possível fundamentação dinâmica para a mecânica estatística não-extensiva: a superestatística

Como foi visto anteriormente, a proposta de BOLTZMANN para a descrição das propriedades macroscópicas de um sistema em equilíbrio sofreu desde a sua gênese várias críticas nomeadamente de EHRENFEST e EINSTEIN. As razões para o desacordo de Einstein face ao método de Boltzmann estavam no facto de considerar que a descrição estatística de um sistema deveria estar intimamente relacionada com a dinâmica desse sistema. Argumentos como este e outros aqui anteriormente apresentados deixaram em aberto a hipótese do surgimento de mecânicas estatísticas não-Boltzmannianas, entre as quais se deve distinguir claramente a mecânica estatística baseada em  $S_q$  como pioneira[125].

Se a ligação entre  $S_q$  e grandezas termodinâmicas (generalizadas) foi feita aquando da introdução de  $S_q$ , uma fundamentação dinâmica para a mecânica estatística não-extensiva foi introduzida recentemente por C. BECK [126] que posteriormente, em conjunto com E.G.D. COHEN, generalizou o conceito denominando-o de *superestatística* ou *estatística de estatísticas* [127]. Com este conceito, BECK e COHEN pretenderam dar um tratamento a sistemas fora de equilíbrio e introduzir uma explicação dinâmico-estatística para a mecânica estatística não-extensiva.

Considerem-se então as linhas inicialmente propostas por C. BECK no estudo de turbulência e que foram profundamente influenciadas pelo trabalho de G. WILK e Z. WŁODARCZYK sobre interacções entre hadrões em raios cósmicos[128] . Para tal atente-se à equação diferencial estocástica correspondente ao movimento Browniano proposta por EINSTEIN[129],

$$du = -\gamma u dt + \sigma dW_t, \quad (2.29)$$

onde  $u$  representa a velocidade,  $W_t$  é um processo regular de Wiener,  $\gamma$  a constante de fricção ( $\gamma > 0$ ) e  $\sigma$  o parâmetro de difusão relacionado com a intensidade do ruído<sup>6</sup>.

A eq. (2.29) está vinculada a uma equação de Fokker-Planck cuja solução estacionária é uma Gaussiana,

$$P_{BG}(u) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \exp[-\beta u^2],$$

de média nula e variância  $\beta^{-1} = \frac{\sigma^2}{\gamma}$ , onde  $\beta$  é o inverso da temperatura (à parte da constante de Boltzmann). Em seguida, BECK considerou flutuações, espaço-temporais, no parâmetro  $\beta$ . Isto é, divide-se o espaço num conjunto de pequenas células de lado  $\ell$  sendo atribuído um certo valor de  $\beta$  a cada uma delas que permanece (basicamente) constante ao longo de um determinado intervalo de tempo  $T$  maior do que o tempo necessário para o sistema entrar em equilíbrio que é da ordem de  $\gamma^{-1}$ . Ao fim de  $T$  unidades de tempo o valor de  $\beta$  nas células é actualizado de acordo com um dada distribuição  $p(\beta)$ . Consequentemente, para tempos longos,  $t \gg T$ , a distribuição estacionária da velocidade neste sistema, claramente não-homogéneo, é

---

<sup>6</sup>Por uma questão de simplicidade e facilidade de acompanhamento o modelo aqui apresentado está reduzido a uma dimensão. A sua generalização para mais dimensões é directa.

obtida através da sobreposição das várias gaussianas cujo peso corresponde à distribuição  $p(\beta)$ ,

$$P_{stationary}(u) = \int P_{BG}(u) p(\beta) d\beta. \quad (2.30)$$

Obviamente existe uma infinidade de possibilidades para  $p(\beta)$ , contudo algumas distribuições são naturalmente apelativas dada a sua emergência em diversos fenómenos. De entre essas distribuições podem destacar-se a distribuição Gamma (ou  $\chi^2$ ) para observáveis positivas,

$$f(x) = \frac{1}{b\Gamma[c]} \left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} \exp\left[-\frac{x}{b}\right], \quad (x, b > 0, c > 1),$$

Considerando  $p(\beta) = f(\beta)$  e aplicando a integração (2.30) tem-se,

$$P_{stationary}(u) = \frac{1}{Z} [1 + (1 - q) \beta_0 u^2]^{1/(1-q)},$$

em que  $\beta_0 = bc$  e  $q = 1 + \frac{1}{c}$  sendo  $Z = \int [1 + (1 - q) \beta_0 u^2]^{1/(1-q)} du$  a constante de normalização. Ou seja, para o caso em que  $\beta$  varia de acordo com uma distribuição Gamma, a distribuição estacionária de velocidades no sistema é tal que maximiza a entropia  $S_q$ . Como corolário tem-se a primeira fundamentação dinâmica para uma mecânica estatística não-extensiva.

A partir daqui, como referido acima, BECK e COHEN (BC) generalizaram o formalismo para outras distribuições de temperatura (ou parâmetro  $\beta$ ) para além da  $\chi^2$  e Hamiltonianos generalizados. Para este caso, a distribuição estacionária do sistema está relacionada com a média sobre as várias temperaturas dos factores de Boltzmann locais,  $\exp[-\beta E]$ , em que  $E$  representa a energia do microestado associado à célula. Analiticamente,

$$B(E) = \int \exp[-\beta E] p(\beta) d\beta, \quad (2.31)$$

em que  $B$  representa um factor de Boltzmann generalizado do sistema em não-equilíbrio. Facilmente se verifica que para  $p(\beta) = \delta(\beta - \beta_0)$  o factor de Boltzmann usual é reobtido. Um aspecto a ter em conta diz respeito à normalização ou não do factor do Boltzmann. Assim, pode trabalhar-se com distribuições não normalizadas localmente,

$$p(E) = \exp[-\beta E],$$

a partir do qual se faz a média sobre  $\beta$  e em seguida se normaliza, designada por *superestatística de tipo-A*. Alternativamente, as distribuições podem ser já normalizadas localmente,

$$p(E) = \frac{1}{Z(\beta)} \exp[-\beta E],$$

realizando-se depois a média sobre os  $\beta$ . Este caso define-se por *superestatística de tipo B*.

Dado que a função de partição local depende de  $\beta$ , os factores de Boltzmann generalizados para as duas variações serão ligeiramente diferentes. Contudo, o tipo B pode reduzir-se ao tipo A substituindo a distribuição  $p(\beta)$  por uma nova distribuição  $\tilde{p}(\beta) = C Z(\beta) p(\beta)$  onde  $C$  é uma constante de normalização. Daqui se conclui que a superestatística de tipo A baseada na distribuição Gamma distingue-se pelo facto da função de partição ser independente do parâmetro de Lagrange relacionado com a normalização.

Além de analisarem o caso em que  $p(\beta)$  é uma distribuição Gamma, foram também definidos factores de Boltzmann para uma série de funções como a distribuição uniforme, distribuição

de dois níveis, ou a distribuição log-normal,<sup>7</sup>

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2 x}} \exp \left[ -\frac{(\log \frac{x}{m})^2}{2s^2} \right], \quad (x, m, s > 0). \quad (2.32)$$

Para estas distribuições BC definiram um parâmetro,

$$q_{BC} = \frac{\langle \beta^2 \rangle}{\langle \beta \rangle^2}, \quad (2.33)$$

universal, *i.e.*, válido para qualquer superestatística e que coincide com o índice entrópico  $q$  da entropia  $S_q$ . Concretamente, foi verificado que para situações em que  $\sigma_\beta E$  é pequeno ( $\sigma_\beta^2$  é a variância do parâmetro intensivo  $\beta$ ,  $\sigma_\beta^2 = \langle \beta^2 \rangle - \beta_0^2$ ), o factor efectivo de Boltzmann pode ser escrito como

$$B(E) \approx e^{-\beta_0 E} \left[ 1 + (q_{BC} - 1) \frac{\beta_0^2}{2} E^2 \right] \quad (2.34)$$

incluindo a situação referente à distribuição Gamma para o qual  $q_{BC} = q$ . Isto significa que, para  $\sigma_\beta E$  todas as superestatísticas são idênticas e vinculadas à estatística não-extensiva. Para os factores  $B(E)$  normalizados de qualquer tipo de superestatística, existe um princípio de máxima entropia que pode ser escrita em termos da entropia  $S_q$  com um índice entrópico  $q$  dado pela eq. (2.33). Para uma variância das flutuações de  $\beta$  suficientemente pequena todas elas extremam  $S_q$  quando sujeitas a conjunto de vínculos.

<sup>7</sup>a distribuição Gamma-invertida é representada pela seguinte função,

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-b)} (ab)^{b-1} x^{b-2} \exp \left[ -\frac{ab}{x} \right], \quad (x, ab > 0, b < 1),$$

Para flutuações maiores de  $\beta$  ou energias  $E$  elevadas desvios em relação à não-extensividade tornam-se importantes. Contudo, é de destacar a importância de  $S_q$  segundo este cenário, pois está relacionada com os primeiros desvios em relação a Boltzmann-Gibbs. É interessante notar-se que também a superestatística foi recentemente generalizada considerando uma entropia generalizada construída a partir de vários valores de  $q$  [131].

A superestatística vem sendo aplicada uma grande variedade de sistemas físicos tais como: turbulência Lagrangiana e Euleriana [132][133], turbulência atmosférica[134], estatística de raios cósmicos[135], vento solar[136], redes aleatórias[137] bem como noutras áreas como finança[5][144] onde parecem existir parâmetros que variam numa escala longa. Desta forma, duas questões fundamentais emergem: **Qual a distribuição  $p(\beta)$  associada ao parâmetro intensivo? Qual é a escala,  $T$ , de evolução do parâmetro  $\beta$ ?** Tentativas para responder a esta última pergunta têm sido propostas para que exista uma concreta aplicação do formalismo superestatístico. Em seguida apresenta-se em primeiro lugar um critério recentemente introduzido por C. BECK, E.G.D. COHEN e H.L. SWINNEY (BCS)[145].

### 2.5.1 Determinação da escala $T$ pelo critério BCS

O critério referido consiste em 4 passos relativamente simples aplicados a uma série temporal. O trabalho original focou fluidos turbulentos e as flutuações de velocidade. Os passos são os seguintes:

1. Divida-se a série temporal em um número  $N$  intervalos de tempos de duração  $\tau$ . Desta

forma o tamanho da série temporal é  $N\tau$ ;

2. Defina-se *curtosis local* como

$$\kappa(\tau) = \frac{1}{N\tau - \tau} \int_0^{N\tau - \tau} \frac{\langle (u - \langle u \rangle)^4 \rangle_{t_0, \tau}}{\langle (u - \langle u \rangle)^2 \rangle_{t_0, \tau}^2} dt_0, \quad (2.35)$$

onde  $\langle \dots \rangle_{t_0, \tau}$  representam a média realizada sobre um intervalo de tempo com duração  $\tau$  e início em  $t_0$ ;

3. Calcule-se  $\kappa(\tau)$  para vários valores de  $\tau$ ;

4. A escala de evolução  $T$  corresponde ao intervalo de duração  $\tau$  para o qual  $\kappa(\tau)$  corresponde ao valor da Gaussiana; *i.e.*,

$$\kappa(T) = 3. \quad (2.36)$$

Na sua essência o procedimento proposto tenta detectar uma escala característica associada ao estado puro que para o caso da turbulência em fluidos é a Gaussianidade dentro de uma escada de tempo  $t < T$ . Apesar de em seguida se mostrar a validade da filosofia do método, ele apenas se torna verdadeiramente eficaz mediante algumas alterações que aqui se apresentam [146]. A primeira consiste em substituir a integração (2.35), na qual existe uma sobreposição de intervalos temporais, por um somatório dos  $N$  intervalos não sobrepostos,

$$\kappa(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\langle (u - \langle u \rangle)^4 \rangle_{i, \tau}}{\langle (u - \langle u \rangle)^2 \rangle_{i, \tau}^2}, \quad (2.37)$$

onde  $\langle \dots \rangle_{i, \tau}$  representa média local na  $i$ -ésima janela de comprimento  $\tau$ .

Considere-se uma série temporal,  $x(t)$  (de média nula por questões de simplificação) que apresenta um parâmetro flutuante  $\beta$  que é actualizado a cada intervalo de tempo  $T$ . Até aqui apenas se definiu novamente o conceito de superestatística. Dentro de cada um desses intervalos a variável  $x$  segue uma distribuição Gaussiana. Exemplos deste sistema são:  $x$  equivalente a posição e  $\beta$  proporcional ao inverso da variância;  $x$  a diferença de velocidades de um fluido,  $u$ , num ponto e  $\beta$  proporcional ao inverso da temperatura. Para este caso a curtósis local dada pela eq. (2.35) evoluirá de  $\kappa(\tau = 1) = 1$  até ao valor correspondente à curtósis da distribuição estacionária de  $x$ ,

$$P(x) = \int p(x|\beta) p'(\beta) d\beta.$$

Para uma série satisfatoriamente longa de tamanho  $L$  tem-se,

$$\kappa(L) \approx \frac{\int x^4 P(x) dx}{(\int x^2 P(x) dx)^2}.$$

Consequentemente, ao aplicar o método BCS,  $\kappa(\tau)$  evolui para o valor de  $\kappa(L)$ , pois com o aumento de  $\tau$ , dá-se uma melhora na estatística local. Além disso, uma propriedade interessante emerge devido à natureza superestatística da série: Quando se torna possível dividir a série temporal num conjunto de intervalos que são Gaussianas puras (um único  $\beta$ ), obtém-se uma singularidade com valor igual a 3. Contudo, tal singularidade não acontece apenas quando  $\tau = T$  como a condição (2.36) indica. A igualdade  $\kappa(\tau) = 3$  acontece sempre que  $\frac{T}{\tau}$  é um inteiro maior ou igual a 1. De facto,  $\tau = T$  corresponde ao último intervalo para o qual a curtósis local tem singularidade de valor igual a 3. Tal acontece porque, para intervalos que

verificam a relação

$$\frac{T}{\tau} = \text{Inteiro} \left( \frac{T}{\tau} \right) \geq 1, \quad (2.38)$$

apenas existe uma replicação do número de intervalos que estão associados a um único parâmetro  $\beta$ . Tome-se como exemplo o caso para o qual  $\frac{T}{\tau} = 2$ , *i.e.*, o tamanho das janelas em análise corresponde a metade do intervalo de actualização  $T$ . Desta forma, por cada actualização  $T$ , dentro da qual existe apenas uma única estatística de Boltzmann-Gibbs, existem duas janelas de tempo dentro das quais os elementos se encontram associados a uma e só uma estatística, correspondente a uma multiplicação por um factor 2 do número de janelas “puras”. Ao aplicar a eq. (2.37), far-se-á uma média sobre janelas, nas quais existe uma única estatística, o resultado será  $\kappa = 3$ . O mesmo acontece quando  $\frac{T}{\tau} = 3, 4, 5, \dots$ , em que é possível dividir-se cada  $T$  em 3, 4, 5,  $\dots$  janelas nas quais apenas uma estatística está presente. Para  $\frac{T}{\tau} = 1$  essa replicação deixa de existir e assim tem-se a verdadeira escala de actualização  $T$ .

Para  $\tau = 2T, 3T \dots, nT \leq L$ , também existem singularidades mas com um valor superior a 3, dado que correspondem a uma curtósis média de 2, 3, etc. Gaussianas com diferentes valores de  $\beta$ . Na realidade, o gráfico de  $\kappa(\tau)$  vs.  $\tau$  de uma série temporal de uma grandeza que evolui de uma forma superestatística apresenta um conjunto de singularidades para a curtósis local que são obtidas sempre que o valor do intervalo  $\tau$  verifica a condição

$$\tau \times r = T, \quad (2.39)$$

onde  $r$  é um número racional positivo. Considere-se como exemplo o caso em que  $\frac{T}{\tau} = \frac{4}{3}$ . Isto é, 4 intervalos  $\tau$  têm o mesmo comprimento que 3 janelas  $T$ . Isto corresponde à existência

de 2 janelas com estatística “puras” de comprimento  $\tau$  e outras duas janelas, com o mesmo tamanho, mas que contém elementos associados a estatísticas locais diferentes. Aplicando a eq. (2.37) tem-se que da presença de estatísticas puras surge a Gaussianidade que, pela presença de janelas que contém diferentes estatísticas, não  $\kappa$  vale 3 (como no caso Gaussiano), mas sim um número superior.

Apenas utilizando uma análise com intervalos temporais não sobrepostos eq. (2.37), se pode obter este resultado. A utilização da eq. (2.35) implica que apenas uma parte dos intervalos, a que é levada em conta na eq. (2.37), representam Gaussianas puras. Essa mistura também faz com que a convergência para o valor da curtósis da série temporal seja mais rápida.

Na fig. 2.5, apresenta-se um excerto (painel esquerdo) de uma série temporal superestatística composta por uma variável estocástica localmente associada a uma Gaussiana cujo desvio padrão segue a distribuição

$$p(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma}{5} \exp\left[-\frac{\sigma^4}{200}\right] \quad (2.40)$$

e a escala de evolução  $T$  vale 250 ( $\sigma$  representa o papel do parâmetro  $\beta$  para este caso). No painel da direita é verificável a existência de uma sucessão de singularidades quando é verificada a condição (2.39) sendo que, quando a condição (2.38) é verificada  $\kappa(\tau) = 3$ . É visível na figura que a última singularidade igual a 3 coincide com  $T$ . No caso da aplicação directa do critério BCS sem ter em atenção a estrutura de singularidades obter-se-ia  $T = 48$ .

A aplicação isolada da condição (2.36), sem ter em linha de conta a condição adicional referente à última singularidade de valor 3, pode levar a conclusões equivocadas à cerca do

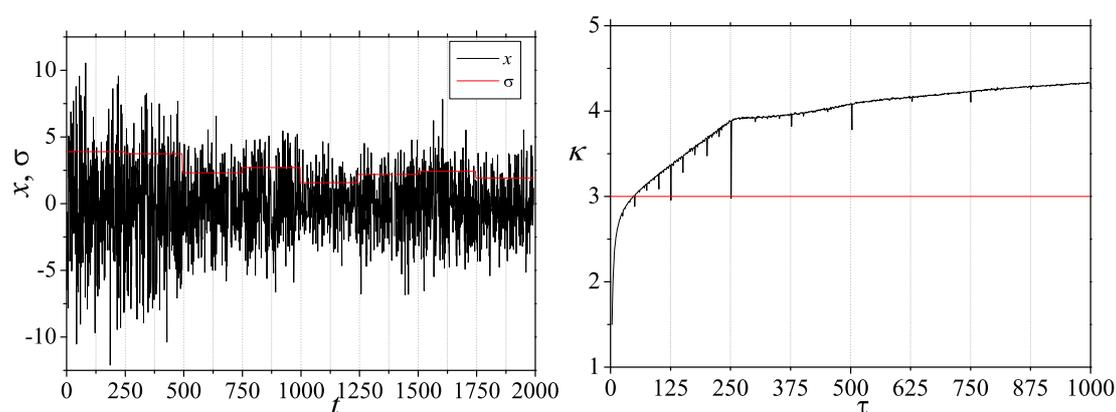


Figura 2.5: Lado esquerdo: Excerto de uma série temporal onde os elementos,  $x$ , são associados à mesma distribuição Gaussiana dentro de um intervalo de duração  $T = 250$ . O desvio padrão,  $\sigma$ , relacionado com o parâmetro intensivo,  $\beta$ , varia de acordo com a densidade de probabilidade indicada no texto. Lado direito:  $\kappa(\tau)$  vs.  $\tau$ . É visível a sucessão de singularidades de acordo com a condição (2.39) sendo que a última singularidade de valor igual a 3 coincide com o valor real  $T$  enquanto que o primeiro valor é igual a 48. Singularidades para pequenos valores de  $\tau$  que verificam a condição (2.38) não são visíveis, pois encontram-se mascaradas pelo efeito estatístico de  $\tau$  pequeno. Este efeito também introduz erro na curtosis das singularidades em que  $\kappa(\tau) = 3$  que se mostram um pouco abaixo desse valor. A série temporal completa tem  $10^7$  elementos. [em **P12**]

carácter superestatístico de uma série temporal. Na fig. 2.6 apresenta-se uma série temporal que é localmente e no longo-curso associada a uma distribuição  $q$ -Gaussiana, eq. (2.9), com  $q = 1.3$  e  $\sigma = 1$ . Ou seja, uma distribuição de caudas longas que otimiza a entropia  $S_q$  para  $q = 1.3$ , relacionada com uma dinâmica na qual não existe qualquer flutuação de qualquer parâmetro. É visível no painel da direita que aplicando o método da curtósis local não se obtém a sucessão de singularidades de uma série temporal superestatística como se verifica no painel direito da fig. 2.5. Tal acontece porque, simplesmente, esta série não é superestatística. A aplicação do critério originalmente sugerido por BCS conduziria à classificação da dinâmica de  $x$  como superestatística com uma escala  $T \simeq 12.5$ . Este exemplo enfatiza a importância da condição adicional aqui apresentada. Apesar de a distribuição eq. (2.9) poder ser sempre encarada como uma espécie de Transformada de Lagrange de uma função  $f(\bar{\sigma})$ , isso não significa que a dinâmica subjacente a essa distribuição seja de carácter superestatístico como foi aqui demonstrado.

É importante referir-se que com a introdução da condição adicional, além de se obter uma resposta para a questão “Qual é a escala de tempo  $T$  de evolução do parâmetro  $\beta$ ?”, claramente se melhoram os resultados para a pergunta “Qual é a distribuição  $p(\beta)$  associada ao parâmetro intensivo?”. Isto é, ao melhorar-se a escala  $T$ , melhora-se a determinação experimental/numérica de  $\beta$  em sistemas naturais (como fluidos turbulentos) e conseqüentemente tem-se uma avaliação mais fidedigna de  $p(\beta)$  e do tipo de superestatística presente.

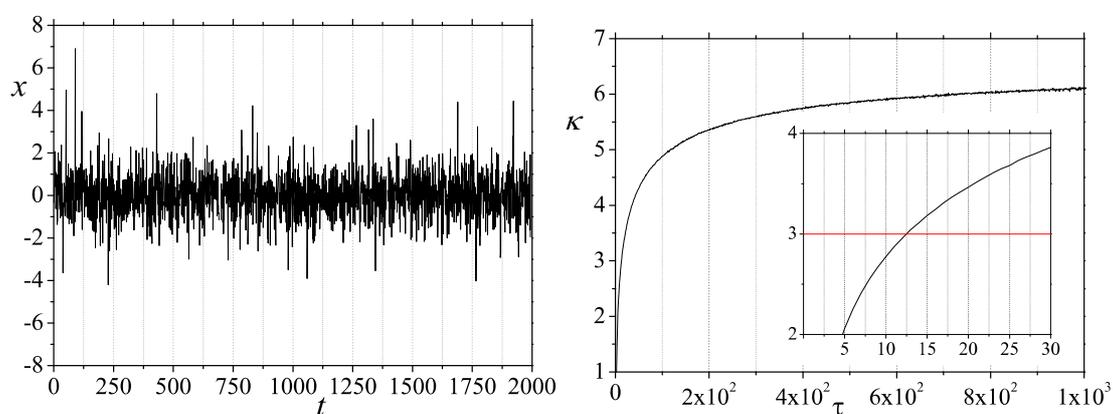


Figura 2.6: Lado esquerdo: Excerto de uma série temporal de  $10^7$  elementos onde,  $x$ , associadas a uma série temporal não super-estatística com uma função de densidade probabilidade que é uma  $q$ -Gaussiana com  $q = 1.3$  e variância unitária. Lado direito:  $\kappa(\tau)$  vs.  $\tau$ . Para este caso não se observa a sucessão de singularidades tal como surge numa série temporal superestatística. A condição BCS  $\kappa(T) = 3$  não só leva a um valor virtual para  $T$ , mas também a uma classificação do processo estocástico como superestatístico. A figura inserida mostra a região em que  $\kappa(\tau) = 3$ ,  $\tau \simeq 12.5$ . A saturação de  $\kappa(\tau = \infty, L = \infty) = \frac{15-9q}{7-5q} = 6.6$ . [em **P12**]

Apesar desta melhoria ao método BCS, existem duas questões referentes à aplicabilidade experimental. A primeira prende-se com o facto de não ser garantido que o instante inicial das medições,  $t = 0$ , coincida com o início de um intervalo temporal que represente um “estado puro”. Assim, para uma aplicação de sucesso do método é necessário que o instante inicial seja alterado até que a estrutura de singularidades surja. A segunda dificuldade prende-se com a precisão dos instrumentos de medida. Se a escala de relaxação local for extremamente pequena, no limite instantânea, a escala de variação do parâmetro intensivo pode ser pequena ao ponto de não poder ser identificável. Para estes casos, novos processos devem ser apresentados.

## Capítulo 3

# Análise Empírica de Observáveis Financeiras

### 3.1 Introdução e perspectiva histórica

A partir da década de 1980 tornou-se possível o armazenamento de enormes quantidades de dados referentes a diversas observáveis financeiras complementando os registos até essa época que, na sua essência, se reduziam a valores diários. Desta forma, passou a ser possível ter-se acesso, *a posteriori*, e para o caso de mercados cujo preço é orientado pelas cotações, a informação tão fundamental como o preço e o volume em que um determinado agente pretende vender ou comprar um certo produto financeiro. Essas enormes quantidades de dados, geralmente em forma de séries temporais, podem ter escalas de tempo que vão de horas à escala do segundo ou mesmo transacção-a-transacção (*dados de alta frequência*).

De todas essas quantidades observáveis, a mais importante num mercado financeiro é, com certeza, o logaritmo do preço  $S$ . Tal acontece por duas razões. Primeiro, a sua variação é

praticamente igual à variação percentual do preço  $S$  na escala de tempo considerada. Ou seja,

$$\ln S_t - \ln S_{t-T} = \ln\left(\frac{S_t - S_{t-T} + S_{t-T}}{S_{t-T}}\right) = \ln\left(1 + \frac{S_t - S_{t-T}}{S_{t-T}}\right) = \ln(1 + r_T(t)) \simeq r_T(t), \quad (3.1)$$

em que a quantidade  $r_T(t)$  é conhecida como *lucro (return)* a um horizonte  $T$  no instante  $t$ . O segundo motivo está relacionado com a história da evolução do tratamento científico da dinâmica de preços. Como referido no capítulo 1, a primeira tentativa para se construir um modelo matemático-financeiro foi apresentado por L. BACHELIER[16]. Apesar do reconhecido mérito no pioneirismo da proposta, deve referir-se que a hipótese da distribuição Gaussiana para as flutuações de preço não tinha qualquer espécie de suporte empírico. Por exemplo, apesar do modelo de Black-Scholes para preços de opções [147], profundamente relacionado com o modelo de Bachelier, ser um dos marcos da finança quantitativa, necessita de ajustes para ser verdadeiramente aplicável. Com o aumento do interesse de matemáticos pela modelação de preços em mercados financeiros (década de 1950)<sup>1</sup>, a proposta de flutuações de preço Gaussianas foi então substituída por modelos em que os preços seguiam uma distribuição log-normal, eq. (2.32), correspondente a um movimento Browniano geométrico. Para este tipo de dinâmica as variações são log-normal distribuídas. Este modelo mostrou ser apenas uma primeira aproximação, pois é verificável que as caudas nas distribuições de lucros apresentam-se mais largas do que as caudas de uma distribuição log-normal. Além do mais, as distribuições

---

<sup>1</sup>É importante referir-se o significado da palavra **modelagem** para as ciências ligadas à matemática aplicada e para as ciências físicas. No primeiro caso corresponde a uma representação da realidade usando um formalismo matemático apropriado. No segundo caso representa a tentativa de, através de argumentos plausíveis, explicar o fenómeno em estudo. Nesta última abordagem nem sempre o formalismo matemático é seguido como as ciências matemáticas gostariam.

log-normal indicam que as caudas positivas são mais longas do que as caudas negativas, contrariamente ao que se verifica na realidade [148]. Assim, novas aproximações ao problema da distribuição das flutuações de preço eram necessárias. A mais importante é, sem dúvida, a proposta de B.B. MANDELBROT [149] inspirada pelo trabalho do economista italiano V. PARETO [150]. Em 1897, PARETO estudou a distribuição de riqueza pessoal numa economia estável verificando que essa distribuição era muito bem descrita por

$$v \propto w^{-\nu}, \quad (3.2)$$

onde  $\nu$  representa o número de pessoas que tinham uma riqueza maior do que  $w$ . Esta relação, eq. (3.2), conhecida como *Lei de Pareto*, mostrou-se e mostra-se bem general, pois é verificada numa enorme quantidade de países de diferentes continentes e diferentes estruturas sociais e políticas. O trabalho de MANDELBROT foi apresentado em 1963 referia-se a uma base de dados de 1000 pontos de flutuações de preço de algodão. Com a distribuição semelhante à eq. (3.2), MANDELBROT concluiu que aquela distribuição era compatível com as distribuições de Lévy [151][154][155],

$$L_a(x) \sim \frac{\varphi A_{\pm}^{\varphi}}{|x|^{1+\varphi}},$$

para  $|x| \gg 1$ . O expoente  $\varphi$  encontra-se definido no intervalo  $0 < \varphi < 2$  e  $A_{\pm}$  são duas constantes que habitualmente são chamadas de *amplitudes de cauda*. Estas amplitudes de cauda servem para definir o parâmetro de assimetria,

$$B = \frac{A_+^{\varphi} - A_-^{\varphi}}{A_+^{\varphi} + A_-^{\varphi}}.$$

Exemplos de distribuições de na classe de Lévy são

- $\varphi = \frac{1}{2}$  e  $B = 1$ , distribuição de Lévy-Smirnov;
- $\varphi = 1$  e  $B = 1$ , distribuição de Cauchy ou *Lorentziana* ( $q$ -Gaussiana com  $q = 2$ )

Para  $\varphi = 2$  a distribuição equivalente é a Gaussiana.

Embora a distribuição de probabilidades de Lévy não possa ser escrita de uma forma matematicamente simples, a sua transformada de Fourier (ou função característica) pode ser definida como

$$\hat{L}_\varphi(k) = \exp[-a_\varphi |k|^\varphi], \quad (3.3)$$

em que  $a_\varphi$  é uma constante relacionada com a amplitude de cauda.

A partir da eq. (3.3) pode definir-se a distribuição de Lévy através da série

$$L_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n!} \frac{a_\varphi^n}{x^{1+na}} \Gamma[1 + na] \sin\left(\frac{\pi n \varphi}{2}\right), \quad (3.4)$$

que apresenta um comportamento em lei de potência, típica de fenómenos com invariância de escala, como observáveis com comportamento intermitente. Nestes processos, pode dizer-se que os eventos de valor intermédio perdem peso estatístico sendo substituídos por ocorrências maiores para valores pequenos (aguçando assim os picos das distribuições) e ocorrências também maiores para os valores grandes. Como resultado, as caudas tornam-se mais prolongadas<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>É implícito que a classificação qualitativa de um valor como pequeno, intermédio ou grande é feita tendo como padrão a região central da distribuição.

Cerca de 30 anos após a sua proposta, R.N. MANTEGNA & H.E. STANLEY [152] realizaram uma análise das flutuações a cada 15 segundos do índice S&P 500 a partir de um conjunto de cerca de um milhão de pontos. No seu trabalho, além de verificarem que as flutuações não entravam na classe proposta por BACHELIER, observaram que, após algumas unidades de desvio padrão, a distribuição das flutuações se afastava da distribuição de Lévy proposta por MANDELBROT. O expoente para cauda das distribuições apresentava um valor da ordem de 3, conseqüentemente fora da classe de distribuições de Lévy contrariamente ao resultado de MANDELBROT cujo valor para esse expoente é 1.7, portanto dentro do regime de Lévy. Tal pode ser descrito considerando que a distribuição (3.2) é válida para regiões em que  $x \ll \frac{1}{\varphi}$ , sendo que para valores muito grandes,  $x$  apresenta um comportamento exponencial da sua função de distribuição de probabilidade.

Esta observação levou MANTEGNA e STANLEY a considerarem que a lei de Pareto para as flutuações de lucro seria truncada, o que em última hipótese conduziu à introdução de uma nova classe generalizada de distribuições de Lévy conhecida como *distribuições de Lévy truncadas*. Uma forma de se escrever o limite exponencial para argumentos grandes é escrever a função característica como [156]:

$$\hat{L}'_{\varphi}(k) = \exp \left[ -a_{\varphi} \frac{(\nu^2 + k^2)^{\frac{\nu}{2}} \cos \left[ \nu \arctan \left( \frac{|k|}{\nu} \right) \right] - \nu^{\varphi}}{\cos \left[ \frac{\pi \varphi}{2} \right]} \right], \quad (1 \leq \varphi \leq 2) \quad (3.5)$$

que se reduz à função característica (3.3) quando  $\nu = 0$ . A verificação empírica da distribuição em lei de potência das flutuações de preços (conseqüentemente de índices) foi verificada numa gama enorme de mercados financeiros [157][158], sejam eles de simples produtos financeiros,

mercadorias/futuros [159] e moeda estrangeira[160].

O estudo das distribuições das flutuações de preço representa uma parte significativa do trabalho empírico realizado nesta área[5][6][7][8][161]. Contudo, há que referir-se que muito mais tem sido feito com vista a uma caracterização efectiva deste exemplo claro de complexidade. Nesse âmbito inclui-se trabalho sobre a dependência funcional da distribuição de probabilidades de outras quantidades observáveis (ou não) tais como, o volume transaccionado[162][163], volume de actividade (*número de agentes com ordens no mercado*) [167], balanço entre procura e oferta (*volume imbalance*) [168] e a *volatilidade ao longo de um período  $T'$*  [169], definida como

$$V_{T'}(t) \equiv \frac{1}{n} \sum_{t'=t}^{t+n-1} |r_T(t')|, \quad (3.6)$$

em que  $n = \frac{T'}{T}$ . Para além da distribuição, outros aspectos como correlação e estrutura (multi)-fractal destas quantidades têm sido estudadas. A partir daqui novos modelos, num sentido físico, têm sido construídos e aplicados na industria financeira em estratégias de investimento.

## 3.2 Distribuições de lucro no contexto não-extensivo

Desde há muito tempo se utilizam em finanças as distribuições que emergem de  $S_q$ , nomeadamente as  $q$ -Gaussianas, sob o nome de distribuições  $t$  de Student. Aparentemente, a primeira aplicação para uma determinação de uma dependência funcional para as flutuações de preço num ambiente não-extensivo foi introduzida por F.M. RAMOS *et al.*[170], no contexto da analogia feita por S. GHASHGHAIE *et al.* entre flutuações de preço e flutuações de velocidade e

muitos têm sido publicados em anos recentes [171]. A opção por um tratamento não-extensivo, relativamente à proposta das distribuições de Lévy truncadas, prende-se com o facto de não ser necessário a imposição, *a priori*, de uma limitação do domínio da distribuição para que exista uma concordância entre a distribuição teórica e os expoentes de cauda da distribuição. Além do mais, como veremos neste capítulo, as observáveis mais importantes, volume e lucro, apresentam condimentos básicos para uma caracterização não-extensiva, nomeadamente, memória longa [6] e estrutura multi-fractal[161].

### 3.2.1 Mercados líquidos

A liquidez é um parâmetro muito importante no estudo de um mercado financeiro. Mercados considerados líquidos são mercados onde a chamada *hipótese de mercado eficiente* (toda a informação sobre o futuro do preço está contida no preço actual) se aproxima mais da realidade. Desta forma, os mercados líquidos, são mercados de volatilidade reduzida onde os preços seguintes são correlacionados, no máximo, em 10% com o valor anterior e a uma escala temporal de, no máximo, alguns minutos. Dada a sua baixa volatilidade, são os mercados mais procurados pelos investidores e por conseguinte os mais estudados.

Aqui, apresentar-se-ão resultados para os preços e flutuações de preços de dois índices “líquidos” [172]. O primeiro é o Dow Jones Industrial Average (DJIA) que é composto pelos títulos com melhor desempenho nos mercados americanos. A série utilizada corresponde aos valores de fecho diários entre 1900 e 2003. O segundo índice é o índice da Bolsa de Nova Iorque, NYSE, sendo a série utilizada correspondente aos valores de fecho diário entre 1966 e

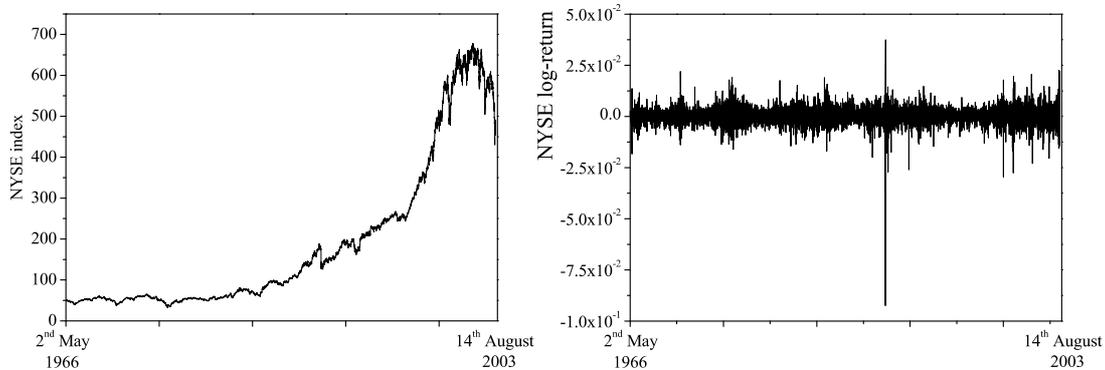


Figura 3.1: Lado esquerdo: Evolução do índice diário desde 1 Maio de 1966 até 14 Agosto de 2002. Lado direito: Variação do logaritmo do índice durante o mesmo período. [em P05]

2003, ver fig. 3.1.

### Distribuição de probabilidade de flutuações de preço interdiários

Depois de se obterem, para diferentes horizontes de tempo, as quantidades equivalentes ao lucro (3.1) dos dois índices, foram construídas as respectivas frequências relativas estacionárias<sup>3</sup> que serão representadas por  $p_d(r_T)$  (o sub-índice  $d$  representa a palavra *dados*). Com o objectivo de simplificar a análise, foi seguido um procedimento usual em que os lucros foram normalizados de tal forma que, para cada  $T$ , a sua média fosse nula e os lucros expressos em unidades de desvio padrão.

Para comparar as distribuições empíricas com as  $q$ -Gaussianas

$$p(r) = \frac{\Gamma\left[\frac{5-3q}{2-2q}\right]}{\Gamma\left[\frac{2-q}{1-q}\right]} \sqrt{\frac{1-q}{\pi} \frac{1}{(3-q)\bar{\sigma}_q^2}} \left[1 + (q-1) \frac{1}{(3-q)\bar{\sigma}_q^2} r^2\right]^{\frac{1}{1-q}}, \quad (3.7)$$

procedeu-se da seguinte forma:

<sup>3</sup>A frequência relativa corresponde à probabilidade de se ter um valor de  $r_T$  entre  $a$  e  $a + \delta a$ . Isto equivale a uma integração da função de densidade de probabilidade no intervalo indicado.

1. Calcular o segundo momento parcial,

$$\sigma_{(r_T^-, r_T^+)}^2 = \sum_{r_T=r_T^-}^{r_T^+} r_T^2 p_d(r_T), \quad (3.8)$$

e o quarto momento parcial,

$$l_{(r_T^-, r_T^+)} = \sum_{r_T=r_T^-}^{r_T^+} r_T^4 p_d(r_T), \quad (3.9)$$

onde  $r_T^{+(-)}$  representa o valor máximo(mínimo) do intervalo considerado para o lucro normalizado;

2. Calcular o segundo momento parcial,

$$\tilde{\sigma}_{(r_T^-, r_T^+)}^2 = \sum_{r_T=r_T^-}^{r_T^+} r_T^2 \int_{r_T-\delta}^{r_T+\delta} p(r'_T) dr'_T, \quad (3.10)$$

e o quarto momento parcial,

$$\tilde{l}_{(r_T^-, r_T^+)} = \sum_{r_T^-}^{r_T^+} r_T^4 \int_{r_T-\delta}^{r_T+\delta} p(r'_T) dr'_T, \quad (3.11)$$

em que  $\delta = 5 \times 10^{-3}$  em que  $p(r'_T)$  é dado pela equação (3.7);

3. Igualar  $\sigma_{(r_T^-, r_T^+)}^2 = \tilde{\sigma}_{(r_T^-, r_T^+)}^2$  e  $l_{(r_T^-, r_T^+)} = \tilde{l}_{(r_T^-, r_T^+)}$ . Resolvendo numericamente estas igualdades obtêm-se os valores de  $q$  e  $\sigma_q^2$  que caracterizam completamente a distribuição (3.7) levando-se em conta a relação (2.11). O procedimento é considerando bem sucedido quando os momentos da mesma ordem diferem para lá do terceiro algarismo significativo.

Tabela 3.1: Resultados obtidos pelo processo de ajuste para os lucros do DJIA.

$T$ (dias)	$r_T^-; r_T^+$	$q$	$\sigma_q^2$	$\chi^2$
1	-5.14; 4.67	1.545	0.338	$1.46 \times 10^{-6}$
5	-4.76; 4.44	1.455	0.436	$2.29 \times 10^{-6}$
10	-4.64; 4.66	1.391	0.487	$2.84 \times 10^{-6}$
20	-4.02; 3.38	1.312	0.518	$3.17 \times 10^{-6}$
30	-3.02; 3.07	1.267	0.652	$3.71 \times 10^{-6}$
40	-3.04; 3.08	1.207	0.579	$5.23 \times 10^{-6}$
50	-3.04; 3.06	1.174	0.546	$8.29 \times 10^{-6}$
60	-3.07; 3.03	1.128	0.542	$1.27 \times 10^{-5}$
70	-3.05; 3.03	1.096	0.579	$1.50 \times 10^{-5}$
80	-3.04; 3.06	1.063	0.592	$1.63 \times 10^{-5}$
90	-3.02; 3.06	1.046	0.605	$2.63 \times 10^{-5}$
100	-3.01; 3.04	1.024	0.639	$3.27 \times 10^{-5}$
200	-3.01; 3.03	1.003	0.849	$5.63 \times 10^{-5}$

Tabela 3.2: Resultados obtidos pelo processo de ajuste para os lucros do NYSE.

$T$ (dias)	$r_T^-; r_T^+$	$q$	$\sigma_q^2$	$\chi^2$
1	-4.12; 4.22	1.488	0.455	$1.33 \times 10^{-6}$
5	-3.89; 3.77	1.419	0.535	$2.02 \times 10^{-6}$
10	-3.85; 3.41	1.369	0.595	$3.60 \times 10^{-6}$
20	-3.49; 3.21	1.287	0.657	$4.52 \times 10^{-6}$
30	-3.43; 3.21	1.233	0.705	$7.14 \times 10^{-6}$
40	-3.37; 3.27	1.192	0.710	$1.77 \times 10^{-5}$
50	-3.08; 3.13	1.175	0.664	$3.66 \times 10^{-5}$
60	-3.03; 3.08	1.151	0.646	$4.13 \times 10^{-5}$
70	-3.03; 3.05	1.135	0.694	$5.56 \times 10^{-5}$
80	-3.02; 3.04	1.114	0.735	$6.95 \times 10^{-5}$
90	-3.01; 3.03	1.085	0.752	$7.87 \times 10^{-5}$
100	-3.02; 3.04	1.073	0.772	$9.26 \times 10^{-5}$

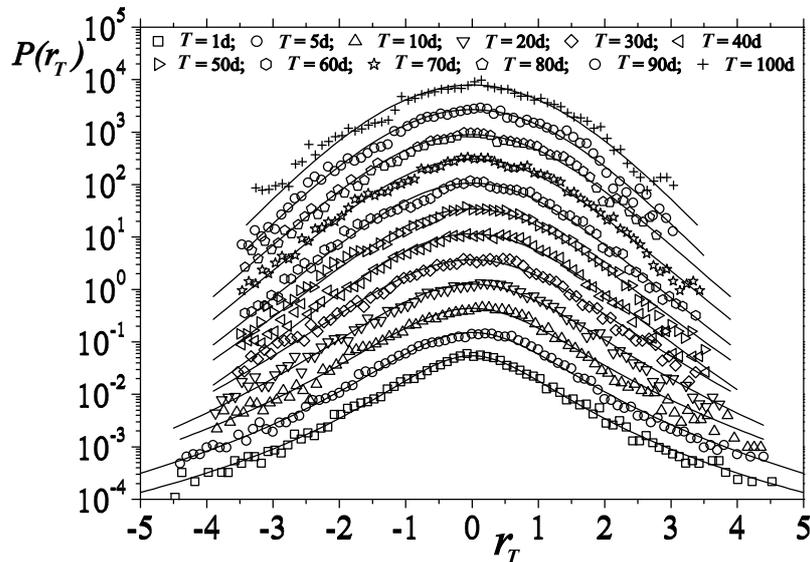


Figura 3.2: Os símbolos representam o histograma construído a partir das séries temporais dos lucros do DJIA e as linhas representam o ajuste usando os valores da série temporal apresentados na tab. 3.1. As curvas são deslocadas na ordenada de um factor de 3 para melhor visualização. [em P05]

Os resultados obtidos são apresentados nas tabs. 3.1 e 3.2 e nas figs. 3.2 e 3.3. O erro no ajuste é avaliado através da função de erro  $\chi^2$  (por ponto),

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [p_d(r_{T,i}) - h(r_{T,i})]^2, \quad (3.12)$$

em que  $h(x)$  é a frequência relativa associada à distribuição (3.7). Apartir das tabelas referidas e da fig. 3.4 verifica-se a convergência lenta da distribuição  $p(r_T)$  para a Gaussiana. Evolução semelhante foi recentemente verificada para o valor de  $q$  que caracteriza a distribuição da diferença de campo magnético,  $B$  no vento solar,  $dB(t) \equiv B(t+T) - B(t)$ , após o “termination shock” [202].

