

TESE DE
DOUTORADO

CONFIGURAÇÕES DE CAMPOS E
MECÂNICA QUÂNTICA
SUPERSIMÉTRICA
NO CONTEXTO DA
ELETRODINÂMICA PLANAR

RICARDO CARDOSO PASCHOAL

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RIO DE JANEIRO, 1º DE OUTUBRO DE 2004

À
Grande Lei
que a Tudo
e a Todos
Rege.

AGRADECIMENTOS

São muitos a quem agradecer, principalmente àqueles que ainda puderem me perdoar se porventura eu os esqueci de mencionar aqui. E, para não correr o risco de que esta seção tenha mais páginas do que a tese em si, serei breve. Agradeço muito a todos,

- Ao meu orientador, Prof. José Abdalla Helayël-Neto, a quem todos os adjetivos sempre ficarão aquém da grandeza de seu Espírito, que, refletindo-se em sua mente e em seu coração, nos atinge em suas atitudes de compreensão, estímulo e genuína amizade, como bem o sabem todos os que têm o privilégio de com ele conviver por algum tempo;

- Aos professores que, além do meu orientador, contribuíram para a minha formação, por meio de cursos a que tive a oportunidade de assistir: Profs. Sebastião Alves Dias, Marco Antonio de Andrade, Luiz Paulo Sampaio Lima, Nelson Pinto Neto, Daniel Barci e uma menção especial (in memoriam) ao querido Prof. Jorge Silvio Helman, pela orientação na formação imediatamente anterior, de mestrado;

- Aos Profs. Anibal Omar Caride e Evaldo Curado, que estiveram à frente da CFC durante o meu tempo de doutorado e sempre me apoiaram com estímulo e confiança: o primeiro também como meu orientador nos dois primeiros semestres (quando eu ainda pensava que poderia me dedicar a um trabalho experimental), e o segundo, com uma compreensão e uma tolerância fundamentais, sobretudo nesta etapa final de elaboração de tese;

- Aos integrantes da Banca Examinadora desta tese, Profs. Marcelo Chiapparini, Ivan da Cunha Lima, Sergio Barbosa Duarte e Sebastião Alves Dias, pelas valiosas sugestões que foram dadas e já incorporadas à presente versão revisada do texto;

- Aos colegas de convívio da CCP (ou mesmo de outros departamentos ou instituições), seja propiciando frutíferas discussões ou o tão necessário clima agradável para um bom trabalho: Germano Monerat, Marcelo Carvalho, Manoel Messias Jr., Humberto Belich Jr., José Luís Boldo, Martim Lourenço (PUC), Javier Magnin, Roger Barreto, Hugo Christiansen, Hector Leny Carrion, Álvaro Ferreira, Álvaro Nogueira, Márcia Moutinho, Wesley Spalenza, Thales Soares, Ricardo Sibanto, Marco Aurélio Kneipp, Moisés Rojas,

Leonardo Moraes, André Penna-Firme, Oswaldo Del Cima, Gustavo Dourado, Marcello Botta, Fabricio Barone, Cristine Ferreira, Cresus Godinho, Sergio Vellozo, Guilherme Peixoto, Nemésio de Oliveira Neto, José Gomes, Valéria Nunes, Bartolomeu Figueiredo (o Bartô), Winder Melo, Claudio e Daniel Sasaki, Patrick Brockill, Everton Abreu, Milva Gabriela, Marta Tureli, José Luis Chauca Murga, Gilmar Dias, Edison Luiz da Graça, Valter Gomes, Dario Tavares (UFRJ e praticamente da família), Fortunato Menezes (especialmente pelos modelos LaTeX para a tese), Fernando Rabelo (especialmente pela ajuda nos primeiros trabalhos) e, a Leonardo P. G. de Assis (o ‘Coronel’), um agradecimento especial pelo estímulo constante, pela parceria num dos artigos e pela ajuda espontânea na digitação de algumas equações da tese e na tradução dos nossos artigos, sem o quê eu certamente não teria conseguido terminá-la no prazo; e também a alguns Professores do Depto., ainda não citados, que também contribuem para o clima: Fernando Simão, Francesco Toppan, Susana Caride e Alexander Smith;