Embora arguido por alguns autores, e.g. [174], que a distribuição sempre é leptocúrtica e o

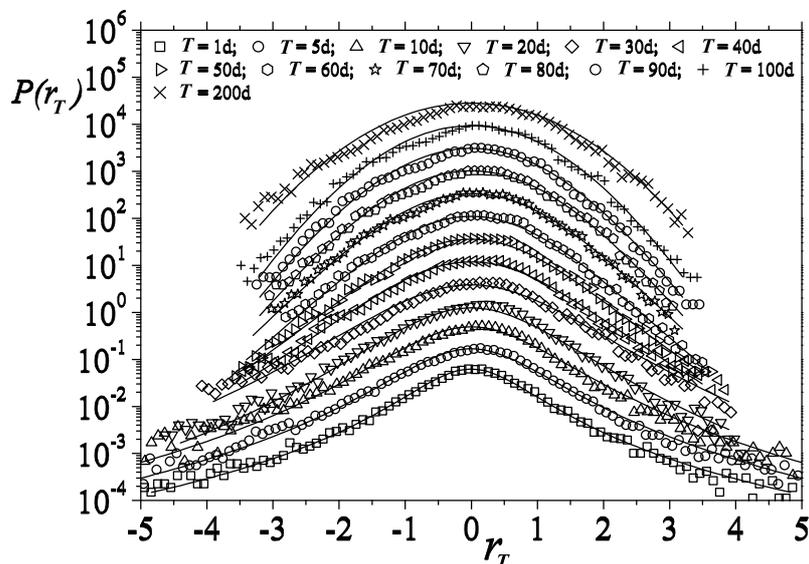


Figura 3.3: Os símbolos representam o histograma construído a partir das séries temporais dos lucros do NYSE e as linhas representam o ajuste usando os valores da série temporal apresentados na tab. 3.1. As curvas são deslocadas na ordenada de um factor de 3 para melhor visualização. [em P05]

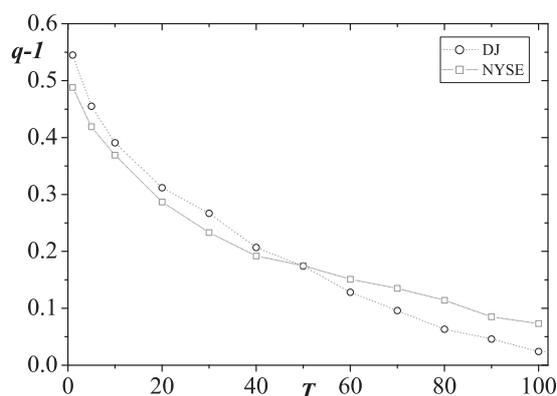


Figura 3.4: Representação de  $q - 1$  vs.  $T$  para os lucros do DJIA e do NYSE usando os valores das tabs. 3.1 e 3.2. Avaliando a partir desta figura pode afirmar-se que o NYSE aparenta ter uma maior persistência na não-Gaussianidade. [em P05]

valor de  $q$  **constante** para qualquer horizonte temporal, justificando a perda das caudas quando se aumenta o horizonte temporal como um mero efeito estatístico. Esses resultados são completamente incompatíveis com o decaimento lento, aproximado a uma lei de potência, da curtosis verificado por outros autores [144][175]. Os resultados aqui apresentados estão de acordo com essa evidência empírica, dada a relação entre  $q$  e curtosis, ver eq. (2.10). Nomeadamente, em [174], a qualidade do ajuste não é apresentada e a comparação entre teoria e empirismo é feita numa escala real para ambos os eixos, suavizando a região não-central da distribuição.

Na determinação de  $p(r_T)$  aqui apresentada os valores de  $r_T^-$  e  $r_T^+$  variaram para evitar erros subjacentes à perda de estatística para grandes valores de  $T$ .

**Evolução da não-Gaussianidade** Apesar de os resultados obtidos e apresentados graficamente em fig. 3.4 não permitirem uma avaliação quantitativa da dependência de  $q$  com o horizonte temporal  $T$ , um resultado interessante emerge quando se analisa a dependência entre os valores do índice,  $S$ , nos instantes  $t$  e  $t - T$ . Tenha-se em referência a seguinte equação que representa uma forma alternativa para o cálculo da distribuição  $p(r_T)$ ,

$$p(r_T) = \sum_t P(S(t), S(t-T)) \delta\left(\log \frac{S(t)}{S(t-T)} - r_T\right), \quad (3.13)$$

em que  $P(S(t), S(t-T))$  representa a probabilidade conjunta de se ter um valor  $S(t)$  no instante  $t$  e um valor  $S(t-T)$  no instante  $t-T$ . Sendo  $S(t)$  e  $S(t-T)$  elementos da mesma série temporal, a probabilidade conjunta,  $P(S(t), S(t-T))$ , estará obviamente relacionada com o grau de dependência entre os valores índice em instantes diferentes. Sendo  $p(r_T)$  fun-

Tabela 3.3: Resultados da aplicação da forma generalizada e normalizada da entropia mútua de Kullback-Leibler ao índice DJIA (esquerda) e NYSE (direita).

		$T(\text{dias})$	$q_{NYSE}^{op}$
	$q_{DJ}^{op}$	1	$0.730 \pm 10^{-3}$
1	$0.760 \pm 10^{-3}$	2	$0.795 \pm 10^{-3}$
5	$0.867 \pm 10^{-3}$	5	$0.866 \pm 10^{-3}$
10	$0.901 \pm 10^{-3}$	10	$0.898 \pm 10^{-3}$
20	$0.921 \pm 10^{-3}$	15	$0.916 \pm 10^{-3}$
30	$0.932 \pm 10^{-3}$	22	$0.930 \pm 10^{-3}$
40	$0.944 \pm 10^{-3}$	27	$0.932 \pm 10^{-3}$
50	$0.947 \pm 10^{-3}$	32	$0.939 \pm 10^{-3}$
70	$0.956 \pm 10^{-3}$	37	$0.945 \pm 10^{-3}$
100	$0.960 \pm 10^{-3}$	50	$0.945 \pm 10^{-3}$
1000	$0.985 \pm 10^{-3}$	60	$0.950 \pm 10^{-3}$
		80	$0.957 \pm 10^{-3}$
		100	$0.961 \pm 10^{-3}$

cionalmente dependente de  $P(S(t), S(t-T))$ , é coerente que o valor do índice entrópico,  $q$ , que define a forma da distribuição,  $p(r_T)$ , e da curtósis esteja relacionado com o grau de dependência entre  $S(t)$  e  $S(t-T)$  que define explicitamente a forma de  $P(S(t), S(t-T))^4$ .

Para avaliar a dependência entre os preços foi utilizada a entropia mútua de Kullback-Leibler generalizada no contexto não-extensivo, eq. (2.16), calculando a razão  $R_q$ , eq. (2.20), entre a probabilidade conjunta  $P(S(t), S(t-T))$  e o produto das probabilidades

$$P'(S(t), S(t-T)) = P_1(S(t)) P_1(S(t-T)) \approx [P_1(S)]^2$$

<sup>4</sup>Efectivamente, os preços foram reconstruídos a partir dos retornos normalizados.

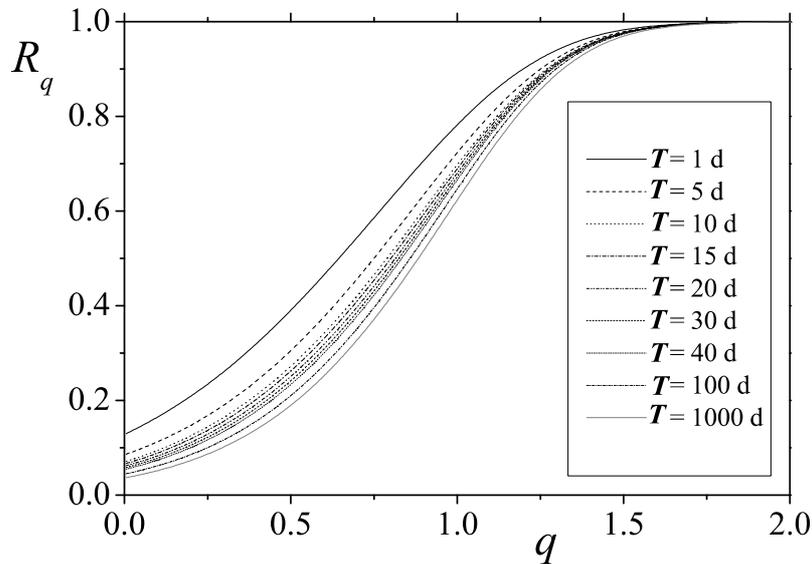


Figura 3.5: Representação de  $R_q$  vs.  $q$  para o índice DJIA relativa a vários horizontes temporais no índice. [em P05]

tal como indicado na secção 2.3.1. Nas figs. 3.5 e 3.6 estão representadas as diversas curvas  $R_q$  vs.  $q$  para o índice DJIA e NYSE e vários horizontes temporais do índice. Na tab. 3.3 os valores referentes aos pontos de inflexão,  $q^{op}$ , das curvas nas figs. 3.5 e 3.6.

A partir da tab. 3.3, representaram-se graficamente os valores de  $1 - q^{op}$  como função do horizonte temporal, figs. 3.7 e 3.8. Essa representação, em escala log – log, permite verificar que a dependência de  $1 - q^{op}$  com  $T$  se ajusta muito bem a uma lei de potência

$$1 - q^{op} \propto T^{-\nu},$$

com  $\nu = 0.393 \pm 0.003$  para o Dow Jones e  $\nu = 0.417 \pm 0.006$  para o NYSE.

Como pode ver-se, os valores para o Dow Jones e NYSE são semelhantes. Adicionalmente, eles são muito próximos do valor do expoente de relaxação da curtósis relativa<sup>5</sup> das flutuações

<sup>5</sup>A curtósis relativa é a relação entre a curtósis de uma distribuição e uma distribuição padrão usualmente a

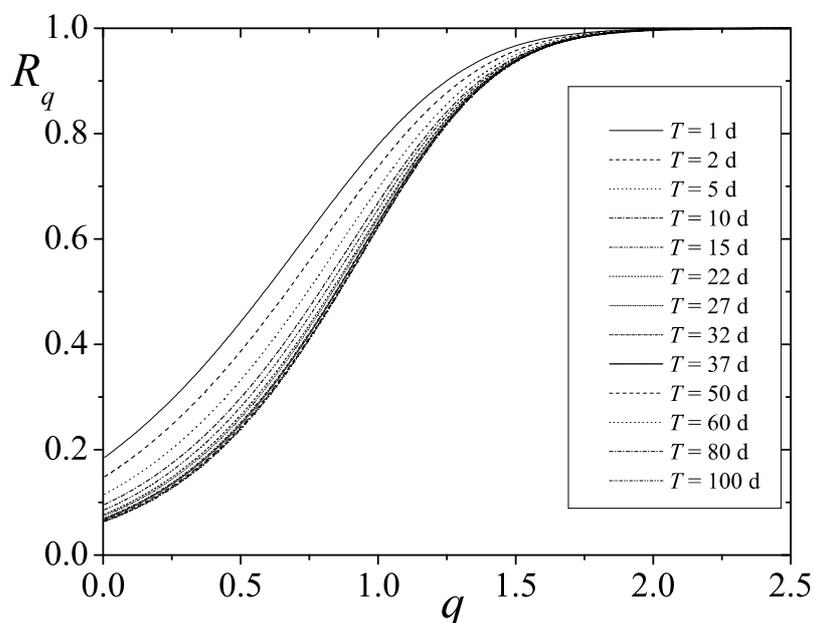


Figura 3.6: Representação de  $R_q$  vs.  $q$  para o índice NYSE relativa a vários horizontes temporais no índice. [em P05]

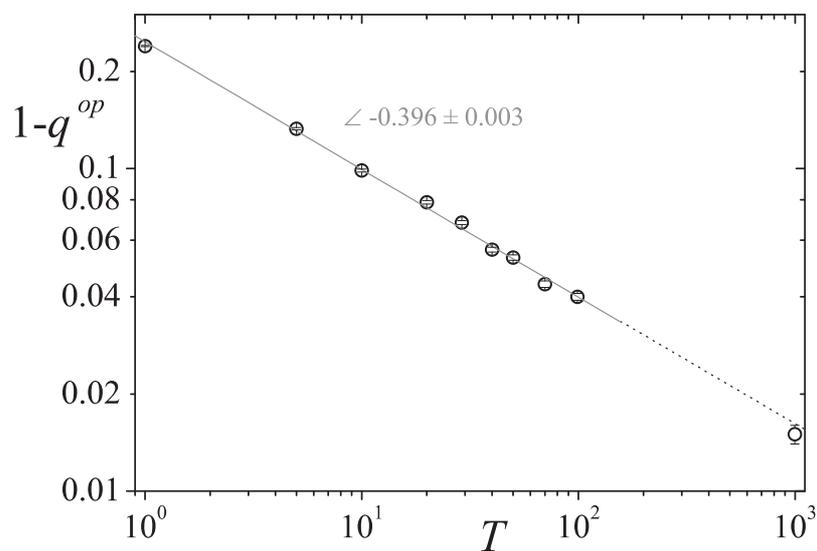


Figura 3.7: Representação de  $1 - q^{op}$  vs.  $T$  para o índice DJIA segundo os valores da tab. 3.3 em escala log – log. A linha completa representa o melhor ajuste e apresenta um declive de  $-0.396 \pm 0.003$ , a linha tracejada representa uma extrapolação da linha a cheio verificando-se que passa próximo do valor de  $q^{op}$  para  $T = 1000$  dias. [em P05]

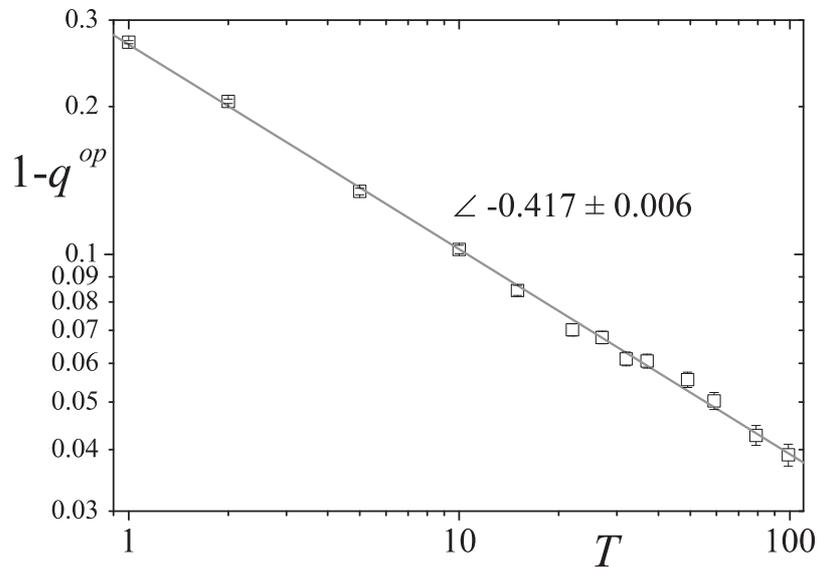


Figura 3.8: Representação de  $1 - q^{op}$  vs.  $T$  para o índice NYSE segundo os valores da tab. 3.3 em escala log – log. A linha completa representa o melhor ajuste e apresenta um declive de  $-0.417 \pm 0.006$ . [em **P05**]

do índice SP500, feita por IVANOVA e AUSLOOS [144], para o qual foi encontrado o valor de 0.39 . Apesar de os estudos serem original e conceptualmente diferentes, ambos estão relacionados com a relaxação da não-Gaussianidade das distribuições apresentando dependências com o tempo praticamente iguais <sup>6</sup>. Refira-se também que estes resultados são muito próximos do expoente relativo ao decaimento da curtósis encontrada para a distribuição das flutuações da taxa de juro alemã (Bund) em que  $\nu = 0.43$  ou das flutuações da taxa câmbio entre o Marco Alemão (GEM) e o Dólar dos E.U.A. (USD) que apresenta  $\nu \approx 0.5$  [5]. Desta forma, há que considerar os resultados como um sinal da existência de um certo comportamento universal de-

Gaussiana. Para este caso, uma distribuição leptocurtica apresenta uma curtósis relativa maior do que 1.

<sup>6</sup>Não obstante os índices americanos DJ, NYSE e SP500 serem compostos de formas diferentes, com diferentes companhias, todos se referem basicamente a companhias negociadas na bolsa de Nova Iorque, daí a apresentação de comportamentos estatísticos muito semelhantes.

vido a diferença de métodos e conceitos aplicados e o tipo de relaxação encontrada: uma lei de potência com um expoente entre  $\frac{2}{5}$  e  $\frac{1}{2}$ .

Sendo a curtósis completamente definida no contexto não-extensivo pelo índice  $q$  seria de esperar um comportamento semelhante, i.e., lei de potência para  $q$ . Como foi citado, isso não se verifica sobretudo quando se compara o comportamento da lei de potência para elevados  $T$ . O mesmo acontece em [144] onde o trabalho realizado é inspirado nos modelos de turbulência de Kolmogorov [176]. É de referir que com o aumento de  $T$  é natural que as dependências de ordem mais elevada, ou seja, entre índices mais próximos, possam influenciar os valores obtidos, mas numa escala ao nível de correcção que se acredita não afectar a solidez do resultado. Noutra perspectiva, o desvio dos valores de  $q$  em relação à dependência tipo lei de potência pode ser atribuída a erros referentes ao processo de ajuste.

**Relação com o teorema do limite central** A perda de curtósis está intimamente relacionada com a convergência para a distribuição Gaussiana e consequentemente com o famigerado teorema do limite central. Sucintamente e omitindo os detalhes intrínsecos ao rigor do formalismo matemático, pode dizer-se que o teorema do limite central na versão generalizada de Lévy-Gnedenko [177][178] estabelece que:

*Somando-se um conjunto de  $N$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas associadas a uma distribuição  $P_1(x)$ , a distribuição relativa a nova variável  $X_N = \sum_{i=1}^N x_i$ ,  $P_N(X)$ , será dada pela convolução das  $N$  distribuições  $P_1(x)$ . As distribuições estáveis deste processo de adição de variáveis dependem da finitude da variância,  $\sigma^2$ , de  $P_1(x)$ .*

Se  $\sigma^2$  é finito, então a distribuição estável,  $P_{N \rightarrow \infty}(X)$ , é uma Gaussiana. Se  $\sigma^2$  é infinito, então a distribuição estável é a distribuição cuja função característica é dada pela eq. (3.3), i.e., uma distribuição de Lévy.

Como verificado, quer as distribuições aqui descritas, quer as encontradas noutros trabalhos por outros autores, apresentam um valor do índice  $q$  para as distribuições diárias da ordem de  $\frac{3}{2}$  o que indica finitude na variância de  $p(r_1)$ . Por isso, a convergência para a Gaussiana torna-se incontornável face à inexistência de correlações suficientemente fortes que permitam sustentar a estabilidade das distribuições de lucro com um único  $q$ . É importante referir-se neste ponto que, recentemente, foi introduzido um mecanismo de correlações por imposição da regra de Leibnitz num conjunto de probabilidades baseado no  $q$ -produto que permitiu o estabelecimento de um atrator no espaço de probabilidades diferente dos atratores de Lévy e de Gauss [179]. Este trabalho constitui a base da primeira generalização não-extensiva do Teorema do Limite Central [180] [181] [182] no qual se inclui o caso de uma  $q$ -generalização das distribuições de Lévy simétricas.

Apesar da transformada de Fourier da  $q$ -Gaussiana,  $\frac{1}{Z} \exp_q[-a x^2]$  ser bastante complexa,

$$\hat{f}_q(k) = \frac{2}{Z \sqrt{2(q-1)a} \Gamma\left[\frac{1}{q-1}\right]} \left( \frac{|k|}{2\sqrt{(q-1)a}} \right)^n K_n \left[ \frac{|k|}{\sqrt{(q-1)a}} \right],$$

esta adquire uma forma relativamente simples para o caso em que  $q = \frac{3}{2}$ ,

$$\mathcal{F} \left[ \frac{2\sigma^3}{\pi(\sigma^2 + x^2)^2}, k \right] = (1 + \sigma |k|) \exp[-\sigma |k|].$$

Partindo daqui, pode mostrar-se [5][183] que para  $N$  grande, a parte central, concretamente

a região tal que  $|X_N| \leq \sigma\sqrt{N \ln N}$ , pode ser descrita por uma Gaussiana sendo os grandes valores assintoticamente pela lei  $P_N(X) \sim X^{-4}$  devido ao comportamento da ( $q = \frac{3}{2}$ )-Gaussiana. Pode mostrar-se que esta cauda desaparece para  $N$  grande<sup>7</sup>.

Para confrontar a evolução de  $q$  com o horizonte temporal pode aplicar-se o Teorema de Bérny-Esséen [183]. Segundo este Teorema, a distância da distribuição,  $P_T(X)$ , referente à convolução de  $T$  variáveis independentes, em que  $\langle |x|^3 \rangle$  é finito, em relação à Gaussiana,  $G(X)$ , varia como

$$\Delta P_T \equiv |P_T(X) - G(X)| \sim \frac{1}{\sqrt{T}}.$$

Dado que a condição  $\langle |x|^3 \rangle < \infty$  implica  $1 < q < \frac{3}{2}$ , este teste apenas pode ser aplicado para os resultados referentes ao NYSE. Uma avaliação equivalente é considerar-se o comportamento da função de erro  $\chi^2$  quando se ajusta a distribuição  $P_T(r)$  a uma Gaussiana. É simples constatar que  $\chi^2$  é equivalente a uma média de  $[\Delta P_T]^2$  e que por isso,

$$\chi_T^2 \sim \frac{1}{T}.$$

Pode ser verificado na fig. 3.9 que  $\chi_T^2$  não segue um comportamento linear com  $T^{-1}$ .

Para o caso do Dow Jones, utilizou-se um procedimento mais simples: gerar computacionalmente uma série de valores correspondentes a uma  $q$ -Gaussiana com  $q = 1.545$ ; fazer a convolução para os diversos valores de  $T$  e ajustar as distribuições resultantes a  $q$ -Gaussianas. Na fig. 3.10 pode observar-se que a aproximação das distribuições do DJIA à Gaussiana são mais lentas do que a aproximação gerada numericamente.

<sup>7</sup>No argumento aqui apresentado  $X_N$  não se encontra normalizado.

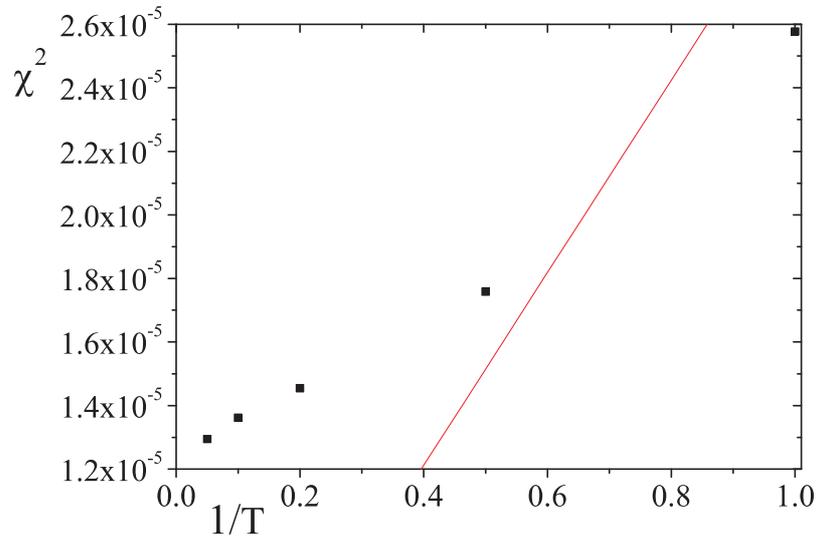


Figura 3.9: Representação de  $\chi_T^2$  vs.  $T^{-1}$  (quadrados). A linha representa a função  $\chi_T^2 = 3 \times 10^{-5} T^{-1}$ , onde  $\chi^2$  é o valor do erro quando se ajusta a distribuição  $p(r_T)$  com uma Gaussiana. Este erro deve tender para zero e forma linear com  $T^{-1}$  quando  $T \rightarrow \infty$ . O facto da aproximação ao limite ser mais lenta é uma indicação de dependência nas variáveis.

**Grau de dependência entre lucros** Sabendo-se que a um horizonte temporal superior a alguns minutos, os lucros são descorrelacionados, essa convergência mais lenta para a gaussiana terá a sua origem em correlações de ordem superior que não são mensuráveis com a função de correlação,

$$C(x, y) = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \sqrt{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}}.$$

Assim, aplicou-se uma vez mais a razão  $R_q$  que emerge da generalização da entropia mútua de Kullback-Leibler para lucros diários separados por uma distância  $T$ . Para os dois índices, foi observado uma aparente independência dos valores do índice  $q^{op}$  sendo os seus valores médios de  $q^{op} = 1.28 \pm 0.005$  para o Dow Jones e  $q^{op} = 1.12 \pm 0.005$  para NYSE (ver figs. 3.11 e 3.12). Estes resultados, à primeira vista surpreendentes, podem ser entendidos

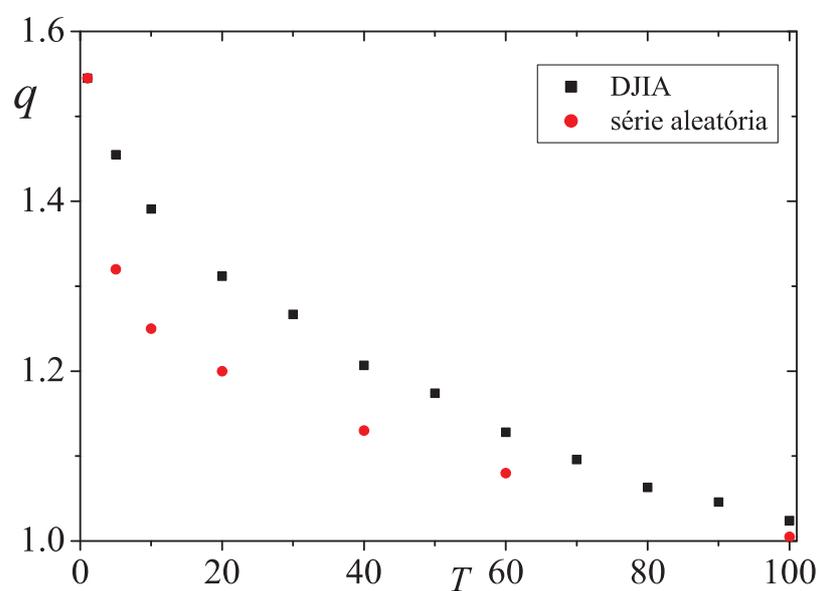


Figura 3.10: Os quadrados representam os valores de  $q$  apresentados na tab. 3.1 e os círculos o valor de  $q$  que melhor se ajusta às séries temporais obtidas a partir da convolução de uma outra série gerada a partir da rotina de FORTAN `ran3` tal que para  $T = 1$ ,  $q = 1.545$ . O processo para geração desta série resulta na aplicação de uma condição semelhante à aplicada para problema de sistemas ferromagnéticos em contacto com banho térmico.

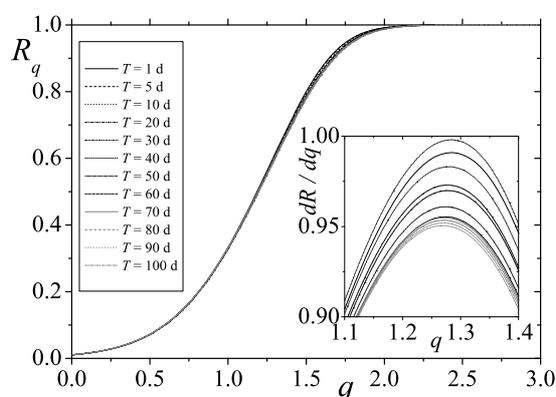


Figura 3.11: Representação de  $R_q$  vs.  $q$  para as flutuações de índice DJIA para vários horizontes temporais. A figura interna apresenta a derivada de  $R_q$  em relação a  $q$ . O valor do máximo não tem um comportamento monótono e varia em torno de  $1.28 \pm 0.005$ . [em P05]

com base em análise empírica anteriormente realizada por outros autores bem como fazendo uso de resultados obtidos para um modelo paradigmático, o  $GARCH(1, 1)$ , que será estudado no próximo capítulo o que permitirá relacionar a quase invariância de  $q^{op}$  para lucros com a correlação de longa escala existente na volatilidade.

Apesar de o lucro inter-diário ser considerado uma observável auto-descorrelacionada, é um facto empírico e perfeitamente consolidado que o módulo do lucro<sup>8</sup> apresenta uma correlação de longa duração que pode ser ajustada por uma lei de potência, com expoente entre 0.1 e 0.4(veja o caso para os lucros do Dow Jones e NYSE na fig. 3.13 [184][185][186])<sup>9</sup>. No cap. 4 serão introduzidos modelos em que a volatilidade é dependente de lucros anteriores e para os quais a covariância da volatilidade decai exponencialmente e o grau de dependência também

<sup>8</sup>Medida equivalente à volatilidade instantânea.

<sup>9</sup>Esta correlação de longo alcance pode também ser bem descrita por uma composição de exponenciais, mas nunca com uma única exponencial com valor característico finito [5]. A representação em lei de potência apresenta a vantagem do conceito “lei de potência” estar intimamente relacionado a invariância de escala e complexidade.

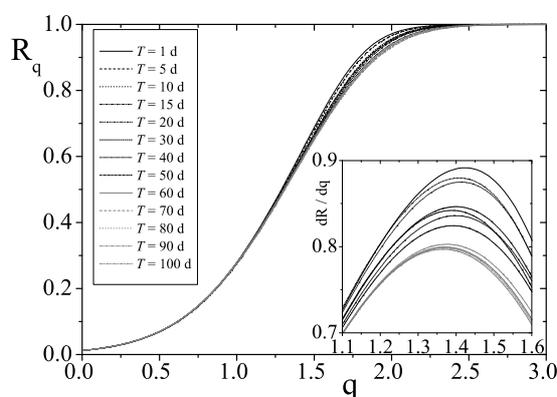


Figura 3.12: Representação de  $R_q$  vs.  $q$  para as flutuações de índice NYSE para vários horizontes temporais. A figura interna apresenta a derivada de  $R_q$  em relação a  $q$ . O valor do máximo não tem um comportamento monótono e varia em torno de  $1.12 \pm 0.005$ . [em P05]

decaí rapidamente. Consequentemente, entende-se a invariância de  $q^{op}$  para os lucros como uma manifestação de dependências significativas de ordem superior na variável.

### 3.2.2 Mercados ilíquidos: A Bolsa de Lisboa

Em 3.2.1 foi apresentada uma análise das flutuações de índice a vários horizontes temporais referentes a transacções em mercados de elevada liquidez e considerados estáveis, num sentido de pouco voláteis. Contudo, é fácil entender-se que nem todos os mercados podem ser classificados como líquidos e/ou estáveis. O comportamento de um mercado financeiro está obrigatoriamente relacionado com a pujança da economia à qual este se encontra relacionado e também, em princípio, a factores como a maturidade sócio-política que afecta altamente a volatilidade. Esta combinação de factores faz com que mercados como os americanos, o alemão, o inglês, o francês e o japonês tenham comportamentos muito semelhantes cujas flutuações de preço podem ser bem descritas por distribuições de probabilidade (3.7). Em contrapartida

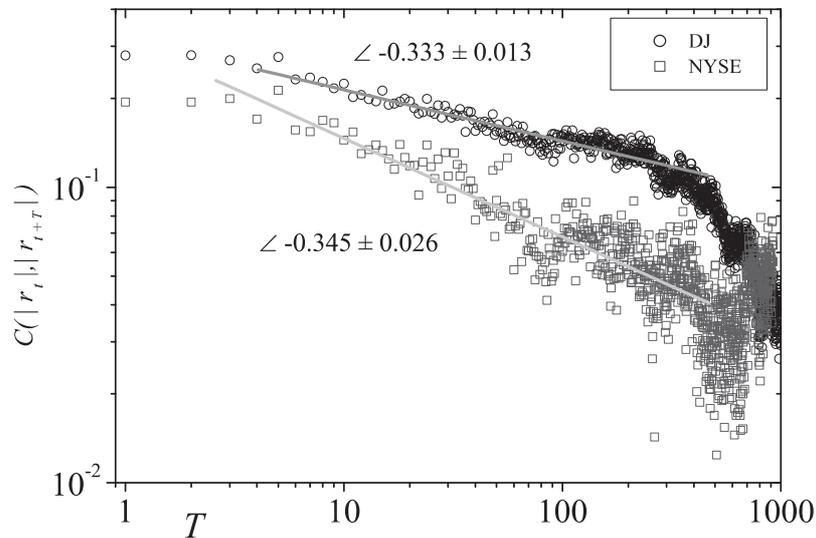


Figura 3.13: Representação da função de auto-correlação para o valor absoluto das flutuações de índice diário,  $C = \frac{\langle |r_1(t)| |r_1(t+T)| \rangle - \langle |r_1(t)| \rangle^2}{\langle |r_1(t)|^2 \rangle - \langle |r_1(t)| \rangle^2}$ , para o DJIA e NYSE numa escala log – log. As linhas representam os melhores ajustes e apresentam declives  $-0.333 \pm 0.013$  para o DJIA e  $-0.345 \pm 0.026$  para o NYSE. [em **P05**]

países como o Brasil, que apesar da sua força industrial apresentam debilidades no sistema sócio-político, tem um comportamento nas observáveis financeiras bem diferentes dos mercados referidos líquidos. Isso reflecte-se quer nas distribuições das flutuações de preço, quer no comportamento persistente das séries temporais geralmente associado à “volatilidade” do país. No campo de comportamento fora do padrão líquido, pode referir-se o caso indiano em que foi mostrado que as flutuações de preços diários no mercado local (Bombaim) apresentam uma forma exponencial[187]. Um outro exemplo de uma classe diferente pode ser encontrada nas flutuações de preço do mercado português [188]. Embora tenha índices de desenvolvimento social dentro dos padrões da Europa Ocidental e um quadro político estável, Portugal apresenta uma economia pequena em parte devido à população do país (cerca de 10 milhões), mas com

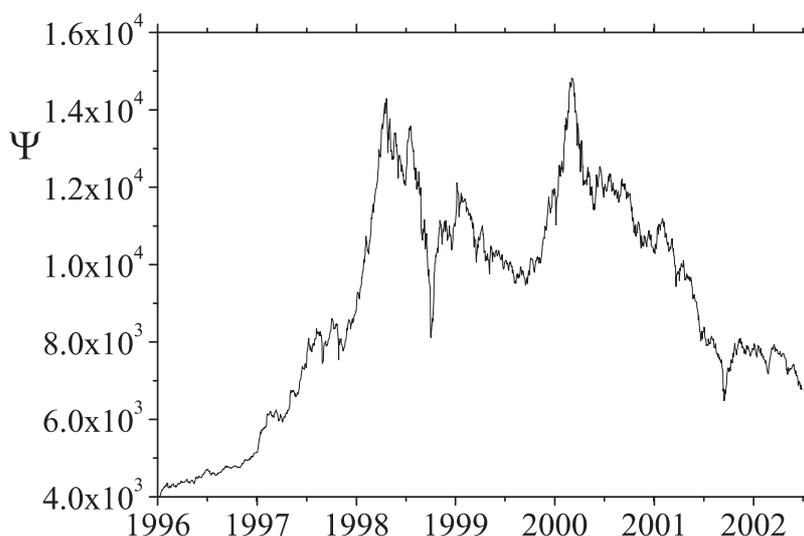


Figura 3.14: Evolução do índice PSI-20 entre Fevereiro de 1996 e Junho de 2002.

certeza devido à influência latina da economia familiar e de uma cultura de pequena e média empresa.

No que se segue desta secção abordar-se-á a forma das flutuações intra-diárias do índice PSI-20 da Bolsa de Valores de Lisboa, actualmente Euronext Lisbon, entre Fevereiro de 1996 e Junho de 2002 num total de cerca de  $4 \times 10^6$  pontos, ver fig. 3.14. Este número de pontos neste intervalo de tempo equivale a uma actualização do índice a cada 10 segundos (aproximadamente).

O índice PSI-20,  $\Psi$ , é composto por um conjunto de 20 empresas cuja capitalização global é de  $4.7 \times 10^{10}$  EUR<sup>10</sup>. A fórmula de cálculo do índice é<sup>11</sup>,

$$\Psi(t) = \frac{\sum_{i=1}^{20} p_i(t) q_i(t)}{d_t} b,$$

<sup>10</sup>A discriminação das empresas dos respectivos valores em bolsa podem ser encontradas em <http://www.euronext.pt> (Mercados → Índices → PSI-20 → Carteira).

<sup>11</sup><http://www.euronext.pt> (Mercados → Índices → PSI-20 → Metodologia).

onde  $p_i(t)$ ,  $q_i(t)$ ,  $d_t$ , representam, respectivamente, a cotação da  $i$ -ésima empresa em  $t$ , o número de acções da  $i$ -ésima empresa admitida a transacção e o divisor vigente que é dado por

$$d_t = \frac{C(t_0)}{\Psi(t_0)} b,$$

em que  $C(t_0)$  corresponde à capitalização inicial e  $b$  um valor base que, para  $t_0$  correspondente a 31 de Dezembro 1992, vale 3000.

### Análise das distribuições

Fazendo uma análise numérica da distribuição da variação de índice (eq. (3.1)), verifica-se que nenhum dos tipos de distribuição regularmente utilizados para descrever flutuações de preços/índices em mercados financeiros se acomoda na distribuição empírica para as flutuações do índice PSI-20 da Bolsa de Valores de Lisboa. Para encontrar uma distribuição eficaz, utilizou-se a analogia entre equações diferenciais e formalismo não-extensivo já apresentada para o tratamento relativo à sensibilidade às condições iniciais (secção 2.4).

As distribuições exponencial e Gaussiana, relacionadas com a optimização da entropia  $S_{BG}$ , podem também ser obtidas a partir da solução da equação diferencial,

$$\frac{dp(x)}{dz} = -\beta p(x), \quad (3.14)$$

em  $p$  que representa probabilidade e  $z$  qualquer funcional de  $x$ . Quando  $z = |x|$  a distribuição obtida é a exponencial, enquanto que para  $z = x^2$  a distribuição obtida é a Gaussiana.

A equação anterior pode ser generalizada tendo-se,

$$\frac{dp(x)}{dz} = -\beta_q [p(x)]^q, \quad (3.15)$$

cujas distribuições obtidas são a  $q$ -exponencial

$$p(x) \sim [1 - (1 - q) \beta_q |x|]^{\frac{1}{1-q}},$$

e a  $q$ -Gaussian eq. (3.7). A eq. (3.15) contém (3.14) como caso particular. No espírito de trabalhos sobre reassociação de proteínas [189], ou distribuição de energias em fluxos de raios cósmicos [190], considere-se uma generalização da eq. (3.15) por introdução de um índice  $q'$ ,

$$\frac{dp(x)}{dz} = -\beta_{q'} [p(x)]^{q'} - (\beta_q - \beta_{q'}) [p(x)]^q. \quad (3.16)$$

Esta equação, considerando  $q' = 1$  e  $q = 2$ , é semelhante à equação utilizada por MAX PLANCK em 1900 que conduziu à lei da radiação do corpo negro[191].

Considerando apenas valores positivos de  $z = |x|$ , i.e.,  $z = x$ <sup>12</sup> a solução da eq. (3.16),

$$x = \frac{1}{\beta_{q'}} \left\{ \frac{[p(x)]^{-(q'-1)}}{q' - 1} - \frac{(\beta_q/\beta_{q'}) - 1}{1 + q - 2q'} \times \right. \quad (3.17)$$

$$\left. [J(1; q - 2q', q - q', (\beta_q/\beta_{q'}) - 1) - J(p(x); q - 2q', q - q', (\beta_q/\beta_{q'}) - 1)] \right\},$$

onde  $J(p(x); a, b, c) = [p(x)]^{1+a} F\left(\frac{1+a}{b}; \frac{1+a+b}{c}; [p(x)]^b c\right)$  e  $F$  é a função hipergeométrica.

Para  $1 < q' < q$  e  $\beta_{q'} \ll \beta_q$ , três regiões podem ser observadas para  $x$ . A primeira, onde  $q$  governa, for  $0 \leq x \ll x^*$  em que

$$x^* = \frac{1}{(q-1)\beta_q}. \quad (3.18)$$

Em seguida, uma intermediária, influenciada por  $q$  e  $q'$ , para

$$x^* \ll x \ll x^{**} \equiv \frac{[(q-1)\beta_q]^{\frac{q'-1}{q-q'}}}{[(q'-1)\beta_{q'}]^{\frac{q-1}{q-q'}}} \quad (3.19)$$

<sup>12</sup>Desta forma consideram-se as distribuições simétricas.

e finalmente uma região onde apenas  $q'$  tem peso para  $x \gg x^{**}$ .

Por solução numérica da eq. (3.16), utilizando o programa de cálculo *Mathematica*, foi possível encontrar uma forma que se ajusta muito bem a distribuição das flutuações do índice da bolsa de Lisboa. Os melhores valores que descrevem as flutuações de preço (não normalizadas) são  $q' = 1.076$ ,  $q = 1.534$  para os índices entrópicos e  $\beta_{q'} = 6.59 \times 10^3$ ,  $\beta_q = 7.47 \times 10^4$ , fig. 3.15. Estes valores encontram-se dentro das condições que permitiriam verificar usando as condições (3.18) e (3.19), a emergência dos três regimes que  $|r|^* \simeq 0.00003$  and  $|r|^{**} \simeq 0.004$ . Apesar de a série ser relativamente extensa a segunda transição de regime não é observável por razões de estatística.

**Implicações do resultado** O resultado aqui apresentado é muito interessante, pois representa emergência de mais um tipo de distribuição para flutuações de índices em mercados financeiros. A distribuição obtida implica que a uma escala de tempo curto as flutuações do índice não podem ser descritas por modelos tipo Heston. O modelo de Heston [192] corresponde a um conjunto de equações acopladas para lucro,  $r$ , e volatilidade,  $v$ ,

$$dr_t = -\frac{v_t}{2}dt + \sqrt{v_t}dW_t, \quad (3.20)$$

$$dv_t = -\gamma(v_t - \theta)dt + \sqrt{v_t}dV_t$$

em que  $W_t$  e  $V_t$  são dois processos regulares de Wiener (anti-)correlacionados. Para este modelo, a forma funcional das distribuições de  $r_t$  apresenta um comportamento exponencial para lucros a tempo curto convergindo para a distribuição Gaussiana para os lucros a longo horizonte

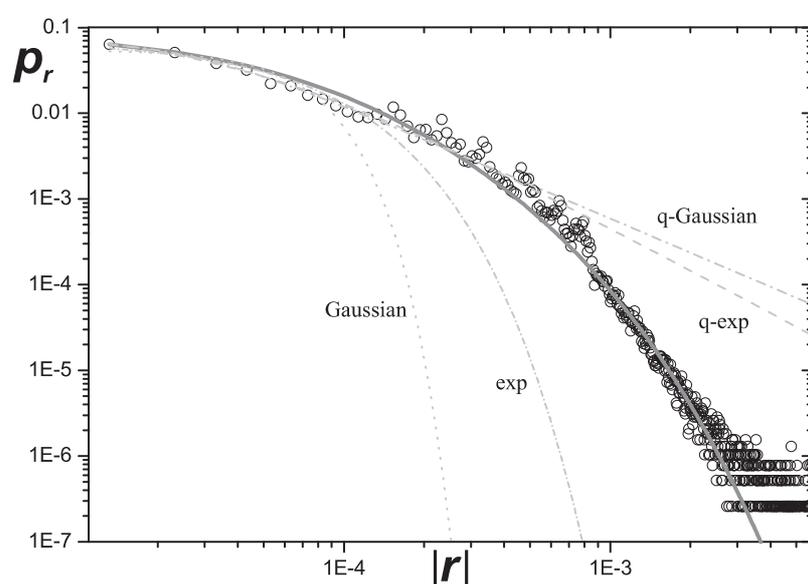


Figura 3.15: Densidade de probabilidade para as flutuações do índice da Bolsa de Valores de Lisboa entre 1 de Fevereiro de 1996 e 28 de Março de 2002 (aproximadamente 4 milhões de pontos). A linha completa representa a solução da eq. (3.16) e é claramente a melhor aproximação a densidade de probabilidade dos dados (círculos) quando comparados com os melhores ajustes feitos pelas distribuições: Gaussiana,  $q$ -Gaussiana ( $q = 2.51$ ), exponencial e  $q$ -exponencial ( $q = 1.59$ ) que também são apresentados. [em **P01**]

temporal<sup>13</sup>.

Adicionalmente, uma questão pode colocar-se: Estará o mercado indiano e o mercado português dentro da mesma classe? Surpreendentemente, quando se analisa a distribuição de flutuações diárias de índice, verifica-se que para o caso de Lisboa, apesar da fraca estatística, 1600 pontos, a distribuição é bem descrita por uma forma exponencial, fig. 3.16. Tendo em conta o único parâmetro de comparação, a distribuição de probabilidade para as flutuações diárias, é-se induzido a considerar que a bolsa de Lisboa e a bolsa de Bombaim pertencem a uma mesma classe. Todavia, esta conclusão não deixa de ser, no mínimo, questionável face à diferença existente entre os dois países.

Aproveitando a referência ao modelo de Heston, este apresenta, como veremos mais à frente, divergências em relação a factos empíricos para mercados líquidos. Em primeiro lugar, as suas distribuições, como referido, são de tipo exponencial para lucros, pelo menos, com horizonte temporal de 1 dia [193], quando se verificou um valor praticamente constante para o expoente que define a cauda das distribuições de lucros/índices até horizontes temporais até 512 minutos(1.5 dias de negócio)[157]. Em segundo lugar, o modelo de Heston é um modelo estocástico com ruído aditivo e desvio padrão local variante no tempo, não contendo o carácter de ruído multiplicativo presente nas séries de lucro.

---

<sup>13</sup>O facto de o modelo ser inconveniente para retornos a um horizonte curto afecta os resultados para horizontes de tempo superiores. Como os segundos momentos são finitos logicamente, pelo teorema central do limite, a distribuição tenderá à Gaussiana. Contudo, tal convergência não corresponde a uma dinâmica apropriada, mas a um efeito meramente estatístico.

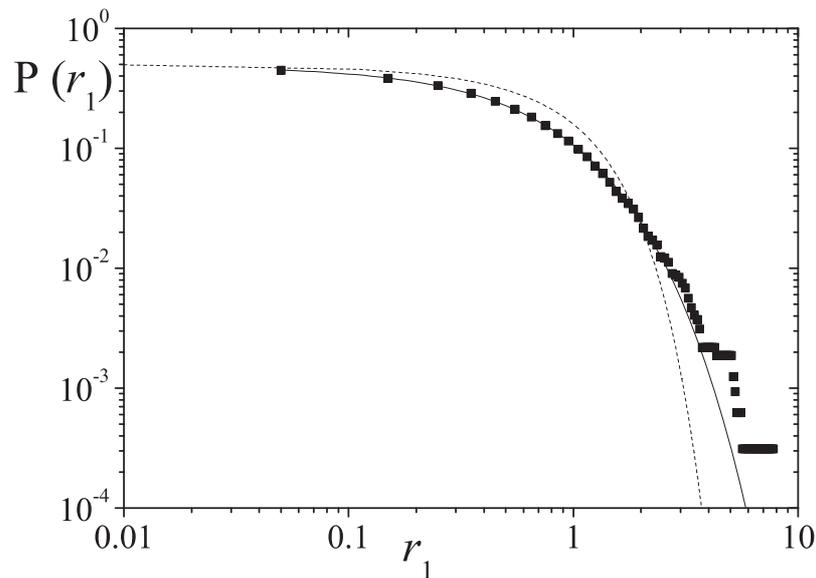


Figura 3.16: Densidade de probabilidade acumulada para as flutuações de índice (normalizadas) da Bolsa de Valores de Lisboa (símbolos). O ajuste foi feito utilizando a expressão  $P_{\geq}(r_1) \sim \exp_{q_{\geq}}[-\beta_{q_{\geq}} r_1]$   $q_{\geq} = \frac{1}{2-q} \beta_{q_{\geq}} = (2-q)\beta_q$ , correspondente a uma função de distribuição de probabilidade  $p(r_1) \sim \exp_q[-\beta_q r_1]$  (linha completa). O valor obtido para  $q_{\geq}$  foi de  $1.01 \pm 0.005$ , indicação de que a distribuição se pode considerar como exponencial ( $\chi^2 = 1.6 \times 10^{-6}$  e  $R^2 = 0.99981$ ). Como comparação apresenta-se na linha a tracejado a densidade de probabilidade acumulada relativa a uma Gaussiana  $P_{\geq}(r_1) = \frac{1}{2} \left( \sigma - \text{erf} \left[ \frac{x}{\sqrt{2}\sigma} \right] \right)$  com  $\sigma = 1$ .

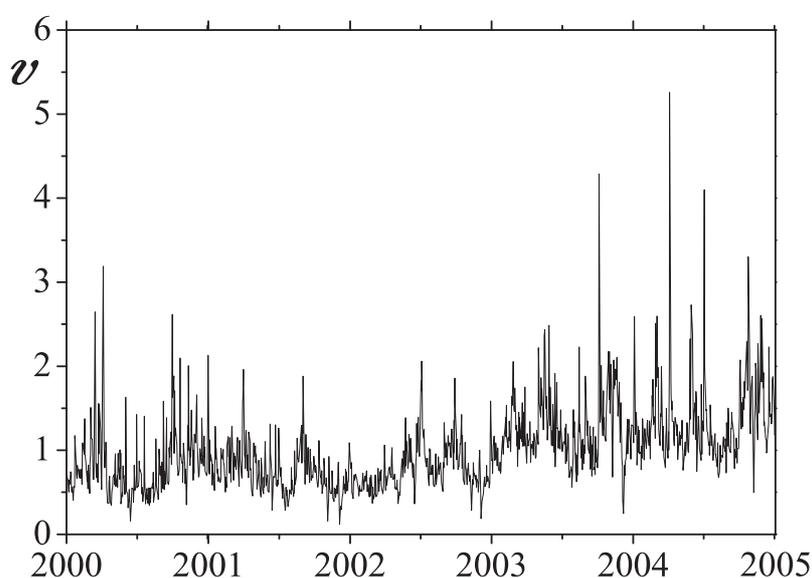


Figura 3.17: Evolução do volume transaccionado diário (normalizado) da Microsoft Corporation no NASDAQ desde 21 Janeiro 2000 até 21 Janeiro 2005. Cada divisão da escala da abcissa representa 6 meses. [em P04]

### 3.3 Volume transaccionado num contexto não-extensivo

Variações de preço de um certo título, e conseqüentemente do índice, estão directamente relacionadas com transacções. Por isso, o volume transaccionado (já definido)<sup>14</sup>, é uma importante observável na dinâmica de mercados financeiros. A sua importância pode ser comprovada por um velho provérbio de Wall Street: “É preciso volume para os preços se moverem” [194]. Veja-se na fig. 3.17 uma série típica da observável.

Vários estudos referentes a propriedades estatísticas do volume têm sido apresentadas nos últimos tempos. O primeiro estudo exaustivo sobre propriedades estatísticas do volume foi realizado pelo grupo de H.E. STANLEY, sendo as principais conclusões obtidas as seguintes[162]:

---

<sup>14</sup>Por uma questão de simplicidade sempre que for referido o termo *volume*, este referir-se-á ao volume transaccionado.

- As distribuições de volume apresentam um regime assintótico em lei de potência;
- O volume apresenta uma dinâmica caracterizada por correlações de longo alcance com expoentes de Hurst da ordem de 0.8.

Este estudo, no que diz respeito às distribuições de probabilidade, foi estendido por R. OSÓRIO, L. BORLAND e C. TSALLIS (OBT) para todos os valores do volume [163]. Nesse trabalho, OBT mostraram que as distribuições de volume eram muito bem descritas pela distribuição,

$$p(v) = \frac{1}{Z} \left(\frac{v}{\theta}\right)^{-\alpha} \exp_q\left(-\frac{v}{\theta}\right), \quad (q > 1) \quad (3.21a)$$

onde  $Z = \int_0^\infty \left(\frac{v}{\theta}\right)^{-\alpha} \exp_q\left(-\frac{v}{\theta}\right) dv$ ,  $\alpha$  e  $\theta$  são parâmetros típicos do problema e  $v$  representa o volume expresso em unidades de volume médio. Esta distribuição corresponde a uma generalização da distribuição Gamma, que é recuperada quando  $q = 1$ , sendo também conhecida como distribuição  $F$ . Esta forma é bastante apelativa pois agrega, numa única equação, os dois regimes assintóticos habitualmente utilizados em finanças,

$$p(v) \sim \begin{cases} v^\alpha & \Leftarrow v \ll 1 \\ v^{\alpha/(1-q)} & \Leftarrow v \gg 1 \end{cases}. \quad (3.22)$$

Para os volumes a 1 minuto, das 10 ações mais transacionadas durante o ano de 2001, obtêm-se valores de  $\alpha = 0.93$ ,  $\theta = 0.23$  e  $q = 1.19$  no caso do NASDAQ. Para o NYSE os valores são  $\alpha = 0.42$ ,  $\theta = 0.29$  e  $q = 1.25$ .

Além do mais a mesma forma descreve com grande fiabilidade a distribuição de velocidades em meios granulares sujeitos a forças externas [165][164] ou a distribuição de ligações em certos tipos de redes [166].

Relativamente à estacionaridade, verifica-se que existe uma convergência para a distribuição Gamma. Isso é comprovável pelo aumento do expoente da cauda. Por exemplo, no caso do NASDAQ, eq. (3.22), foi verificado um expoente de  $-4.9$ ,  $-8.5$  e  $-11.3$  para 1, 2 e 3 minutos, respectivamente [163]. Isto indica uma aproximação à exponencial que apresenta um expoente  $-\infty$ . Esta convergência não verifica a aparente estabilidade das distribuições de volume indicadas em [162].

### 3.3.1 Correlação e dependência do volume

Com o objectivo de obter informação estatística de forma ao desenvolvimento de um modelo dinâmico para volumes (a apresentar no cap. 5) analisou-se a função de correlação da observável a 1 minuto para as 30 acções que compõe o DJIA (provavelmente o índice com maior impacto mediático) durante o período de 1 de Julho de 2004 até 31 de Dezembro de 2004 (aproximadamente  $5 \times 10^4$  pontos por série). Este conjunto de dados será daqui em diante designado por DJ30. A lista das empresas e respectivos códigos é a seguinte: As trinta empresas e respectivos códigos são: AA - Alcoa Inc; AIG - American International Group Inc.; AXP - American Express Co.; BA - Boeing Co.; C - Citigroup Inc.; CAT - Caterpillar Inc.; DD - E.I. DuPont de Nemours & Co.; DIS - Walt Disney Co.; GE - General Electric Co.; GM - General Motors Corp.; HPQ - Hewlett-Packard Co.; HD - Home Depot Inc.; HON - Honeywell International Inc.; INTC - Intel Corp.; IBM - International Business Machines Corp.; JNJ - Johnson & Johnson; JPM - JPMorgan Chase & Co.; KO - Coca-Cola Co.; MCD - McDonald's Corp.; MMM - 3M Co.; MRK - Merck & Co. Inc.; MSFT - Microsoft Corp.; PFE - Pfizer Inc.; PG - Procter

& Gamble Co.; SBC - SBC Communications Inc.; UTX - United Technologies Corp.; VZ - Verizon Communications Inc.; WMT - Wal-Mart Stores Inc.; XOM - Exxon Mobil Corp.

É conhecido que a dinâmica intra-diária de mercados financeiros apresenta uma dependência com o tempo de negociação. Isto é, os mercados tendem a ser mais activos no período de abertura, onde os agentes são influenciados por notícias e factos que ocorrem no intervalo de tempo entre o fecho do dia anterior e a reabertura do mercado, e também próximo da altura de fecho, devido a tentativa de realização de mais valias. A dependência do tempo de negociação intra-diário introduz propriedades estatísticas que são consideradas desinteressantes [195]. Assim, de forma a eliminar eventuais propriedades de dependência relacionadas com o tempo de negociação, foi utilizado o seguinte procedimento padrão [169] para cada título:

1. Para cada companhia, determinar o volume médio no tempo de negociação  $t'$

$$\Xi(t') = \frac{\sum_{i=1}^N V(t'_i)}{N},$$

em que  $t'$  representa o tempo de negociação ( $t' = 0, \dots, 340$  minutos para o NYSE e  $t' = 0, \dots, 420$  minutos para o NASDAQ) e  $i$  representa o  $i$ -ésimo dia de negociação;

2. Redefinir o volume no instante  $t$  através da divisão do seu valor,  $V(t)$ , pelo valor médio do instante de negociação  $t'$  ao qual corresponde o tempo  $t$  na série

$$V'(t) = \frac{V(t)}{\Xi(t')};$$

3. Calcular, finalmente, o volume normalizado no instante

$$v(t) = \frac{V'(t)}{\langle V'(t) \rangle},$$

em que  $\langle \dots \rangle$  se refere-se a uma média sobre o tempo  $t$ .

Com a variável  $v(t)$  determinada passou-se ao cálculo das diversas funções de correlação para cada empresa,

$$C[v(t), v(t+T)] = \frac{\langle v(t) v(t+T) \rangle - \langle v(t) \rangle^2}{\langle v(t)^2 \rangle - \langle v(t) \rangle^2}.$$

A partir dos valores obtidos foi feita uma média sobre as 30 empresas, para cada valor de  $T$ , cujo resultado se apresenta nos pontos a preto da fig. 3.18. A melhor representação dos pontos obtidos numericamente é dada por uma soma de duas exponenciais

$$C[v(t), v(t+T)] = C_1 e^{-T/T_1} + C_2 e^{-T/T_2}, \quad (3.23)$$

com  $C_1 = 0.128 \pm 0.002$ ,  $C_2 = 0.111 \pm 0.001$ ,  $T_1 = 27.4 \pm 0.6$  e  $T_2 = 844 \pm 7$ , o que corresponde a um factor entre as escalas de relaxação de  $32$ <sup>15</sup>. Na tab. 5.1 são apresentadas as razões entre  $T_1 = \gamma^{-1}$  e  $T_2 = T^*$ . Este resultado significa que a dinâmica de preços de volumes é governada por duas escalas referentes a dois regimes diferentes. O primeiro regime, relacionado com um relaxamento local, tem um tempo característico da ordem de 30 minutos e um outro que reflecte

<sup>15</sup>A mesma função é também bem definida por  $C[v(t), v(t+T)] = C'_0 + C'_1 e^{-T/T'_1} + C'_2 e^{-T/T'_2}$  em que  $C'_0 = 0.0356 \pm 0.0004$ ,  $C'_1 = 0.137 \pm 0.002$ ,  $C'_2 = 0.098 \pm 0.001$ ,  $T'_1 = 13.3 \pm 0.3$  e  $T'_2 = 333 \pm 7$  [142]. Para este caso também as funções duas exponenciais apresentam uma razão da ordem de 30.

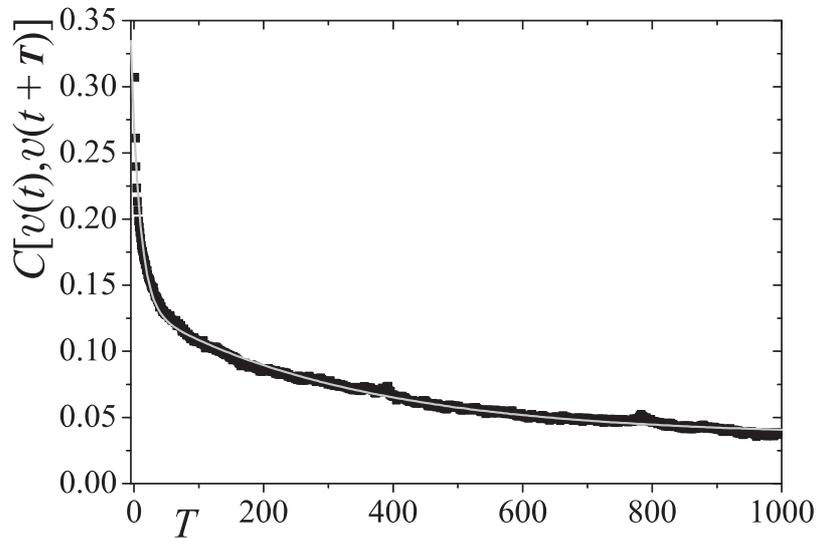


Figura 3.18: Os símbolos representam a função de correlação média para as 30 companhias analisadas e a linha representa o ajuste feito com uma função que representa a soma de duas exponenciais, eq. (3.23), com tempos característicos  $\gamma^{-1} = 27$  and  $T = 844$  o que dá uma razão de cerca de 32 ( $R^2 = 0.991$  and  $\chi^2 = 2 \times 10^{-5}$  e tempo em minutos). [em **P09**]

os comportamentos dos agentes a longa escala com um tempo característico da ordem de 2.5 dias de negócios na escala Dow Jones <sup>16</sup>. Este resultado será importante na elaboração de uma dinâmica para volumes num contexto não-extensivo.

Apesar da função de correlação ser, sem dúvida, uma quantidade importante, muitas vezes ela não é capaz de determinar de uma forma eficaz as dependências não-lineares de um conjunto de dados. Isto deve-se ao facto da função de correlação ser, basicamente, uma covariância normalizada, ou cumulante de segunda ordem de um processo estocástico, e por isso apenas capaz de medir correctamente dependências lineares ou que podem ser escritas de uma forma linear.

<sup>16</sup>Sendo que o DJIA tem 28 empresas negociadas no NYSE e 2 no NASDAQ, o dia de negócios Dow Jones poderá ser definido como a média dos dias de negócios das 30 empresas.

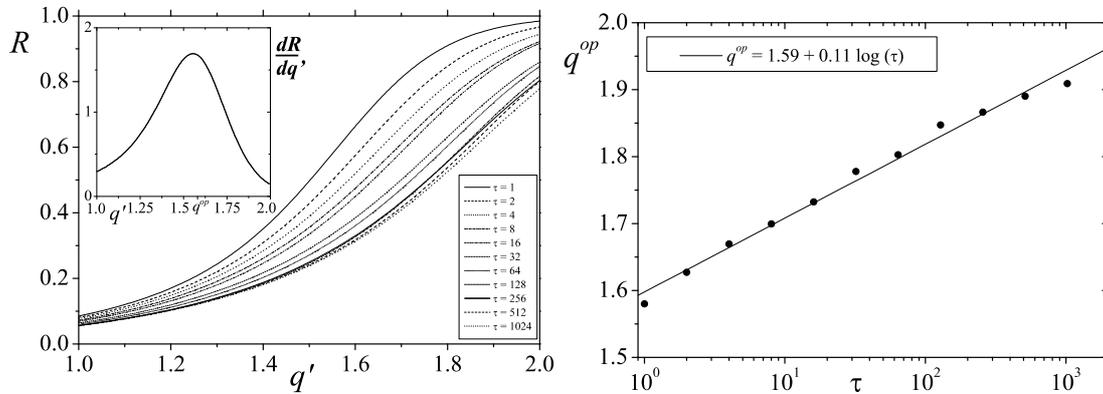


Figura 3.19: Lado esquerdo: Entropia mútua generalizada de Kullback-Leibler e normalizada,  $R_{q'}$ , vs. índice entrópico,  $q'$ , para a International Business Machines (IBM). Na inserção, como mera ilustração, a derivada de  $R_{q'}$  em relação a  $q'$  para  $T = 1$ . O máximo corresponde a  $q^{op} = 1.58$ . Lado direito: Os símbolos representam o índice de dependência,  $q^{op}$ , vs.  $T$  (em minutos) mediada sobre as 30 séries temporais. A linha representa uma função logarítmica de ajuste,  $q^{op} = 1.59 + 0.11 \log(T)$ , (o coeficiente de correlação 0.9944) indicando o crescimento lento de  $q^{op}$ . [em P08]

Com o objectivo de analisar consistentemente o grau de dependência entre o volume,  $v(t)$  (a 1 minuto), fez-se uso, mais uma vez da razão  $R_q$  obtida a partir da eq. (2.17), em que  $x = v(t)$  e  $y = v(t + T)$  sendo que  $T$  variou de  $T = 1$  até  $T = 1024$  [142]. As curvas  $R_q$  vs.  $q$  resultantes para o caso particular da International Business Machines (IBM) são apresentados na fig. 3.19. Das curvas  $R_q$  vs.  $q$  determinou-se o índice  $q^{op}$  através do ponto de inflexão e a partir destes, para cada  $T$ , fez-se uma média sobre as 30 companhias.

Os resultados, apresentados na fig. 3.19 demonstram o decaimento lento da dependência entre os volumes a um horizonte temporal  $T$ . A formal funcional dessa dependência pode ser representada pela seguinte função,

$$q^{op} = a + b \log T,$$

em que  $a = 1.59$ ,  $b = 0.11$ . Estes resultados apontam para a existência de dependências não-lineares significativas que estão presentes mesmo para grandes tempos  $T$ . Comparando a evolução da função de correlação com  $q^{op}$  é possível verificar que o valor da função de correlação diminui muito mais rapidamente. Exemplificando, entre  $T = 1$  e  $T = 1000$ ,  $C[v(t), v(t + T)]$  decai de cerca de 80%, ao passo que  $q^{op}$  (medida do grau de dependência) apenas se reduz em 20% entre  $T = 1$  e  $T = 1024$ .

### 3.4 Estrutura multi-fractal

Para além das distribuições em forma (assimptótica) de lei de potência, correlações de longa duração são indicações do carácter complexo de um sistema e da possível presença de invariância de escala. Essa invariância de escala, que para as séries temporais representa *auto-afinidade*, pode ser associada a um e único tipo de estrutura ou a um conjunto de várias subestruturas suportadas numa mesma estrutura principal. O primeiro caso é definido como monofractal (ou simplesmente fractal) sendo caracterizado por um único expoente,  $H$ , que coincide com o *expoente de Hurst*. O segundo tipo de estrutura é definido como um multi-fractal. Neste caso, as propriedades estatísticas das várias subestruturas são caracterizadas por expoentes locais  $\alpha$ , relacionados com uma dimensão fractal  $f(\alpha)$  que compõe o *espectro multi-fractal* [196].

Desta forma, a multi-fractalidade é uma propriedade importante na caracterização de um sistema como complexo e também como não-extensivo. A existência de multi-fractalidade nas séries temporais de lucros em mercados financeiros é deste há algum tempo conhecida. Embora

autores como J.P. BOUCHAUD [198] tenham já levantado dúvida a propósito da verdadeira natureza multi-fractal deste tipo de observável, eles mesmos, após as suas críticas apresentaram modelos baseados em movimento Browniano fraccionário. Além do mais, a estrutura multi-fractal do lucro foi um dos principais motivos para o estabelecimento de analogias entre mercados financeiros e turbulência em fluidos [199][200]. No contexto não extensivo existe na literatura um conjunto de trabalhos que relacionam a natureza multi-fractal do sistema com o carácter não-extensivo.

No que se segue, introduzir-se-á um conjunto de resultados referentes à estrutura multifractal das séries temporais de lucro e volumes, ambos a um minuto das séries DJ30 [201].

O método utilizado foi o Multi-Fractal Detrended Fluctuation Analysis MF-DFA já aplicado numa variedade de fenómenos que vão desde séries financeiras a séries meteorológicas, passando por fisiologia humana[197]. O MF-DFA é composto pelas seguintes etapas:

Considere-se uma série temporal  $x_k$  composta por  $N$  elementos tal que  $N \gg 1$ ,

1. Determine-se o perfil correspondente ao desvio dos elementos da série relativamente à média

$$Y_i = \sum_{i=1}^N [x_i - \langle x \rangle],$$

e após este calcular,

$$\tilde{Y}_i = \sum_{l=1}^i [Y_l - \langle Y \rangle],$$

2. Dividir o perfil  $\tilde{Y}_i$  em  $N_s \equiv \text{int} \left( \frac{N}{s} \right)$  intervalos não sobrepostos de igual comprimento  $s$ ;

3. Calcular a tendência local através de um ajuste de mínimos quadrados. Em seguida calcular a variância,

$$\tilde{F}^2(\nu, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \left\{ \tilde{Y}[(\nu - 1)s + i] - y_\nu(i) \right\}^2;$$

para cada segmento  $\nu$ ,  $\nu = 1, \dots, N_s$  onde  $y_\nu(i)$  representa um polinómio de ordem  $\nu$ . A ordem do polinómio é importante nos resultados que se obtêm. Para as séries analisadas foram utilizados polinómios de ordem 5 a partir dos quais não se verificava alteração dos valores do espectro multi-fractal.

4. Calcular a média  $F_z(s)$  sobre todos os segmentos para se obter a função de flutuação de ordem  $z$ ,

$$F_z(s) \equiv \left\{ \frac{1}{N_s} \sum_{\nu=1}^{N_s} [\tilde{F}^2(\nu, s)]^{z/2} \right\}^{1/z}, \quad \forall z \neq 0,$$

e

$$F_z(s) \equiv \exp \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{N_s} \ln [\tilde{F}^2(\nu, s)] \right\}, \quad z = 0.$$

5. Determinar o comportamento de escala de  $F_z(s)$  por análise das representações em escala  $\log - \log$  de  $F_z(s)$  vs.  $s$  para cada valor de  $z$ . Se a série  $x$  apresentar correlações longas então,

$$\frac{F_z(s)}{s} \sim s^{h(z)}. \quad (3.24)$$

Pequenas flutuações são geralmente caracterizadas por valores grandes do expoente de escala  $h(z)$  (e  $z < 0$ ) e grandes flutuações por pequenos valores do expoente de escala (e  $z > 0$ ).

A correspondência entre o MF-DFA e o formalismo tradicional dos multi-fractais é feita através da relação

$$\tau(z) = z h(z) - 1, \quad (3.25)$$

onde  $\tau(z)$  representa o expoente da função de partição generalizada. Utilizando a transformada de Legendre,

$$f(\alpha) = z \alpha - \tau(z), \quad (3.26)$$

pode relacionar-se o expoente  $\tau(z)$  com o expoente de Hölder,  $\alpha$ ,

$$\alpha = h(z) + z \frac{dh(z)}{dz}, \quad (3.27)$$

e

$$f(\alpha) = z [\alpha - h(q)] + 1. \quad (3.28)$$

Para  $z = 2$ ,  $h(2) \equiv H$  corresponde ao expoente de Hurst determinado por métodos como a razão  $R/S$  ou DFA. Para  $z = 0$ ,  $f(\alpha)$  obtido pelas eqs. (3.25), (3.26) e (3.27) corresponde à dimensão de suporte.

No caso de um monofractal, como existe homogeneidade no comportamento de escala para qualquer segmento,  $h(z)$  é independente de  $z$ . Ou seja, apenas existem valores diferentes de  $h(z)$  para cada  $z$  se grandes e pequenas flutuações escalarem de formas diferentes.

**Quantificação da contribuições** Vários factores podem contribuir para o comportamento multi-fractal de uma série temporal, especificamente: correlações lineares, correlações não-lineares e decaimento em lei de potência da distribuição de probabilidade. Estas três contribuições

podem ser isoladas e quantificadas. Relativamente às correlações lineares estas podem ser destruídas através de um embaralhamento dos elementos da série. Para as novas séries podem calcular-se os expoentes de escala  $h_{emb}(z)$ . A partir das novas séries, sem correlações lineares, pode criar-se um novo conjunto de séries através da passagem dos elementos ao espaço recíproco por Transformada de Fourier. Aqui novas fases, aleatórias, são introduzidas<sup>17</sup> e após isso retorna-se ao espaço real através da Transformada Inversa de Fourier. Estas séries apresentam distribuição estacionária Gaussiana e expoente de escala  $h_{emb-alea}(z)$ .

Considerando que as três contribuições são independentes e usando a relação (3.24) é possível quantificar a contribuição das correlações como

$$h_{cor}(z) = h(z) - h_{emb}(z),$$

a influência da não Gaussianidade da distribuição

$$h_{PDF}(z) = h_{emb}(z) - h_{emb-alea}(z),$$

e das não-linearidades,

$$h_{emb-alea}(z) \equiv h_{nlin}(z) = h(z) - h_{cor}(z) - h_{PDF}(z).$$

A multi-fractalidade de uma série temporal pode ser avaliada através das diferenças nos expoentes de escala para os valores de  $z_{max}$  e  $z_{min}$ , que para os casos estudados variam entre

---

<sup>17</sup>A metade dos elementos da série é atribuída uma fase aleatória e à metade restante são atribuídos os respectivos conjugados. As amplitudes permanecem inalteradas.

+19.5 e  $-20$ <sup>18</sup>. Analiticamente,

$$\Delta h = h(q_{\min}) - h(q_{\max}). \quad (3.29)$$

Para um monofractal  $\Delta h = 0$ , *i.e.*, uma dependência linear de  $\tau(z)$  com  $z$ . A eq. (3.29) pode ser utilizada para as várias séries e a partir dos vários  $\Delta h$  determinar o peso relativo de cada uma.

Para cada observável, lucro e volume, todas as curvas foram construídas fazendo médias do valor  $\tau(z)$ , para cada  $z$ , sobre as 30 companhias.

### 3.4.1 Resultados para o volume

Na fig. 3.20 estão representados, respectivamente,  $f(\alpha)$  vs.  $\alpha$  e  $\tau(z)$  vs.  $z$  obtidos a partir das médias feitas sobre as companhias do DJ30. É possível verificar-se que a série original e a série embaralhada apresentam forte carácter multifractal com os expoentes extremos para as séries “originais” valendo  $\alpha_{\min} = 0.32 \pm 0.04$  e  $\alpha_{\max} = 1.09 \pm 0.04$ . As séries embaralhada+fase aleatória apresentam um carácter multifractal bem menos pronunciado. Ou seja, as curvas  $f_{emb-alea}(\alpha)$  são bem mais estreitas na abcissa  $\alpha$ , o que corresponde a dependência quase linear de  $\tau_{emb-alea}$ , assim como a importância no carácter multi-fractal das séries de volumes da forma não Gaussiana das distribuições.

Para  $z = 2$  obteve-se  $h(2) \equiv H = 0.71 \pm 0.03$  para as séries puras o que está de acordo com a forte persistência encontrada noutros trabalhos sobre volume. O mesmo expoente de escala foi

---

<sup>18</sup>Teoricamente  $z_{\max} = +\infty$  e  $z_{\min} = -\infty$ . A escolha dos valores apresentados está relacionada com a comparação entre resultados numéricos e analíticos de vários modelos mono e multifractais que garante qualidade nos resultados para séries de comprimentos da ordem das séries DJ30 para valores de  $z$  entre  $-20$  e  $20$  [197].

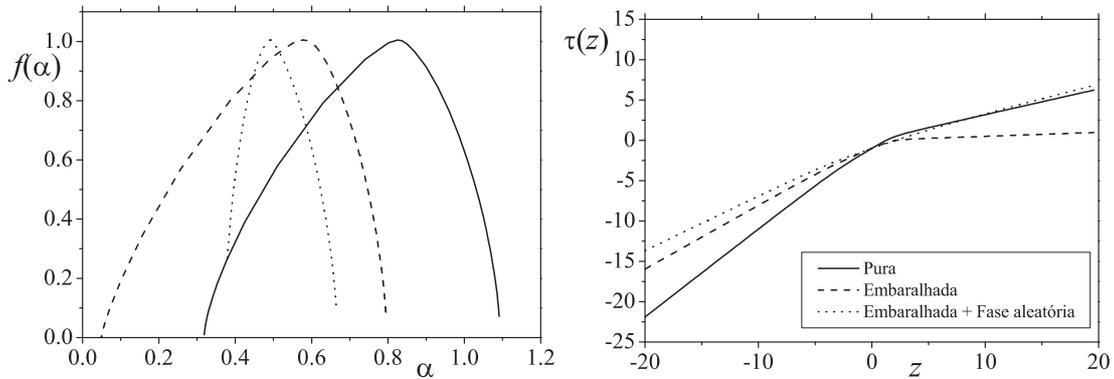


Figura 3.20: Lado esquerdo: Espectro multi-fractal  $f(\alpha)$  vs.  $\alpha$ . Lado direito: Expoentes de escala  $\tau(q)$  vs.  $q$  mediada sobre as 30 companhias. A legenda na direita é válida para a esquerda. As séries pura e embaralhada apresentam um forte carácter multi-fractal, enquanto que a série embaralhada+fase aleatória apresenta uma largura estreita na abcissa  $\alpha$ . Este facto está relacionado com o comportamento quase linear de  $\tau_{emb-alea}(q)$  e também devido à forte contribuição da não-Gaussianidade da distribuição de probabilidade do volume transaccionado para a multi-fractalidade da observável. [em P10]

determinado para as séries embaralhadas e embaralhada+fase aleatória tendo-se obtido valores de  $H = 0.49 \pm 0.03$  e de  $H = 0.5 \pm 0.03$ , respectivamente. Considerando margens de erro, estes valores são compatíveis com o valor  $H = 1/2$  do movimento Browniano. Além do mais, foi analisado um conjunto de séries temporais em que apenas as fases foram modificadas aleatoriamente. Para esta série apresentou um expoente de Hurst  $H = 0.7 \pm 0.03$ . Daqui se conclui que o carácter persistente nas séries temporais de volumes é devido às correlações lineares.

Relativamente aos resultados para as diferenças entre os expoentes de escala, eq. (3.29), obteve-se  $\Delta h = 0.675$ ,  $\Delta h_{cor} = 0.027$ ,  $\Delta h_{PDF} = 0.445$  e  $\Delta h_{nlin} = 0.203$ . Como pode ser verificado, as correlações lineares têm uma contribuição muito reduzida para a natureza

multi-fractal do volume com  $\Delta h_{cor}$  correspondendo a 4% de  $\Delta h$ . Este valor é substancialmente menor do que a influência das não-linearidades com  $\Delta h_{nlin}$  a corresponder a 30% de  $\Delta h$ . Este resultado está de acordo com a verificação apresentada na secção anterior, em que se mostrou que este tipo de dependência é mais forte e duradoura quando comparada com as correlações lineares. Finalmente, pode verificar-se que a não-Gaussianidade,  $\Delta h_{PDF}$ , corresponde a 66% de  $\Delta h$ .

A forte assimetria em  $f(\alpha)$  pode indicar que as pequenas e as grandes flutuações tem origens diferentes.

### 3.4.2 Resultados para os lucros

Na fig. 3.21 estão representados, respectivamente,  $f(\alpha)$  vs.  $\alpha$  e  $\tau(z)$  vs.  $z$ , obtidos a partir das médias feitas sobre as séries de lucro das companhias do DJ30. Mais uma vez, é verificável comportamento fractal nos três tipos de série, sendo que, novamente as séries pura e embaralhada mostram um maior grau de multi-fractalidade. Os expoentes de Hölder mínimo e máximo para as séries puras valem, respectivamente,  $\alpha_{\min} = 0.28 \pm 0.04$  e  $\alpha_{\max} = 0.83 \pm 0.04$ . Analisando os valores de  $\Delta h$ , verifica-se que para as séries puras  $\Delta h = 0.438$ ,  $\Delta h_{cor} = 0.140$  (32%),  $\Delta h_{PDF} = 0.093$  (21%) e  $\Delta h_{nlin} = 0.205$  (47%). Comparando com os resultados para os volumes, as séries de lucro têm um carácter multi-fractal muito menos pronunciado, com uma razão entre  $\Delta h$ 's de 2 para 3. A forte diminuição do peso da não-Gaussianidade na natureza multi-fractal do lucro é facilmente entendível. A distância entre a distribuição  $F$  e uma Gaussiana é superior à distância entre esta e uma ( $q = 1.3$ )-Gaussiana, que descreve muito bem

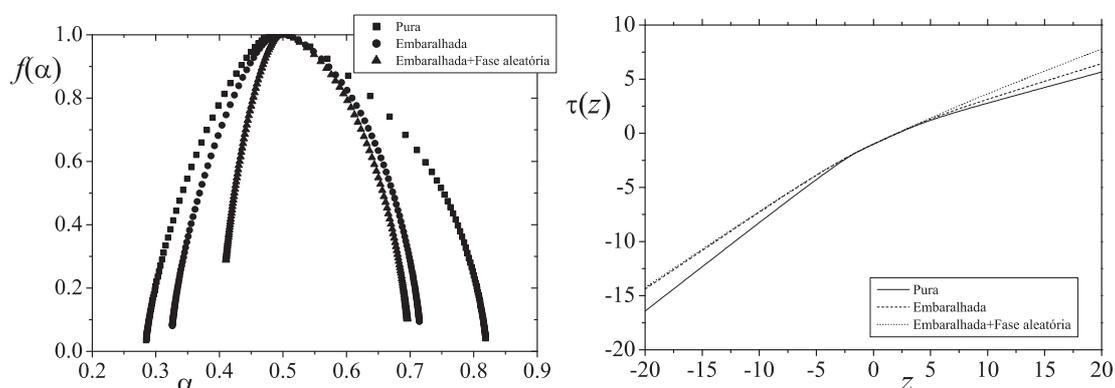


Figura 3.21: Lado esquerdo: Espectro multi-fractal  $f(\alpha)$  vs.  $\alpha$ . Lado direito: Expoentes de escala  $\tau(q)$  vs.  $q$  mediada sobre as 30 companhias. A legenda na direita é válida para a esquerda. As séries pura e embaralhada apresentam um forte carácter multi-fractal, enquanto que a série embaralhada+fase aleatória apresenta uma largura estreita na abcissa  $\alpha$ . Este facto está relacionado com o comportamento quase linear de  $\tau_{emb-alea}(q)$  e também devido à forte contribuição da não-Gaussianidade da distribuição de probabilidade do volume transaccionado para a multi-fractalidade da observável. [em P09]

as distribuições de lucro (de acordo com a fig. 5.9)<sup>19</sup>. Esta diminuição afecta logicamente os restantes pesos relativos.

### 3.5 O triplete não-extensivo e observáveis financeiras

Os sistemas caracterizados pelo formalismo de Boltzmann-Gibbs apresentam as seguintes características[67]:

<sup>19</sup>Isto pode ser verificado usando a entropia de Kullback-Leibler. A distância entre a distribuição  $F$  para o NASDAQ e uma Gaussiana normalizada entre 0 e  $+\infty$  com a mesma média e variância é de 0.197 (no intervalo entre 0 e 100). A distância entre uma  $q$ -Gaussiana com  $q = 1.3$  e uma Gaussiana é de 0.034 (no intervalo entre  $-50$  e  $50$ ). Os resultados foram obtidos por integração numérica. Os intervalos foram escolhidos por terem o mesmo comprimento e conterem, no mínimo, 99.(9)% da probabilidade de cada uma das distribuições de probabilidade consideradas.

- A sua distribuição de probabilidades para energias é proporcional a uma função exponencial em presença de um termostato;
- Forte sensibilidade às condições iniciais, i.e., esta quantidade cresce exponencialmente com o tempo apresentando um valor positivo para o expoente máximo de Lyapunov;
- Apresentam tipicamente, para quantidades macrocópicas, um decaimento exponencial com um tempo de relaxação.

Resumindo, estes três comportamentos são caracterizados por funções exponenciais,  $q = 1$ . Analogamente, foi conjecturado que, para sistemas que podem ser estudados segundo o formalismo não-extensivo, a distribuição de probabilidades da energia (associadas a estacionaridade ou meta-equilíbrio), a sensibilidade às condições iniciais e a relaxação podem ser descritas por três índices entrópicos, explicitamente,  $q_{stat}$ ,  $q_s$  e  $q_{rel}$ , sendo este conjunto denominado *q-triplete*.

A primeira verificação física deste cenário foi feita a partir da análise de dois conjuntos de séries diárias da intensidade do campo magnético no vento solar registadas pela Voyager 1 [202]. Para sistemas não-Hamiltonianos, não existe distribuição de energia, por isso  $q_{stat}$  não pode ser definido da forma acima descrita. Contudo,  $q_{stat}$  pode ser estimado a partir da distribuição estacionária da variável.

Foi já demonstrado numericamente e analiticamente, para uma variedade de sistemas unidimensionais não-extensivos, a validade da seguinte relação entre sensibilidade às condições iniciais e

estrutura multifractal[203],

$$\frac{1}{1 - q_s} = \frac{1}{\alpha_{\min}} - \frac{1}{\alpha_{\max}}.$$

Usando os valores obtidos para a estrutura multifractal dos volumes e dos lucros tem-se,  $q_s = 0.55 \pm 0.08$ ,  $q_s = 0.58 \pm 0.10$ . Para o caso dos lucros, o expoente das caudas apenas depende de  $q_{stat} = 1.31 \pm 0.02$ , verifica-se que, dentro das margens de erro, a relação dual

$$q_s + q_{stat} = 2,$$

é verificada. Desta forma, levando em conta o decaimento rápido da função de correlação dos lucros, pode dizer-se que as flutuações de preço para as acções DJ30 são caracterizadas pelo  $q$ -tripleto,

$$\{q_{stat}, q_s, q_{rel}\} = \{1.31 \pm 0.02, 0.58 \pm 0.10, 1\}.$$

## Capítulo 4

# Modelos Heterosquedásticos para Lucro

Como se viu no capítulo anterior, as séries temporais de lucro têm como propriedades básicas, a forte não-Gaussianidade para escalas de tempo inferiores a 3 meses; descorrelação para diferenças de tempo superiores a alguns minutos e forte carácter intermitente. Adicionalmente, a magnitude dos lucros, ou o seu quadrado, directamente relacionadas com a quantidade não-observável *volatilidade*, apresentam correlações duradouras que, são bem ajustadas por uma lei de potência, ou por um conjunto de exponenciais.

A verificação do carácter intermitente das séries de lucros (e da volatilidade) levou à definição de uma classe de processos estocásticos que pode descrever a dinâmica de preços a um nível macroscópico. Explicitamente, é usual considerar-se que as variáveis estocásticas de uma determinada série temporal estão associadas a uma certa distribuição, estacionária, e a momentos estatísticos independentes do tempo. Este tipo de processo é na linguagem da matemática aplicada definido como *homosquedástico*. Um exemplo clássico deste tipo de processo é, obviamente, o passeio aleatório tradicional onde a probabilidade de se ter um determinado valor para

o deslocamento entre passos consecutivos é constante no tempo. Todavia, diversos fenómenos tais como: terremotos [204], a variação de pressão atmosférica na região do Pacífico decorrente do *El Niño* [205], sinais electroencefalográficos [206] e séries de lucros em finanças parecem não seguir esta regra. Concretamente, os processos referidos parecem apresentar momentos estatísticos dependentes do tempo, podendo, por isso, ser classificados como processos *heterosquedásticos*. Uma forma simples de se criar um processo heterosquedástico será considerar um processo que tem a mesma forma funcional da distribuição de probabilidades para os incrementos (para todos os instantes  $t$ ), mas cuja largura varia no tempo. Esta representação pode ser aplicada a várias séries económico-financeiras tais como: variações de preço, média e variância da inflação [6].

Com o objectivo de reproduzir este tipo de comportamentos, ROBERT F. ENGLE apresentou um modelo que foi baptizado de *autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH)*[207]. O trabalho de ENGLE é considerado como um dos pilares da econometria e da matemática financeira juntamente com o modelo de Black-Scholes para determinação dos preços de opções [147]. Apesar de terem surgido diversas generalizações [208][209] que permitem a obtenção de resultados muito satisfatórios, ele é até hoje aplicado como uma primeira aproximação em diversos problemas económicos [210][211]. Por todas estas razões foi outorgado em 2003 o Prémio em Ciências Económicas do Banco da Suécia em Memória de Alfred Nobel a R.F. ENGLE *“por métodos para análise de séries temporais económicas com volatilidade variante no tempo (ARCH)”*.

Para além das comprovadas aplicações a finanças, as suas características permitem que este modelo seja aplicado com sucesso à caracterização de diversos processos com origem física [212].

No que se segue, introduzir-se-á o modelo  $ARCH(s)$  bem como a mais bem sucedida e aplicada das suas várias generalizações, o  $GARCH(s, r)$  [213]. Serão apresentadas as suas características fundamentais e após, far-se-á a sua conexão com o formalismo não-extensivo.

## 4.1 O processo $ARCH$

Seguindo o artigo original de ENGLE [207], defina-se uma série temporal heterosquedástica condicionalmente auto-regressiva como um processo estocástico discreto,  $z_t$ ,

$$z_t = \sigma_t \omega_t, \quad (4.1)$$

onde  $\omega_t$  representa uma variável independente e identicamente distribuída com média nula e variância unitária, i.e.,  $\langle \omega_t \rangle = 0$  e  $\langle \omega_t^2 \rangle = 1$ . Habitualmente, este ruído é considerado Gaussiano, mas é prática comum serem utilizados ruídos com outras distribuições.

Segundo a sua definição a *volatilidade*,  $\sigma_t$ , é uma quantidade positiva variável no tempo e dependente dos valores passados de  $z_t$ , ao qual se chamará de *retorno* (equivalente ao lucro).

De acordo com a definição (4.1), o processo apresenta média zero,

$$\langle z_t \rangle = \langle \sigma_t \rangle \langle \omega_t \rangle = 0,$$

é descorrelacionado

$$\langle z_t z_{t'} \rangle = \langle \sigma_t \sigma_{t'} \rangle \langle \omega_t \omega_{t'} \rangle = \langle \sigma_t \sigma_{t'} \rangle \delta_{tt'},$$

e apresenta uma variância condicionada,  $\sigma_t^2$ , que evolui no tempo.