- Aos funcionários, pelo eficiente e agradável apoio no dia-dia: o pessoal da CCP, Rosangela Marques, Beth e Elisete Martins; da CFC, Myriam Simões e José Ricardo; da Biblioteca, Rosa, Marina, Cida, Marilena, Baiano, Fátima, Sergio Velho, e a galera da xerox, assim como o Prof. Emil Medeiros (sempre um papo agradável), a Ângela Melo, a Vera Toledo e o José Ramalho; do Setor de Publicações, Socorro e Valeria; aos caríssimos vigilantes, Moreira e Cia.; todos da CAT, especialmente Marcio e Marcelo Albuquerque, Nilton Alves Jr., Fernanda, Denise Coutinho e Nilton (meu ex-aluno, já fora do CBPF), com os quais eu tive mais contato; a todos da limpeza, em especial a legendária D. Regina e a todos os funcionários que mantêm o CBPF funcionando num ambiente de harmonia e de eficiência;

- Ao SENAI/CETIQT, local onde trabalho como professor, pelo apoio em termos de instalações (computador, impressora e papel) e por ter me liberado de 10 a 14 horas de meu horário de ponto semanal de 40 horas durante quase todo o tempo de doutoramento;

- Aos meus colegas do antigo Depto. de Ciências Básicas do SENAI/CETIQT, pelo estímulo e boa convivência, alguns deles muitas vezes me ajudando ao assumirem cargas

horárias maiores: Lilian Nasser, Edimando Cordeiro, Lizander Lopes, Deborah Heiderich, Richard Maciel, Marcos Elia, Ladario da Silva (também ex-colega no CBPF), Marcia Ricci, José Newton Rosa, César Pitta, Carlos Estephano, Roberto Nathan, Raquel Mello e Rynaldo Rosa, assim como aos mais recentes companheiros de sala, da área de Humanas, Elizabeth Sá, Davi Nascimento, Gláucia Regina Cunha, Rosenilda Sant'Anna, e, mais recentemente ainda, da área têxtil, Suruapi Garcia, e, em especial, Ana Filipecki (principalmente!), Sergio Bastos, Renato Cunha e Alexandre Ribeiro, não só pelos mesmos motivos dos anteriores, mas também pelo fato de terem me auxiliado o quanto puderam quando estive sob suas chefias; e a todos os demais professores e funcionários de lá, mesmo de outros departamentos, que sempre me incentivaram;

- Aos meus colegas do Colégio Pedro II, em especial o Prof. Sidney Drago, pelo apoio na hora de conseguir o afastamento não remunerado;

- Aos meus alunos do CETIQT e do Colégio Pedro II que sempre deram apoio e estímulo com a força especial da juventude;

- A vários amigos-irmãos, pelo apoio e estímulo, dentre os quais quero destacar o Paulo Pimentel, o Vinicius Brazil e a Dolores Soutinho, por me liberarem de algumas atividades quando as coisas “apertaram”, e a minha médica, Dra. Silvia Helena Ferreira, que muitas vezes foi acionada devido ao stress (sobretudo agora no final!), e sempre foi perfeita;

- A minha querida família, de sangue ou não, incluindo os que já não mais estão ao alcance de nossos cinco sentidos, pelo amor, carinho e exemplo: em especial, minha mãe, Neusa Cardoso Paschoal, meu pai, Victor Paschoal, meus avós, Anacleto Cardoso e Rosa Gonçalves Claro, meu sogro e meu cunhado, Redemonte Corradini e Ricardo Corradini, meus irmãos, Márcia Cardoso Paschoal e Victor Paschoal Jr., meus sobrinhos queridos, e minha amada esposa, Jacqueline Corradini Paschoal, que além do amor e carinho que me alimentam a alma, também teve a sabedoria e a paciência para compreender a transitoriedade dos momentos mais difíceis de intenso trabalho e menos lazer.

RESUMO

Esta tese aborda alguns aspectos clássicos da Eletrodinâmica Planar, sobretudo o modelo de Maxwell-Chern-Simons. Estudam-se-lhe as propriedades básicas e algumas configurações de carga e corrente específicas, assim como as Dinâmicas Clássica e Quântica de um elétron sujeito aos correspondentes campos gerados. Procura-se extrair o máximo de informação neste nível, preenchendo assim uma lacuna existente na literatura. Estabelece-se também que uma aproximação do tipo campo médio, numa teoria de Maxwell-Chern-Simons acoplada com a matéria por intermédio do acoplamento não-mínimo típico das $(2+1)$ dimensões, possui um paralelo com o bem-consolidado modelo de Férmions Compostos, de Jain, para o Efeito Hall Quântico Fracionário. Além disso, obtém-se um limite não-relativístico da equação de Dirac não-mínima diretamente em $(2+1)$ dimensões, o que também parecia faltar na literatura. Em seguida, utiliza-se a formulação em supercampos para se estender a Mecânica Quântica Supersimétrica da equação de Pauli em $(2+1)$ dimensões com a finalidade de que ela também contemple o citado acoplamento não-mínimo; como consequência, obtém-se a possibilidade de haver interações elétricas (via um potencial escalar), além da magnética. Ainda mais, demonstra-se a possibilidade de haver mais um termo de interação, via um potencial Fermiônico (isto é, anti-comutante, ou pseuso-clássico), que pode ser representado por uma matriz de ordem 4×4 ou superior.

ABSTRACT

This thesis deals with a number of classical aspects of Planar Electrodynamics, mainly the Maxwell-Chern-Simons model. Its basic properties and the fields due to some specific charge and current configurations are studied, as well as the Classical and Quantum Dynamics of an electron subject to the corresponding fields that are generated. All effort was made in order to obtain as much information as possible at this level, thus filling a gap in the literature. A mean field-type approximation of a Maxwell-Chern-Simons theory coupled to matter by means of the non-minimal coupling typical of (2+1) dimensions is shown to have a parallel with the well-established Jain's Composite Fermion model for the Fractional Quantum Hall Effect. Moreover, the non-relativistic limit of the non-minimal Dirac equation directly in (2+1) dimensions is obtained, which seems that was also lacking in the literature. Next, a superfield formulation is adopted to extend the Supersymmetric Quantum Mechanics of (2+1)-dimensional Pauli equation so that it remains valid for the non-minimal coupling mentioned above and, as a consequence, the possibility of electric interactions (via a scalar potential), besides magnetic ones, is attained. It is also demonstrated that an extra interaction term may occur, via a Fermionic (i.e., anticommuting, or pseudo-classical) potential, which may be represented by a rank-4×4 (or higher) matrix.

Índice

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
Índice	vii
Lista de figuras	ix
Introdução	1
1 Elementos de Eletromagnetismo de Maxwell-Chern-Simons Clássico	6
1.1 Propriedades Básicas da Lagrangeana de MCS	7
1.1.1 Equações de Campo, Conservação da Carga e Invariância de Calibre	7
1.1.2 Equações de onda e graus de liberdade físicos	10
1.1.3 Equações de Campo na forma integral	15
1.1.4 Força de Lorentz	20
1.1.5 Condutividade de um gás de elétrons em $(2+1)D$	21
1.2 Configurações básicas de carga e corrente no Eletromagnetismo de MCS . .	23
1.2.1 Carga puntiforme em repouso na origem	23
1.2.2 Carga puntiforme em movimento uniforme	24
1.2.3 O capacitor de “placas” paralelas	25
1.2.4 Um fio com corrente estacionária	28