Conseqüentemente, os parâmetros que definem a distribuição de probabilidade local, especificamente o desvio padrão, são flutuantes. Porém, como se verá adiante, essa dependência local não impede a existência de propriedades estatísticas de longo curso bem definidas.

No artigo onde é apresentada a definição de *ARCH*, ENGLE propõe também uma forma simples para o cálculo de  $\sigma_t$ ,

$$\sigma_t^2 = a + \sum_{i=1}^s b_i z_{t-i}^2. \quad (4.2)$$

Assim o processo *ARCH* ( $s$ ) é definido por duas equações acopladas,

$$\begin{cases} z_t = \sqrt{a + \sum_{i=1}^s b_i z_{t-i}^2} \omega_t \\ \sigma_t^2 = a + \sum_{i=1}^s b_i \sigma_{t-i}^2 \omega_{t-i}^2, \end{cases} \quad (4.3)$$

onde  $a, b_i \geq 0$ . O conjunto de valores  $\{b_i\}$  é o responsável pela introdução de “memória” no processo. A ordem de memória, definida pelo valor de  $s$  em eq. (4.3), caracteriza o processo *ARCH* como *ARCH* ( $s$ ). A forma da distribuição de  $\omega$ , juntamente com  $a$  e  $\{b_i\}$ , definem *completamente* as propriedades do processo em causa. Por exemplo, quando  $b_i = 0$  ( $\forall i$ ), não existe introdução de memória e conseqüentemente o processo *ARCH* ( $s$ ) reduz-se à geração de um ruído  $\omega_t$  multiplicado  $\sqrt{a}$ .

Para o caso  $s = 1$ , i.e.,  $b_1 \equiv b$  e  $b_i = 0$  ( $i = 2, 3, \dots$ ), que representa o mais emblemático de todos os processos *ARCH* ( $s$ ), podem verificar-se as seguintes propriedades estatísticas por análise das eqs. (4.1) e (4.2):

- O segundo momento da distribuição estacionária  $P(z)$  é dado por

$$\sigma^2 \equiv \langle z_t^2 \rangle = \langle \sigma_t^2 \rangle = \frac{a}{1-b}, \quad (b < 1); \quad (4.4)$$

- e o quarto momento vale

$$\langle z^4 \rangle = a^2 \langle \omega_t^4 \rangle \frac{1+b}{(1-b)(1-b^2 \langle \omega_t^4 \rangle)}. \quad (4.5)$$

Por mera simplificação, pode considerar-se que o processo  $ARCH(s)$  gera uma série temporal de variância unitária, i.e.,  $\sigma^2 = 1$ , e por isso  $a = 1 - b$ . Neste caso, o quarto momento é numericamente igual à curtósis,  $k_x \equiv \frac{\langle x^4 \rangle}{\langle x^2 \rangle^2}$ , tendo-se

$$\langle z_t^4 \rangle = k_z = k_\omega \left[ 1 + b^2 \frac{k_\omega - 1}{1 - k_\omega b^2} \right], \quad (k_\omega b^2 < 1). \quad (4.6)$$

Pela eq. (4.6), é directo entender-se que qualquer que seja a forma de  $P_n(\omega)$ , o processo  $ARCH(1)$  gera distribuições de probabilidade  $P(z)$  com decaimento mais lento e naturalmente com a curtósis  $k_z > k_\omega$  [215][216][217][218][219]. Observe-se na fig. 4.1 exemplos típicos para ruído gaussiano.

Apesar de ser descorrelacionado no retorno, o modelo  $ARCH(1)$  apresenta correlações na volatilidade que decaem exponencialmente com um tempo característico da ordem de  $|\ln b|^{-1}$ . Este facto, não condizente com as verificações empíricas de uma correlação de longa duração na volatilidade, implicaria na utilização de processos  $ARCH(s)$  com  $s \gg 1$ . Tal, introduz dificuldades de aplicação, a começar pela determinação dos vários  $b_i$  através de um processo de máxima semelhança [216].

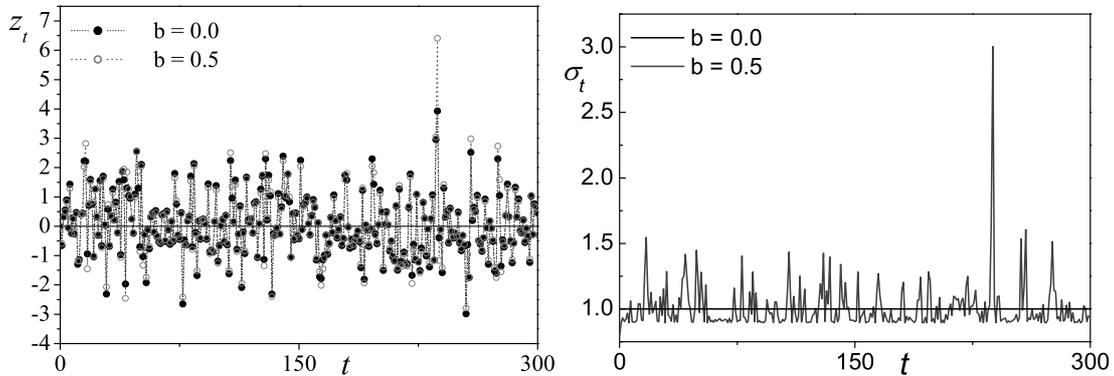


Figura 4.1: Lado esquerdo: Dois exemplos de séries temporais geradas pelo processo  $ARCH(1)$  para um ruído Gaussiano,  $q_n = 1$ . A magnitude da memória (peso do valor  $z_{t-1}$ , i.e.  $b > 0$ ) aumenta a probabilidade da obtenção de grandes valores de  $|z_t|$ , ou seja, de caudas longas em  $P(z)$ . O valor mais elevado para  $t = 237$  não é virtualmente observável quando  $b = 0$ . Lado direito: Dependência temporal da volatilidade,  $\sigma$ , para os processos  $ARCH(1)$  da figura ao lado. O maior valor de  $\sigma$  ocorre para  $t = 238$ . [em **P02**]

Estas dificuldades inspiraram T. BOLLERSLEV, antigo aluno e colaborador de ENGLE, a introduzir uma generalização do processo  $ARCH(s)$ , conhecida na literatura como  $GARCH(s, r)$  [213][214]<sup>1</sup>.

## 4.2 O processo $GARCH$

A generalização do processo originalmente proposto por ENGLE corresponde à substituição da eq. (4.2) por

$$\sigma_t^2 = a + \sum_{i=1}^s b_i z_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^r c_i \sigma_{t-i}^2, \quad (a, b_i, c_i \geq 0). \quad (4.7)$$

<sup>1</sup>Na realidade a mesma forma foi apresentada de forma independente em 1986 por T. Bollerslev na ref. [213] e por S.J. Taylor, mas este apenas para o caso  $(1, 1)$ . Apesar do trabalho de Taylor ser constantemente citado ao lado do trabalho de Bollerslev, é habitual os créditos da generalização serem nominalmente atribuídos ao último.

Basicamente, a diferença entre as eqs. (4.2) e (4.7) reporta-se à dependência explícita da volatilidade nos seus valores passados. Isto introduz uma maior flexibilidade e uma reprodução mais fiel de séries temporais com um simples processo  $GARCH(1, 1)$ . Tal como o seu predecessor, o  $GARCH(s, r)$  também capta a tendência para uma agregação da volatilidade. Isto é, grandes(pequenos) valores de  $z_t$  são habitualmente seguidos de grandes(pequenos) valores. Mais precisamente, apesar do sinal arbitrário de  $\omega_t$ , pode ser verificado que, muito embora descorrelacionados,  $\langle |z_t| |z_{t'}| \rangle$  não é proporcional a  $\delta_{tt'}$ . Para o caso  $GARCH(1, 1)$ , BOLLERSLEV demonstrou [213] que a covariância de  $z_t^2$ ,

$$cov(z_t^2, z_{t'}^2) \equiv \langle z_t^2 z_{t'}^2 \rangle - \langle z_t^2 \rangle \langle z_{t'}^2 \rangle,$$

decrece como uma lei exponencial com tempo característico

$$\tau \equiv |\ln(b_1 + c_1)|^{-1}. \quad (4.8)$$

Muito embora não estar, mais uma vez, de acordo com as verificações empíricas, está comprovado que a utilização de um valor de  $c \gtrsim 0.7$  induz um aumento substancial no tempo de decaimento da função de correlação que pode aproximar-se significativamente à forma real [208]. É directo identificar-se que um processo  $GARCH(s, r)$ , para o qual todos os  $c_i$  são nulos, corresponde a um processo  $ARCH(s)$ . Veja-se nas figs. 4.2 e 4.3.

Foque-se a partir daqui a atenção no  $GARCH(1, 1)$ , que se mostra suficiente para reproduzir uma parte significativa das série financeiras. Neste caso,

$$\sigma_t^2 = a + b z_{t-1}^2 + c \sigma_{t-1}^2, \quad (4.9)$$

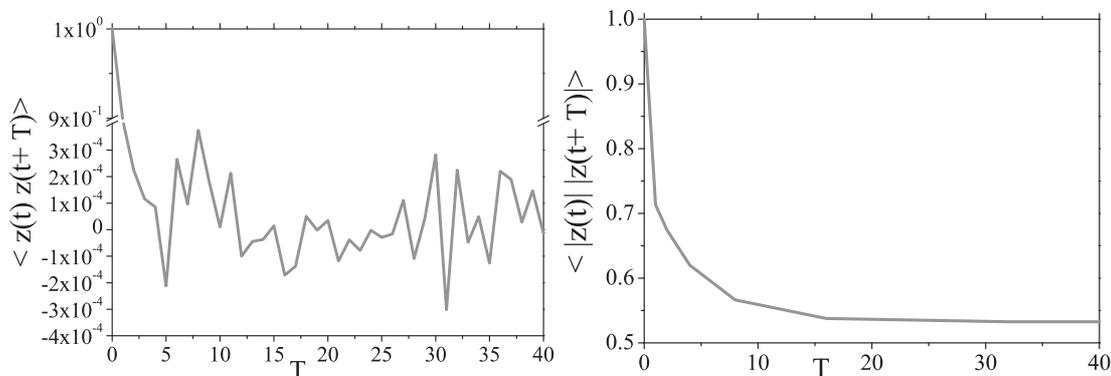


Figura 4.2: Lado esquerdo: Séries típicas para um processo  $GARCH(1, 1)$  obtidas a partir de um ruído Gaussiano,  $q_n = 1$ . É verificável que a introdução do parâmetro  $c$  aumenta a probabilidade de obtenção de grandes valores  $|z_t|$ , aumentando assim as caudas em  $P(z)$ . Lado direito: Dependência da da volatilidade,  $\sigma$ , para os processos apresentados na figura do lado. Pode ver-se claramente a diferença entre  $c = 0$  e  $c \neq 0$ , ou seja entre  $ARCH(1)$  e  $GARCH(1, 1)$ . Para o mesmo valor de  $b$  podem obter-se maiores valores de  $\sigma$ , o que torna as caudas em  $P(z)$  mais longas. [em P06]

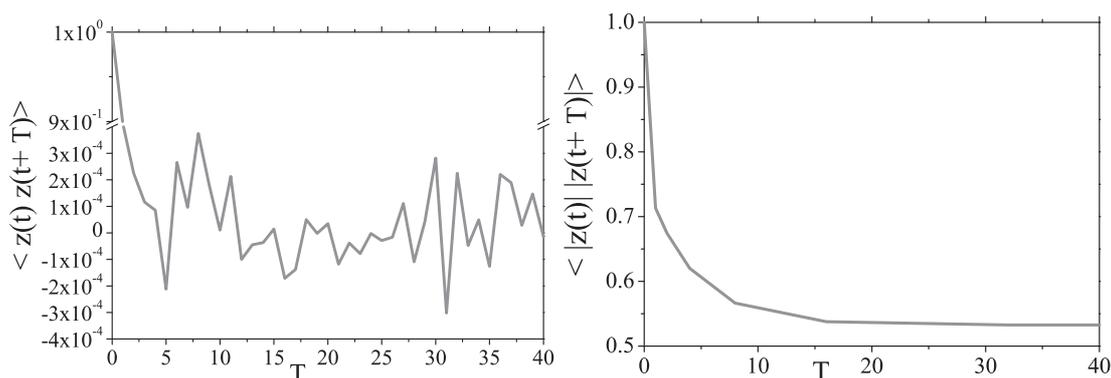


Figura 4.3: Lado esquerdo: Correlação entre  $z_t$  e  $z_{t+T}$  vs. distância temporal  $T$ . Todos os valores, excepto quando  $T = 0$ , estão ao nível de ruído. Lado direito: Correlação entre valores absolutos dos retornos em função da distância temporal. Para este caso, a correlação apresenta um decaimento com  $T$ . Os valores utilizados para o processo  $GARCH(1, 1)$  foram  $b = 0.4$  e  $c = 0.4$ . [em P06]

de tal forma que o processo é completamente definido quando  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , e a natureza do ruído,  $P_n(\omega)$ , são especificados.

Combinando as eqs. (4.1) e (4.9) pode verificar-se que

$$\sigma_t^2 = a + (b\omega_{t-1}^2 + c) \sigma_{t-1}^2,$$

que corresponde à classe de processos com ruído multiplicativo. Por aqui também se observa que o *GARCH* (1, 1) corresponde a um processo Markoviano em  $z_t^2$ , descorrelacionado em segunda ordem para  $z_t$ , mas com correlações (ou dependências) de ordem superior.

Relativamente aos momentos de ordem  $n$  da distribuição estacionária  $P(z)$ , pode verificar-se que o segundo momento vale,

$$\bar{\sigma}^2 \equiv \langle z_t^2 \rangle = \langle \sigma_t^2 \rangle = \frac{a}{1 - b - c}, \quad (b + c < 1), \quad (4.10)$$

e o quarto,

$$\langle z_t^4 \rangle = a^2 \langle \omega_t^4 \rangle \frac{1 + b + c}{(1 - b - c)(1 - 2bc - c^2 - b^2 \langle \omega_t^4 \rangle)}. \quad (4.11)$$

A condição  $b + c < 1$  é na realidade muito importante, pois garante que o processo pode corresponder exactamente a um processo *ARCH* ( $s$ ) de ordem infinita [220]. Novamente, se o processo *GARCH* (1, 1) gerar, séries com variância estacionária unitária,  $\bar{\sigma}^2 = 1$ , tem-se a condição  $a = 1 - b - c$ . Assim, tem-se

$$\langle z_t^4 \rangle = k_z = k_\omega \left( 1 + b^2 \frac{k_\omega - 1}{1 - c^2 - 2bc - b^2 k_\omega} \right), \quad (4.12)$$

onde  $c^2 + 2bc + b^2 k_\omega < 1$ . Também aqui, como na eq. (4.6), é claro que o processo  $GARCH(1,1)$  gera distribuições  $P(z)$  que apresentam caudas mais extensas do que as da distribuição do ruído  $P_n(\omega)$  e do que as que são obtidas através de um processo  $ARCH(s)$  com o mesmo  $b$  [218][219]. É também possível ver que o parâmetro  $c$  é apenas útil quando  $b \neq 0$ . De outra forma, o  $GARCH(1,1)$  reduz-se à reconstrução da distribuição de probabilidades em que  $k_z = k_\omega$ .

### 4.3 Conexão entre as distribuições em processos heterosquedásticos e não-extensividade

#### 4.3.1 Distribuição para retornos

Como foi visto, os processos heterosquedásticos podem ser resumidos à geração de variáveis estocásticas localmente associadas a uma dada distribuição cuja variância é actualizada a cada instante. Este cenário é, em tudo similar ao introduzido por BECK & COHEN para a superestatística apresentado na secção 2.5 e que tem uma relação íntima com o formalismo não-extensivo. Para este caso, o parâmetro a actualizar é a variância instantânea, ou seja, a volatilidade. Como, quer o  $ARCH(s)$ , quer o  $GARCH(s,r)$  são processos discretos de formação de ruído, a estacionaridade local é automaticamente verificada e conseqüentemente a escala de evolução da volatilidade  $\sigma_t$ ,  $T = 1$ , é muito maior do que a escala de equilíbrio local, ver fig. 4.4. Baseado então nesta equivalência, é feita a proposta que a distribuição independente do

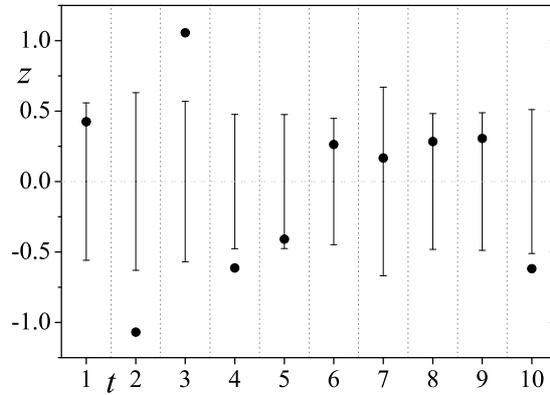


Figura 4.4: Ilustração superestatística para os 10 primeiros passos de um processo  $GARCH(1,1)$  com  $a = b = 0.4$  e ruído Gaussiano. Para este caso, cada passo temporal (cada célula), é caracterizada por uma dada largura (linha a cheio) da Gaussiana local que se encontra associada ao valor de  $z$  obtido (círculos). [em **P06**]

tempo,  $P(z)$ , poderá ser descrita por uma  $q$ -Gaussiana, lembrando,

$$p(z) = \frac{\mathcal{A}}{[1 + \mathcal{B} (q-1) z^2]^{\frac{1}{q-1}}}, \quad \left( q < \frac{5}{3} \right), \quad (4.13)$$

onde

$$\mathcal{B} \equiv \frac{1}{\bar{\sigma}^2 (5 - 3q)}, \quad (4.14)$$

$$\bar{\sigma}^2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 p(z) dz, \quad (4.15)$$

e

$$\mathcal{A} = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{q-1}\right]}{\sqrt{\pi} \Gamma\left[\frac{3-q}{2q-2}\right]} \sqrt{(q-1) \mathcal{B}}. \quad (4.16)$$

Analiticamente a proposta pode ser escrita como

$$P(z) \simeq p(z),$$

em que  $\bar{\sigma}^2 = 1$ .

Especificamente [138][140], será imposto que igualdade entre as eqs. (4.12) e (2.10) ( $\kappa = \frac{15-9q}{7-5q}$ ). Assume-se aqui que o ruído segue a distribuição generalizada,

$$P_n(\omega) = \frac{\mathcal{A}_{q_n}}{\left[1 + \frac{q_n-1}{5-3q_n} \omega^2\right]^{\frac{1}{q_n-1}}}, \quad \left(q_n < \frac{5}{3}\right), \quad (4.17)$$

definida pelo índice  $q_n$ . A sua variância é igual a 1 e  $\mathcal{A}_{q_n}$  é unicamente determinado por normalização.

É agora possível estabelecer uma relação entre os parâmetros  $b$ ,  $c$  e os índices entrópicos  $q_n$  e  $q$ :

$$b = \frac{\sqrt{(q-q_n)(f(q_n,q)-c^2 f(q,q_n))}}{f(q_n,q)} - \frac{c(q-q_n)}{f(q_n,q)}, \quad (4.18)$$

com

$$f(x, y) = (5 - 3x)(2 - y).$$

Para  $b = c = 0$  tem-se  $q = q_n$ . A eq. (4.18) encontra-se ilustrada na figura 4.5 para valores típicos de  $q_n$ .

Para  $c = 0$ , a relação (4.18) reduz-se à relação para o *ARCH* (1) apresentada na fig. 4.6,

$$b = \sqrt{\frac{(q - q_n)}{(5 - 3q_n)(2 - q)}},$$

ou

$$q = \frac{q_n + 2b^2(5 - 3q_n)}{1 + b^2(5 - 3q_n)}. \quad (4.19)$$

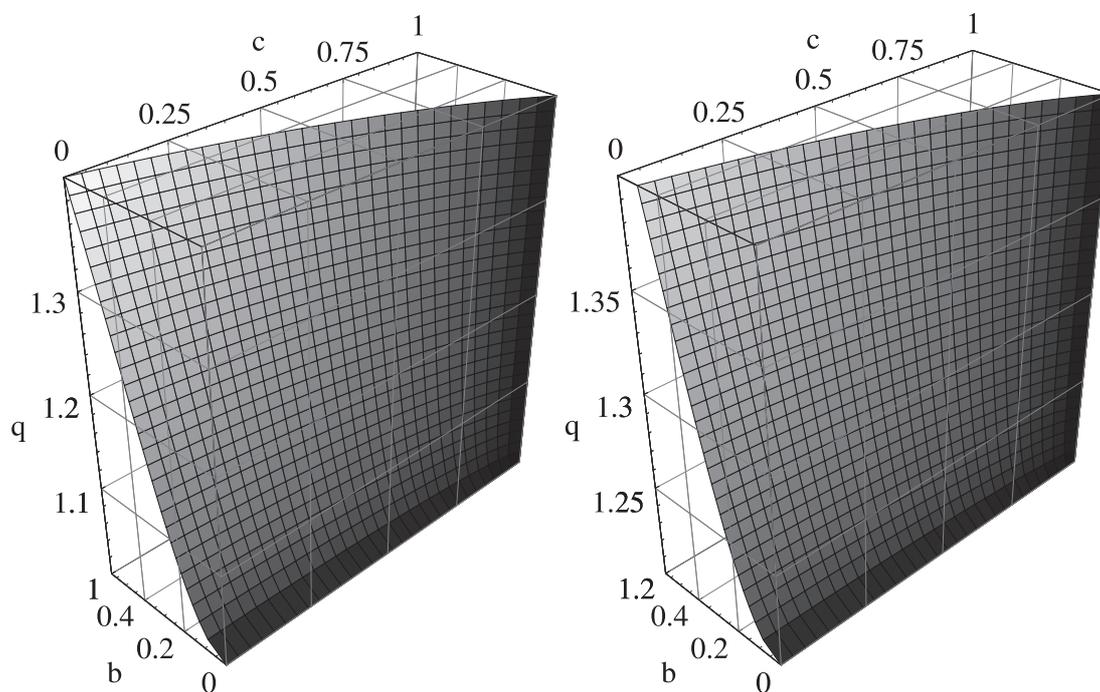


Figura 4.5: Diagramas  $(q, b, c)$  de processos  $GARCH(1, 1)$  com  $\langle z^2 \rangle = 0$  para  $q_n = 1$  (Lado esquerdo) e  $q_n = 1.2$  (Lado direito). No último caso o valor máximo possível para  $b$  (com  $c = 0$ ) é  $b = \frac{1}{\sqrt{4.2}} \simeq 0.488$ . [em P06]

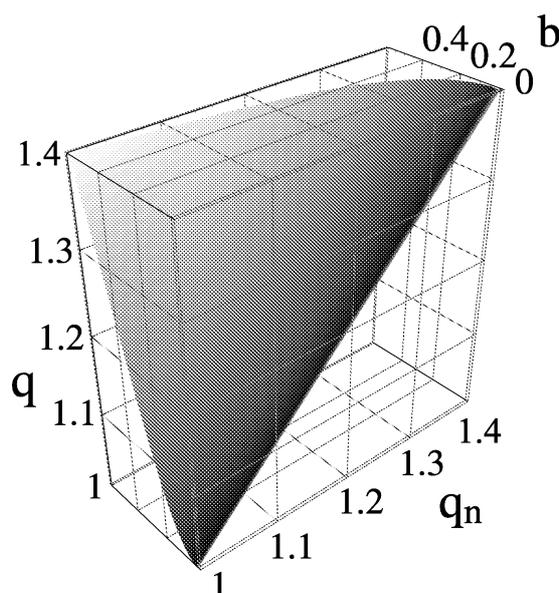


Figura 4.6: Diagrama  $(q, q_n, b)$  de processos  $ARCH(1)$  com  $\langle z^2 \rangle = 0$ . Quando  $b = 0$  obtém-se a recta  $q = q_n$ . [em P02]

Para verificar a proposta (4.18) foram gerados, para valores típicos de  $(b, c, q_n)$  e usando um algoritmo baseado nas eqs. (4.1) e (4.9), um conjunto de séries temporais. Depois, foi calculada a frequência relativa e esta comparada com os histogramas (referentes ao intervalo escolhido  $\delta$ ) associados com a distribuição  $q$ -Gaussiana em que  $q$  satisfaz a proposta apresentada. Isto é, foram comparadas as densidades de probabilidade numericamente obtidas com  $H(z)$  em que

$$H(z) = \int_{z+\delta/2}^{z+\delta/2} p(x) dx = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{q-1}\right]}{2\Gamma\left[\frac{1}{q-1}-\frac{1}{2}\right]} \sqrt{\frac{1-q}{\pi(3q-5)}} \\ \times \left\{ (\delta - 2z) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{q-1}; \frac{3}{2}; \frac{(q-1)(\delta-2z)^2}{4(3q-5)}\right) + (\delta + 2z) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{q-1}; \frac{3}{2}; \frac{(q-1)(\delta+2z)^2}{4(3q-5)}\right) \right\}, \quad (4.20)$$

onde  ${}_2F_1$  representa a função hipergeométrica. Como pode ser avaliado pelas figs. 4.7 e 4.8, a concordância entre  $P(z)$  e a distribuição (4.13), em que o valor de  $q$  satisfaz (4.18), é muito razoável. Os valores de  $b$  e  $c$  utilizados foram escolhidos de forma a que seja possível observar a qualidade geral da proposta (4.18) e que a variância e o quarto momento se mantenham finitos. Nas legendas das figuras apresenta-se o valor da função de erro  $\chi^2$ .

Outra forma de se avaliar a discrepância entre  $P(z)$  and  $p(z)$  (or  $H(z)$ ), é calcular-se o erro percentual no momento de sexta ordem entre as distribuições. Estes valores são apresentados na tab. 4.1 e mostram que as discrepâncias não são maiores do que 3%, o que na prática podem ser consideradas desprezáveis.

### 4.3.2 Distribuição para a volatilidade

Seguindo a analogia entre superestatística e os processos heterosquedásticos aqui apresentados, é possível determinar a distribuição estacionária para a volatilidade. Isto pode ser feito se em

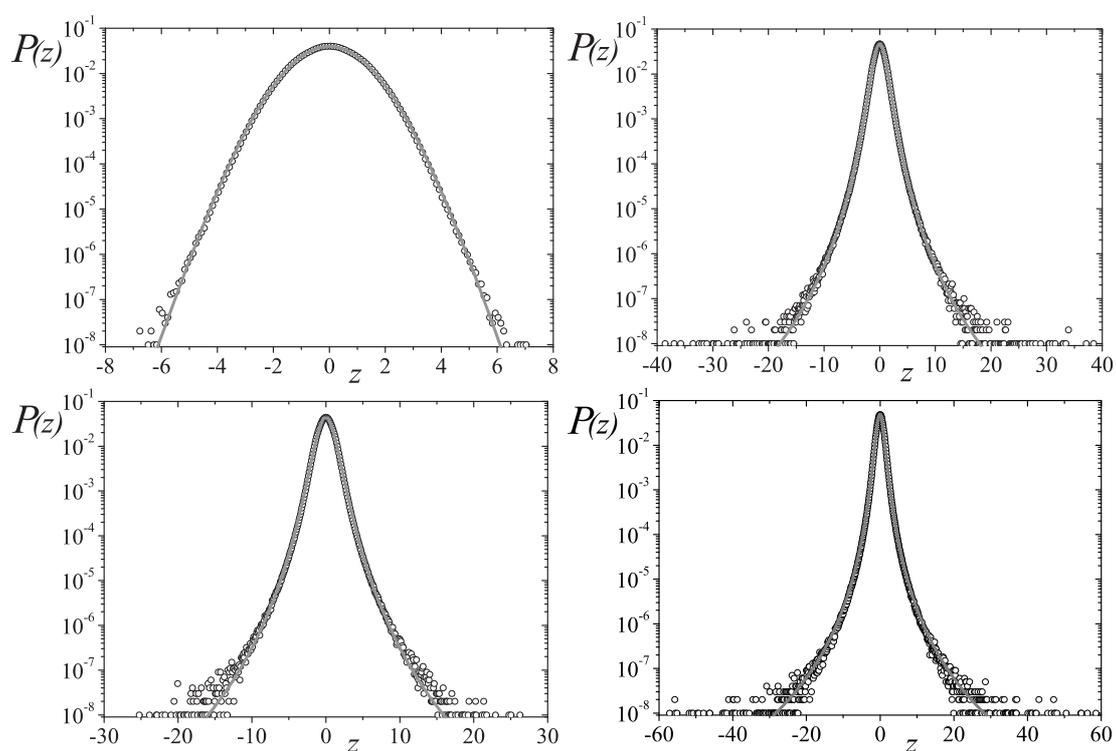


Figura 4.7: Histogramas/Densidade de probabilidade de processos  $GARCH(1, 1)$  com  $q_n = 1$  e valores típicos para os pares  $(b; c)$ . Em sentido horário:  $(0.1; 0.1)$ ,  $q = 1.021$  ( $\chi^2 = 2.35 \times 10^{-9}$ );  $(0.1; 0.88)$ ,  $q = 1.287$  ( $\chi^2 = 4.59 \times 10^{-10}$ );  $(0.4; 0.1)$ ,  $q = 1.26$  ( $\chi^2 = 2.44 \times 10^{-9}$ );  $(0.4; 0.4)$ ,  $q = 1.38$  ( $\chi^2 = 3.22 \times 10^{-7}$ ). [em P06]

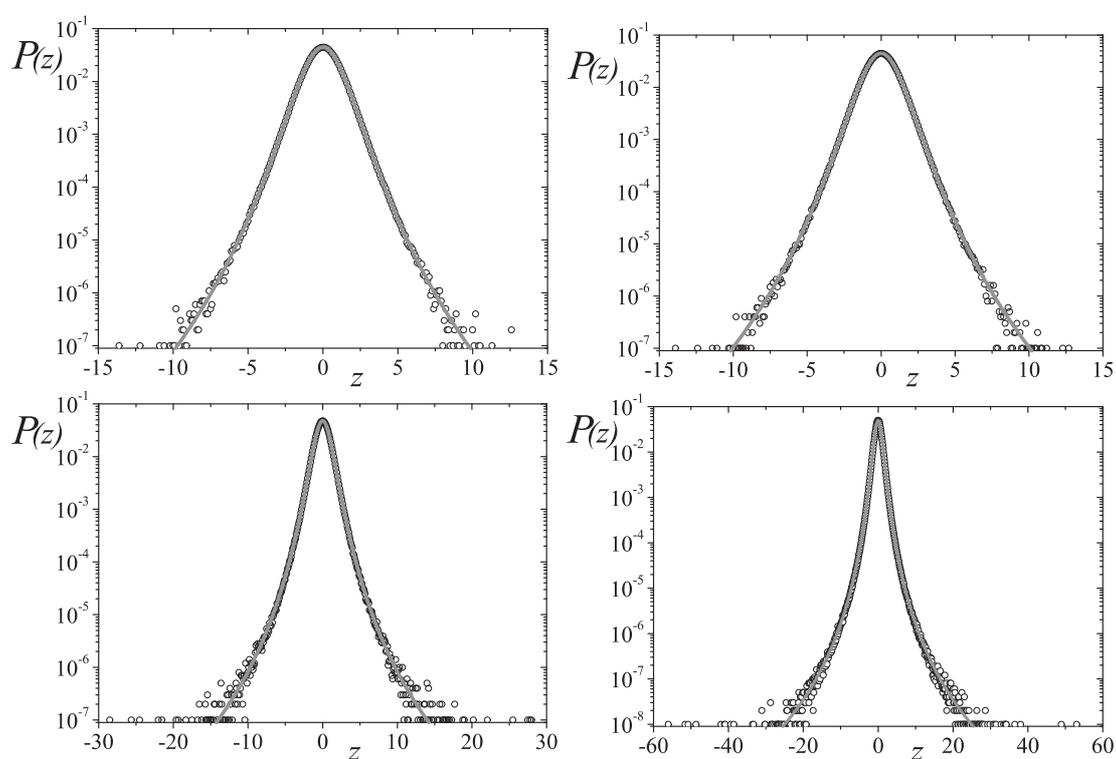


Figura 4.8: Histogramas/Densidade de probabilidade de processos  $GARCH(1, 1)$  com  $q_n = 1.2$  e valores típicos para os pares  $(b; c)$ . Em sentido horário:  $(0.1; 0.1)$ ,  $q = 1.211$  ( $\chi^2 = 8.67 \times 10^{-10}$ );  $(0.1; 0.5)$ ,  $q = 1.221$  ( $\chi^2 = 6.01 \times 10^{-10}$ );  $(0.3; 0.25)$ ,  $q = 1.310$  ( $\chi^2 = 8.11 \times 10^{-9}$ );  $(0.3; 0.45)$ ,  $q = 1.35$  ( $\chi^2 = 7.36 \times 10^{-9}$ ). [em P06]

Tabela 4.1: Erro percentual no momento de sexta-ordem entre as densidades de probabilidade numérica e da eq. (4.20) apresentadas nas figs. 4.7 e 4.8.

$q_n$	$b$	$c$	$\langle z^6 \rangle_{\text{numerico}}$	$\langle z^6 \rangle_{\text{proposta}}$	erro (%)
1	0.1	0.2	13.97	14.05	0.60
1	0.1	0.88	66.75	65.46	1.93
1	0.4	0.1	61.45	62.33	1.44
1	0.4	0.4	591.91	517.67	1.75
1.2	0.1	0.1	49.41	49.08	0.67
1.2	0.1	0.5	55.93	55.43	0.89
1.2	0.3	0.25	181.48	179.44	1.13
1.2	0.3	0.45	1416.41	1455.37	2.75

vez de se considerar o parâmetro intensivo,  $\beta$ , como o inverso da temperatura, este ser definido como uma quantidade proporcional ao inverso do segundo momento,  $\beta_\sigma = \frac{1}{2\sigma^2}$ . Probabilisticamente, isto significa que, para cada instante, o retorno segue uma  $q_n$ -Gaussiana condicionada a um segundo momento instantâneo,  $\sigma_t^2$ , que se encontra associado a uma distribuição de probabilidade,  $p_\sigma(\sigma^2)$ . A distribuição de probabilidade estacionária  $p(z)$  é então dada por

$$P_{\text{stationary}}(z) = \int_0^\infty p_\sigma(\sigma^2) p(z|\sigma^2) d(\sigma^2), \quad (4.21)$$

onde  $p(z|\sigma^2)$  é a probabilidade de se ter um valor para o retorno,  $z$ , dado que, para o segundo momento, o valor foi de  $\sigma^2$ . O caso homosquedástico corresponde a  $p_\sigma(\sigma^2) = \delta(\sigma^2 - \bar{\sigma}^2)$ .

Centrem-se as atenções, por agora, no caso de ruído Gaussiano ( $q_n = 1$ )

$$p(z|\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.22)$$

Assumindo uma linha inversa à da superestatística pode dizer que, se

$$p(z) = P_{stationary} \simeq P(z),$$

ou noutras palavras, se a  $q$ -Gaussiana, que é definida pela condição (4.18), corresponde à distribuição estacionária de um processo superestatístico, **então**, segundo a formulação superestatística, o processo heterosquedástico corresponderá a um processo superestatístico em que  $\beta_\sigma$  segue uma distribuição Gamma ou, alternativamente, em que  $\sigma^2$  segue a seguinte distribuição,

$$p_\sigma(\sigma^2) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\kappa\sigma^2}\right) (\sigma^2)^{-1-\lambda}}{(2\kappa)^\lambda \Gamma[\lambda]}, \quad (4.23)$$

onde

$$\kappa = \frac{1-q}{\bar{\sigma}^2(3q-5)}. \quad (4.24)$$

e

$$\lambda = \frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}. \quad (4.25)$$

A distribuição de probabilidade (4.23), muitas vezes referida como *distribuição Gamma invertida*, é também solução estacionária da equação de Fokker-Planck que se obtém de equações diferenciais estocásticas com ruído multiplicativo do tipo (usando notação Itô),

$$dx = -\gamma(x - \theta) dt + \kappa x dW_t, \quad (4.26)$$

também usada em modelos de volatilidade estocástica, mas obviamente numa abordagem contínua [221][222][223]. Esta semelhança está em total acordo com a estrutura de ruído multiplicativo para  $\sigma_t^2$ , eq. (4.7) e outros tipos de equações.

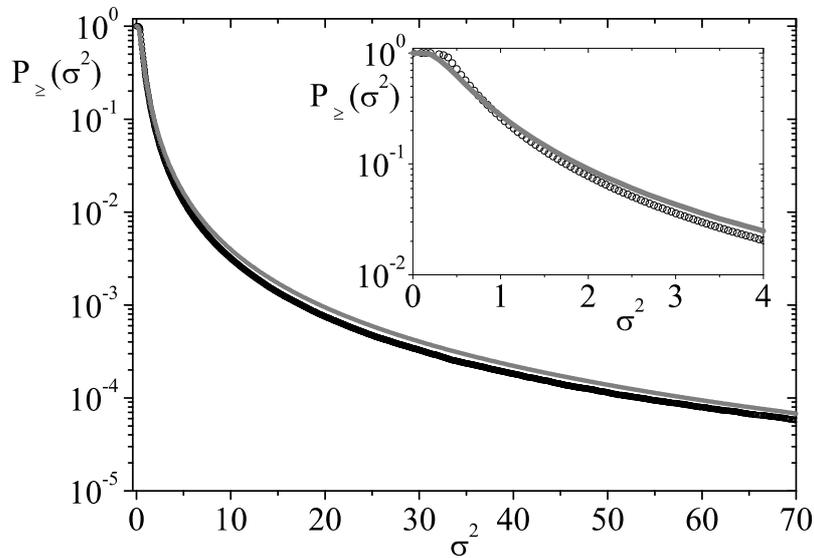


Figura 4.9: Os símbolos a preto representam a distribuição de probabilidade acumulada,  $P_{\geq}(\sigma^2)$  obtida por simulação numérica de um ruído Gaussiano com  $b = c = 0.4$ . A cinzento é apresentada a distribuição acumulada referente à eq. (4.23) em que  $(\kappa, \lambda, \bar{\sigma}^2) = (0.444, 2.125, 1)$  satisfazem as eqs. (4.24) e (4.25). [em **P06**]

Como pode ser avaliado na fig. 4.9, a proposta (4.18) conduz também a uma resposta bastante satisfatória para a descrição da distribuição de probabilidade do quadrado da volatilidade, corroborando a ligação entre a classe heterosquedástica de processo, mecânica estatística não-extensiva e superestatística. Expressões analíticas como (4.23), (4.25) e (4.24) podem ser úteis em aplicações relacionadas, entre outras, com preços de opções onde a previsão da volatilidade tem um papel importante.

Para o caso do ruído  $q_n$ -Gaussiano ( $q_n > 1$ ), argumentos semelhantes podem ser utilizados. Contudo, a obtenção de uma solução analítica para a eq. (4.21) que a generalize mostra-se bastante complexa.

Se, para a probabilidade condicionada,  $p(z | \sigma^2)$ , é conhecida uma resposta satisfatória,

$$p(z | \sigma^2) = \frac{\mathcal{A}_{(q_n, \sigma^2)}}{[1 + \mathcal{B}_{(q_n, \sigma^2)} (q_n - 1) z^2]^{\frac{1}{q_n - 1}}}, \quad (4.27)$$

o mesmo não acontece com  $p_\sigma(\sigma^2)$ . Assumindo uma aproximação contínua em  $q_n$ , uma possível proposta para decrever  $p_\sigma(\sigma^2)$  é

$$\begin{aligned} p_\sigma(\sigma^2) &\propto (\sigma^2)^{-1-\lambda} \exp_{q_\sigma} \left( -\frac{1}{2 \kappa \sigma^2} \right) \\ &= (\sigma^2)^{-1-\lambda} \left( 1 + \frac{q_\sigma - 1}{2 \kappa} \frac{1}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{1-q_\sigma}}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde  $q_\sigma$  é um índice que depende de  $q_n$ , i.e.,  $q_\sigma = q_\sigma(q_n)$  de tal forma que  $q_\sigma(q_n = 1) = 1$ . Para  $\sigma^2$  grande,

$$p_\sigma(\sigma^2) \sim (\sigma^2)^{-1-\lambda}. \quad (4.29)$$

O integral  $\int_0^\infty \sigma^2 p_\sigma(\sigma^2) d(\sigma^2)$  deverá ser igual ao valor médio  $\bar{\sigma}^2 = \frac{a}{1-b-c}$ . Isto implica,

$$\frac{1 + \lambda - \lambda q_\sigma}{2 \kappa (\lambda - 1)} = \bar{\sigma}^2, \quad (4.30)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^4 \int_0^{\infty} p_\sigma(\sigma^2) p(z | \sigma^2) d(\sigma^2) dz = 3 (\bar{\sigma}^2)^2 \frac{3q-5}{5q-7}. \quad (4.31)$$

A partir da eq. (4.29) e por ajuste numérico das curvas da distribuição de probabilidade acumulada,  $P_{\geq}(\sigma^2)$ , é possível determinar  $\lambda$ , e em seguida  $q_\sigma$  e  $\kappa$  pelas eqs. (4.30) and (4.31).

O procedimento apresenta-se válido para valores de  $q_n$  perto da unidade. Por análise de alguns valores de  $q_n$  verifica-se que o valor de  $q_\sigma$  é igual a 1 para todos os valores de  $q_n$  considerados.

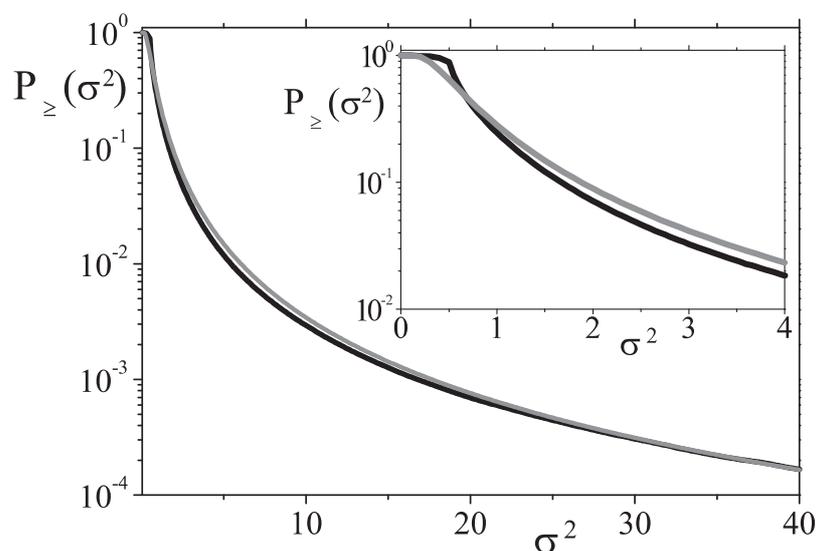


Figura 4.10: Os símbolos a preto representam a distribuição de probabilidade acumulada,  $P_{\geq}(\sigma^2)$  obtida por simulação numérica de um ruído  $q_n$ -Gaussiano ( $q_n = 1.15$ ) com  $(b, c) = (0.5, 0)$ . A cinzento é apresentada a distribuição acumulada referente à eq. 4.23 em que  $(\kappa, \lambda, \bar{\sigma}^2) = (0.365, 2.371, 1)$  satisfazem as eqs. (4.24) e (4.25) e  $q_\sigma = 1$ . [em **P06**]

As figs. 4.9 e 4.10 confirmam que a proposta produz uma aproximação satisfatória quando comparada com realizações numéricas, particularmente para valores grandes da volatilidade que são, por sua vez, responsáveis pelos grandes retornos. Especificamente, para o caso de ruído  $q_n$ -Gaussiano, embora existam pequenos desvios relativos a pequenos valores de  $\sigma^2$ , as caudas são significativamente boas.

#### 4.4 Grau de dependência em processos heterosquedásticos

Como indicado na secção 4.2, as variáveis estocásticas,  $\{z_t\}$ , num processo  $GARCH(s, r)$  são linearmente decorrelacionadas. Todavia, combinando as eqs. (4.1) and (4.7), pode verificar-se

que elas não são independentes. Mais precisamente, para  $GARCH(1, 1)$  ( $\bar{\sigma}^2 = 1$ ), tem-se

$$z_t = \sqrt{1 + b(z_{t-1}^2 - 1) + c\left(\frac{z_{t-1}^2}{\omega_{t-1}^2} - 1\right)} \omega_t. \quad (4.32)$$

Uma possível medida desse grau de dependência entre variáveis estocásticas  $(z_t; z_{t-1})$  consiste na aplicação da forma generalizada e normalizada da entropia mútua de Kullback-Leibler,  $R_q$  (eq.( 2.20)), onde  $x = z_t$  and  $y = z_{t-1}$ .

A partir de um conjunto de séries geradas seguindo o algoritmo  $GARCH(1, 1)$  e aplicando o método referente à eq. (2.20), obtiveram-se as curvas apresentadas na fig. 4.11 para valores típicos de  $(b, c, q_n)$ . Para cada uma foi então determinado o valor de  $q^{op}$  e este representado como uma função do índice entrópico  $q$  obtido através da eq. (4.18), tal como apresentado na fig. 4.12. Para os dois ruídos apresentados,  $q^{op}$  decresce monotonamente com  $q$ .