2	Algumas Configurações Especiais do Eletromagnetismo de MCS	32
2.1	Dois fios com correntes estacionárias em sentidos opostos	33
2.1.1	Um elétron entre os fios (Mecânica Clássica)	35
2.2	Uma fita condutora com uma corrente estacionária uniformemente distribuída	40
2.2.1	O caso puro-Maxwell ($m = 0$)	40
2.2.2	O caso de MCS ($m \neq 0$)	43
2.2.3	O Efeito Hall radial	46
2.3	Algumas configurações de Mecânica Quântica	51
2.3.1	Um elétron entre os fios (Mecânica Quântica)	51
2.3.2	Um elétron no interior da fita	55
3	A Teoria de Maxwell-Chern-Simons Não-mínima e os Férmions Com-	
	postos	57
3.1	O acoplamento não-mínimo em (2+1) dimensões	58
3.2	Limite não-relativístico da Equação de Dirac em (2+1)D	61
3.3	Conexão com os Férmions Compostos	64
4	Mecânica Quântica Supersimétrica Planar de uma Partícula Carregada	
	em um Campo Eletromagnético Externo	70
4.1	MQS no Superespaço	71
4.2	MQS-N=1	78
4.3	MQS-N=2	84
4.4	Uma interação mais geral	87
	Conclusões	89
	Referências	93

Lista de Figuras

1.1	O vetor de Poynting \vec{S} e o campo elétrico \vec{E} de uma onda plana homogênea propagando-se ao longo da direção x , mostrados em diferentes instantes de tempo e numa posição fixa, x , do espaço. (Aqui, fez-se $\omega = m$; para $m/\omega \rightarrow 0$, conforme indicado no texto, as componentes y de \vec{S} e x de \vec{E} também vão tendendo a zero. E vice-versa.)	14
1.2	(a) Curva de integração C da Eq. (1.43). (b) A terceira dimensão auxiliar usada para se obter a Eq. (1.43).	17
1.3	(a) Caminho de integração C usado para obter as Eqs. (1.56–1.57). (b) Caminho de integração C usado para obter a Eq. (1.58).	20
2.1	As três regiões determinadas por 2 fios paralelos com correntes em sentidos opostos ao longo da direção y	34
2.2	Trajetória de um elétron confinado entre os fios.	39
2.3	Uma fita condutora infinita, de largura b , percorrida por uma corrente elétrica estacionária I na direção do eixo y (positivo), uniformemente distribuída pela sua largura.	40
2.4	O campo magnético B produzido pela corrente I uniformemente distribuída pela largura b da fita, no caso puro-Maxwell ($m = 0$), no qual o campo elétrico produzido pela corrente é zero, como no Eletromagnetismo usual. (Fez-se $b = 1$ e $I = 2$.)	42

2.5	Os campos elétrico e magnético produzidos por uma densidade de corrente uniforme no interior de uma fita de largura b , para o caso de MCS ($m \neq 0$), dados pelas Eqs. (2.58–2.63). (Fez-se $b = 1$, $I = 2$ e $m = 0, 4$.)	46
2.6	Os campos elétrico e magnético produzidos por uma densidade de corrente uniforme no interior de uma fita de largura b , nos seguintes limites: acima, $m \rightarrow 0$ ($m = 0,05$) e, abaixo, $m \rightarrow \infty$ ($m = 10$). É importante observar as escalas dos gráficos. (Fez-se $b = 1$ e $I = 2$.)	47

Introdução

É bem conhecido o fato de que é possível, em espaços-tempos de dimensões ímpares, ter-se uma teoria eletromagnética com fóton massivo e ainda invariante de calibre e de Lorentz¹, por meio da adição, à densidade Lagrangeana usual de Maxwell, daquele que é conhecido como o termo de Chern-Simons (CS) [1]. Tal teoria de Maxwell-Chern-Simons (MCS) é denominada uma teoria de massa topológica, no sentido de que o novo termo adicionado não depende da métrica e portanto não altera o tensor de energia-momento dos campos. Este termo também pode ser induzido por efeitos quânticos (correções) radiativas, mesmo que não esteja originalmente presente na Lagrangeana de partida [6]. Outra importante propriedade da teoria de MCS é o fato de que o termo de CS quebra a paridade e a invariância de reversão temporal da teoria de Maxwell pura [1].