Para um valor de  $q_n$  fixo, esta curva parece não depender dos valores de  $(b, c)$ . Uma ilustração desta independência é indicada na fig. 4.12 onde foram utilizados diferentes  $(b, c)$  que dão o mesmo valor de  $q$ . Este resultado é aparentemente contra-intuitivo, pares  $(b, c)$  diferentes conduzem a tempos de decaimento diferentes para a função de correlação de  $z_t^2$ . Por isso, seria de esperar que o par com maior tempo de característico para a função de correlação apresentasse também um maior grau de dependência. Contudo, este argumento, à primeira vista lógico, é desmontado pela análise de pares com o mesmo tempo de decaimento para a função de correlação, e.g.,  $(b = 0.2, c = 0.2)$  e  $(b = 0.4, c = 0)$ , ver eq. (4.8). Apesar de ambos terem tempos de decaimento iguais para a função de correlação de  $z_t^2$ , eles não apresentam o mesmo grau de dependência. Verifica-se sim que o par com maior valor de  $q$ ,  $(b = 0.4, c = 0)$ , tem um

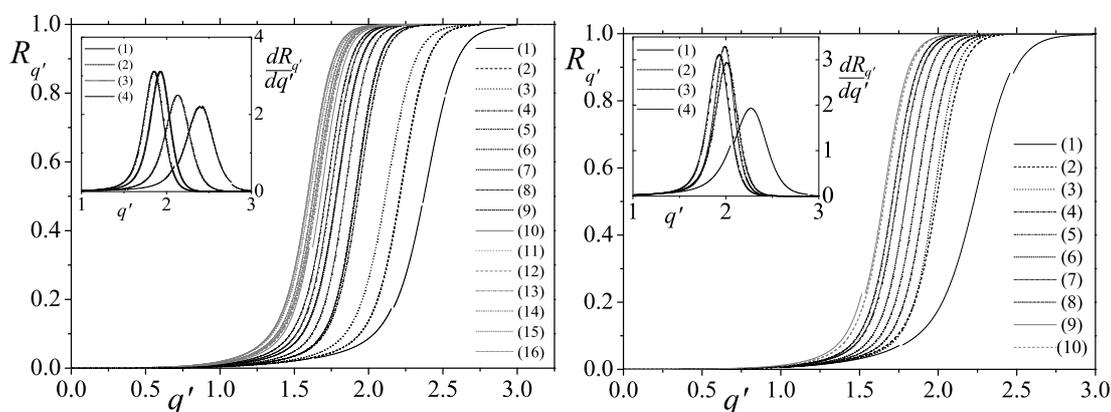


Figura 4.11: Entropia mútua generalizada de Kullback-Leibler normalizada  $R_{q'}$  vs.  $q'$  para vários processos  $GARCH(1, 1)$  com valores típicos  $(q_n, b, c)$ . Lado esquerdo:  $q_n = 1$  e  $(b, c)$  são os seguintes: 1-(0, 0), 2-(0.05,0),3-(0.1,0.2),4-(0.15,0),5-(0.2,0),6-(0.2,0.2),7-(0.25,0), 8-(0.3, 0), 9-(0.4, 0), 10-(0.4, 0.1), 11-(0.4, 0.2), 12-(0.4, 0.4), 13-(0.5, 0), 14-(0.2, 0.688), 15-(0.35, 0), 16-(0.1, 0). Lado direito:  $q_n = 1.2$  e  $(b, c)$  são os seguintes: 1-(0, 0), 2-(0.1, 0), 3-(0.1, 0.1), 4-(0.15, 0), 5-(0.2, 0), 6-(0.25, 0), 7-(0.3, 0.1), 8-(0.377, 0), 9-(0.3, 0.45), 10-(0.48, 0.0). As inserções contêm a derivada  $dR_{q'}/dq'$  (numericamente obtida) para as primeiras quatro curvas como mera ilustração. [em **P06**]

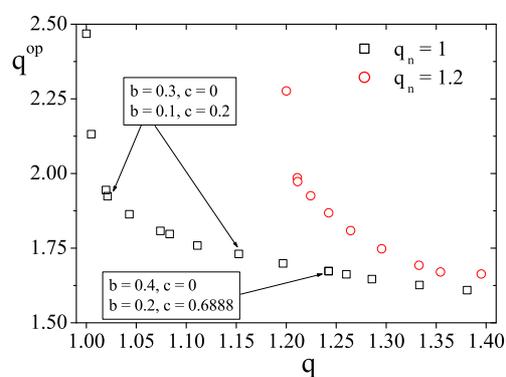


Figura 4.12: Representação de  $q^{op}$  vs.  $q$  para os valores de  $(q_n, b, c)$  indicados na figura anterior. Uma das setas indica dois exemplos obtidos por diferentes tripletos,  $(1, 0.4, 0)$  e  $(1, 0.2, 0.6888)$  e que apesar de diferentes tempos de decaimento da covariância no ponto  $(q, q^{op})$  (discrepância para lá da terceira casa decimal). As outras setas indicam outros dois tripletos (além dos referidos no texto) que apresentam o mesmo tempo de decaimento para a covariância de  $z_t^2$ . O facto de não coincidirem indica, mais uma vez, que  $q^{op}$  e a covariância são quantidades diferentes. [em P06]

maior grau de dependência que o par  $(b = 0.2, c = 0.2)^2$ , demonstrando que com  $R_q$  não é uma medida das correlações lineares.

A fig. 4.12 sugere a existência de uma relação entre não-Gaussianidade, representada por  $q$ , e grau de dependência (quantificado com  $q^{op}$ ) e o índice  $q_n$ . Esta relação triangular  $(q, q^{op}, q_n)$  é análoga ao  $q$ -tripleto  $\{q_{stat}, q_s, q_{rel}\}$ , referido noutras secções, que liga estacionaridade, sensibilidade e relaxação em sistemas fracamente caóticos ou sistemas com interações de longo-alcance.

Para concluir, comparem-se estes resultados com as observações feitas em séries reais no capítulo anterior. Em primeiro lugar, é verificável que existe uma convergência para a Gaussiana nas distribuições de lucros o que também pode ser notado para variáveis  $GARCH(1, 1)$  utilizando o trabalho, de DROST e NIJMAN [224] sobre a soma de variáveis geradas por processos deste tipo. Nesse trabalho concluiu-se que um processo  $GARCH(1, 1)$  com um dado valor de  $q$  pode ser interpretado como o resultado da convolução de um outro processo com  $q'$  tal que  $q' \geq q$ . Relativamente à dependência verificou-se que o respectivo grau entre lucros mantém-se basicamente constante para horizontes temporais até 100 dias. Restringindo ao caso do  $ARCH(1)$ , por uma questão de facilidade de ilustração, e utilizando como inspiração o tratamento de DROST e NIJMAN<sup>3</sup>, pode verificar-se que, e.g., um processo com  $b = 0.1$  apresenta um grau de dependência, para variáveis separadas de  $\tau = 8$ , idêntico ao grau de dependência

---

<sup>2</sup> $(b = 0.2, c = 0.2) \Rightarrow q = 1.083, q^{op} = 1.80$

$(b = 0.4, c = 0) \Rightarrow q = 1.24, q^{op} = 1.67$

<sup>3</sup>A inspiração diz respeito à possibilidade de um determinado processo  $GARCH(1, 1)$  equivaler a um outro processo  $GARCH(1, 1)$  mediante determinada transformação ou análise.

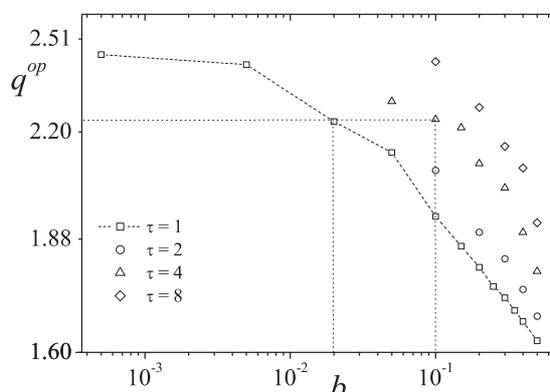


Figura 4.13: Representação de  $q^{op}$  vs.  $b$  (processo  $ARCH(1)$ ) para retornos separados de  $\tau = 1, 2, 4, 8$ . Pode ver-se que as curvas para os diferentes  $\tau$  não colapsam ao contrário do que acontece com as curvas de lucro. As linhas tracejada e pontilhada são meramente indicativas. [em P03]

entre retornos consecutivos apresentado por um processo  $ARCH(1)$  com  $b \simeq 0.02$ , ou seja, um grau de dependência acentuadamente mais pequeno, ver fig. 4.13. O esperado para uma fiel reprodução do comportamento de lucros em mercados financeiros seria um aparente colapso das curvas para os diferentes  $\tau < 100$ . Daqui se conclui que os mercados financeiros apresentam, de facto, mecanismos de dependência não-lineares (introduzidas na volatilidade) bastante robustos e não reproduzíveis através de modelos da classe  $ARCH$ .

## Capítulo 5

# Modelos Mesoscópicos para Volume e Lucro

Após a análise de uma série de propriedades estatísticas, serão introduzidos neste capítulo mecanismos dinâmicos para a reprodução de séries temporais de lucro e volume. É óbvio que as propostas aqui apresentadas não captam fielmente todas as características das observáveis em causa, tal seria até demasiado anormal face ao grau de complexidade do sistema em causa.

### 5.1 Propostas dinâmicas para descrição de volumes

#### 5.1.1 Proposta I

Como verificado no capítulo 3, o volume transaccionado num mercado financeiro (líquido) é descrito por uma função de correlação que é bem ajustada por uma soma de duas exponenciais, eq. (3.23), e por uma distribuição de longo-termo descrita por

$$p(v) = \frac{1}{Z} \left(\frac{v}{\theta}\right)^{-\alpha} \exp_q\left(-\frac{v}{\theta}\right), \quad (q > 1) \quad (5.1)$$

que corresponde a uma distribuição  $F$  [225]. Estas duas características levaram à apresentação de um cenário em que o volume é descrito pela equação diferencial estocástica [141],

$$dv = -\gamma (v - \omega) dt + \phi \sqrt{v} dW_t, \quad (5.2)$$

que corresponde à classe de processos de Feller [226], onde  $W_t$  representa um processo de Wiener tradicional. Este tipo de equação é também habitualmente utilizado em modelos para volatilidade estocástica como o processo de Heston [192][227]. Como pode ser verificado, a eq. (5.2) representa um caso típico de ruído multiplicativo, muito comum em problemas que apresentam perfis de agregação (*clustering*), típicos da observável em causa, assim como intermitência [228] ou turbulência em fluidos [176].

Como se vê, a eq. (5.2) apresenta dois termos; o primeiro, completamente determinista, que pretende simular a força arrasto para um certo valor médio  $\omega$ . Dado que o volume é, nesta análise, expresso em unidades de valor médio, será de esperar  $\omega = 1$ . Todavia, manter-se-á o valor médio de uma forma abstracta por razões que serão entendidas em seguida. Olhando o termo estocástico, podemos dizer que ele representa a resposta microscópica (i.e., dos agentes) a grandes valores do volume. Assim, valores elevados de  $v$  conduzirão, em princípio, a variações elevadas de volume que, devido à natureza aleatória de  $dW_t$ , induzem um aumento ou uma diminuição de  $v$ , ou seja, a um estado agitado ou sereno do título. Como por análise dimensional  $\phi$  deve ter unidades de  $\sqrt{\text{acções tempo}^{-1}}$ <sup>1</sup>, este parâmetro pode ser expresso como uma função

---

<sup>1</sup>Aqui ignora-se, a normalização que conduz a adimensionalidade de  $v$ .

do volume médio,  $\omega$ , e da constante de restituição  $\gamma$ ,

$$\phi = \sqrt{\frac{2}{\varphi} \omega \gamma},$$

sendo  $\varphi$  uma constante (adimensional) típica do título/índice.

A eq. (5.2) tem como equação de Fokker-Planck correspondente [229],

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} [\gamma (v - \omega) f(v, t)] + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left[ v \omega \frac{\gamma}{\varphi} f(v, t) \right], \quad (5.3)$$

cuja solução estacionária

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = 0,$$

é dada por [230],

$$f(v) = \frac{\varphi^\varphi}{\omega \Gamma[\varphi]} \left(\frac{v}{\omega}\right)^{\varphi-1} \exp\left(-\frac{\varphi}{\omega} v\right), \quad (\phi, \omega > 0) \quad (5.4)$$

que representa a distribuição Gamma, com média,  $\langle v \rangle = \omega$  e  $\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2 = \frac{\omega^2}{\varphi}$ .

Assuma-se agora que, em vez de constante no tempo,  $\omega$  varia de forma estocástica ao longo de uma escala temporal que é muito maior que a escala  $\gamma^{-1}$  necessária pela eq. (5.3) para que a estacionaridade seja atingida [226]. Este tipo de comportamento é também verificado na volatilidade [5][231]. Para este caso, esta dependência temporal encontra-se associada a flutuações no volume de actividade [167][232] que apresentam correlações de longo alcance [167][232][234][235]. Essas flutuações estarão associadas a efeitos tão diversos como: as variações de preço, que influenciam a volatilidade através do chamado efeito de alavancagem

(*leverage effect*) [236]; ou factores externos como notícias, que provocam alterações no comportamento activo/inactivo dos agentes nos quais se incluem os fenómenos de movimento colectivo (*herding*).

Assuma-se que este valor médio apresenta flutuações tais que estão associadas a uma distribuição Gamma invertida,

$$P(\omega) = \frac{\left(\frac{\varphi}{\lambda}\right)^\delta}{\Gamma[\delta]} \omega^{-\delta-1} \exp\left(-\frac{\varphi}{\omega\lambda}\right), \quad (\delta, \phi, \lambda > 0). \quad (5.5)$$

Neste caso, a eq. (5.4) representará a probabilidade de se ter um dado valor de volume,  $v$ , dado que o valor médio local é  $\omega^2$ . Ou seja,

$$f(v) \rightarrow p(v|\omega) = \frac{\varphi^\varphi}{\omega \Gamma[\varphi]} \left(\frac{v}{\omega}\right)^{\varphi-1} \exp\left(-\frac{\varphi}{\omega}v\right). \quad (5.6)$$

Assim, a probabilidade conjunta de se terem valores  $v$  e  $\omega$ , corresponde a

$$P(v, \omega) = p(v|\omega) P(\omega),$$

e a probabilidade marginal de um dado valor  $v$  (independente de  $\omega$ ) é dada por

$$P(v) = \int_0^\infty P(v, \omega) d\omega = \int_0^\infty p(v|\omega) P(\omega) d\omega. \quad (5.7)$$

Fazendo uso das eqs. (5.5) (5.6) em eq. (5.7) e levando a cabo a integração tem-se,

$$P(v) = \frac{\lambda \Gamma[\varphi + \delta]}{\Gamma[\varphi] \Gamma[\delta]} (\lambda v)^{\varphi-1} (1 + \lambda v)^{-\varphi-\delta}. \quad (5.8)$$

---

<sup>2</sup>Esta suposição necessita ainda de verificação. Deve contudo ressaltar-se que, dada a ubiquidade da distribuição, a proposta ée perfeitamente plauível.

Levando a cabo a mudança de variáveis

$$\lambda = \frac{q-1}{\theta}, \quad \delta = \frac{1}{q-1} - \varphi, \quad \alpha = \varphi - 1 \quad (5.9)$$

e usando a definição de função  $q$ -exponencial, eq. (2.7), pode escrever-se eq. (5.8) como

$$P(v) \equiv \frac{(q-1)^{\alpha+1} \Gamma\left[\frac{1}{q-1}\right]}{\theta \Gamma\left[\frac{1}{q-1} - \alpha - 1\right] \Gamma[\alpha+1]} \left(\frac{v}{\theta}\right)^{\alpha} \exp_q\left(-\frac{v}{\theta}\right), \quad (5.10)$$

que é exactamente a forma da  $q$ -generalização da função de distribuição de probabilidade Gamma empiricamente introduzida por OBT. Esta distribuição apresenta valor médio e desvio padrão finitos quando  $\alpha > 2$  e  $\delta > -1$ . Sendo que os valores obtidos para as companhias analisadas verificam estas duas condições a distribuição de volumes apresenta variância finita. Tal, encontra-se em oposição aos resultados de [162], mas em sintonia com resultados recentes [237][238]. Dinamicamente, a versão usual da distribuição Gamma, eq. (5.4), é reobtida assumindo que  $\omega$  não varia e por isso,  $P(\omega)$ , é igual a Delta de Dirac centrada em  $\theta = \frac{3}{\varphi}$ .

Sendo este cenário dinâmico profundamente inspirado na superestatística, é interessante encontrar-se uma relação semelhante à eq. (2.33) que relacione o valor do índice entrópico com os momentos (em relação a zero) do parâmetro intensivo. Pela eq. (5.5) tem-se que,  $\langle \omega \rangle = \frac{\phi}{\lambda(\delta-1)}$  e  $\langle \omega^2 \rangle = \frac{\phi^2}{\lambda^2(\delta^2-3\delta+2)}$ . Através das relações em (5.9) obtém-se

$$q = 1 + \frac{A-1}{\alpha(A-1) + 3A-2},$$

em que

$$A = \frac{\langle \omega^2 \rangle}{\langle \omega \rangle^2}.$$

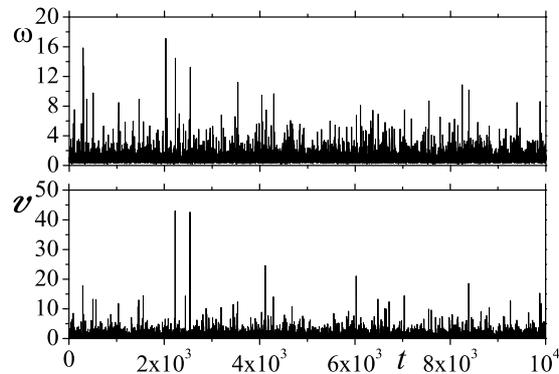


Figura 5.1: Excerto da realização numérica para o volume (normalizado) a 1 minuto das 10 companhias com maior nível de transacção no NASDAQ durante 2001. Em cima: a evolução temporal de  $\omega$ ; Em baixo: a evolução temporal do volume,  $v$ . A razão entre o tempo de actualização de  $\omega$  e a escala para  $v$  atingir o equilíbrio é de  $10^2$ . [em **P04**]

Para verificar o cenário apresentado foram feitas simulações numéricas da eq. (5.2) usando séries de números aleatórios  $\omega$  baseados na distribuição  $\omega$  (5.5) e que foram obtidos a partir de um processo Feller independente e semelhante à eq. (5.2) em que a variável é  $x = \frac{v}{\omega}$ . Os valores de  $q$ ,  $\alpha$  e  $\theta$  que são utilizados na fig. 5.1, especificamente,  $q = 1.19$ ,  $\alpha = 0.93$  e  $\theta = 0.23$ , correspondem ao valores obtidos por ajuste numérico das distribuições de probabilidade para o volume dos 10 títulos com maior volume de transacção no NASDAQ durante 2001(fig. 5.2) com a eq. (5.1). Os valores dos parâmetros dinâmicos obtidos pelas relações (5.9) são:  $\lambda = 0.826$ ,  $\varphi = 1.93$  and  $\delta = 3.33$ . Na fig. 5.1 pode observar-se que os grandes valores de  $v$  surgem, essencialmente, quando ocorrem grandes valores de  $\omega$ . Na fig. 5.3 pode ver-se que as frequências relativas obtidas a partir das realizações numéricas apresentadas na fig. 5.1 concordam com a frequência relativa obtida através da eq. (5.10).

Para lá das razões enunciadas anteriormente, duas propriedades estatísticas verificadas no

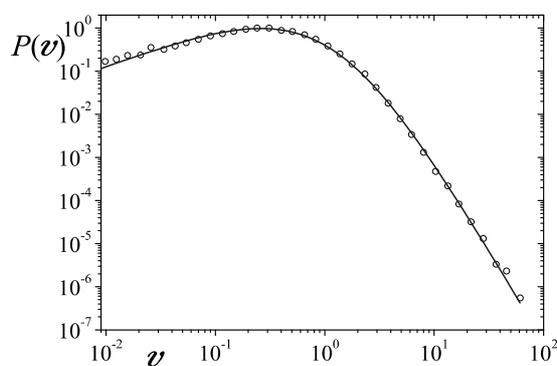


Figura 5.2: Os pontos representam a distribuição de probabilidade do volume (normalizado) a 1 minuto das 10 companhias com maior nível de transacção no NASDAQ durante 2001. A linha representa o ajuste com a eq. (5.1) usando os valores indicados no texto (Após OBT em [163]).

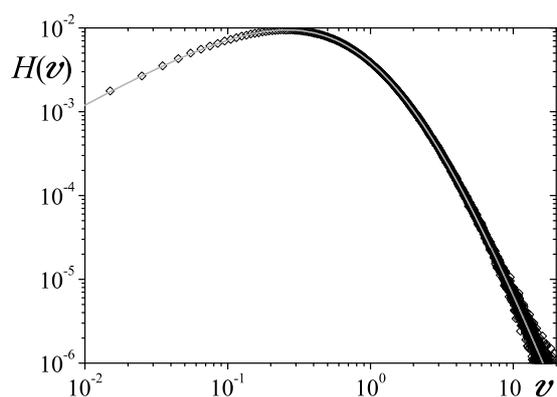


Figura 5.3: Frequência relativa,  $H(v)$  vs.  $v$  para a realização apresentada na fig. 5.1. Os símbolos foram obtidos numericamente e a linha por  $\int_{v-\Delta v}^{v+\Delta v} P(v') dv'$  com  $\Delta v = 5 \times 10^{-3}$ . [em P04]

capítulo 3 consolidam a aproximação superestatística à dinâmica: O facto do decaimento da função de correlação ser muito bem descrito pela soma de duas exponenciais com tempos característicos muito diferentes, o que fornece uma indicação da existência de dois regimes distintos para o sistema (cf. fig. 3.18); A forte assimetria na curva  $f(\alpha)$ , fig. 3.20, indicando que grandes e pequenas flutuações podem ter origens diferentes.

Apesar do cenário apresentado ser compatível com as distribuições de probabilidades obtidas numericamente e com os comportamentos indicados no último parágrafo, uma análise do coeficiente do segundo momento de Kramers-Moyal levou à introdução de modificações no modelo que em seguida se apresentam.

### 5.1.2 Proposta II

Defina-se analiticamente o  $n$ -ésimo momento de Kramers-Moyal  $M_n(x', t, \tau)$  como [229]

$$M_n(x', t, \tau) = [\langle y(t + \tau) - y(t) \rangle]^n |_{y(t)=x'} = \int (x - x')^n P(x, t + \tau | x', t) dx. \quad (5.11)$$

Estes momentos encontram-se relacionados com os coeficientes de Kramers-Moyal que surgem na Equação de Fokker-Planck pela relação,

$$D^{(n)}(x, t) = \frac{1}{n!} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} M_n(x', t, \tau). \quad (5.12)$$

Considerando o comportamento a longo termo, pode calcular-se o segundo momento de Kramers-Moyal para o mínimo intervalo de tempo  $\tau$  que, para o caso dos volumes é de 1 minuto,

$$M_2(v) = \int (v' - v)^2 P(v'(t + 1) | v(t)) dv'.$$

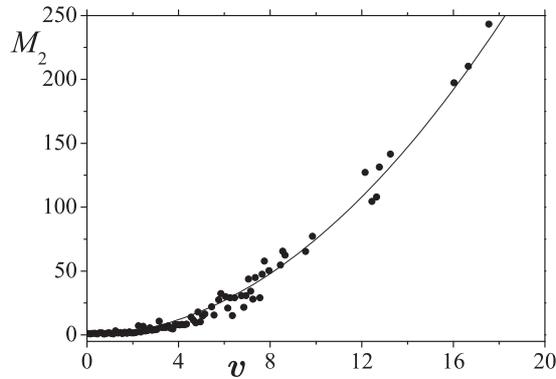


Figura 5.4: Os símbolos representam  $M_2$  vs.  $v$  e a linha a representação da função  $f(x) = \frac{3}{4}x^2$  apresentada **apenas** como guia para a vista .

Esta quantidade,  $M_2$ , apresentou um comportamento não-linear em  $v$ , como demonstra a fig. 5.4.

O modelo da secção 5.1.1, eq. (5.2), apresenta localmente um coeficiente  $D^{(2)}$  linear em  $v$ . Sendo que o comportamento a longo termo resulta de uma média sobre as propriedades locais devido às flutuações de  $\omega$ , o comportamento não-linear de  $M_2$  não é reproduzido pela proposta anterior. A primeira aproximação a uma dependência não-linear com forma parabólica é, com certeza, a função  $f(x) = x^2$ . Uma forma de se introduzir essa dependência parabólica no segundo coeficiente de Kramers-Moyal, conseqüentemente no segundo momento, é considerar que a dinâmica local dos volumes, em vez de ser descrita pela eq. (5.2), é obtida através de

$$dv = -\gamma\left(v - \frac{\omega}{\alpha}\right) dt + \sqrt{2\frac{\gamma}{\alpha}}v dW_t. \quad (5.13)$$

O significado dos termos mantém-se o mesmo existindo apenas uma alteração no termo estocástico em que a dependência em  $\sqrt{v}$ , presente na eq. (5.2), é substituída pela dependência linear em  $v$ . Como, quer para a convenção de Itô, quer para a de Stratanovich, o segundo

coeficiente de Kramers-Moyal é proporcional ao quadrado da função do termo estocástico, a dependência parabólica é obtida.

A solução da eq. (5.13) é,

$$v(t) = \exp \left[ -\frac{1}{2} (t - t_0) (2\gamma + 2\frac{\gamma}{\alpha}) + \sqrt{2\frac{\gamma}{\alpha}} \int_{t_0}^t dW_{t'} \right] \times \left\{ v_0 + \frac{\gamma\omega}{\alpha} \int_{t_0}^t \exp \left[ -\frac{1}{2} (t' - t_0) (2\gamma + 2\frac{\gamma}{\alpha}) - \sqrt{2\frac{\gamma}{\alpha}} \int_{t_0}^{t'} dW_{t''} \right] dt' \right\}, \quad (5.14)$$

onde  $v_0 = v(t_0)$ [239]. Como  $\int_{t_0}^t dW_{t'}$  representa uma soma de variáveis Gaussianas, pelo Teorema do Limite Central, também será uma Gaussiana. Dado que para qualquer variável Gaussiana,  $z$ , de média nula

$$\langle \exp z \rangle = \exp \left[ \frac{\langle z^2 \rangle}{2} \right],$$

tem-se que

$$\langle v(t) \rangle = \frac{\omega}{\alpha} + \exp[-\gamma(t - t_0)] \left( v_0 - \frac{\omega}{\alpha} \right), \quad (5.15)$$

valor que converge para  $\frac{\omega}{\alpha}$  quando  $(t - t_0) \gg \gamma^{-1}$ , que corresponde ao valor médio que é obtido quando através da integração

$$\langle v \rangle = \int v f(v) dv,$$

em que

$$f(v) = \frac{1}{\omega \Gamma[\alpha + 1]} \left( \frac{v}{\omega} \right)^{-\alpha-2} \exp \left[ -\frac{v}{\omega} \right],$$

é a solução estacionária da equação de Fokker-Planck associada à eq. (5.13).

Novamente, as flutuações do parâmetro intensivo prendem-se com variações no parâmetro  $\omega$  (relacionado com o valor médio). Propõe-se então que estas flutuações se dêem a uma escala

muito superior a  $\gamma^{-1}$  e que estejam associadas a uma distribuição Gamma,

$$P(\omega) = \frac{1}{\lambda \Gamma[\delta]} \left(\frac{\omega}{\lambda}\right)^{\delta-1} \exp\left[-\frac{\omega}{\lambda}\right]. \quad (5.16)$$

Isto implica que, a distribuição de longo curso seja, mais uma vez,  $\int f(v) P(\omega) d\omega$ , ou seja,

$$p(v) = \frac{1}{Z} \left(\frac{v}{\theta}\right)^{-\alpha-2} \exp_q\left[-\frac{\theta}{v}\right] \quad (5.17)$$

onde  $\lambda = \theta(q-1)$ ,  $\delta = \frac{1}{q-1} - \alpha - 1$  e  $Z$  é a constante de normalização. Não obstante esta distribuição ser uma generalização da distribuição Gamma invertida, ela corresponde à distribuição  $F$  caso se leve em conta que para  $q > 1$ ,

$$x^\alpha e_q^{-\frac{x}{b}} = \left[\frac{b}{q-1}\right]^{\frac{1}{q-1}} x^{\alpha-\frac{1}{q-1}} e_q^{-\frac{b/(q-1)^2}{x}}. \quad (5.18)$$

Os valores dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\theta$  e  $q$ , obtidos para as várias empresas do conjunto DJ30, encontram-se apresentadas na tab. 5.1. É possível verificar que, os valores de  $q$  encontram-se restrictos a um pequeno intervalo,  $q = 1.19 \pm 0.02$  (praticamente  $\frac{6}{5}$ ). Quanto a  $\alpha$  e  $\theta$ , estes apresentam uma maior dispersão sendo os seus valores médios  $\alpha = 2.63 \pm 0.48$  e  $\theta = 8.31 \pm 1.86$ . Com os valores de  $\alpha$ ,  $\theta$  e  $q$  foram geradas séries temporais para analisar a proposta apresentada.

Para determinar as escalas de relaxação local,  $\gamma^{-1}$  e  $T^*$ , foi utilizada a aproximação mais simples, equiparando estes valores a  $T_1$  e  $T_2$  da eq. (3.23)<sup>3</sup>. Por uma questão de simplificação

---

<sup>3</sup>Este processo é também utilizado para determinar o tamanho das células em equilíbrio[145]. Vale lembrar que o método introduzido na secção 2.5.1 é ulterior a este trabalho.

Tabela 5.1: Valores obtidos por ajuste das distribuições de probabilidade ( $q$ ,  $\theta$  e  $\alpha$ ) e pela análise das correlações ( $\gamma T^*$ ).

	$q$	$\theta$	$\alpha$	$T \gamma$
AA	1.19	8.81	2.67	29
AIG	1.22	4.32	1.84	34
AXP	1.21	6.51	2.06	26
BA	1.18	10.67	2.95	24
C	1.15	9.20	3.18	25
CAT	1.20	7.49	2.32	13
DD	1.20	7.33	2.26	53
DIS	1.21	7.29	2.19	20
GE	1.17	8.31	2.75	33
GM	1.21	8.14	2.46	29
HD	1.17	8.76	2.84	27
HON	1.19	9.06	2.67	70
HPQ	1.19	8.55	2.64	28
IBM	1.14	12.36	3.70	41
INTC	1.20	4.22	1.70	25
JNJ	1.17	8.55	2.91	11
JPM	1.17	9.14	2.92	22
KO	1.19	7.88	2.61	26
MCD	1.21	7.48	2.30	30
MMM	1.19	7.14	2.33	23
MO	1.18	7.73	2.66	12
MRK	1.25	1.24	0.61	21
MSFT	1.22	4.57	1.62	23
PFE	1.18	6.31	2.44	33
PG	1.16	8.94	2.99	23
SBC	1.19	8.62	2.57	25
UTX	1.14	18.47	4.71	32
VZ	1.17	8.83	2.84	34
WMT	1.16	10.24	3.23	30

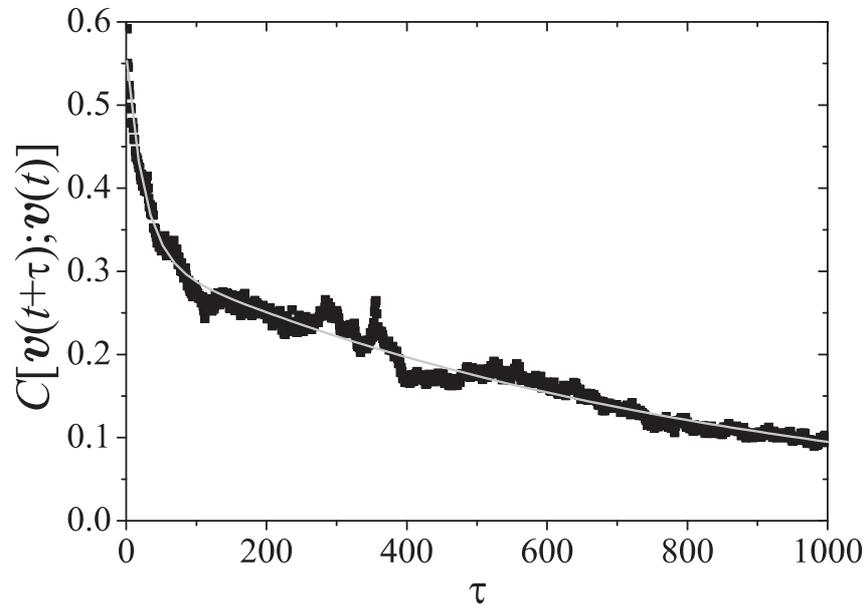


Figura 5.5: Os símbolos representam a função de correlação do volume da Pfizer (PFE) e a linha o ajuste com a eq. (3.23) com os seguintes valores para os parâmetros:  $C_1 = 0.24$ ,  $T_1 = 25$ ,  $C_2 = 0.32$ ,  $T_2 = 825$ .  $\chi^2 = 1.4 \times 10^{-4}$  e  $R^2 = 0.9789$ .

e economia de tempo de computação, foi assumida como unidade de tempo  $\gamma^{-1}$  em cada uma das simulações. Na fig. 5.5 é apresentada a função de correlação para a Pfizer (PFE) onde são extraídos os valores de  $\gamma^{-1}$  e  $T^*$ . Na fig. 5.6 estão representados excertos da série temporal do volume da PFE e da série temporal obtida por simulação numérica. Na fig. 5.7 apresenta-se a comparação entre as distribuições de probabilidade da série de dados e da simulação. Como comparação da qualidade da proposta é, apresentada também o resultado para o pior ajuste da distribuição que foi obtido para a Du Pont (DD).

Com a determinação de uma escala  $T^*$ , pode então fazer-se uma avaliação da própria evolução de  $\omega$ . Na fig. 5.8 é apresentada a evolução do valor médio local,  $\frac{\omega}{\alpha}$ . Como se pode ver, e tal como conjecturado no capítulo 3, as grandes flutuações de  $v$  estão na sua maioria

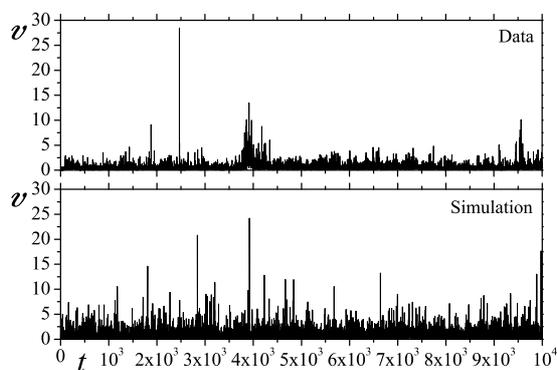


Figura 5.6: Em cima: Excerto do perfil do volume para o PFE ( $t$  em unidade de minutos). Em baixo: Excerto da simulação realizada utilizando os valores apresentados na tab. 5.1 ( $t$  em unidades de 25 minutos). [em **P08**]

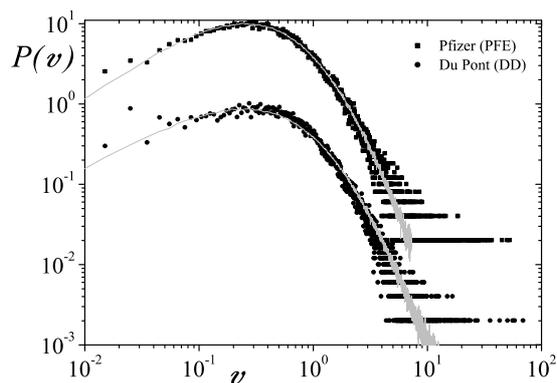


Figura 5.7: Os símbolos representam a distribuição de probabilidade referentes aos séries de dados da Pfizer (PFE) (deslocada de um facto de 10 para melhor distinção) e da Du Pont (DD) que representam, respectivamente, o melhor ( $R^2 = 0.9953$ ,  $\chi^2 = 0.0002$ ) e o pior ( $R^2 = 0.9763$  e  $\chi^2 = 0.001$ ) [em **P04**]

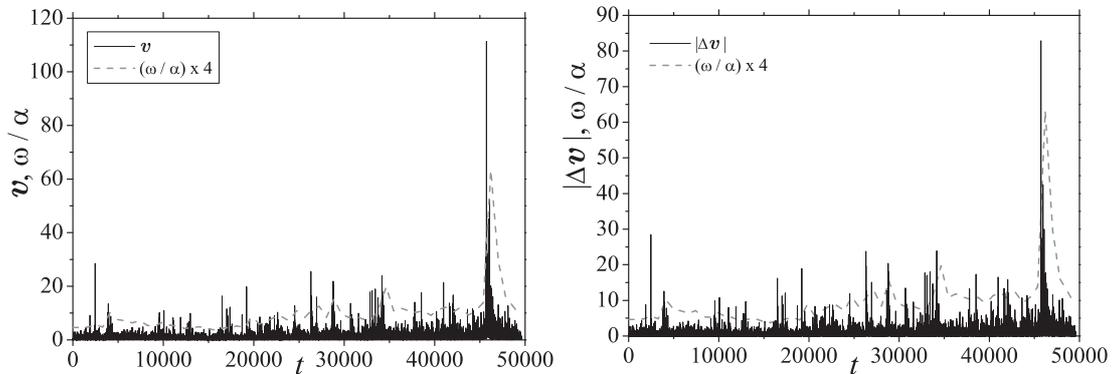


Figura 5.8: Lado esquerdo: A linha a cheio corresponde à série temporal do volume da PFE e a linha tracejada à evolução temporal do valor médio local (quadruplicado para melhor visibilidade) que é calculado utilizando janelas de tamanho  $T^* = T_2 = 825$ . Lado direito: A linha a cheio corresponde às variações do volume (em módulo) entre registos separados de 1 minuto e a linha a tracejado tem o mesmo significado que na figura ao lado. Como se pode ver o cenário conjecturado de que as grandes flutuações de  $v$  estariam relacionadas com os maiores de  $\omega$  é satisfatoriamente verificada.

associadas a grandes valores de  $\omega$ .

Para ambas as propostas apresentadas, os parâmetros intensivos foram obtidos a partir de processos diferenciais estocásticos. Embora este mecanismo se tenha mostrado extremamente válido, outras hipóteses para a geração de  $\omega$  são plausíveis. Nomeadamente, o valor local de  $\omega$  pode ser obtido a partir do somatório

$$\sum_{i=1}^n X_i^2,$$

em que  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), representam um conjunto de  $n$  variáveis independentes que seguem uma distribuição Gaussiana. Por exemplo,  $X_i^2$  poderia ser entendido como o volume médio negociado por cada agente  $i$  durante o intervalo de tempo relativo à janela de duração  $T_2$ , sendo que para cada  $i$ , o valor de  $X_i$  seria fortemente correlacionado. A distribuição de  $\omega$ , seria tal

como pretendido, a distribuição Gamma.

Para terminar, far-se-ão alguns comentários referentes a um modelo introduzido logo após o que foi mostrado na secção 5.1.1 [240]. Nesse trabalho propõe-se que a distribuição pode ser obtida através da equação diferencial estocástica,

$$dx = -\gamma \frac{[x - \theta]}{x} dt + \mu \sqrt{x} dW_t^{(1)} + \alpha dW_t^{(2)}, \quad (5.19)$$

em que  $W_t^{(1)}$  e  $W_t^{(2)}$  são dois processos de Wiener descorrelacionados. Apesar da distribuição  $F$  estar incluída no conjunto de soluções estacionárias da equação de Fokker Planck correspondente, a dinâmica proposta apresenta alguns pontos que parecem não se adequar à dinâmica de volume. O primeiro, prende-se com a natureza das correlações. Para este modelo, existem correlações de longa duração, mas muito mais fortes (decaimento quase linear) do que o verificado para os volumes em mercados financeiros. Esta longevidade das correlações, não provém, todavia, da natureza do ruído aditivo-multiplicativo tal como sugerido em [240], mas sim da natureza da força de restituição que está associada a um potencial do tipo  $\gamma(x - \theta \ln x)$ . Para valores em que  $x \simeq \theta \ln x$ , o valor da força de restituição torna-se extraordinariamente pequeno e daí a convergência para o mínimo em  $\theta$  ser lenta. O mecanismo de ruído aditivo-multiplicativo que pode ser escrito, para fins estatísticos, através de uma forma única de ruído multiplicativo [229], não introduz memória, mas sim, dependência da variável no valor do segundo momento de Kramers-Moyal. Esta dependência que leva a caudas de tipo não exponencial para a distribuição. De referir também que a eq. (5.19) apresenta segundo momento de Kramers-Moyal linear. Mau grado os pontos aqui referidos, é conveniente referir que a pro-

posta (5.19) poderá ser útil na descrição da actividade de um certo tipo de agentes que tentam procurar tendências na evolução dos preços o que os faz serem bastante activos apenas durante certos períodos de tempo.

## 5.2 Proposta dinâmica para a descrição de lucros

A origem da utilização de equações estocásticas para a descrição da dinâmica de flutuações de preço pode ser atribuída a BACHELIER, sendo actualmente utilizada quer para reprodução académica, quer para aplicações de âmbito comercial. A primeira descrição diferencial baseada em aspectos fenomenológicos a ser publicada foi feita por J.P. BOUCHAUD e R. CONT [241] e é baseada nos seguintes pontos bem simples e plausíveis:

- A variações (instantâneas) de preço  $S$ ,  $\frac{dS}{dt}$ , definidas como lucro instantâneo,  $r(t)$ , são directamente proporcionais ao desequilíbrio entre o volume de oferta e procura,  $\Delta\varpi$ ,

$$r = \frac{\Delta\varpi}{\delta}, \quad (5.20)$$

em que  $\delta$  é entendida como a profundidade do mercado, isto é, o número de acções necessárias para que o preço se eleve de uma unidade.

Esta hipótese descreve o comportamento usual do preço com os desequilíbrios entre oferta e procura, se bem que, para grandes valores de diferença entre procura e oferta, se tenha verificado uma saturação de  $r$  para grandes valores de  $\Delta\varpi$  [242]. Isto significa que, a profundidade não é constante, facto que não é de todo surpreendente.

- O volume presente no mercado dependente da sobreposição de ordens satisfeitas e de novas ordens. A taxa de desequilíbrio por introdução de novas ordens,  $\frac{d\Delta\varpi^{(i)}}{dt}$ , depende de diversos factores:

— De um valor que reflecte a evolução média,  $r_0$ , de um mercado financeiro, que é estimada em 0.01% ao dia;

— Do próprio valor do retorno,  $r(t)$ . Isto é, subidas de preço induzem aumento geral da procura e o inverso para a oferta. Como o ser humano é eminentemente averso ao risco, essa taxa é naturalmente maior para situações de descida do que de subida. Ou seja, esta contribuição para  $\frac{d\Delta\varpi^{(i)}}{dt}$  seria dada por:

$$\tilde{\alpha}'(r) r \approx (\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}_1 r) r.$$

Assinale-se contudo que, para que o efeito da oferta seja sempre decrescente no lucro a expansão de  $\alpha'(r)$  deverá ir até segunda ordem com um termo do tipo,  $-\alpha_2 r^2$  ( $\tilde{\alpha} > \alpha_1 > \alpha_2 > 0$ ). Este termo assegurará também que, para grandes valores de retorno a tendência de compra diminui fortemente por questões de aversão ao risco. Na prática,  $\alpha_2$  pretenderá reproduzir os efeitos de ordem de paragem.

— Da volatilidade,  $\sigma$ , que pode ser escrita como  $\sigma \sim r^2$  e é uma função decrescente(crescente) para a procura(oferta);

— Do desvio entre o valor actual da companhia  $S(t)$  e o valor considerado padrão  $\bar{S}'$  geralmente indicado por agências de risco.