Muitos trabalhos foram publicados sobre estas questões e outras relacionadas, mas talvez muito pouca atenção tenha sido dada aos aspectos clássicos e mais elementares desta teoria, não obstante as interessantes e por vezes desafiadoras características que surgem mesmo neste nível, como já foi apontado na Ref. [5]. O propósito dos Capítulos 1

¹Porém não mais invariante sob paridade (P) e reversão temporal (T), o que é bom quando se está usando a teoria de Chern-Simons (ver adiante) para descrever o Efeito Hall Quântico, mas que requer uma modificação no modelo no caso de supercondutores de altas temperaturas. Ver as Refs. [1, 2, 3, 4] e especialmente a discussão em W. A. Moura-Melo, Ref. [5].

e 2 é fornecer algum material para ajudar a preencher esta lacuna, para o caso específico de (2+1) dimensões, que é a única dimensionalidade abordada nesta tese. Em particular, um outro estímulo para um estudo de tais aspectos é a analogia que parece existir, como mostrado na Ref. [7] e no Capítulo 3, entre a Eletrodinâmica de MCS referente a uma partícula com carga e momento magnético e a bem-consolidada teoria de Férmions compostos, de Jain [8], para o Efeito Hall Quântico Fracionário (EHQF).

O estudo de uma teoria que não esteja definida no espaço-tempo “real”, de (3+1) dimensões, justifica-se pela existência de vários efeitos físicos interessantes exibidos pelos sistemas que podem se mover somente em duas² dimensões espaciais [9]. Este é, por exemplo, o caso dos Efeitos Hall Quânticos Inteiro e Fracionário (EHQI e EHQF) [2] e dos supercondutores de alta temperatura crítica [3]. Além disso, trabalhar em menos dimensões pode ser uma maneira mais fácil de enfrentar, pelo menos numa primeira tentativa, algumas dificuldades que surgem nas teorias “reais”, de (3+1) dimensões. Isto não significa que algumas características novas não possam aparecer. Um caso típico é a possibilidade do spin de uma partícula (chamada *anyon*) assumir qualquer (= *any*, em inglês) valor, correspondendo a uma estatística contínua (também chamada de *fracionária*), não necessariamente Bosônica nem Fermiônica [4]. Tal possibilidade foi confirmada experimentalmente no ambiente do EHQF, rendendo até um Prêmio Nobel, em 1998. Por outro lado, outras conseqüências de uma teoria plenamente (2+1)-dimensional (e não apenas uma restrição ao plano de uma teoria (3+1)-dimensional) nunca foram confirmadas (e nem mesmo se espera que venham a ser), como, por exemplo, a dependência em $1/r$ do campo elétrico gerado por uma carga puntiforme, que será vista na Seção 1.2.1. A previsão de quando uma teoria plenamente (2+1)-dimensional terá um êxito experimental ou não, portanto, parece ser algo ainda não claramente definido na literatura e, desta forma, todas as passagens, nesta tese, em que se faz alguma comparação explícita com dados experimentais deve ser vista como mera referência para fins de se ter algum parâmetro

²Ou mesmo em apenas uma dimensão espacial, mas este caso não será estudado aqui. O leitor interessado poderá consultar as Refs. [9].

externo de comparação (ou seja, apenas para que a teoria tenha minimamente alguma possibilidade de ser aplicável), sem qualquer conotação de proposta de *explicação* de algum experimento.