Juntando todos estes ingredientes, pode dizer-se que a equação para a evolução do desequilíbrio entre oferta e procura é dada por,

$$\frac{d\Delta\varpi}{dt} = \Delta\varpi_0 - \gamma'\Delta\varpi + (\tilde{\alpha}r - \tilde{\alpha}_1r - \tilde{\alpha}_2r^2)r - \tilde{\beta}\sigma - \tilde{\omega}(S - \bar{S}') + \tilde{\eta}, \quad (5.21)$$

onde  $-\gamma'\Delta\varpi$  corresponde aos efeitos de absorção das ordens (limpeza do livro de ordens) e  $\eta$ , um ruído que representa factores aleatórios que afectam o sistema. Usando a definição de retorno instantâneo, a eq. (5.20) e o facto de  $\Delta\varpi_0$  poder ser incluído no preço "justo", tem-se a seguinte equação para a dinâmica de preços

$$\frac{d^2S}{dt^2} = -k\frac{dS}{dt} - \beta\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 - \alpha_2\left(\frac{dS}{dt}\right)^3 - \omega(S - \bar{S}) + \eta, \quad (5.22)$$

em que

$$k = \gamma' - \frac{\tilde{\alpha}}{\delta}, \quad \beta = \frac{\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}_1}{\delta^2}, \quad \alpha_2 = \frac{\tilde{\alpha}_2}{\delta^3}, \quad \omega = \frac{\tilde{\omega}}{\delta}, \quad \bar{S} = \bar{S}' + \frac{\Delta\varpi_0}{\omega}, \quad \eta = \frac{\tilde{\eta}}{\delta}.$$

No caso em que são desconsiderados efeitos de aversão ao risco,  $\beta = \alpha_2 = 0$ , a equação para evolução dos preços assemelha-se à equação de um oscilador harmónico sujeito a perturbações aleatórias,

$$\frac{d^2S}{dt^2} = -k\frac{dS}{dt} - \omega(S - \bar{S}) + \eta. \quad (5.23)$$

Considerando o caso em que  $\eta$  é apenas dependente do tempo, pode avaliar-se a evolução temporal do preço,

$$S(t) = \exp[-(k+K)t]C_1 + \exp[-(k-K)t]C_2 - \bar{S} \left\{ \exp\left[-\frac{1}{2}(t-t')(k+K)\right] - 1 + \frac{k}{K} \exp\left[-\frac{1}{2}(t-t')(k-K)\right] \right\} - \frac{1}{K} \left\{ \int_{t_0}^t \exp\left[-\frac{1}{2}(t-t')(k+K)\right] \eta(t') dt' - \int_{t_0}^t \exp\left[-\frac{1}{2}(t-t')(k-K)\right] \eta(t') dt' \right\},$$

em que

$$K = \sqrt{k^2 - 4\omega}$$

e  $C_{1,2}$  são constantes da equação obtidas através das condições iniciais  $S(t_0)$  e  $\frac{dS}{dt}|_{t=t_0}$ <sup>4</sup>. Para o caso em que  $k > 0$  o sistema apresenta estacionaridade. Como  $k > 0$  implica  $\gamma' > \frac{\bar{\alpha}}{\delta}$ , esta condição equivale a dizer que taxa de absorção é maior do que a taxa de introdução de novas ordens e/ou que é necessário uma grande quantidade de ações transaccionadas para que exista um movimento de preço relevante. Tais características estão presentes em mercados líquidos como o NYSE e o NASDAQ.

É verosímil entender-se que, o segundo termo apenas tem influência significativa quando existem grandes diferenças entre  $S$  e  $\bar{S}$ . Tal corresponde a variações para tempos longos. Ou seja, pode considerar-se como uma boa aproximação  $\omega \ll 1$ . Consequentemente, para pequenas escalas de tempo, em mercados líquidos,  $-\omega(S - \bar{S})$  pode ser desprezado.

Com base na aproximação  $\omega \ll 1$ , pode expandir-se

$$K \approx k - 2\frac{\omega}{k}.$$

Daqui,

$$k + K \simeq 2k - 2\frac{\omega}{k} \approx 2k,$$

e

$$k - K \simeq 2\frac{\omega}{k}.$$

---

<sup>4</sup>Como se verá adiante, a independência de  $\eta$  em relação ao lucro/preço conduz a uma distribuição de probabilidade para os lucros de tipo Gaussiano. Não obstante, esta simplificação permite uma visão qualitativa da dinâmica.

Noutras palavras,  $k + K$ , corresponde a uma relaxação rápida a uma escala temporal característica de aproximadamente  $\tau_1 = k^{-1}$  e  $k - K$  corresponde a uma segunda escala temporal,  $\tau_2 = \frac{1}{\omega}$ , dentro da qual se pode considerar desprezível o efeito de  $\omega$ . Durante o período a que se reportam as séries temporais aqui estudadas o índice DJIA, variou de 10334.16 para 10783.01 pontos, o que equivale a uma variação percentual de 4.8%. Sendo que, habitualmente, variações de preço acima de 10% em relação ao valor “padrão” são utilizadas pelas agências de risco para lançarem os seus alertas [223], pode dizer-se que, uma flutuação dessa ordem corresponde a uma escala de tempo da ordem de um ano, muito superior à escala de um minuto que aqui se pretende descrever.

### 5.2.1 Mercado estável

#### Sem aversão

Para esta situação,  $\omega = \beta = \alpha_2 = 0$ . A equação de evolução dos preços pode ser facilmente transformada numa equação para evolução do lucro. Lembrando que  $r(t) = \frac{dS}{dt}$ , a eq. (5.23) pode ser escrita como,

$$\frac{dr}{dt} = -kr + \eta.$$

Reporte-se a análise para o termo estocástico  $\eta$ . A solução mais simples seria considerá-lo como um ruído Gaussiano com uma determinada largura  $D$  [241]. Contudo, a sua distribuição seria Gaussiana, que já se demonstrou inadequada para uma boa descrição das flutuações de preço. Na tradição da descrição de sistemas com um elevado número de graus de liberdade, o termo estocástico pretende simular os efeitos de resposta microscópica a um conjunto de

factores [229]. Essa resposta, especificamente a sua magnitude, será naturalmente afectada pelo valor do lucro. Desta forma, grandes valores de  $r$  induzirão grandes valores de  $\eta$  e vice-versa. Como os valores elevados de  $r$ , em módulo, são os valores menos frequentes, pode dizer-se que a intensidade da resposta  $\eta$  é inversamente proporcional ao valor da probabilidade de  $r$  [172][143]. Por conseguinte,  $\eta$  pode ser escrito como

$$\eta = \sqrt{\theta} [p(r, t)]^{\frac{1-q}{2}} \xi(t) \quad (q > 1), \quad (5.24)$$

em que  $\theta$  é um valor constante, que será denominada por *constante de volatilidade*, e  $\xi(t)$  um ruído branco associado a uma Gaussiana de variância unitária. Assim, para este caso, a equação dinâmica para as flutuações, neste caso a 1 minuto<sup>5</sup>, de preços é dada por

$$dr = -kr dt + \sqrt{\theta} [P(r, t)]^{\frac{1-q}{2}} dW_t. \quad (5.25)$$

A evolução da distribuição de probabilidades é dada pela equação de Fokker-Planck não-linear [92]

$$\frac{\partial p(r, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} [k r p(r, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ \theta [p(r, t)]^{(2-q)} \right\}. \quad (5.26)$$

A eq. (5.26) apresenta como solução dependente do tempo [89]

$$p(r, t) = \frac{1}{Z_q(t)} \exp_q [-\beta(t) x^2],$$

em que

$$\frac{\beta(t)}{\beta(t_0)} = \left[ \frac{Z_q(t_0)}{Z_q(t)} \right]^2,$$

---

<sup>5</sup>Série de lucro a tempos superiores são obtidos a partir desta por adição da variável  $r(t)$ . Esta adição de variáveis conduz a uma aproximação da distribuição à Gaussiana.

$$Z_q(t) = Z_q(t_0) \left[ \left(1 - \frac{1}{\mathcal{K}}\right) e^{-t/\tau} + \frac{1}{\mathcal{K}} \right]^{1/(3-q)},$$

com

$$\mathcal{K} = \frac{k}{\beta(t_0) \theta (2-q) [Z_q(t_0)]^{q-1}}.$$

A relaxação da constante de normalização,  $Z_q$ , dá-se com o tempo característico  $\tau$

$$\tau = \frac{1}{k(3-q)},$$

que é da ordem de  $\frac{1}{k}$ , pois para que a distribuição seja normalizável  $0 < q < 3$ . Todas as correlações para este processo se devem ao termo de arrasto, sendo por isso natural que estas decaem rapidamente. A forma da eq. (5.25) corresponde a uma equação em que a variância não é constante o que induz o aparecimento de lei de potência na distribuição de probabilidade [239].

Para valores positivos de  $k$ , como acontece para o caso de um mercado líquido e estável com  $k(t - t_0) \gg 1$ ,  $p(r, t)$  é infinitesimalmente distante da solução estacionária da eq. (5.26) que é dada por,

$$p_s(r) = \frac{1}{Z} \exp_q \left[ -\frac{k}{(2-q) Z^{q-1} \theta} r^2 \right], \quad (5.27)$$

onde

$$Z = \left\{ \frac{\sqrt{2\pi} \Gamma \left[ \frac{1}{q-1} \right]}{\Gamma \left[ \frac{3-q}{2q-2} \right]} \sqrt{\frac{(2-q) \theta}{2k(q-1)}} \right\}^{\frac{2}{3-q}}.$$

Os coeficientes de Kramers-Moyal para a eq. (5.25), que conduzem à definição da eq. (5.26), são segundo a eq. (5.12)

$$D^{(1)}(r, t) = -k r, \quad (5.28)$$

e

$$D^{(2)}(r, t) = \frac{1}{2} \theta [p(r, t)]^{(1-q)} . \quad (5.29)$$

Para além de apresentar uma descrição probabilística adequada da distribuição de probabilidades, pode verificar-se que a dinâmica (5.25) descreve muito bem o que se passa ao nível dos momentos de Kramers-Moyal. Considerando a situação de regime estacionário,  $t_0 = -\infty \ll -k^{-1} \ll 0$ , e levando em conta a equação a eq. (5.11)

$$M_2 \approx \tau \theta [p(r)]^{(1-q)} = \tau \frac{k}{2-q} [(5-3q)\sigma^2 + (q-1)r^2] , \quad (5.30)$$

que é um polinómio de segunda ordem.

Apesar de outras equações dinâmicas diferenciais, com ruído aditivo, serem capazes de produzir o mesmo tipo de distribuição, equações do tipo (5.25) apresentam-se como as únicas capazes de reproduzir também os momentos de Kramers-Moyal, os quais se apresentam como uma ponte entre dinâmica e probabilidade. Além do mais, esta forma surge como uma consequência da dinâmica imposta, *a priori*, e não como o resultado de um processo de ajuste numérico sem explicação física como acontece noutros trabalhos [243][144][244].

Vale lembrar que, apesar da imposição da igualdade dos momentos de Kramers-Moyal limitar o conjunto infinito de dinâmicas compatíveis com uma certa distribuição de probabilidades, existe ainda um conjunto grande de propostas válidas. Por exemplo, como já referido, o ruído multiplicativo (5.24), para fins estatísticos, pode ser desdobrado na soma de um ruído aditivo e

de um ruído multiplicativo, descorrelacionados, de tal forma que a equação

$$dr = -k r dt + \sqrt{\theta} [f(t)]^{\frac{q-1}{2}} dW_t + \sqrt{(q-1)\theta\beta(t_0)} Z(t_0) [f(t)]^{-\frac{1}{2}} r(t) dW'_t \quad (5.31)$$

onde

$$f(t) = \left\{ \exp[-k(3-q)t] + (2-q) \frac{(1 - \exp[-k(3-q)t]) [Z(t_0)]^{q-1} \beta(t_0) \theta}{k} \right\}^{\frac{1}{3-q}}$$

apresenta a mesma equação de Fokker-Planck e por consequência a mesma distribuição [229] [245]. Se a eq. (5.25) permite uma relação imediata entre  $q$  e a resposta do sistema e relação à sua própria dinâmica, já a eq. (5.31) permite uma imediata relação dinâmica entre  $q$  e a magnitude do ruído multiplicativo de tal forma que, para  $q = 1$ , o processo de Ornstein-Uhlenbeck [239] é recuperado bem como a distribuição Gaussiana.

Para a determinação dos valores dos parâmetros  $q$ ,  $\theta$  e  $k$ , foi utilizado o ajuste numérico da distribuição média do conjunto DJ30 com a eq. (2.9) (método utilizado no capítulo 3) e do segundo momento de Kramers-Moyal com a eq. (5.30) apresentado na fig. 5.9. Os valores obtidos, para lucro a 1 minuto, foram  $q = 1.31 \pm 0.02$ ,  $\sigma = 0.930 \pm 0.08$  e  $k = 2.40 \pm 0.04$ . Através da igualdade entre as distribuições (5.27) e (2.9) tem-se

$$\theta = \frac{k(5-3q)\sigma^2 \left\{ \frac{\Gamma[\frac{1}{q-1}]}{\Gamma[\frac{3-q}{2q-2}]} \sqrt{\frac{(q-1)}{(5-3q)\pi\sigma^2}} \right\}^{q-1}}{2-q}, \quad (5.32)$$

para o valor da constante de volatilidade. O valor de  $k = 2.40 \pm 0.04$ , corresponde a um tempo característico de relaxação da ordem de 20 segundos, o que permite a aplicação da hipótese de mercado eficiente. Na fig. 5.9 é apresentado um excerto da representação da simulação da eq.

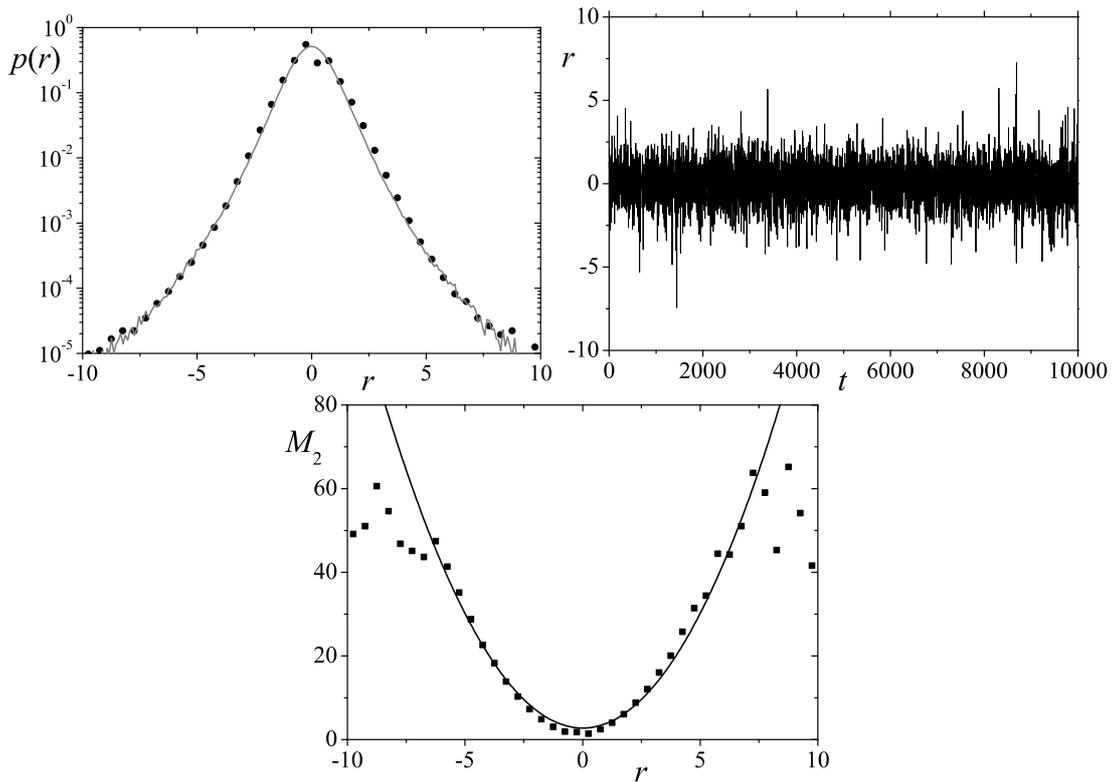


Figura 5.9: Em cima: Os símbolos representam a distribuição de probabilidade vs.  $r$  do conjunto DJ30 e a linha a distribuição de probabilidades obtida através de uma série temporal gerada a partir da eq. (5.25) que é representada no painel direito. Embaixo: segundo momento de Kramers-Moyal  $M_2 \approx \tau \theta [p(r)]^{(1-q)} = \tau \frac{k}{2-q} [(5 - 3q) \sigma^2 + (q - 1) r^2]$  que permite a determinação do valor de  $k$ . Valores dos parâmetros:  $\tau = 1$  min,  $k = 2.40 \pm 0.04$ ,  $\sigma = 0.930 \pm 0.08$  e  $q = 1.31 \pm 0.02$ . [em **P09**]

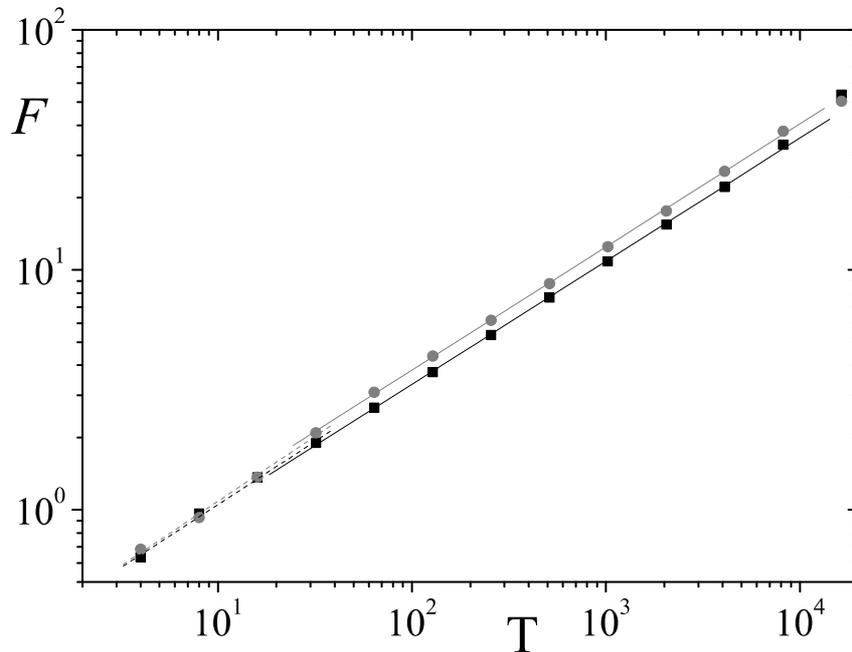


Figura 5.10: Função  $F$  do DFA-1 vs. tamanho da janela  $T$  para a série gerada (círculo) e os dados do DJ30 (quadrados). Os declives correspondem ao Expoente de Hurst. Para  $T \lesssim 20$  minutos tem-se  $H = 0.54 \pm 0.02$  para a replica e  $H = 0.52 \pm 0.02$  para os dados. Após esta escala de tempo o expoente decaí para  $0.513 \pm 0.004$  para ambos.

(5.25) com os valores acima descritos e a distribuição de probabilidade que concorda com os pontos referentes aos dados. Pela eq. (5.32) o valor da constante de volatilidade é  $\theta = 2.67$ .

Comparando a persistência das séries temporais utilizando o método DFA-1<sup>6</sup>, fig. 5.10 verifica-se que a série simulada e o conjunto DJ30 apresentam um expoente de Hurst de  $0.54 \pm 0.02$  e  $0.52 \pm 0.02$ , respectivamente, até tempos da ordem de 20 minutos. Após esta escala de tempo o expoente decaí para  $0.513 \pm 0.004$ . Estes resultados estão de acordo com a identificação de ausência de persistência significativa nas séries de lucros e com a referida hipótese de mercado eficiente. Na fig. 5.11 pode verificar-se que, apesar das correlações também decaírem

<sup>6</sup>O DFA corresponde ao MF-DFA com  $z = 2$ .

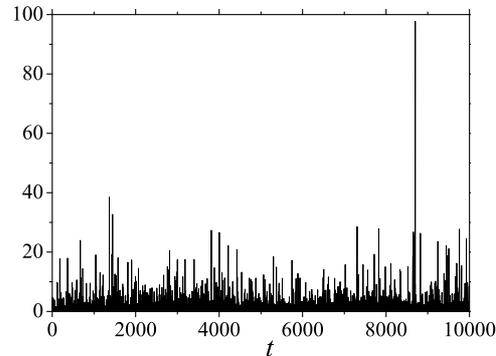


Figura 5.11:  $r^2$  (possível medida da volatilidade) vs.  $t$  para o excerto apresentado na fig. 5.9.

rapidamente para  $r^2$ , o modelo capta também a famosa agregação da volatilidade.

Pode então dizer-se que, um mercado estável, num **regime normal**, se comporta como uma partícula confinada num potencial parabólico onde é sujeita a perturbações aleatórias na sua posição.

### 5.2.2 Com aversão

Apesar da proposta anterior corresponder a uma descrição satisfatória para os lucros, a realidade é que mesmo no designado regime normal, os mercados estáveis apresentam distribuições assimétricas em que os lucros negativos são favorecidos. Por conseguinte, para uma descrição mais elaborada e fiel, considerar-se-ão  $\beta \neq 0$  e  $\alpha_2 \neq 0$ . Numa proposta anterior [241], em que eram considerados ruídos Gaussianos e  $\alpha_2 \neq 0$ , o potencial era do tipo,

$$V(r) = \frac{a}{2}r^2 + \frac{b}{3}r^3,$$

que apresentava um máximo para  $r^* = -\frac{a}{b}$ . Tal significaria que, após essa barreira, o lucro seria capaz de atingir, o valor de  $r = -\infty$  num intervalo de tempo finito. A introdução do

termo  $\alpha_2 \neq 0$ , para reproduzir o efeito das ordens de paragem, garante que o mercado levará sempre um tempo infinito para atingir uma queda infinita. Para este caso, a equação diferencial fica então

$$dr = - (k r + \beta r^2 + \alpha_2 r^3) dt + \sqrt{\theta} [p(r, t)]^{\frac{1-q}{2}} dW_t. \quad (5.33)$$

A equação de Fokker-Planck associada é

$$\frac{\partial p(r, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} [(k r + \beta r^2 + \alpha_2 r^3) p(r, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ \theta [p(r, t)]^{(2-q)} \right\}, \quad (5.34)$$

e a sua solução estacionária assimétrica

$$p_s(r) = \frac{1}{Z} \exp_q \left[ - \frac{Z^{1-q}}{(2-q)\theta} \left( \frac{k}{2} r^2 + \frac{\beta}{3} r^3 + \frac{\alpha_2}{4} r^4 \right) \right]. \quad (5.35)$$

Utilizando a eq. (5.35), pode fazer-se uma estimativa dos valores dos coeficientes do potencial de confinamento,

$$V(r) = \frac{k}{2} r^2 + \frac{\beta}{3} r^3 + \frac{\alpha_2}{4} r^4. \quad (5.36)$$

Dada a qualidade do ajuste do segundo momento de Kramers-Moyal,  $\beta$  e  $\alpha_2$  deverão ser pequenos e compatíveis com pequenas correcções. Considerando os valores de  $\theta \approx 2.67$  e  $q \approx 1.3$ , obtêm-se os valores de  $k \approx 5.5$ ,  $\beta \approx 0.12$ ,  $\alpha_2 \approx 0.02$ . Com estes valores, pode verificar-se que o potencial de confinamento não apresenta qualquer máximo local. A existência de um máximo local, introduziria uma assinatura no sistema tal que tornaria possível uma estimativa das quedas bruscas, *crashes*, através do cálculo dos primeiros tempos de passagem.

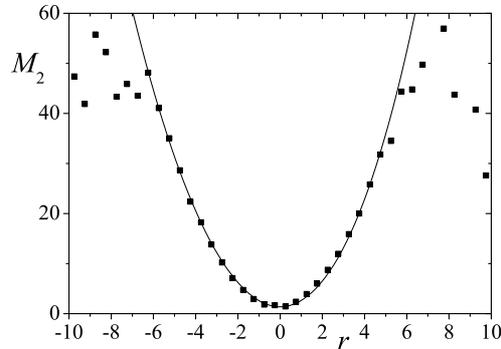


Figura 5.12: Os símbolos correspondem ao segundo momento de Kramers-Moyal para os dados e a linha ao ajuste através eq. (5.29) considerando a situação estacionária dada pela eq. (5.35). Os parâmetros são:  $\tau = 1$  min,  $\theta \approx 2.67$ ,  $q \approx 1.3$ ,  $k = 5.5$ ,  $\beta = 0.12$  e  $\alpha_2 = 0.02$ .

Consequentemente, o cenário aqui apresentado é consistente com a hipótese de que as grandes flutuações de preço negativas apresentam dinâmicas que não podem ser explicadas como o mesmo tipo de cenário que descreve os regimes ditos normais [247].

### 5.3 Situações de iliquidez

Até agora estudou-se o caso em que  $k$  é positivo, o que corresponde a um mercado de características de liquidez. Contudo, podem ocorrer situações de pressão no mercado em que a taxa de novas ordens se mostra superior à taxa de absorção das ordens, i.e.,  $\gamma < \frac{\bar{\alpha}}{\delta}$ . Tal desigualdade implica na perda de estabilidade do mercado. Sendo  $k < 0$ , o potencial confinante deixa de ter como mínimo o valor de  $r = 0$ . O potencial confinante passa então a apresentar três extremos entre os quais se inclui  $r = 0$ , mas agora como máximo local. Os outros dois extremos são o

mínimo local,

$$r^+ = \beta \frac{\sqrt{1 + 4|k|\alpha_2} - 1}{2\alpha_2},$$

e o mínimo absoluto

$$r^- = -\beta \frac{\sqrt{1 + 4|k|\alpha_2} + 1}{2\alpha_2}.$$

A diferença entre  $V(r^-)$  e  $V(r^+)$  é de  $-\frac{\beta(\beta+4|k|\alpha_2)^{3/2}}{12\alpha_2}$ .

Este caso é equivalente a uma situação especulativa, ou de bolha económica, em que o mercado apresenta uma taxa de crescimento média  $r^+$ . Todavia, este é um cenário instável, existindo uma tendência forte no mercado a queda. O tempo entre subidas sucessivas (dinâmica situada em torno do mínimo  $r^+$ ) e queda (dinâmica situada em torno do mínimo  $r^-$ ) pode ser estimado recorrendo tempo médio de passagem,  $T$ , entre  $r^+$  e 0 [239].

Para o casos próximos da (ou na) estacionaridade,  $\frac{\partial p(r,t)}{\partial t} \simeq 0$ , este tempo pode ser facilmente calculado [246] através das expressões (5.2.160), (5.2.157) e (5.2.144) da referência [239],

$$T(r^+ \rightarrow 0) \simeq (2 - q) B \left\{ \int_{r^+}^0 \exp_q[-BV(x)]^{2-q} dx \right\} \int_{-\infty}^x \exp_q[BV(y)] dy$$

com

$$B = \frac{Z^{1-q}}{(2 - q) \theta}.$$

Esta conjuntura ocorre, efectivamente, nos mercados financeiros e corresponde a episódios nos quais se tem um conjunto de subidas sucessivas após as quais, os agentes procuram a realização de mais-valias.

**Observações** Embora estes modelos não capturem a propriedade de longas correlações em  $r^2$ , esta propriedade pode ser introduzida conjugando a proposta aqui apresentada com a aproximação superestatística [5][144]. Assim, a constante de volatilidade,  $\theta$ , passaria a ser uma quantidade lentamente variável no tempo e com correlações de longo alcance. Por exemplo, a descrição do regime normal no longo termo, eq. (5.25), seria associada à distribuição local. Possíveis candidatos para esta distribuição seriam a distribuição log-normal [169], a distribuição  $\chi^2$  [144] e a própria distribuição  $F$  [169][240]. Neste caso, as flutuações na volatilidade seriam, a par de  $q$ , responsáveis pela forma não-Gaussiana das distribuições de preço. Deve contudo sublinhar-se que esta contribuição *não pode implicar numa transformação do índice  $q \neq 1$  em  $q = 1$* . Isso conduziria a uma independência do segundo momento de Kramers-Moyal relativamente às flutuações de preço o que não se apresenta compatível com as observações até hoje efectuadas.

## Capítulo 6

# Modelo Microscópico: Dinâmica de Opinião

Até agora, a modelagem dinâmica de observáveis financeiras, aqui apresentada, tem sido feita a uma escala mesoscópica. Noutras palavras, a evolução temporal destas grandezas mensuráveis é feita a partir de equações diferenciais estocásticas (tipo Langevin) e/ou equações de Fokker-Planck para a probabilidade. Isto significa que, a individualidade de cada constituinte é suprimida e o seu efeito é substituído pelo comportamento médio de todos os agentes que contém uma componente de aleatoriedade.

Com o aumento do interesse por parte de físicos em sistemas económicos, deu-se início ao desenvolvimento de modelos microscópicos para explicação de uma série de propriedades já aqui referidas [160][167][232][248] [249][250][251] [252][253] [254][255][256]. Dentro deste tipo de modelos, podem referir-se cenários fortemente inspirados em modelos de magnéticos tradicionalmente utilizados em física estatística e matéria condensada para os quais existe uma vasta literatura, e.g., [258][259][260]. Esta abordagem resulta no facto de se considerar um

mercado financeiro como um conjunto de subunidades em que cada uma sofre influência das restantes nas decisões de compra ou venda que toma.

Neste capítulo será apresentado um modelo microscópico, baseado em modelos de interacções aleatórias entre os agentes, considerando um termo que corresponde a uma medida da volatilidade.

## 6.1 O modelo

Considere-se um sistema de  $N$  agentes que tomam decisões sobre a influência de um ambiente externo bem como dos outros agentes. Atribua-se a cada indivíduo uma variável  $\sigma_i = \pm 1$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), em que os dois estados possíveis representam decisão de compra (+1) ou venda (-1) de um bloco de acções em intervalos de tempo discretos,  $t$ . A opinião do agente  $i$ , no instante  $t + 1$ , depende das opiniões dos outros agentes, de efeitos aleatórios e das volatilidades que podem ser incorporadas num campo local no instante  $t$ ,

$$I_i(t) = \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} A_{ij}(t) \sigma_j(t) + h_i(t) - B_i |x(t)|, \quad (6.1)$$

onde  $\{A_{ij}(t)\}$  representa as interacções entre os agentes dependentes do tempo, enquanto que  $\{h_i(t)\}$  são campos externos que levam em linha de conta os efeitos do meio externo envolvente.

O somatório  $\sum_{j \neq i}$  é aplicado a todos os agentes, excepto  $i$ . Numa linguagem física, tal é equivalente a dizer-se que a interacção neste sistema é de alcance infinito. Este tipo de interacção é perfeitamente admissível, pois nos dias que correm a proliferação de meios de comunicação,

anula os efeitos da distância espacial na capacidade de uma pessoa influenciar outra.

Por conseguinte,

$$x(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i(t), \quad (6.2)$$

representa a diferença entre o número de decisões de compra e decisões de venda, i.e., a diferença entre oferta e procura. O último termo da eq. (6.1) considera a amplitude das variações, no tempo  $t$ , da variável  $x(t)$ . Para  $B > 0$  (que será o caso aqui estudado), este termo contribui para que os agentes ponderem as suas decisões de forma a evitarem grandes desvios em  $x(t)$ . Consequentemente, ele introduz um ingrediente fundamental existente nos mercados financeiros: a *aversão ao risco*.

Considere-se que, numa proposta alternativa [241, 261], porém não antagónica, à eq. (5.20) que o lucro instantâneo é proporcional a  $x(t)$  e a  $S(t)$ ,

$$\frac{dS(t)}{dt} \propto x(t)S(t).$$

Discretizando o tempo na equação acima tem-se,

$$\ln S(t') - \ln S(t) \propto \sum_{n=0}^{m-1} x(t + n\Delta t)\Delta t,$$

onde  $t' = t + m\Delta t$ . Considerando  $m = 1$  obtém-se

$$x(t) \propto \ln S(t + \Delta t) - \ln S(t). \quad (6.3)$$

Mostra-se assim que, a variável  $x(t)$  está directamente relacionada com o lucro realizado durante um intervalo de tempo  $\Delta t$  (aqui considerado como  $\Delta t = 1$ ) e o seu módulo uma medida da volatilidade [6]. O último termo da eq. (6.1) introduz uma dependência do campo local na volatilidade, simulando efeitos de aversão ao risco. Para valores de  $B_i$  positivos (negativos), o agente  $i$  é induzido a vender (comprar) quando a volatilidade aumenta. Para  $B_i = 0$ , o modelo recupera propostas inicialmente apresentadas [251].

Nestas circunstâncias, o sistema evoluirá de acordo com uma certa dinâmica que, neste caso, será a dinâmica de banho térmico. Aqui os valores das variáveis  $\{\sigma_i(t)\}$  são actualizados de acordo com a regra probabilística,

$$\sigma_i(t+1) = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p_i(t) \\ -1, & \text{com probabilidade } 1 - p_i(t) \end{cases}, \quad (6.4)$$

onde

$$p_i(t) = \{1 + \exp[-2I_i(t)]\}^{-1}. \quad (6.5)$$

Deve salientar-se que as variáveis  $\{\sigma_i(t)\}$  podem ser actualizadas sequencialmente (assincronamente), i.e., uma única variável  $\sigma_i(t)$  é alterada de cada vez, ou actualizada paralelamente (sincronizadamente), i.e., todos os valores  $\{\sigma_i(t)\}$  são actualizados a um dado tempo. Para os dois procedimentos, a unidade de tempo (habitualmente designada por passo de Monte Carlo) corresponde à actualização de todo o conjunto de variáveis  $\{\sigma_i(t)\}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

Utilizando uma linguagem comum em problemas de magnetes estocásticos, a proposta de-

finida na eq. (6.1) representa, como já referido, um modelo com interacção de alcance infinito para o qual o tratamento em campo médio permite a obtenção de um resultado correcto quando se considera a versão de actualização sequencial nos limites termodinâmico e de tempo longo.

Tomando então, a aproximação de campo médio e actualização sequencial em que

$$A_{ij}(t) = A\xi(t) (\forall i \neq j); \quad h_i(t) = h\zeta(t) (\forall i); \quad B_i(t) = B (\forall i), \quad (6.6)$$

onde  $\xi(t)$  e  $\zeta(t)$  são variáveis aleatórias no tempo, uniformemente distribuídas no intervalo  $[-1, 1]$ , obtém-se um campo local que é independente do índice  $i$  do sítio (agente)

$$I(t) = A\xi(t)x(t) + h\zeta(t) - B|x(t)|. \quad (6.7)$$

Desta forma, o valor médio da variável  $\sigma$ , no instante  $t + 1$ , pode ser facilmente calculada a partir de um conjunto de regras definidas nas eqs. (6.4) e (6.5),

$$[\sigma(t + 1)]_{\text{av}} = (+1)p(t) + (-1)[1 - p(t)] = 2p(t) - 1 = \tanh[I(t)].$$

Dentro da aproximação de campo médio, pode verificar-se que a média acima indicada pode ser identificada com o lucro  $x(t + 1)$ ,

$$[\sigma(t + 1)]_{\text{av}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i(t + 1) \equiv x(t + 1),$$

de tal forma que

$$x(t + 1) = \tanh[I(t)] = \tanh[A\xi(t)x(t) + h\zeta(t) - B|x(t)|] . \quad (6.8)$$

É importante referir que o tratamento em campo médio do modelo apresentado, utilizando uma dinâmica paralela, conduz, geralmente, a uma termodinâmica diferente do caso do modelo interacção de alcance infinito. Contudo, é demonstrável que a eq. (6.8) pode ser utilizada neste tipo de actualização [262][263]. Na realidade, espera-se que a actualização paralela, num sistema microscópico de agentes interactuantes reproduza mais fielmente o comportamento de um sistema financeiro real. Hoje em dia, os agentes encontram-se ligados através de redes de computadores ou, no caso de mercados de pregão como NYSE, em contacto físico directo de tal forma que, num intervalo de tempo infinitesimal, muitos agentes tomam decisões.

Usando a eq. (6.8) e considerando a condição inicial,  $x(0)$ , geraram-se séries temporais de lucro,  $x(t)$ , no limite termodinâmico, para a qual se pode determinar uma distribuição de probabilidades,  $P(x)$ . Foi verificado que, para os parâmetros  $(A, h, B)$ , dentro do intervalo de interesse para sistemas financeiros, as magnitudes de  $x(t)$  estão basicamente restritas a pequenos valores, tipicamente inferiores a 0.2. Para este caso, considerando  $|A\xi(t)x(t) - B|x(t)| + h\zeta(t)| \ll 1$ , a eq. (6.8) pode ser linearizada,

$$x(t + 1) \approx A\xi(t)x(t) + h\zeta(t) - B|x(t)| . \quad (6.9)$$

Geralmente, os mapas das eqs. (6.8) e (6.9) conduzem a regimes diferentes caracterizados por pontos fixos bem definidos que são dependentes dos parâmetros  $(A, h, B)$ . O limiar do

caos, que é caracterizado por um expoente máximo de Lyapunov, corresponde então a superfície crítica definida como  $A^*(h, B)$ .

Para o caso  $B = 0$ , os dois mapas caem na classe de mapas de ruído multiplicativo já estudados por PLATT e NAKAO e respectivos colaboradores [264] [265][266]. No caso  $h = 0$ , para um ruído uniformemente distribuído  $\xi(t)$  no intervalo  $[-1, 1]$ , existe um ponto fixo  $x = 0$  para  $A < A^*(0, 0)$  [ $A^*(0, 0) = e = 2.718\dots$ ], enquanto que para  $A \geq A^*(0, 0)$ , o ponto fixo perde a estabilidade e entra-se numa região caótica. A introdução de um pequeno ruído,  $h > 0$ , torna-se suficiente para reduzir o limiar para um valor  $A^*(h, 0) = 1$  [264][265][266]. Como será discutido mais à frente, para o caso  $B > 0$ , tem-se um quadro qualitativamente semelhante tal que, para um valor típico  $B = 0.22$ , a ser considerado na próxima secção, o limiar do caos ocorre praticamente para o mesmo valor do caso  $B = 0$ .

O parâmetro  $B$  pode ser obtido a partir da eq. (6.9). De facto, multiplicando a eq. (6.9) por  $x(t)$  tem-se,

$$x(t+1)x(t) \approx A\xi(t)x^2(t) + h\zeta(t)x(t) - B|x(t)|x(t) .$$

Aplicando médias temporais a ambos os lados da equação anterior e levando em conta que  $\xi(t)$  e  $\zeta(t)$  são ruídos independentes distribuídos no intervalo  $[-1, 1]$  (cujas médias no tempo são nulas), tem-se a simples relação,

$$B \approx -\frac{\langle x(t+1)x(t) \rangle}{\langle |x(t)|x(t) \rangle} , \quad (6.10)$$

onde  $\langle \rangle$  representa média temporal.

Assim, o parâmetro  $B$  pode ser facilmente estimado para uma série temporal com elementos  $\{x(t)\}$  dentro do intervalo de validade da aproximação linear eq. (6.9). É directo verificar-se que a determinação de  $B$  está directamente relacionada com a função de correlação  $\langle x(t+1)x(t) \rangle$ .

Na próxima secção verifica-se numericamente que, tal como acontece para o caso  $B = 0$  [267][268], as caudas da distribuição de probabilidade associadas com a forma linearizada (6.9) seguem uma lei de potência

$$P(x) \sim |x|^{-\alpha-1}, \quad (6.11)$$

para pequenos valores de  $B$ , com  $B \gg h > 0$ , e  $|x| \gg h > 0$ . Estas condições restringem os intervalos a serem utilizados para os parâmetros,  $B$  e  $h$ , para uma descrição apropriada de um mercado real. Em princípio, ter-se-ão dois expoentes,  $\alpha$  e  $\beta$ , para os dois lados de  $P(x)$ , i.e.,  $x < 0$  and  $x > 0$ , respectivamente. Contudo, e tal como provado no Apêndice,  $\alpha = \beta$ . Concomitantemente, uma simples equação pode ser obtida (para  $h = 0$ ) relacionando  $A$ ,  $B$  e  $\alpha$ ,

$$\frac{(A - B)^{1+\alpha} + (A + B)^{1+\alpha}}{2A(1 + \alpha)} = 1. \quad (6.12)$$

Obviamente, a eq. (6.12) corresponde à contribuição principal de uma expansão para  $h$  pequeno de tal forma que, termos de ordem elevada se tornam desprezáveis para pequenos valores de  $h$ .

Por isso, tendo-se uma série financeira de lucros, com uma dada distribuição de probabilidade que segue, assintoticamente, a lei de potência (6.11) e cujos elementos  $\{x(t)\}$  caem no intervalo de validade da aproximação linear (6.9), pode, em princípio, medir-se o expoente  $\alpha$ , através do ajuste, por métodos numéricos apropriados, do comportamento de escala da distribuição (6.11). Quando ao parâmetro  $B$ , este pode ser estimado a partir da eq. (6.10) e finalmente o parâmetro  $A$  pode ser obtido pela eq. (6.12). Desta forma, fixando um valor de  $h$  pequeno pode encontrar-se, como uma aproximação, o melhor par de parâmetros  $(A, B)$  de forma a reproduzir o sistema real em consideração.

Pela eq. (6.7), além das séries temporais de lucro  $x(t)$ , pode definir-se uma série temporal da volatilidade,  $v(t) = |x(t)|$ . Para lá das auto-funções de correlação dos lucros e volatilidade, respectivamente,

$$C_x(\tau) = \frac{\langle x(t)x(t+\tau) \rangle - \langle x(t) \rangle^2}{\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2}, \quad (6.13)$$

$$C_v(\tau) = \frac{\langle v(t)v(t+\tau) \rangle - \langle v(t) \rangle^2}{\langle v^2(t) \rangle - \langle v(t) \rangle^2}, \quad (6.14)$$

outra função de correlação importante é a correlação entre lucros e volatilidades futuras,

$$\mathcal{L}(\tau) = \frac{\langle x(t)v(t+\tau) \rangle - \langle x(t) \rangle \langle v(t) \rangle}{\langle v(t) \rangle^2}. \quad (6.15)$$

que habitualmente define o efeito de alavancamento, do qual se concluiu que os mercados tendem a ser mais activos após os abaixamentos do que após as subidas [236]. Este comportamento

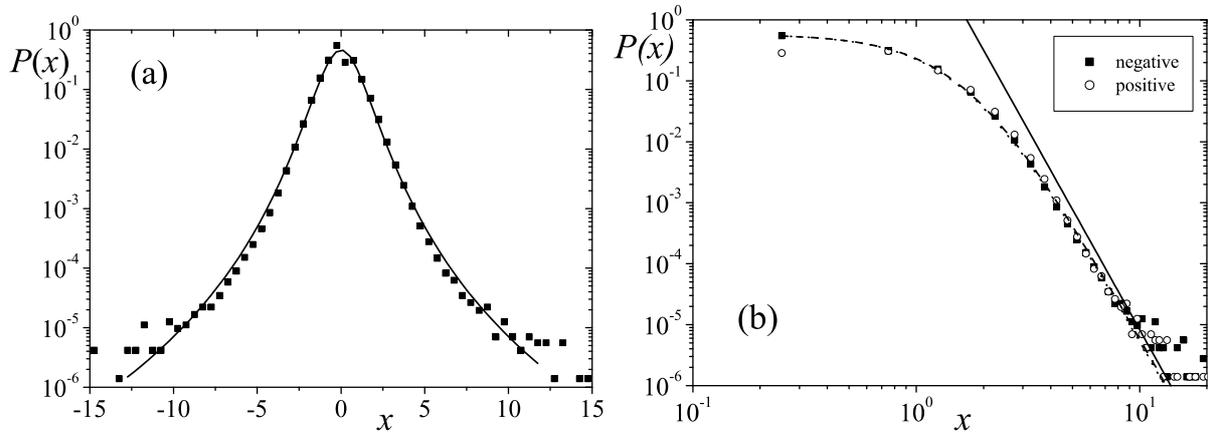


Figura 6.1: (a) Distribuição de probabilidade dos lucros  $x(t)$  do DJ30; a linha completa corresponde à distribuição da eq. (6.11). (b) Representação em escala log-log da distribuição de probabilidade onde é visível o comportamento assintótico da distribuição de probabilidade mostrando o comportamento assintótico da eq. (6.8); A linha recta apresenta um declive de  $-6.56$ , o que corresponde a um expoente de  $\alpha = 5.56$ . Os quadrados (círculos) correspondem a valores de lucro negativos (positivos) e são ajustados com as mesmas distribuições usadas em (a), representadas aqui por linhas tracejadas (pontilhadas) que são praticamente indistinguíveis a olho nu. [em **P11**]

corresponde a mais uma manifestação do fenómeno de aversão ao risco, sendo adicionalmente concordante com a expansão de  $\alpha$ , referente à taxa de introdução de novas ordens no livro de ordens, apresentada no cap. 5.

## 6.2 Resultados

Aplicando o método apresentado na secção anterior ao conjunto de dados correspondentes ao DJ30, podem comparar-se os comportamentos do modelo e das séries temporais reais.