Desde a introdução do termo de Chern-Simons na Lagrangeana da Eletrodinâmica Planar [1], o mesmo tem sido usado em várias aplicações, e provavelmente a mais bem-sucedida delas foi o estabelecimento de uma conexão entre a teoria de CS e a já citada estatística fracionária [4], principalmente quando se aplica a primeira à física do EHQF [10, 11, 12, 13]. Além disso, as duas dimensões espaciais dão margem para uma inclusão natural de um acoplamento não-mínimo (tipo-Pauli) [14, 15, 16]³, como será visto no Capítulo 3. Estes dois termos — CS e acoplamento não-mínimo — são induzidos por correções radiativas [1, 15] na Eletrodinâmica Quântica (EDQ) Planar, o que já constitui motivo suficiente para incluí-los na Lagrangeana clássica. No entanto, também existem algumas conexões interessantes entre estes dois termos, na teoria escalar: quando se introduz um acoplamento não-mínimo na Lagrangeana, um termo de CS é gerado por quebra espontânea de simetria [17] e uma estatística fracionária pode ser obtida mesmo sem um termo de CS (como costuma ser feito), seja no limite não-relativístico [18] ou no caso relativístico [19]; um contra-termo de CS cura (a um laço⁴) a não-renormalizabilidade de um termo não-mínimo [21]; e, da mesma forma, um acoplamento não-mínimo cura [22], pelo menos no limite não-relativístico, o problema da singularidade da teoria de Maxwell-Chern-Simons (MCS) escalar, que havia sido apontada anteriormente na Ref. [23]. Não se restringindo apenas à teoria escalar, mas com validade também na Fermiônica, outros importantes resultados são as soluções de vórtice na teoria de calibre de MCS, tanto no caso Abeliano como no não-Abeliano, seja relativisticamente ou não, as quais se tornaram possíveis por meio da inclusão de um acoplamento não-mínimo [22].

Outra motivação para se considerar uma teoria de MCS não-mínima é o sucesso do modelo de férmions compostos (FCs), de Jain, para o EHQF [8], no qual cada elétron

³Mesmo para o caso de matéria com spin-zero (isto é, escalar).

⁴A dois laços, a renormalizabilidade ainda persiste, mas apenas para um certo valor da constante de acoplamento não-mínimo [20].

é tratado como tendo um número par de flúxons (os quanta do fluxo magnético) anexados a si mesmo, uma idéia trazida da já-mencionada conexão entre a teoria de CS e a transmutação estatística. Um FC é uma “partícula” com carga e fluxo. Uma vez que, em duas dimensões espaciais, o fluxo magnético e o momento de dipolo magnético possuem a mesma dimensão ($= \text{massa}^{-1/2}$ no sistema de unidades natural, isto é, com $\hbar = c = 1$)⁵, um FC pode ser visto como uma “partícula” com carga e com momento de dipolo magnético, exatamente como num esquema de acoplamento não-mínimo do tipo-Pauli, e, portanto, não seria mesmo tão surpreendente que se encontrasse alguma semelhança entre estes dois modelos, como de fato se mostra na Ref. [7] e no Capítulo 3, não obstante uma relação entre o termo de CS e um fluido de partículas possuindo carga e momento magnético já ter sido estabelecida na Ref. [24], que também mostrou que a interação da corrente de tais partículas com o campo de calibre é equivalente — a menos de um termo de superfície — a uma interação tipo Pauli.