Através da eq. (6.10) verifica-se um conjunto de valores de  $B$  para cada companhia dentro de um intervalo que varia entre  $B = 0.10$  e  $B = 0.35$ , que resultam num valor médio de

$B = 0.22 \pm 0.05$ . Relativamente às distribuições de probabilidade, foi realizada uma média, para cada valor de  $r$  dos histogramas  $p(r)$ , obtendo-se a distribuição de probabilidade média típica de uma companhia que componha o Dow Jones Industrial Average (já apresentadas anteriormente). Na fig. 6.1 apresenta-se este histograma representado nas escalas real-log e log-log. Verifica-se concordância com a hipótese de escala assintótica apresentada na eq. (6.11) com o mesmo expoente para valores positivos e negativos de  $x$ . Especificamente, verifica-se bom ajuste com a distribuição<sup>1</sup>

$$P(x) = P(0)(1 + \gamma_{\pm} x^2)^{-\mu_{\pm}}, \quad (6.16)$$

onde o sinal  $+$  ( $-$ ) aplica-se a lucros positivos (negativos) e, no regime assintótico,  $\mu_{\pm} = (\alpha_{\pm} + 1)/2$ . O ajuste para valores negativos é quase indistinguível do ajuste referente aos valores positivos. Os valores referentes a  $\alpha_{\pm}$  são novamente obtidos utilizando um processo conhecido como estimador de Hill [269]. Os valores encontrados foram  $\alpha_{+} = 5.57 \pm 0.08$  e  $\alpha_{-} = 5.54 \pm 0.06$ . Os restantes valores foram obtidos utilizando um processo de ajuste não-linear. Os valores são:  $P(0) = 0.582 \pm 0.001$ ,  $\gamma_{+} = 0.864 \pm 0.004$  e  $\gamma_{-} = 0.837 \pm 0.003$ . O ajuste dos dois lados apresenta a seguinte qualidade de ajuste:  $\chi^2 = 1.24 \times 10^{-6}$  e  $R^2 = 0.99855$  (lado positivo);  $\chi^2 = 1.1 \times 10^{-6}$  e  $R^2 = 0.99871$  (lado negativo).

Conclui-se então que o sistema pode ser caracterizado por um único expoente  $\alpha$ , considerando as margens de erro. Este  $\alpha$ ,  $\alpha = 5.56 \pm 0.08$ , é compatível com  $q = 1.3$ . Assim sendo, esta

---

<sup>1</sup>A representação seguinte é equivalente a uma  $q_{\pm}$ -Gaussiana em que  $q_{\pm} = 1 + \frac{1}{\mu_{\pm}}$  e  $\gamma_{\pm} = \frac{(q-1)}{(5-3q_{\pm})\sigma_{\pm}^2}$ .

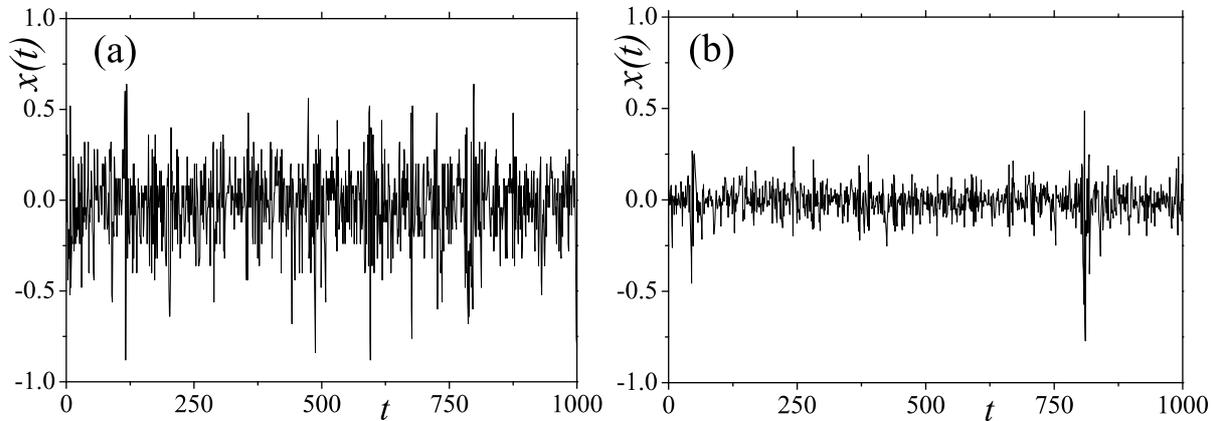


Figura 6.2: Séries de lucro  $x(t)$  geradas a partir de uma actualização paralela de  $N$  agentes, para os casos (a)  $N = 50$ ; (b)  $N = 500$ . Os parâmetros considerados na eq. (6.7) foram:  $A = 1.5$ ,  $h = 0.01$  e  $B = 0.25$ . [em **P11**]

análise atribui a assimetria da distribuição aos parâmetros  $\gamma_{\pm}$  que diferem ligeiramente. Substituindo os valores  $\alpha = 5.56 \pm 0.08$  e  $B = 0.22 \pm 0.05$  na eq. (6.12), encontra-se  $A = 1.3 \pm 0.06$ . Consequentemente, estes valores são os que apresentarão uma melhor descrição do sistema em análise.

Considere-se agora as séries temporais geradas por meio do modelo teórico. É importante referir-se que  $(A, h, B)$  aqui utilizados levam a que os mapas representados pelas eqs. (6.8) e (6.9) conduzam a resultados quantitativos semelhantes, tal como apresentado no Apêndice através do cálculo dos expoentes de Lyapunov. Na análise que se segue foram utilizados valores de  $A = 1.5$  e  $h = 0.01$ , assim como  $B = 0.25$ . Nos casos em que se comparam os resultados do modelo com os dados financeiros utilizar-se-á  $A = 1.3$ ,  $B = 0.22$  e  $h = 0.01$ . Como condição inicial foi escolhido  $x(0) = 0$ , embora se verifique que uma escolha particular de  $x(0)$  é irrelevante para o comportamento geral das séries temporais.

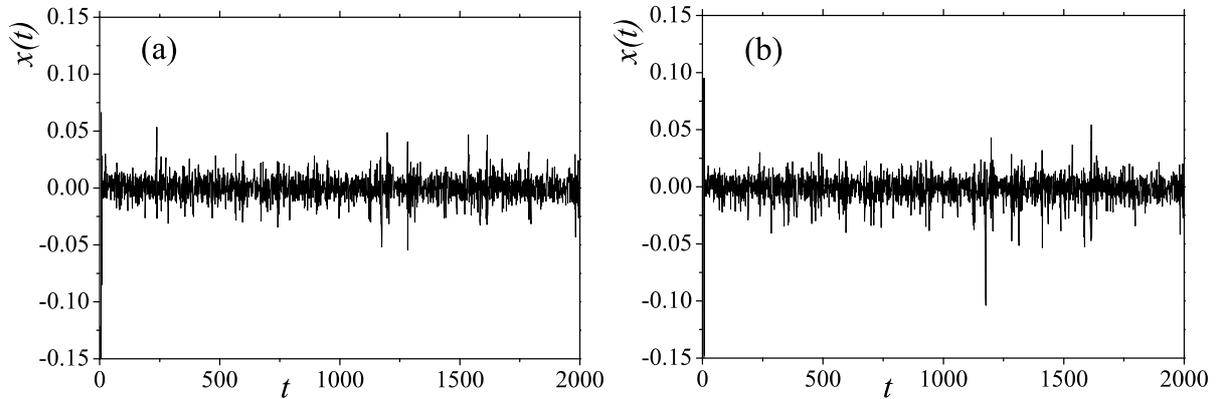


Figura 6.3: As séries de lucro  $x(t)$  geradas a partir do mapa (6.8), para os casos (a)  $B = 0$ ; (b)  $B = 0.25$ . Para ambos casos, os casos  $A = 1.5$  e  $h = 0.01$  são usados. [em **P11**]

Primeiramente, foram geradas séries temporais de lucro,  $x(t)$ , por simulação numérica, para valores finitos de  $N$ , através da actualização paralela e sequencial das variáveis de spin usando o algoritmo de banho térmico apresentado anteriormente. No caso paralelo, para um pequeno número de agentes obtêm-se séries temporais caracterizadas por grandes flutuações como é visível na fig. 6.2 para  $N = 50$ . Contudo, aumentando o número de agentes, a amplitude das flutuações decresce e observam-se zonas bem definidas onde o valor médio local é bem superior, mesmo para pequenos valores como  $N = 500$ . Por isso, no limite termodinâmico,  $N \rightarrow \infty$ , espera-se que a série temporal consista de pequenas flutuações em torno de zero ( $|x| \ll 1$ ), com o aparecimento de *bursts* aleatórios no tempo. No caso da actualização sequencial, verificou-se uma convergência lenta para o limite termodinâmico de tal forma que, para valores de  $N$  investigados (tipicamente  $N \cong 5000$ ), não foi verificada a presença de *bursts*. Apesar disso, no limite de tempo longo, a actualização de sequencial de spins leva ao mapa unidimensional (6.8).

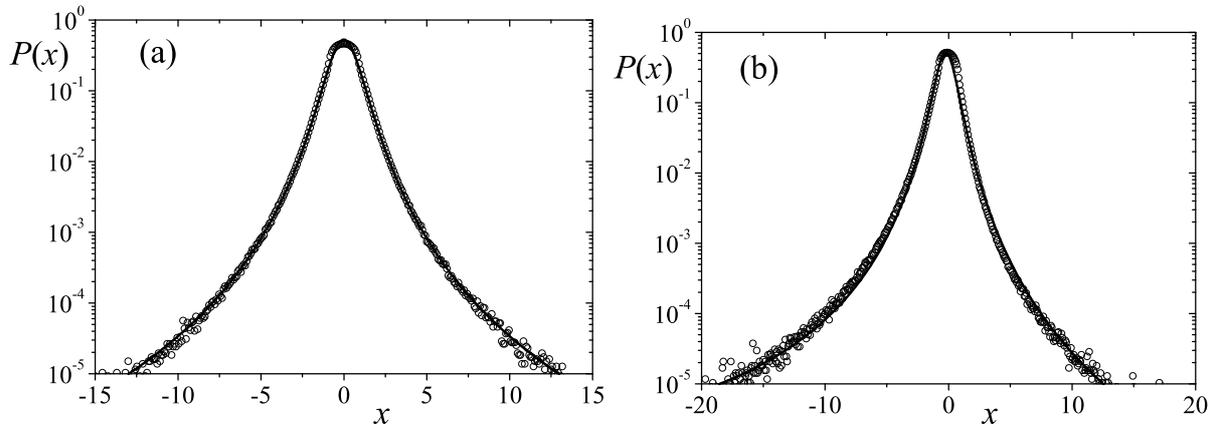


Figura 6.4: Densidade de probabilidade para  $x(t)$  (rescalado pela sua variância), para os casos (a)  $B = 0$ ; (b)  $B = 0.25$ . Em ambos os casos foram utilizados os valores  $A = 1.5$  e  $h = 0.01$ . Os ajustes utilizados foram: em (a) uma distribuição de Tsallis, eq. (6.17), enquanto para (b) a linha completa corresponde à distribuição descrita pela eq. (6.18). [em **P11**]

Na fig. 6.3 exibem-se séries temporais, obtidas por iteração do mapa (6.8), para  $B = 0$  e  $B = 0.25$ . Em ambos os casos, observa-se a presença de *bursts* caóticos, característicos de eventos extremos em concordância com os resultados empíricos [169]. Nota-se também que magnitude dos *bursts* aumenta com  $B > 0$ . É importante sublinhar que para o caso da fig. 6.3, a amplitude dos retornos permanece pequena, i.e.,  $|x| \ll 1$ , como esperado pelas simulações da fig. 6.2, no limite termodinâmico. Adicionalmente, este resultado suporta a utilização da aproximação linear (6.9) para o mapa do eq. (6.8). Daqui em diante, os resultados reportar-se-ão a séries temporais obtidas por iteração do mapa (6.8).

Na fig. 6.4 exibe-se a distribuição de probabilidade para  $B = 0$  e  $B = 0.25$ . As abscissas são definidas em unidades de desvio-padrão. Para o caso  $B = 0$ , verifica-se que a distribuição de lucros é bem ajustada com uma lei de potência simétrica com um expoente de cauda obtido

pelo estimador de Hill,  $\alpha = 3.84 \pm 0.04$ , e por ajuste não linear,  $P(0) = 0.532 \pm 0.003$ ,  $\gamma_+ = \gamma_- = 0.57 \pm 0.03$ , com a qualidade do ajuste dada por  $\chi^2 = 1.4 \times 10^{-4}$  e  $R^2 = 0.9847$ . Dado que as distribuições de Tsallis estão intimamente relacionadas com sistemas dinâmicos que contêm ruídos aditivo e multiplicativo (descorrelacionados) [170][245], tal como o caso aqui tratado, apresenta-se o ajuste equivalente,

$$p_q(x) = \left[ \frac{(q-1)\beta}{\pi(3-q)} \right]^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)} \frac{1}{\left[1 + \beta\left(\frac{q-1}{3-q}\right)x^2\right]^{1/(q-1)}}, \quad (6.17)$$

representado na fig. 6.4 (lado esquerdo) pela linha completa. Dentro deste ajuste tem-se  $q = 1.42 \pm 0.01$  and  $\beta = 0.85 \pm 0.03$ . A distribuição de probabilidade no painel direito da fig. 6.4 apresenta uma assimetria, semelhante ao que acontece com os mercados financeiros; neste caso o melhor ajuste que se aplica, quer a valores positivos quer a valores negativos, foi encontrada com uma distribuição de Tsallis assimétrica,

$$p_q(x) = p_q(0) \frac{1}{\left[1 + \beta\left(\frac{q-1}{3-q}\right)(x^2 + cx^3)\right]^{1/(q-1)}}, \quad (6.18)$$

representado na fig. 6.4 (b) pela linha completa. Para este ajuste obteve-se  $\beta = 1.68 \pm 0.05$ ,  $c = 1.62 \pm 0.04$ ,  $q = 1.47 \pm 0.03$  e  $p_q(0) = 0.515 \pm 0.003$  ( $\chi^2 = 1.2 \times 10^{-3}$  e  $R^2 = 0.9454$ ).

Como referido anteriormente, a distribuição de probabilidade para as flutuações de preço é assimétrica, apresentando diferentes comportamentos para valores positivos e negativos das caudas. Por isso, o modelo definido na eq. (6.1), com  $B > 0$ , conduz a uma distribuição de probabilidade para o lucro que se aproxima melhor da apresentada por sistemas reais do que o

modelo em que o termo do tipo volatilidade não é levado em conta. Para tal, foi aplicado o modelo teórico considerando os parâmetros  $A = 1.3$ ,  $B = 0.22$  (correspondente aos dados do conjunto DJ30) e  $h = 0.01$ . A distribuição de probabilidade resultante que apresenta assimetria, pode ser ajustada pela eq. (6.11), com  $P(0) = 0.457 \pm 0.007$ , e  $\gamma_+ = 0.44 \pm 0.08$ ,  $\alpha_+ = 5.47 \pm 0.04$  ( $\chi^2 = 4.5 \times 10^{-4}$  e  $R^2 = 0.95199$ ), para valores positivos, enquanto  $\gamma_- = 0.20 \pm 0.06$ ,  $\alpha_- = 5.40 \pm 0.03$  ( $\chi^2 = 1.7 \times 10^{-4}$  e  $R^2 = 0.9880$ ), para valores negativos. Os valores dos expoentes de cauda de cada lado coincidem, considerando barras de erro, de tal forma que pode ser definido um único expoente,  $\alpha = 5.44 \pm 0.06$ , que concorda, dentro das margens erro, com o valor estimado para o conjunto DJ30,  $\alpha = 5.56 \pm 0.08$ .

Considerem-se as funções de correlação definidas anteriormente. Na fig. 6.5 são exibidos os valores absolutos de  $C_x(\tau)$ , para  $B = 0$  e  $B = 0.25$ , bem como para  $C_v(\tau)$ . A auto-função de correlação do lucro que apresenta um decaimento exponencial para pequenos valores de  $\tau$ , peculiar de dados intra-diários [169], apenas pode ser verificada se  $B > 0$ ; no painel (b) da fig. 6.5 tem-se um tempo característico de  $\tau^* = 8$  [em unidades arbitrárias como definido na eq. (6.8)]. O caso  $B = 0$ , para o qual se observa um comportamento ruidoso para  $C_x(\tau)$  (para todos os valores de  $\tau$ ), é apenas apropriado para a descrição da probabilidade de dados inter-diários (i.e., valores grandes de  $\tau$ ), muito embora, se mostre também inadequado para uma descrição das correlações entre lucro volatilidade. No que concerne à correlação volatilidade-volatilidade, o termo introduzido na eq. (6.1) não altera qualitativamente este comportamento. Os painéis inferiores da fig. 6.5 estão embos em desacordo com os resultados empíricos que

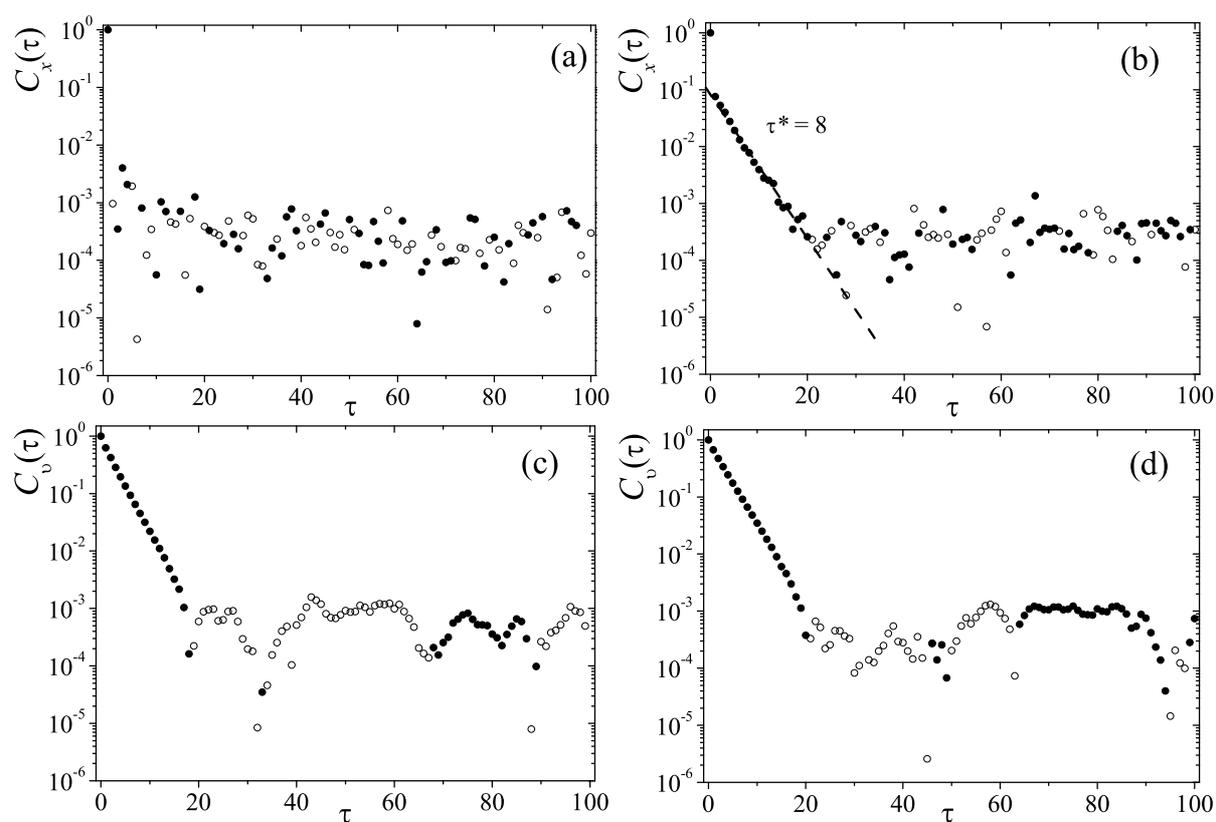


Figura 6.5: Valores absolutos da função de auto-correlação dos lucros,  $C_x(\tau)$ , e para a volatilidade,  $C_v(\tau)$ , para os casos  $B = 0$  [(a) e (c)] e  $B = 0.25$  [(b) e (d)]. Círculos a cheio (vazios) representam valores positivos (negativos) da correlação. Em todos os casos os valores utilizados foram  $A = 1.5$  e  $h = 0.01$ . [em P11]

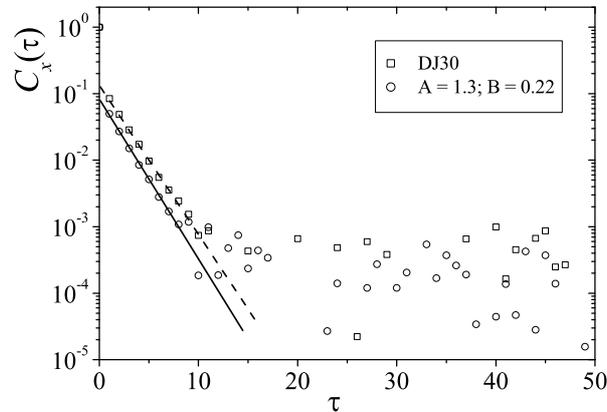


Figura 6.6: O valor absoluto da função de correlação para lucros do DJ30 (quadrados) é comparado com o valor obtido através do modelo apresentado usando parâmetros  $A = 1.3$ ,  $B = 0.22$ , e  $h = 0.01$  (círculos). [em **P11**]

apresentam uma lei de potência ou uma combinação linear de exponenciais para descrever o decaimento de  $C_v(\tau)$  [169].

Este problema poderá vir a ser resolvido se, em vez de um termo simples para a volatilidade, como apresentado na eq. (6.1), a influência da volatilidade seja representada através de um núcleo de memória, por exemplo, exponencial<sup>2</sup>,

$$B_i |x(t)| \rightarrow B_i |\widetilde{x(t)}| = B_i \sum_{j=0}^t Z_i \exp \left[ -\frac{t-j}{\tau_{v,i}} \right] |x(j)|, \quad (6.19)$$

em que  $Z_i$  representa a normalização do núcleo e  $\tau_{v,i}$  o tempo característico para cada agente  $i$ . É possível definir uma função de correlação,  $C_x(\tau)$ , associada com o conjunto DJ30 (ver fig. 6.6), como uma média feita sobre os seus respectivos constituintes. Desta forma, cada quadrado na fig. 6.6 corresponde a uma média de  $C_x(\tau)$  sobre os 30 títulos do DJ30. A partir

<sup>2</sup>Esta situação corresponde a que a volatilidade seja calculada a partir de uma média da magnitude das flutuações de preço.

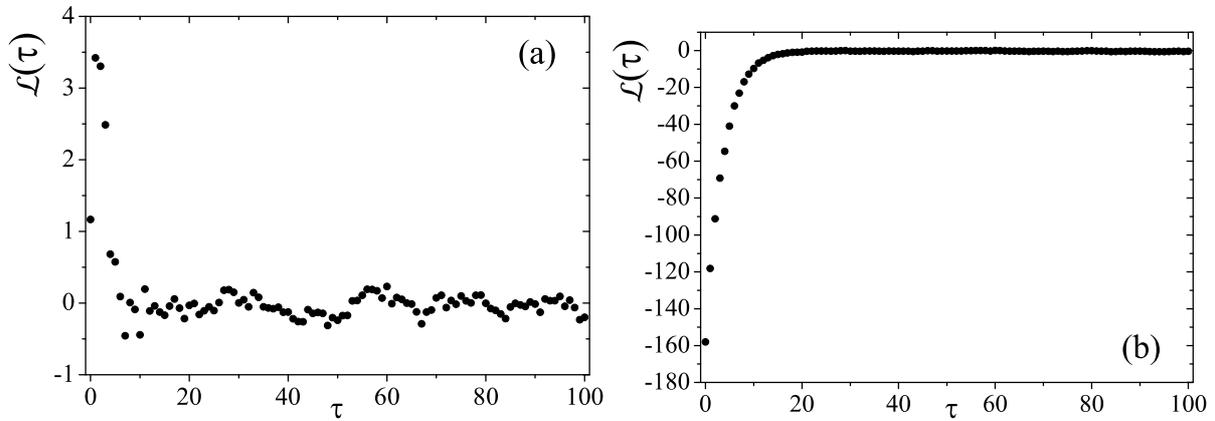


Figura 6.7: A função de correlação lucro-volatilidade  $\mathcal{L}(\tau)$ , para os casos (a)  $B = 0$ ; (b)  $B = 0.25$ . Em ambos os casos, os valores utilizados foram  $A = 1.5$  and  $h = 0.01$ . [em **P11**]

destes dados, obteve-se um tempo de decaimento característico de  $\tau^* = 4.50 \pm 0.18$  min (linha a tracejado). Agora, calculando  $C_x(\tau)$  para uma série temporal gerada pelo modelo apresentado com os parâmetros anteriormente calculados para os dados, i.e.,  $A = 1.3$ ,  $B = 0.22$ , e  $h = 0.01$ , encontra-se  $\tau^* = 4.19 \pm 0.15$  (linha completa), [em unidades arbitrárias, como definido na eq. (6.8)]. Por isso, considerando 1 min como unidade de tempo na eq. (6.8), a estimativa para a função de correlação  $C_x(\tau)$  é concordante, dentro das margens de erro, com a real.

A função de correlação,  $\mathcal{L}(\tau)$ , é apresentada na fig. 6.7 para  $B = 0$  e  $B = 0.25$ . O efeito de alavancagem, que corresponde a uma correlação negativa entre lucros passados e volatilidades futuras pode ser reproduzido considerando  $B > 0$ . Para o caso  $B = 0$ , verifica-se um simples perfil ruidoso, enquanto que para  $B = 0.25$  observa-se um perfil semelhante ao apresentado em séries financeiras (veja-se, e.g., fig. 2 da referência [236]). Este tipo de comportamento é bem ajustado pela função  $\mathcal{L}(\tau) = -A \exp(-\tau/\tau')$  que define um tempo característico,  $\tau'$ .

Analisando as funções de correlação  $C_x(\tau)$  e  $\mathcal{L}(\tau)$ , para diferentes valores do parâmetro  $B$ ,

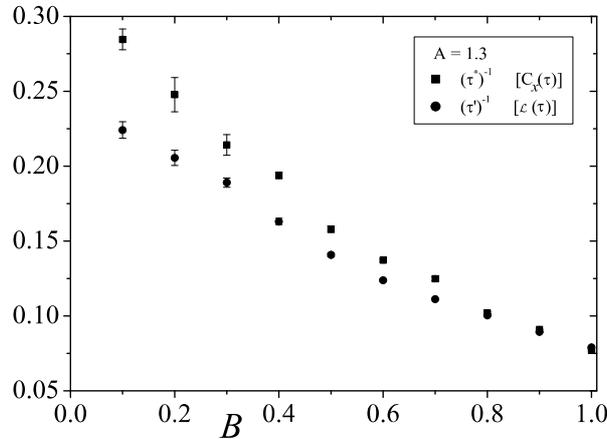


Figura 6.8: O inverso dos tempos característicos  $\tau^*$  (quadrados) e  $\tau'$  (círculos), associado às funções de função correlação  $C_x(\tau)$  e  $\mathcal{L}(\tau)$ , respectivamente, são apresentados para vários de  $B$  no intervalo  $[0.1, 1.0]$ . Os restantes parâmetros são fixos em  $A = 1.3$  e  $h = 0.01$ . Para  $B \geq 0.4$ , as barras de erro tornam-se menores do que os símbolos. [em P11]

verificou-se que, os tempos característicos associados  $\tau^*$  e  $\tau'$  dependem em geral da escolha particular dos parâmetros  $(A, h, B)$ . Com o objectivo de ilustrar a dependência desses tempos característicos com  $B$ , representou-se (fig. 6.8)  $(\tau^*)^{-1}$  e  $(\tau')^{-1}$  para diferentes valores de  $B$  no intervalo  $[0.1, 1.0]$ , considerando  $A = 1.3$  e  $h = 0.01$ . As barras de erro, que representam as incertezas nos ajustes realizados para a determinação destas quantidades, tornam-se menores do que os símbolos para  $B \geq 0.4$ . Os inversos dos tempos,  $(\tau^*)^{-1}$  e  $(\tau')^{-1}$ , aproximam-se de zero com o aumento dos valores de  $B$  (tipicamente  $B \sim 1$ ), indicando o fim da validade do comportamento exponencial dessas funções de correlação. É importante enfatizar que,  $B \sim 1$  encontra-se bem acima do intervalo apropriado de valores de  $B$ , mencionado no início desta secção, para uma descrição efectiva de dados reais.

## Capítulo 7

# Conclusões e Perspectivas Futuras

O trabalho aqui apresentado comportou a análise de observáveis de origem financeira, nomeadamente, flutuações de preço e volume transaccionado usando o formalismo da mecânica estatística não-extensiva baseada na entropia  $S_q$ . A fundamentação para a aplicação de tal formalismo prende-se com a avaliação dos seus comportamentos estatísticos nos quais é possível verificar a existência de: decaimento lento (assimptoticamente em lei de potência) das distribuições de probabilidade da observável, correlação de longo-alcance e estrutura multi-fractal. Estas propriedades são consideradas paradigmáticas para a classificação de um sistema como não-extensivo.

No que se refere às flutuações de preço foi possível observar, para os mercados líquidos americanos que:

- As distribuições para a flutuação de preço apresentam-se fortemente não-Gaussianas para escalas menores ou iguais a alguns dias (da ordem de 30) com um índice entrópico superior a 1. Essas distribuições aproximam-se da distribuição Gaussiana com o aumento

da janela temporal de lucro, o que corresponde à convolução de variáveis não-Gaussianas de variância finita. Contudo, essa convergência dá-se a uma “velocidade” inferior ao que seria teoricamente esperado quando se analisa a convolução de variáveis independentes.

- Através de uma generalização não-extensiva da entropia mútua de Kullback-Leibler, foi possível observar que a não-Gaussianidade decai sob a forma de uma lei de potência com um expoente da ordem de 0.4. Esse decaimento lento foi explicado a partir das dependências não-lineares entre flutuações de preço que podem ser quantificadas por medição do grau de dependência entre lucros separados por um intervalo de tempo  $T$ . Aí verifica-se que o grau de dependência se mantém praticamente inalterado para distâncias temporais da ordem de 100 dias. Estas observações estão de acordo com estudos preliminares [207][236] que associam a convergência lenta para a Gaussiana à volatilidade. Por sua vez, a dinâmica e as propriedades estatísticas da volatilidade são associadas à memória das flutuações de preço. Usando como termo de comparação modelos heteroscedásticos, verificou-se que a dependência da volatilidade nas flutuações de preço deve ser, de facto, longa. Esta imagem mostra-se também é concordante com a (anti-)correlação já medida entre lucro e volatilidade.
- As séries temporais de lucro a 1 minuto, dos componentes do Dow Jones Industrial Average, apresentam um carácter multi-fractal pronunciado. A principal contribuição para a multi-fractalidade provem das não-linearidades do sistema, com 47% de  $\Delta h$ ; seguido das correlações (32% de  $\Delta h$ ) e da não-Gaussianidade (21% de  $\Delta h$ ). As séries apresentam um

expoente de Hurst de aproximadamente 0.5 condizentes com o movimento Browniano.

- Usando como objecto de estudo um mercado com um pequeno volume de transacções e capitalização, foi possível verificar a inexistência de um comportamento universal para as distribuições de flutuações de preço. Para os dados de alta frequência, viu-se que a distribuição de flutuações de preço no mercado de Lisboa apresenta-se bem ajustada por uma função que resulta da solução de uma equação diferencial em que dois índices entrópicos são considerados. Para o caso de flutuações diárias de preços a distribuição das flutuações apresenta-se bem descrita por uma exponencial.

Para o volume transaccionado, a 1 minuto, em mercados líquidos verificaram-se as seguintes propriedades:

- As distribuições de volumes são muito bem descritas por uma distribuição  $F$ , que pode ser escrita como o produto de uma lei de potência por uma  $q$ -exponencial, com um valor de  $q$  muito próximo para todas as companhias analisadas e que é da ordem de  $\frac{6}{5}$ .
- Ao contrário do que foi apresentado noutros trabalhos, [162] verifica-se que, quando o tempo em que o volume é analisado aumenta, o expoente da distribuição para grandes volumes aumenta, o que corresponde a uma aproximação à distribuição Gamma (decaimento exponencial) . Esta análise é confirmada por estudos recentemente publicados [237][238].
- As correlações entre volumes decaem lentamente e podem ser bem ajustadas a uma soma

de duas exponenciais com tempos característicos bem distintos. Na média, a razão entre esses tempos característicos é da ordem de 32.

- O grau de dependência entre volumes transaccionados decai lentamente e pode ser bem ajustado a uma função logarítmica da distância  $T$  entre os valores na série temporal. Por comparação, verifica-se que as dependências são na realidade muito mais duradouras do que as correlações, que decaem sob uma forma exponencial. Tal não deve ser considerado como anormal, pois sendo um sistema financeiro algo eminentemente complexo, é natural que as dependências não-lineares se mostrem mais persistentes.
- As séries temporais apresentam um carácter fortemente multi-fractal em que a correlação tem uma contribuição diminuta, apenas 4% de  $\Delta h$ . Todavia esta contribuição mostra-se fundamental para o comportamento persistente das séries que apresentam um expoente de Hurst da ordem de 0.7. As contribuições fundamentais para multifractalidade vêm da não-Gaussianidade das correlações (66% de  $\Delta h$ ) e das não-linearidades (30% de  $\Delta h$ ). Verificou-se também que a curva multi-fractal apresenta uma assimetria pronunciada indicando que as grandes e as pequenas flutuações terão origens diversas.

Com este conjunto de dados partiu-se para a descrição da dinâmica das observáveis. Os modelos introduzidos tiveram como principais preocupações: a reprodução da distribuição de probabilidades, os momentos de Kramers-Moyal (que fazem a ponte entre dinâmica estocástica e probabilidade) bem como uma descrição adequada das funções de correlação.

- A descrição de volumes a 1 minuto dos componentes do Dow Jones Industrial Average, foi feita a partir de equações pertencentes à classe de processos de Feller no qual o valor de retorno varia numa escala de tempo bem superior à escala necessária para que seja atingido o equilíbrio local, seguindo os princípios da superestatística intimamente relacionada com a estatística não-extensiva. Essas flutuações, no valor médio (local), foram associadas a flutuações no volume de actividade (número de agentes activos no mercado) que demonstra ser uma variável cuja correlação tem decaimento lento. *Desta forma é possível obter a distribuição  $F$  (ou  $q$ -Gamma), atribuindo um significado ao índice  $q$ : medida das flutuações no volume de actividade de tal forma que, quando o valor do volume de actividade é constante no tempo, o índice entrópico  $q$  vale 1 e a distribuição Gamma é reobtida.*
- Usando o ajuste das função de correlação foi feita uma estimativa das escalas de relaxamento local e escala de alteração do parâmetro valor médio local. Por aqui foi possível a construção das eventuais séries temporais do valor médio (local) corroborando a hipótese de uma ligação estreita entre grandes valores dessa quantidade e grandes valores de flutuação de volume.
- A descrição dos lucros foi feita utilizando uma equação de modificação da equação de Ornstein-Uhlenbeck que consiste em considerar o termo estocástico com dependência numa quantidade proporcional ao inverso da probabilidade. Isto faz com que os grandes valores do lucro, que são os menos prováveis, são aqueles que têm mais impacto sobre

o próprio mercado. *Aqui também foi possível dar um significado dinâmico ao índice  $q$ : ele reflecte os efeitos da própria variável (flutuação de preço) no comportamento microscópico do sistema que é modelado pelo termo estocástico da equação diferencial. Assim, no caso em que  $q = 1$ , o sistema é microscopicamente insensível às flutuações de preço e o processo usual de Ornstein-Uhlenbeck é reobtido assim como a distribuição Gaussiana.* Correções ao potencial confinante para o regime normal, de forma a que a aversão ao risco e as ordens de paragem sejam levadas em conta, mostram que o melhor potencial não apresenta máximo (local) para qualquer valor finito do lucro. Isto demonstra que, ao contrário do sugerido em trabalhos anteriores, grandes e bruscas quedas são imprevisíveis utilizando um mecanismo dinâmico para regimes normais de estabilidade e liquidez.

Foram também estudadas as propriedades a longo-tempo de processos estocásticos discretos com variância dependente no tempo (e exponencialmente correlacionadas), usualmente utilizados para a reprodução de série financeiras diárias, e conhecidos em Econometria como processos heterosquedásticos (*GARCH* (1, 1)).

- A dependência temporal da volatilidade torna este processo muito semelhante a outros que apresentam flutuações num parâmetro intensivo (e.g., temperatura), fenómeno que se encontra na base do conceito de superestatística. Inspirado neste facto, e na relação próxima entre superestatística e a mecânica estatística não-extensiva, foi possível obter uma expressão que relaciona os parâmetros dinâmicos e a natureza do ruído utilizado

como o índice entrópico que caracteriza a distribuição estacionária associada ao processo *GARCH*, que contém como caso particular o modelo original *ARCH*.

- Após verificada a validade da proposta, foram também derivadas expressões analíticas para a distribuição estacionária do quadrado da volatilidade na presença de ruídos  $q_n$ -Gaussianos. Os resultados mostraram-se satisfatórios para  $q_n \simeq 1$  e compatíveis com a estrutura de ruído multiplicativo das equações de recorrência do quadrado da volatilidade na mesma linha do que ocorre com a classe de Heston de modelos financeiros.
- A utilização da medida generalizada de Kullback-Leibler permitiu um conjunto de ilações referentes à estrutura dinâmica de flutuações diárias de preços já apresentadas. Para além dessas conclusões, verificou-se, para o processo *GARCH* (1, 1) a emergência de uma propriedade de veras interessante; Pares dinâmicos  $(b, c)$ , para um dado ruído, que resultam num mesmo valor de  $q$  para a distribuição estacionária apresentam o mesmo valor de  $q^{op}$  relacionado com o grau de dependência entre as variáveis imediatas,  $z_t$  e  $z_{t+1}$ . Mais, esse valor de  $q^{op}$ , mostrou-se independente da correlação entre as volatilidades já que pares com o mesmo tempo característico para o decaimento da correlação desta quantidade apresentam diferentes graus de dependência. Esta relação entre  $q$ ,  $q^{op}$  e  $q_n$ , é em tudo semelhante à relação de tripleto entre os índices entrópicos referentes à sensibilidade às condições iniciais ( $q_{sen}$ ), relaxamento ( $q_{rel}$ ) e equilíbrio ( $q_{stat}$ ) [67][271][202].

Através da análise de um modelo microscópico de interacção entre agentes, semelhante a um sistema de ferromagnetes com interacção aleatória, foi possível verificar a importância de

ingredientes de aversão ao risco na decisão de compra ou venda dos agentes, o que se reflete em efeitos microscópicos como comportamento das funções de correlação e anti-correlação habitualmente verificadas.

**Perspectivas para futuro trabalho** A complexidade de um sistema financeiro implica que nem sempre é possível congregiar todas as propriedades verificadas empiricamente num único modelo.

Desta forma, o trabalho aqui apresentado pode ser encarado como ponto de partida para a construção de novos cenários capazes de modelar a dinâmica de quantidades financeiras sendo a principal delas a *volatilidade*. Apesar de ser considerada uma quantidade fundamental em análise de risco e também em modelos para o mercado de opções, a verdade é que a sua definição se mantém vaga [210], podendo ser determinada e conseqüentemente modelada de várias formas [272]. Considerando a volatilidade instantânea como sendo o quadrado (ou o módulo) dos lucros instantâneos um cenário possível para a descrição do decaimento lento das funções de correlação destas quantidades seria, no caso de modelagem com equações diferenciais estocásticas assumir uma situação semelhante à que é apresentada na secção 5.3.

No que concerne à análise de modelos microscópicos, são muitas as alterações que podem ser feitas. Listam-se aqui algumas delas:

- Introdução de uma memória na volatilidade, tal como sugerido na equação (6.19);
- Introdução da possibilidade de o agente se manter neutro o que corresponderia à utilização de um “Hamiltoniano” do tipo Blume-Capel [233] em oposição ao “Hamiltoniano” do tipo

Ising;

— Modificação da dinâmica de evolução do parâmetro de interacção entre os agentes. Por exemplo, em vez de se considerar uma dinâmica completamente aleatória, levar em conta se o agente influenciador no passado tem estado em concordância com o movimento geral do sistema.

O passo mais importante será com certeza a ligação entre a dinâmica de volume transaccionado e a dinâmica de preços. No fundo, os preços apenas flutuam porque existem um certo volume que é transaccionado e/ou outro volume que é inserido no livro de ordens. Este movimento de saída e entrada de volume no livro é provoca variações entre a oferta e a procura e, conseqüentemente, flutuações no preço. Deixa-se aqui esboçado um cenário que permitirá a reprodução mesoscópica de tal dinâmica.

Para tal, pode usar-se a definição de que volume retirado do livro de ordem é positivo e volume inserido no livro de ordem é negativo, em analogia com a convenção de sinais para o trabalho em Termodinâmica. Assim, utilizando a eq. (5.13), tem-se desde já a equação para o volume transaccionado,  $v^{(T)}$ . O volume introduzido no mercado,  $v^{(B)}$ , pode ser descrito pela equação

$$\frac{dv^{(B)}}{dt} = -\alpha (v^{(B)} - \theta) + \sigma \zeta_t,$$

em que  $\theta$  e  $\sigma$  flutuam numa escala superior a  $\alpha^{-1}$ . Esta equação respeita várias evidências empíricas recentes obtidas a partir do estudo exaustivo dos livros de ordem [234][235][256][273].

Primeiro, a sua distribuição de volume no livro é bem descrita por uma  $q$ -Gaussiana correspon-

dente ao caso em que a variável  $\sigma$ , que pode ser associada à volatilidade, segue uma distribuição do tipo Gamma-invertida. Depois, permite que todos os tipos de ordem sejam tratados da mesma forma. De facto, verificou-se que as ordens limitadas, de mercado e cancelamentos apresentam o mesmo impacto sobre o preço [256], podendo, por isso, ser descritas da mesma forma. Como, uma ordem de venda equivale a um cancelamento de uma ordem de compra ( $v^{(B)} < 0$ ) e um cancelamento de venda tem o impacto correspondente a uma ordem de compra ( $v^{(B)} > 0$ ), a equação acima é capaz de descrever de uma forma simples e unificada a entrada de ordens no livro. A soma de  $\frac{dv^{(T)}}{dt}$  e  $-\frac{dv^{(B)}}{dt}$  conduz à equação de evolução de volume no livro de ordens. Levando em conta que: os valores médios de  $v^{(T)}$  e  $v^{(B)}$  estão ambos relacionados com a actividade no mercado, apresentando assim comportamentos semelhantes que implicam na mútua anulação [235][274] chega-se a uma equação para  $v$  do tipo:

$$\frac{dv}{dt} = -(\gamma - \alpha)v + \beta v \xi_t + \sigma \zeta_t,$$

que pode ser relacionado com as flutuações de preço através da relação linear  $r = \frac{v}{\delta}$ <sup>1</sup>. Ou seja, obtém-se uma estrutura de ruído multiplicativo-aditivo, logo intimamente relacionado como a entropia  $S_q$ . Usando simulação numérica pode verificar-se que este cenário apresenta-se, à partida, capaz de reproduzir a maioria das propriedades estatísticas verificadas em mercados financeiros.

Por fim, deve referir-se que a investigação neste tipo de sistemas com o intuito de desenvolver aplicações financeiras apresenta-se como infinita. Devido à conhecida hipótese de mercado

---

<sup>1</sup>Um estudo da variação da profundidade,  $\delta$ , com o lucro permitirá também uma melhor descrição do comportamento da variável  $r$ .

eficiente, novos modelos que garantam a obtenção de lucro com grande probabilidade tendem a ser anulados pelo próprio sistema que reage num sentido contrário. Daí a análise constante das propriedades estatísticas das observáveis ser importante para a determinação de novos comportamentos ou suas alterações.

# Apêndice A

## Apêndice relativo ao Capítulo 6

### A.1 Análise dos mapas (6.8) e (6.9)

Neste apêndice discutir-se-á em detalhe o mapa obtido pela aplicação da aproximação de campo médio ao modelo apresentado [cf. eq. (6.8)],

$$x(t+1) = \tanh[A\xi(t)x(t) + h\zeta(t) - B|x(t)|]. \quad (\text{A.1})$$

Para argumentos pequenos,  $|A\xi(t)x(t) - B|x(t)| + h\zeta(t)| \ll 1$ , este mapa pode ser escrito na sua forma linearizada [cf. eq. (6.9)],

$$x(t+1) \approx A\xi(t)x(t) + h\zeta(t) - B|x(t)|. \quad (\text{A.2})$$

Dependendo da escolha dos parâmetros  $(A, h, B)$ , os mapas das eqs. (A.1) e (A.2) podem ser dominados por pontos fixos bem definidos, ou apresentar um comportamento complexo, como regimes caóticos. No limiar do caos, o expoente máximo de Lyapunov,  $\lambda_{\max}$ , com

valor nulo, deve corresponder a uma superfície crítica  $A^*(h, B)$ . Para  $B = 0$ , estes mapas caem numa classe geral tem sido exaustivamente estudada [264][265][266]. No caso  $h = 0$ , para um ruído uniformemente distribuído,  $\xi(t)$ , no intervalo  $(-1, 1)$ , existe um ponto fixo em  $x = 0$  para  $A < A^*(0, 0)$  [ $A^*(0, 0) = e = 2.718\dots$ ], enquanto que para  $A \geq A^*(0, 0)$  este ponto fixo perde estabilidade e o sistema entra num regime caótico. Calculando  $\lambda_{\max}$  com o algoritmo de Benettin [270], para os mapas referidos, obtêm-se os resultados apresentados na fig. A.1 para o caso mais simples,  $h = B = 0$ . Neste caso, verificou-se que ambos os mapas apresentam essencialmente o mesmo  $\lambda_{\max}$  até  $A \approx 3$ , o que implica que o valor crítico,  $A^*(0, 0) = e = 2.718\dots$ , pode ser apontado aos dois mapas. Contudo, para valores superiores a  $A \approx 3$ , os dois mapas apresentam diferentes estimativas para  $\lambda_{\max}$ : enquanto que, para o mapa eq. (A.1) o regime caótico desaparece para  $A \approx 3.12$ , com os pontos fixos  $x = \pm 1$  a tornarem-se os novos atractores para grandes valores de  $A$ , o regime caótico persiste para valores grandes de  $A$  no mapa (A.2). Por isso, o último mapa apresenta um comportamento muito mais rico do que o primeiro, razão pela qual ele tem sido mais estudado na literatura.

Para  $h = B = 0$ , o mapa da eq. (A.2), introduzido no contexto de intermitência [264][265][266], pode apresentar um comportamento muito interessante, devido ao ruído multiplicativo  $\xi(t)$ . Neste caso, as trajectórias partem de uma fase laminar ( $x = 0$ ), quando  $A\xi > e$ , e são reinjectadas em  $x = 0$ , quando  $A\xi < e$ , dando um comportamento típico de intermitência *on-off*. O regime *on-off* é composto por sequências raras de valores grandes de  $x$  (em média) separadas por fases laminares de duração aleatória que, no limiar do caos, são caracterizadas por uma lei

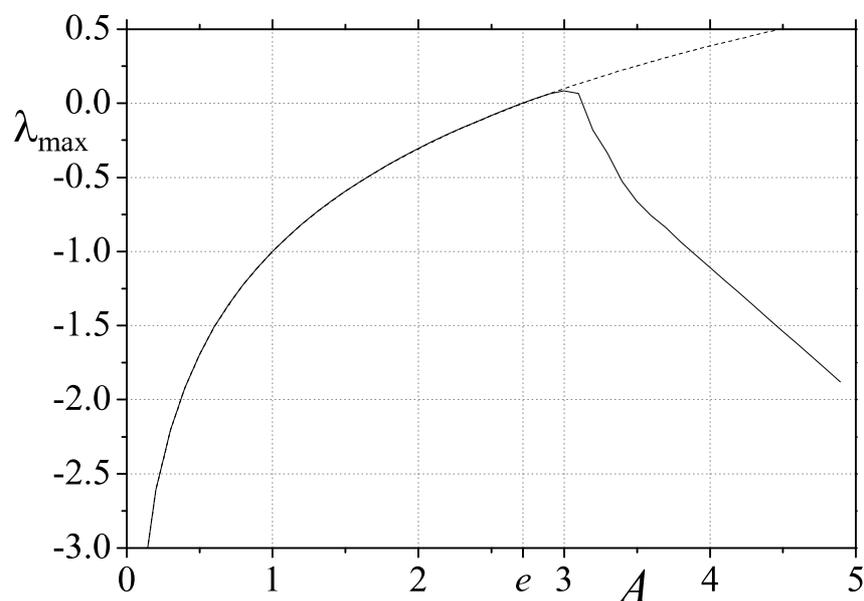


Figura A.1: O máximo expoente de Lyapunov,  $\lambda_{\max}$ , associado aos mapas definidos nas eqs. (A.1) (linha completa) e (A.2) (linha tracejada) é vs.  $A$ , para o caso  $h = B = 0$ . [em **P11**]

de potência com um expoente  $-\frac{3}{2}$  [264][266]. A introdução de ruído aditivo  $h\zeta(t)$  ( $h$  pequeno), leva a pequenos valores para o limiar do caos, i.e.,  $A^*(h, 0) < A^*(0, 0)$ ; na verdade, tem-se  $A^*(h, 0) = 1$  para qualquer ruído aditivo [264][265][266]. Nesta situação, para  $A > 1$ , o sistema é dito estar num regime de borbulhamento do atrator, onde o ruído aditivo é responsável pelos *bursts*; o papel do ruído multiplicativo consiste na ampliação dos *bursts* gerado pelo ruído aditivo.

Volte-se agora para o caso  $B > 0$ . Na fig. A.2 exhibe-se  $\lambda_{\max}$ , também calculado através do algoritmo de Benettin, para os dois mapas, no caso em  $h = 0$  e  $B = 0.22$ . Os mapas apresentam aproximadamente o mesmo  $\lambda_{\max}$  até  $A \approx 2$ , que pode ser comparado com  $A \approx 3$  quando  $B = 0$ . Através de estimativas semelhantes de  $\lambda_{\max}$ , verificou-se que o intervalo de  $B$  de interesse ( $0 \leq B \leq 0.35$ ), os dois valores de  $A$  aqui utilizados ( $A = 1.5$  and  $A = 1.3$ ) caem

dentro de regiões de validade da aproximação linear. Da fig. A.2 tem-se sempre  $\lambda_{\max} < 0$  para o mapa (A.1) conduzindo à supressão do regime caótico. Contudo, para o mapa da eq. (A.2), esse regime ocorre para qualquer  $A > A^*(0, 0.22)$ , onde  $A^*(0, 0.22) \approx A^*(0, 0) = e = 2.718\dots$  [de facto,  $A^*(0, 0.22)$  foi calculado com duas casas decimais  $A^*(0, 0.22) \approx 2.72$ ].

Dado que o parâmetro  $B$  não traz ruído externo para os mapas em estudo, o regime de intermitência on-off (produzida pelo termo de ruído multiplicativo  $A\xi(t)$ ) e o regime de borbulhamento do atrator (produzido pelo termo de ruído aditivo  $h\zeta(t)$ ) estão presentes para  $B > 0$ . Por isso, à parte do estreitamento esperado para o intervalo do parâmetro  $A$ , dentro do qual a aproximação linear é válida, a introdução do novo termo  $B|x(t)|$  não altera significativamente as propriedades de estabilidade dos mapas (A.1) e (A.2), pelo menos para magnitudes de  $B$  de interesse.

## A.2 Determinação do expoente da cauda de $p(x)$ eq. (6.12)

Derive-se neste apêndice a expressão que relaciona os expoentes das caudas da distribuição de probabilidade associada ao mapa Eq. (A.2), no caso  $h = 0$ , com os parâmetros  $A$  e  $B$ . Dado que este mapa apresenta dois ramos, cada um semelhante ao mapa de ruído multiplicativo estudado por KURAMOTO [267], assume-se que a distribuição de probabilidade apresenta o seguinte comportamento assintótico,

$$P(x) \sim \begin{cases} |x|^{-\alpha-1} & \text{se } x < 0 \\ |x|^{-\beta-1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.3})$$

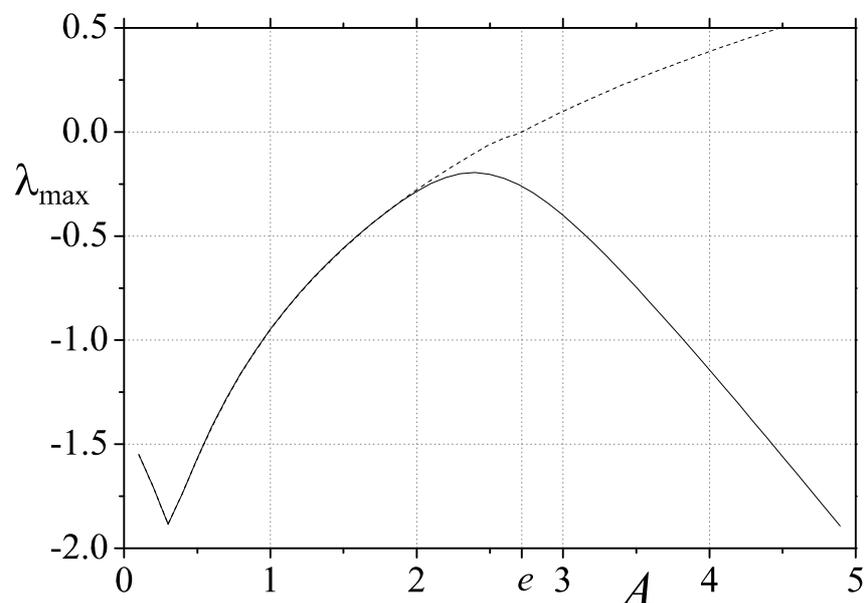


Figura A.2: O máximo expoente de Lyapunov,  $\lambda_{\max}$ , associado aos mapas definidos nas eqs. (A.1) (linha completa) e (A.2) (linha tracejada) é vs.  $A$ , para o caso  $h = 0$  e  $B = 0.22$ . [em **P11**]

onde, em princípio,  $\alpha \neq \beta$ , dado que as dinâmicas para as partes positiva e negativa podem ser diferentes. Levando a cabo a mudança de variáveis,  $y = \ln |x|$ , e impondo a conservação de probabilidades [ $P(x)dx = p(y)dy$ ] para cada uma das equações acima tem-se

$$p^-(y) \sim e^{-\alpha y}; \quad p^+(y) \sim e^{-\beta y}, \quad (\text{A.4})$$

onde a notação  $-(+)$  é aplicada à variável  $y$  associada com  $x < 0$  ( $x > 0$ ). Considerando o facto que a nova variável  $y$  pode ser obtida por valores positivos ou negativos de  $x$ , a distribuição de probabilidade completa para  $y$ , no seu regime assintótico, deverá ser proporcional à soma de  $p^-(y)$  e  $p^+(y)$ , i.e.,

$$P(y) \propto e^{-\alpha y} + e^{-\beta y}. \quad (\text{A.5})$$

Considere-se agora o mapa (A.2) no caso  $h = 0$ ; tomando o módulo para os dois termos e dividindo as contribuições para os valores de  $x(t)$  positivos e negativos,

$$\begin{cases} |x(t+1)| \approx |(A\xi(t) + B)x(t)| & \text{se } x < 0 \\ |x(t+1)| \approx |(A\xi(t) - B)x(t)| & \text{se } x \geq 0 \end{cases},$$

e em seguida aplicando o logaritmo em ambos os lados,

$$\begin{cases} y(t+1) \approx \ln |A\xi(t) + B| + y(t) & \text{se } x < 0 \\ y(t+1) \approx \ln |A\xi(t) - B| + y(t) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.6})$$

na qual foi usado  $y(t) = \ln |x(t)|$ .

A análise que se segue restringir-se-á a situações em que  $A > B > 0$ , o que corresponde à situação de interesse do trabalho. Definindo  $z = |A\xi + B|$ ,  $z' = |A\xi - B|$ , e lembrando que  $\xi$  é uma variável uniforme no intervalo  $(-1, 1)$ , verifica-se imediatamente que as distribuições de probabilidade associada a esta variável é dada por

$$P(z) \equiv P(z') = \begin{cases} 1/A & \text{se } 0 < z, z' < |A - B| \\ 1/(2A) & \text{se } |A - B| < z, z' < |A + B| \end{cases}.$$

Agora, para a variável  $w = \eta, \eta'$ , onde  $\eta = \ln z$  e  $\eta' = \ln z'$ , obtém-se,

$$p(w) = \begin{cases} [1/A] \exp(w) & \text{se } -\infty < w < \ln |A - B| \\ [1/(2A)] \exp(w) & \text{se } \ln |A - B| < w < \ln |A + B| \end{cases}.$$

Pela eq. (A.6) tem-se que a probabilidade  $P[y(t+1)]$ , de se ter um dado valor para a variável  $y$  no tempo  $t+1$ , é dada pela soma das contribuições de  $x > 0$  e  $x < 0$ ; a contribuição

$x < 0$  ( $x > 0$ ) resulta de uma integração sobre todos os valores possíveis de  $y(t)$  e  $\eta(t)$  ( $\eta'(t)$ ).

Analicamente,

$$P[y(t+1)] \propto \int p^-[y(t)] p[\eta(t)] \delta\{y(t+1) - y(t) - \eta(t)\} dy(t) d\eta(t) \\ + \int p^+[y(t)] p[\eta'(t)] \delta\{y(t+1) - y(t) - \eta'(t)\} dy(t) d\eta'(t),$$

que após a utilização da eq. (A.4), resulta em

$$P[y(t+1)] \propto \exp[-\alpha y(t+1)] \int p[\eta(t)] \exp[\alpha \eta(t)] d\eta(t) \\ + \exp[-\beta y(t+1)] \int p[\eta'(t)] \exp[\beta \eta'(t)] d\eta'(t). \quad (\text{A.7})$$

Comparando eqs. (A.5) e (A.7), tem-se que

$$\int p[\eta(t)] \exp[\alpha \eta(t)] d\eta(t) = \int p[\eta'(t)] \exp[\beta \eta'(t)] d\eta'(t) = 1. \quad (\text{A.8})$$

Como  $p(\eta) = p(\eta')$ , os dois integrais acima são equivalentes. Por isso,  $\alpha = \beta$ , i.e., o comportamento assintótico da distribuição de probabilidade  $P(x)$  segue uma lei de potência com o mesmo expoente  $\alpha$  para valores positivos e negativos de  $x$ . Resolvendo a eq. (A.8) tem-se a seguinte relação,

$$\frac{(A - B)^{1+\alpha} + (A + B)^{1+\alpha}}{2 A (1 + \alpha)} = 1,$$

que é utilizada para relacionar  $\alpha$ ,  $A$  e  $B$ .

# Bibliografia

- [1] C. Figueiredo, *Pequeno Dicionário da Língua Portuguesa* (Editora Bertrand, Lisboa, 1972)
- [2] F. Halzen and A.D. Martin, *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics* (Wiley, New York, 1984)
- [3] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics* (Princeton University Press, Princeton, 1987)
- [4] P. Bak, *How Nature Works: The Science of Self Organized Criticality* (Copernicus, Oxford, 1997)
- [5] J.-P. Bouchaud and M. Potters, *Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000)
- [6] R.N. Mantegna and H.E. Stanley, *An introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999)
- [7] J. Voit, *The Statistical Mechanics of Financial Markets* (Springer-Verlag, Berlin, 2003)
- [8] M. Dacorogna, R. Gençay, U. Müller, R. Olsen, and O. Pictet, *An Introduction to High-Frequency Finance* (Academic Press, London, 2001)
- [9] J. Dooyne Farmer, *Int. J. Appl. Finance* **3**, 311 (2000)
- [10] M. Gell-Mann, *The Quark and the Jaguar - Adventures in the Simple and the Complex*, (W.H. Freeman, New York, 1994)

- [11] H. Levy, M. Levy, and S. Solomon, *Microscopic Simulation of Financial Markets* (Academic Press, New York, 2000)
- [12] *Empirical Science of Financial Fluctuations: The Advent of Econophysics*, editado por: H. Takayasu (Springer-Verlag, Berlin, 2002)
- [13] W. Paul and A. Baschnagel, *Stochastic Processes From Physics to Finance* (Springer-Verlag, Berlin, 1999)
- [14] S.M. Duarte Queirós, C. Anteneodo, and C. Tsallis, *Power-law distributions in economics: a nonextensive statistical approach em: Noise and Fluctuations in Econophysics and Finance* editado por: D. Abbot, J.-P. Bouchaud, X. Gabaix and J.L. McCauley, Proc. of SPIE **5848**, 151 (SPIE, Bellingham, WA, 2005)
- [15] H.E. Stanley, L.A.N. Amaral, S.V. Buldyrev, P. Gopikrishnan, V. Plerou, and M.A. Salingler, proc. Nat. Acad. Sci. USA **99**, 2561 (2002)
- [16] L. Bachelier, Théorie de la spéculation, Ann. Sci. École Norm. Sup. **III-17**, 21 (1900)
- [17] <http://www.prediction.com>
- [18] <http://www.science-finance.fr>
- [19] <http://www.tandf.co.uk>
- [20] L. Borland, Phys. Rev. Lett. **89**, 098701 (2002), L. Borland, Quantitat. Finance **2**, 415 (2002)
- [21] R.B. Balieiro Filho and R. Rosenfeld, Physica A **344**, 484 (2004)
- [22] C. Tsallis, C. Anteneodo, L. Borland, and R. Osorio, Physica A **324**, 89 (2003)
- [23] M. Ausloos and K. Ivanova, preprint: arXiv:cond-mat/0212641
- [24] C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988)
- [25] T. Parry, *Reuters Financial Glossary* (Pearson, London, 2003). Também acessível para consulta através de <http://glossary.reuters.com>

- [26] K. Huang, *Statistical Mechanics*, (John Wiley & Sons, New York, 1963)
- [27] E. Fermi, *Thermodynamics*, (Doubleday, New York, 1936)
- [28] N. L. S. Carnot, *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance* (Paris, 1824) em: E. Clapeyron and R. Clausius, *Reflections on the Motive Power of Fire, by Sadi Carnot, and other papers on the Second Law of Thermodynamics* (New York, 1960)
- [29] R. Clausius, Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie **79**, 368 (1850)
- [30] J. W. Gibbs, Proc. Am. Acad. **16**, 458 (1889)
- [31] M. Born, Physikalische Zeitschrift **22**, 218 (1921)
- [32] C. Carathéodory, Math. Ann. **67**, 355 (1909)
- [33] P. T. Landsberg, *Thermodynamics* (London, 1961)
- [34] L. Boltzmann, Wien. Ber. **66**, 275 (1872)
- [35] H. Burbury, Phil. Mag. **30**, 301 (1890)
- [36] L. Boltzmann, Wien. Ber. **66**, 275 (1872)
- [37] L. Boltzmann, *Lectures on Gas Theory* (Dover, New York, 1995)
- [38] M. Planck, Wärmetheorie **2**, 120 (1879)
- [39] *The Scientific Papers of J. Willard Gibbs* (London, 1906)
- [40] H. von Helmholtz, “Über die Wechselwirkung der Naturkräfte und die darauf bezüglichen neuesten Ermittlungen der Physik” [palestra dada em 7 de Fevereiro de 1854 em Königsberg, Prussia] em: *Popular Scientific Lectures* editado por M. Klein (New York, 1961)
- [41] H. Whiting, Science **6**, 83 (1885)
- [42] L. Szilard, Z. Phy. **53**, 840 (1929)

- [43] C. Shannon, *The Bell System Technical Journal* **27**, 379 (1948)
- [44] L. Brillouin, *J. Appl. Phys.* **22**, 334 (1951)
- [45] E. T. Jaynes, *Phys. Rev.* **106**, 620 (1957); *Phys. Rev.* **108**, 171 (1957)
- [46] M. Tribus, *J. Appl. Math.* **28**, 1 (1961)
- [47] H. Adams, *The Degradation of the Democratic Dogma* (New York, 1919)
- [48] W. Thomson (Lord Kelvin), *Proc. R. Soc. Edinburgh* **8**, 325 (1874)
- [49] J. Loschmidt, *Wien. Ber.* **73**, 128 (1876)
- [50] P. Ehrenfest and T. Ehrenfest, *The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics* (Ithaca, New York, 1959)
- [51] A. Einstein, *Ann. Phys.* **33**, 1275 (1910)
- [52] E.J.S. Lage, *Física Estatística* (Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1995)
- [53] K.L. Volkovyski and Ya. G. Sinai, *Funct. Anal. Appl.* **5**, 185 (1971)
- [54] B. Lesche, *J. Stat. Phys.* **27**, 419 (1982)
- [55] A. Renyi, *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium*, **1**, 547 (University of California Press, Berkeley, Los Angeles, 1961); A. Renyi, *Probability theory* (North-Holland, Amsterdam, 1970)
- [56] S.M.D. Queirós and A. L. Ferreira, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 5807 (2002)
- [57] H.J. Herrmann, *Phys. Rep.* **136**, 153 (1986)
- [58] S. Abe, *Phys. Rev. E* **66**, 046134 (2002)
- [59] C. Tsallis and E. Brigatti em: M. Sugiyama (ed.), *Continuum Mechanics and Thermodynamics* **16**, 223 (Springer-Verlag, Heidelberg, 2004).
- [60] C. Tsallis, M. Gell-Mann and Y. Sato, *Proc. Natl. Acad. Sc. USA* **102**, 15377 (2005).

- [61] L. Nivanen, A. Le Mehaute, and Q.A. Wang, Rep. Math. Phys. **52**, 437 (2003)
- [62] E.P. Borges, Physica A **340**, 95 (2004)
- [63] H. Suyari and M. Tsukada, IEEE Transactions on Information Theory **51**, 753 (2005)
- [64] A.I. Khinchin, Uspekhi Matem. Nauk **8**, 3 (1953), também em: *Mathematical Foundations of Information Theory* traduzido por R.A. Silverman, M.D. Friedman (Dover, New York, 1957).
- [65] R.J.V. Santos, J. Math. Phys. **38**, 4104 (1997)
- [66] S. Abe, Phys. Lett. A **271**, 74 (2000)
- [67] C. Tsallis, Physica A **344**, 718 (2004)
- [68] C. Tsallis, Quimica Nova **17**, 468 (1994)
- [69] C. Beck and F. Schlogl, Thermodynamics of Chaotic Systems (Cambridge University Press, Cambridge, 1993)
- [70] C. Tsallis, R.S. Mendes, and A.R. Plastino, Physica A **261**, 534 (1998)
- [71] D. Prato and C. Tsallis, Phys. Rev. E **60**, 2398 (1999)
- [72] A.M.C. de Souza and C. Tsallis, PhysicaA **236**, 52 (1997)
- [73] E.M.F. Curado and C. Tsallis, J. Phys. A **24**, L69 (1991); Corrigenda: **24**, 3187 (1991) and **25**, 1019 (1992)
- [74] L. Borland, A.R. Plastino and C. Tsallis, J.Math. Phys. **39**, 6490 (1998); [Errata: J. Math. Phys. **40**, 2196 (1999)]
- [75] A.R. Plastino and A. Plastino, Phys. Lett. A **177**, 177 (1993)
- [76] M.O. Caceres, Physica A **218**, 471 (1995)
- [77] A.K. Rajagopal, Phys. Rev. Lett. **76**, 3469 (1996)
- [78] C. Tsallis, A.R. Plastino and W.-M. Zheng, Chaos, Solitons and Fractals **8**, 885 (1997)

- [79] E.K. Lenzi, L.C. Malacarne and R.S. Mendes, , Phys. Rev. Lett. **80**, 218 (1998)
- [80] C. Tsallis, Phys. Lett. A **206**, 389 (1999)
- [81] E. P. da Silva, C. Tsallis, and E.M.F. Curado, Physica A **199**, 137 (1993); Errata: **203**, 160 (1994).
- [82] C. Tsallis em: *New trends in magnetism, magnetic materials and their applications*, editado por: J.L. Moran-Lopez and J.M. Sanchez (Plenum Press, New York, 1994); A. Chame and E.V.L. de Mello, J. Phys. A **27**, 3663 (1994)
- [83] B.M. Boghosian, Braz. J. Phys. **29**, 91 (1999)
- [84] A.R. Plastino and A. Plastino, Phys. Lett. A **193**, 251 (1994)
- [85] B.M. Boghosian, Phys. Rev. E **53**, 4754 (1996)
- [86] D.A. Stariolo, Phys. Lett. A **185**, 262 (1994)
- [87] L. Borland, Phys. Lett. A **245**, 67 (1998)
- [88] A.R. Plastino and A. Plastino, Phys. Lett. A **222**, 347 (1995)
- [89] C. Tsallis and D.J. Bukman, Phys. Rev. E **54**, R2197 (1996)
- [90] A. Compte and D. Jou, J. Phys. A **29**, 4321 (1996)
- [91] D.A. Stariolo, Phys. Rev. E **55**, 4806 (1997)
- [92] L. Borland, Phys. Rev. E **57**, 6634 (1998)
- [93] A.K. Rajagopal, Physica A **253**, 271 (1998)
- [94] H.S. Wio and S. Bouzat, Braz. J. Phys. **29**, 136 (1999)
- [95] C. Tsallis, Phys. Rev. E **58**, 1442 (1998)
- [96] <http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm>

- [97] Nonextensive Statistical Mechanics and its Applications, Lecture Notes in Physics 560, editado por: S. Abe and Y. Okamoto (Springer-Verlag, Heidelberg, 2001)
- [98] *Thermodynamics and Physical Applications*, editado por: G. Kaniadakis, M. Lissia, and A. Rapisarda Non-Extensive [Physica A **305** (2002)]
- [99] *Anomalous Distributions, Nonlinear Dynamics and Nonextensivity*, editado por: H. L. Swinney and C. Tsallis [Physica D **193** (2004)]
- [100] *Nonextensive Entropy - Interdisciplinary Applications*, editado por: M. Gell-Mann and C. Tsallis (Oxford University Press, New York, 2004)
- [101] F. Jackson, *Mess. Math.* **38**, 57 (1909)
- [102] S. Kullback and R.A. Leibler, *Ann. Math. Stat.* **22**, 79 (1961)
- [103] A.J. Lotka, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **6**, 410 (1920); V. Volterra, *Leçon sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, (Gouthier-Villars, Paris, 1931)
- [104] C. Tsallis, A.M.F. de Souza and E.M.F. Curado, *Chaos, Solitons & Fractals* **6**, 561 (1995)
- [105] J. Doyne Farmer, *Toward Agent-Based Models for Investment in Developments in Quantitative Investment Models: Aimr Conference Proceedings : Proceedings of the Aimr Seminar "Developments in Quantitative Investment Models", April 17, 2001, Boston* edited by R. Max Darnell (Assn for Investment Management, 2001)
- [106] E. Ott, *Chaos in dynamical systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993)
- [107] G. M. Zaslavsky, R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov, and A. A. Chernikov, *Weak chaos and quasi-regular patterns (Cambridge Nonlinear Science Series)*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1992)
- [108] C. Tsallis, A.R. Plastino, and W.-M. Zheng, *Chaos, Solitons and Fractals* **8**, 885 (1997)
- [109] U.M.S. Costa, M. L. Lyra, A.R. Plastino, and C. Tsallis, *Phys. Rev. E* **56**, 245 (1997)
- [110] M. L. Lyra and C. Tsallis, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 53 (1998)

- [111] U. Tirnakli, G.F.J. Añaños, and C. Tsallis, Phys. Lett. A **289**, 51 (2001)
- [112] E.P. Borges, C. Tsallis, G.F.J. Añaños, and P.M.C. de Oliveira, Phys. Rev. Lett. **89**, 254103 (2002)
- [113] G.F.J. Añaños, F. Baldovin, and C. Tsallis, Eur. Phys. J. B **46**, 409 (2005)
- [114] G.F.J. Añaños and C. Tsallis, Phys. Rev. Lett. **93**, 020601 (2004).
- [115] F. Baldovin and A. Robledo, Europhys. Lett. **60**, 518 (2002); Phys. Rev. E **66**, R045104 (2002)
- [116] Ya. Pesin, Russ. Math. Surveys **32**, 55 (1977); *Hamiltonian Dynamical Systems: A Reprint Selection*, editado por: R.S. MacKay, and J.D. Meiss (Adam Hilger, Bristol, 1987)
- [117] F. Baldovin, C. Tsallis, and B. Schulze, Physica A **320**, 184 (2003)
- [118] F. Baldovin and A. Robledo, Phys. Rev. E **69**, R045202 (2004)
- [119] G. Casati, C. Tsallis, and F. Baldovin, Europhys. Lett. **72**, 355 (2005).
- [120] S.M. Duarte Queirós and C. Tsallis em: *Edge of chaos of the classical kicked top map: Sensitivity to initial conditions Complexity, Metastability and Nonextensivity* editado por: C. Beck, A. Rapisarda and C. Tsallis (World Scientific, Singapore, 2005), pp. 135
- [121] Y. Weinstein, S. Lloyd, and C. Tsallis, Phys. Rev. Lett. **89**, 214101 (2002)
- [122] Y. Weinstein, S. Lloyd, and C. Tsallis, *On the Emergence of Nonextensivity at the Edge of Quantum Chaos in Decoherence and Entropy in Complex Systems*, editado por: H.T. Elze, Lecture Notes in Physics (Springer, Heidelberg, 2003)
- [123] A. Peres em: *Quantum Chaos, Quantum Measurement*, editado por: H. A. Cerdeira, R. Ramaswamy, M.C. Gutzwiller and G. Casati (World Scientific, Singapore, 1991); A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods* (Kluwer Academic, Dordrecht, 1995)
- [124] V. Latora, A. Rapisarda, and S. Ruffo, Phys. Rev. Lett. **80**, 692 (1998)
- [125] E.G.D. Cohen, Pramana **64**, 635 (2005)

- [126] C. Beck, Phys. Rev. Lett. **87**, 180601 (2001)
- [127] C. Beck and E.G.D. Cohen, Physica A **322**, 267 (2003)
- [128] G. Wilk, Z. Włodarczyk, Phys. Rev. Lett. **84**, 2770 (2000)
- [129] A. Einstein, Ann. der Phys. **17**, 549 (1905)
- [130] C. Tsallis. and A.M.C. Souza, Phys. Rev. E **67**, 026106 (2003)
- [131] G. A. Tsekouras and C. Tsallis Phys. Rev. E **71**, 046144 (2005)
- [132] C. Beck, Europhys. Lett. **64**, 151 (2003)
- [133] N. Mordant, A. M. Crawford, and E. Bodenschatz, Physica D **193**, 245 (2004)
- [134] S. Rizzo and A. Rapisarda em: *Proceedings of the 8th Experimental Chaos Conference*, Florence, AIP Conf. Proc. No. 742 (AIP, Melville, 2004) 176
- [135] C. Beck, Physica A **331**, 173 (2004)
- [136] M. Baiesi, M. Paczuski, and A. L. Stella, preprint arXiv:cond-mat/0411342
- [137] S. Abe and S. Thurner, Phys. Rev. E **72**, 036102 (2005)
- [138] S.M. Duarte Queirós and C. Tsallis, Europhys. Lett. **69**, 893 (2005)
- [139] S.M. Duarte Queirós, Physica A **344**,619 (2004)
- [140] S.M. Duarte Queirós and C. Tsallis, Eur. Phys. J. B **48**, 139 (2005)
- [141] S.M. Duarte Queirós, Europhys. Lett. **71**, 339 (2005)
- [142] J. de Souza, L.G. Moyano, and S.M. Duarte Queirós, Eur. Phys. J. B **50**, 165 (2006)
- [143] S.M. Duarte Queirós, L.G. Moyano, J. de Souza, and C. Tsallis, Eur. Phys. J. B, **371**, 118 (2006)
- [144] M. Ausloos and K. Ivanova, Phys. Rev. E **68**, 046122 (2003)
- [145] C. Beck, E.G.D Cohen, and H.L. Swinney, Phys. Rev. E **72**, 056133 (2005)

- [146] S.M. Duarte Queirós, *Notas de Física*, CBPF-NF-018/06 (2006)
- [147] F. Black and M. Scholes, *J. Political Economy* **81**, 637 (1973)
- [148] E.J. Gumbel, *Statistics of Extremes* (Columbia University Press, New York, 1958)
- [149] B.B. Mandelbrot, *J. Business* **36**, 394 (1963)
- [150] V. Loreto, *Cours d'Economie Politique* (Lausanne, 1897)
- [151] P. Lévy, *Calcul des Probabilités* (Gauthier-Villars, Paris, 1925)
- [152] R.N. Mantegna and H.E. Stanley, *Nature (London)* **376**, 46 (1995)
- [153] R.N. Mantegna and H.E. Stanley em: *Lévy Flights and Related Topics in Physics*, editado por: M. F. Shlesinger, G.M. Zaslavsky and U. Frisch (Springer, Berlin,1995)
- [154] C. Tsallis, A.M.C. de Souza, and R. Maynard em: *Lévy Flights and Related Topics in Physics*, editado por: M. F. Shlesinger, G.M. Zaslavsky, and U. Frisch (Springer, Berlin,1995)
- [155] C. Tsallis, S.V.F Levy, A.M.C. de Souza, and R. Maynard, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3589 (1995) [Erratum: *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5442 (1996)]
- [156] I. Koponen, *Phys. Rev. E* **52**, 1197 (1995)
- [157] P. Gopikrishnan, V. Plerou, L.A.N. Amaral, M. Meyer, and H.E. Stanley, *Phys. Rev. E* **60**, 5305 (1999)
- [158] J.A. Skjeltorp, *Physica A* **283**, 486 (2000)
- [159] K. Matia, L. A. N. Amaral, S. Goodwin, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. E* **66**, 045103 (2002)
- [160] M.M. Dacorogna, U.A. Muller, R.J. Nagler, R.B. Olsen, and O.V. Pictet, *J. Int. Money Finance* **12**, 413 (1993)
- [161] B.B. Mandelbrot, *Fractals and Scaling in Finance* (Springer, New York, 1997)

- [162] P. Gopikrishnan, V. Plerou, X. Gabaix, and H.E. Stanley, *Phys. Rev. E* **62**, R4493 (2000)
- [163] R. Osorio, L. Borland, and C. Tsallis em: *Nonextensive Entropy - Interdisciplinary Applications*, editado por: M. Gell-Mann and C. Tsallis (Oxford University Press, New York, 2004)
- [164] E.P. Borges, *Manisfestações Dinâmicas e Termodinâmicas de Sistemas Não-Extensivos* (CBPF, 2004)
- [165] E. Kolb, T. Mazozi, E. Clément, and J. Duran, *Eur. Phys. J. B* **8**, 433 (1999)
- [166] D.R. White, N. Kejžsar, C. Tsallis, J.D. Farmer, and S. White, *Phys. Rev. E* **73**, 016119 (2006)
- [167] T. Lux and M. Marchesi, *Nature* **397**, 498 (1999); T. Lux and M. Marchesi, *Int. J. Theor. Appl. Fin.* **3**, 675 (2000)
- [168] X. Gabaix, P. Gopikrishnan, V. Plerou, and H. E. Stanley *Nature (London)* **423**, 267 (2003)
- [169] Y. Liu, P. Gopikrishnan, P. Cizeau, M. Meyer, C.-K. Peng, H.E. Stanley, *Phys. Rev. E* **60**, 1390 (1999)
- [170] ver em: C. Tsallis, *Braz. J. Phys.* **29**, 1 (1999)
- [171] Referências de [1108] a [1129] de <http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm>
- [172] S.M. Duarte Queirós, *Quantitatit. Finance* **5**, 475 (2005)
- [173] L.F. Burlaga, A.F. Viñas, N.F. Ness, and M.H. Acuña, *Astrophys. J.* **644**, L83 (2006)
- [174] F. Michael and M.D. Johnson, *Physica A* **320**, 525 (2003)
- [175] M. Potters, R. Cont, and J.-P. Bouchaud, *Europhys. Lett.* **41**, 239 (1998)
- [176] U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997)
- [177] P. Lévy, *Théorie de l'addition des variable aléatoires* (Gauthier Villars, Paris, 1937)

- [178] B.V. Gnedenko, A.N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables* (Addison Wesley, Cambridge - MA, 1954)
- [179] L.G. Moyano, C. Tsallis, and M. Gell-Mann, *Europhys. Lett.* **73**, 813 (2006)
- [180] S. Uramov, C. Tsallis, and S. Steinberg, [arXiv:cond-mat/0603593](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0603593) (manuscrito, 2006)
- [181] S. Uramov, C. Tsallis, M. Gell-Mann, and S. Steinberg, [arXiv:cond-mat/0606038](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0606038) (manuscrito, 2006)
- [182] S. Uramov, C. Tsallis, M. Gell-Mann, and S. Steinberg, [arXiv:cond-mat/0606040](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0606040) (manuscrito, 2006)
- [183] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications* (Wiley, New York, 1971)
- [184] Z. Zing, C.W.J. Granger, R.F. Engle, *J. Emp. Fin.* **1**, 83 (1983)
- [185] C. Gourieroux and A. Montfort, *Statistics and Econometric Models*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1996)
- [186] A. Lo, *Econometrica* **59**, 1279 (1999)
- [187] K. Matia, M. Pal, H.E. Stanley, and H. Salunkay, *Europhys. Lett.*
- [188] S.M. Duarte Queirós, *Physica A* **344**, 279 (2004)
- [189] C. Tsallis, G. Bemski, and R.S. Mendes, *Phys. Lett. A* **257**, 93 (2003)
- [190] C. Tsallis, J. Anjos, and E.P. Borges, *Phys. Lett. A* **310**, 372 (2003)
- [191] *Plancks Original Papers in Quantum Physics*, editado por: D. ter Haar, S.G. Brush (Taylor & Francis, London, 1972)
- [192] S.L. Heston, *Rev. Fin. Stud.* **6**, 327 (1993)
- [193] A.C. Silva, V. Yakovenko, *Physica A* **324**, 303 (2003)

- [194] J.M. Karpoff, *J. Finan. Quantitat. Anal.* **22**, 109 (1997)
- [195] A. Admati and P. Pfleiderer, *Rev. Financial Studies* **1**, 3 (1988)
- [196] J. Feder, *Fractals* (Plenum, New York, 1988)
- [197] J. W. Kantelhardt, S. A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde, and H.E. Stanley, *Physica A* **316**, 87 (2002)
- [198] J.-P. Bouchaud, M. Potters, M. Meyer, *Eur. Phys. J. B* **13**, 595 (2000)
- [199] A. Arnéodo, J.-F. Muzy and D. Sornette, *Eur. Phys. J. B* **2**, 277 (1998)
- [200] S. Ghashghaie, W. Breymann, J. Peinke, P. Talkner and Y. Dodge, *Nature* **381**, 767 (1996)
- [201] L.G. Moyano, J. de Souza, and S.M. Duarte Queirós, *Physica A* **371**, 118 (2006)
- [202] L.F. Burlaga and A.F. Vinas, *Physica A* **356**, 375 (2005)
- [203] M.L. Lyra, C. Tsallis, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 53 (1998)
- [204] S. Abe and N. Suzuki, *Europhys. Lett.* **65**, 581 (2004)
- [205] M. Ausloos and F. Petroni, *Physica A*, DOI:10.1016/j.physa.2006.05.044 (2006)
- [206] O.A. Rosso, M.T. Martin, and A. Plastino, *Physica A* **320**, 497 (2003)
- [207] R.F. Engle, *Econometrica* **50**, 987 (1982)
- [208] T. Bollerslev, R.Y. Chou, and K.F. Kroner, *J. Econometrics* **52**, 5 (1992)
- [209] S.H. Poon and C. W. J. Granger, *J. Econ. Lit.* **41**, 478 (2003)
- [210] R.F. Engle and G.M. Gallo, *J. Econometrics* **131**, 3 (2006)
- [211] J.V. Rosenberg and R.F. Engle, *J. Fin. Economics* **64**, 341 (2002)
- [212] F. Baldovin, *Physica A*, **342**, 119 (2004)
- [213] T. Bollerslev. *J. Econometrics* **31**, 307 (1986)

- [214] S. J. Taylor, *Modelling Financial Time Series* (Wiley, New York, 1986)
- [215] A.A. Weiss, *J. Time Ser. Anal.* **5**, 129 (1984)
- [216] T. Bollerslev, *Rev. Econ. Stat.* **69**, 542 (1987)
- [217] H. White, *Econometrica* **5**, 1(1992)
- [218] P. Embrechts, C. Kluppelberg, and T. Mikosch, *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance (Applications of Mathematics)* (Springer-Verlag, Berlin, 1997)
- [219] B. Pobodnk, P.Ch. Ivanov, Y. Lee, A. Cheesa, and H.E. Stanley, *Europhys. Lett.* **50**, 711 (2000)
- [220] B.E. Hansen, *Econ. Lett.* **36**, 181 (1991)
- [221] J.P. Fouque, G. Papanicolaou, and K.R. Sircar, *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000)
- [222] T.G. Andersen and T. Bollerslev, *J. Finance* **52**, 975 (1997)
- [223] P. Willmott, *On Quantitative Finance*, 2<sup>nd</sup> edition (John Wiley & Sons, New York, 2000)
- [224] F.C. Drost, and T.E. Nijman, *Econometrica* **61**, 909 (1993)
- [225] J.-P. Marchand, *Distributions* (North-Holland, Amsterdam, 2003)
- [226] W. Feller, *Ann. Math.* **54**, 173 (1951)
- [227] A.A. Dragulescu, V.M. Yakovenko, *Quantitat.Fin.* **2**, 443 (2002)
- [228] H. Takayasu, A.-H. Sato, and M. Takayasu, *Phys. Rev. Lett* **79**, 966 (1997)
- [229] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications* (Springer-Verlag, Berlin, 1989)
- [230] I.S. Gradshteyn and I.R. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 1965)
- [231] J. Perelló, J. Masoliver, and J.P. Bouchaud, *Appl. Math. Fin.* **11**, 27 (2004)

- [232] I. Giardina, J.P. Bouchaud, M. Mézard, *Quantitative Finance* **1**, 212 (2001)
- [233] M. Blume, *Phys. Rev.* **141**, 517 (1966); H.W. Capel, *Physica (Amsterdam)* **32**, 966 (1966)
- [234] J-P. Bouchaud, Y. Gefen, M. Potters, and M. Wyart, *Quantitat. Fin.* **4**, 176 (2004)
- [235] F. Lillo and J. D. Farmer, *Stud. Nonlinear Dynam. Econometrics* **8**(3), art. 1 (2004)
- [236] J.P. Bouchaud, A. Matacz, and M. Potters, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 228701 (2001)
- [237] Z. Eisler and J. Kertész, *Phys. Rev. E* **73**, 046109 (2006)
- [238] Z. Eisler and J. Kertész, *Eur. Phys. J. B* **51**, 145 (2006)
- [239] C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences* Third Edition (Springer-Verlag, Berlin, 2004)
- [240] C. Anteneodo and R. Riera, *Phys. Rev. E.* **72**, 026106 (2005)
- [241] J.P. Bouchaud and R. Cont, *Eur. Phys. J. B* **6**, 543 (1998)
- [242] V. Plerou, P. Gopikrishnan, X. Gabaix, and H.E. Stanley, *Phys. Rev. E* **66**, 027104 (2004)
- [243] R. Friedrich, J. Peinke, and Ch. Renner, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 5224 (2000)
- [244] K. Ivanova, M. Ausloos, and H. Takayasu em: *The Applications of Econophysics*, editado por H. Takayasu (Springer Verlag, Berlin, 2004), 161
- [245] C. Anteneodo and C. Tsallis, *J. Math. Phys.* **44**, 5194 (2003)
- [246] E.K. Lenzi, C. Anteneodo, and L. Borland, *Phys. Rev. E* **63**, 051109 (2001)
- [247] D. Sornette, *Why Stock Markets Crash : Critical Events in Complex Financial Systems* (Princeton University Press, New Jersey, 2004)
- [248] K. Sznajd-Weron, J. Sznajd, *Int. J. Mod. Phys. C* **11**, 1157 (2000)
- [249] S. Bornhold, *Int. J. Mod. Phys. C* **12**, 667 (2001)
- [250] G. Iori, *Journal of Economic Behavior and Organization* **49**, 269 (2002)

- [251] A. Krawiecki, J.A. Holyst and D. Helbing, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 158701 (2002)
- [252] B. Rosenow, P. Gopikrishnan, V. Plerou, and H. E. Stanley, *Physica A* **314**, 762 (2002)
- [253] L. Sabatelli and P. Richmond, *Physica A* **344**, 62 (2004)
- [254] D. Stauffer, P.M.C. de Oliveira, and A. Bernardes, *Int. J. Theo. Appl. Fin.* **2**, 83 (1999)
- [255] D. Stauffer and D. Sornette, *Physica A* **271**, 496 (1999)
- [256] J.D. Farmer, L. Gillemot, F. Lillo, S. Mike, and A. Sen, *Quantitat. Finance* **4**, 383 (2004)
- [257] S.M. Duarte Queirós, E.M.F. Curado, and F.D. Nobre, *Physica A*, DOI:10.1016/j.physa.2006.04.098 (2006)
- [258] A. P. Young, Ed., *Spin Glasses and Random Fields* (World Scientific, Singapore, 1998).
- [259] K. H. Fischer and J. A. Hertz, *Spin Glasses* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [260] K. Binder and A. P. Young, *Rev. Mod. Phys.* **58**, 801 (1986)
- [261] J.P. Bouchaud, *Physica A* **313**, 238 (2002)
- [262] D. J. Amit, *Modeling Brain Function* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989)
- [263] P. Peretto, *An Introduction to the Modeling of Neural Networks* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992)
- [264] N. Platt, E. A. Spiegel, and C. Tresser, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 279 (1993)
- [265] N. Platt, S. M. Hammel, and J. F. Heagy, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3498 (1994)
- [266] J. F. Heagy, N. Platt, and S. M. Hammel, *Phys. Rev. E* **49**, 1140 (1994)
- [267] Y. Kuramoto and H. Nakao, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4039 (1997)
- [268] H. Nakao, *Phys. Rev. E* **58**, 1591 (1998)
- [269] B.M. Hill, *Ann. Stat.* **3**, 1163 (1975)

- [270] G. Benettin, L. Galgani, and J. M. Strelcyn, *Phys. Rev. A* **14**, 2338 (1976)
- [271] C. Tsallis, *Physica A* **340**, 1 (2004)
- [272] T.G. Andersen, T. Bollerslev, and F.X. Diebold, em: *Handbook of Financial Econometrics*, editado por: Y. Aït-Sahalia (Elsevier, Amsterdam, 2006)
- [273] T. Chordia, A. Subrahmanyam, *J. Finan. Econ.*, **72** 485 (2004)
- [274] J.D. Farmer, A. Gerig, F. Lillo, S. Mike, *Quantitat. Finance* **6**, 107 (2006)
- [275] R.J. Shiller, *Am. Econ. Rev.* **71**, 421 (1981)