No Capítulo 4, a Eletrodinâmica Planar será abordada do ponto de vista da Mecânica Quântica Supersimétrica (MQS). Este tema, cujos pioneiros trabalhos são as Refs. [25, 26, 27], tem sido bastante ampliado por muitos outros que lhe seguiram, incluindo-se várias revisões [28, 29, 30, 31, 32, 33] e livros [34, 35, 36, 37, 38], com a pesquisa neste campo ativa até hoje, como demonstram uma recente conferência internacional [39] e recentes trabalhos⁶, alguns deles conectando a MQS com teorias não-comutativas [40]. Em particular, uma questão muito comum em MQS é a realização da supersimetria (SUSY) na Mecânica Quântica referente a uma partícula carregada (ou neutra) em interação com um campo magnético, em várias dimensionalidades espaciais. Porém, como já mencionado, é um fato bem conhecido que, em (2+1) dimensões, um acoplamento não-mínimo surge naturalmente [14, 15, 16] e permite uma interação de momento magnético até mesmo no caso de partículas de spin-zero (campos escalares de matéria). Estes dois aspectos, MQS

⁵Vale a pena reforçar que esta é uma peculiaridade das duas dimensões espaciais, não válida em (3+1) dimensões, onde o fluxo magnético é massa^0 e o momento de dipolo magnético é massa^{-1} . De fato, o principal resultado do Capítulo 3 está baseado na idéia de se *identificar* estas duas quantidades.

⁶Em 30/07/2004, uma busca em www.arxiv.org com a palavra-chave “supersymmetric quantum mechanics” revelou 243 trabalhos.

e acoplamento não-mínimo, não tinham sido, contudo, contemplados simultaneamente na literatura até o aparecimento da Ref. [41], cujo conteúdo consta do Capítulo 4.

Outra questão interessante que estava aberta na literatura é quanto à possibilidade de uma interação de campo elétrico (via um potencial escalar) estar presente sem a quebra explícita da SUSY. Para a MQS-N=1, a resposta tradicional é não [36, p.51], mas esta pergunta também foi reavaliada na Ref. [41] e mostrou-se que, em um esquema de acoplamento não-mínimo, isto pode acontecer: um sistema de Mecânica Quântica com supersimetria N=1 foi proposto, onde uma interação de campo elétrico aparece juntamente com o acoplamento entre o momento de dipolo magnético da partícula e o campo magnético externo. Mostra-se também sob quais condições isto pode acontecer. Com relação ao caso N=2, o modelo de Witten [26, 27] é o mais célebre e o que possui mais aplicações. A literatura correspondente mostra que uma interação elétrica (via um potencial escalar) é possível em tais modelos supersimétricos, mas isto só acontece em cada um dos dois setores (o ‘Bosônico’ e o ‘Fermiônico’) do Hamiltoniano: os dois potenciais elétricos (o ‘Bosônico’ e o ‘Fermiônico’), embora derivando do mesmo superpotencial, têm expressões diferentes em função do mesmo e, portanto, não se referem simultaneamente à mesma partícula, mas, sim, a dois sistemas quase-isospectrais (o ‘quase’, aqui, se refere ao estado fundamental), típico de sistemas supersimétricos (sem quebra de supersimetria). Ao contrário, na SUSY-N=2 (-N=1) da equação de Pauli em duas (três) dimensões espaciais [42], os dois setores do Hamiltoniano (o ‘Bosônico’ e o ‘Fermiônico’) se referem aos dois estados de spin diferentes do *mesmo* sistema de spin-1/2. No Capítulo 4, uma proposição é feita sobre a possibilidade de um Hamiltoniano supersimétrico de Pauli em (2+1) dimensões que inclua uma interação elétrica, assim como um acoplamento não-mínimo. Além disso, graças ao tratamento em supercampos utilizado, a possibilidade de uma interação via um potencial Fermiônico é demonstrada.

Finalmente, as conclusões e sugestões para futuros trabalhos são indicadas no último Capítulo.

Capítulo 1

Elementos de Eletromagnetismo de Maxwell-Chern-Simons Clássico

Neste Capítulo, algumas propriedades básicas da Lagrangeana de MCS são revistas na primeira seção: equações de campo (em forma diferencial e em forma integral, juntamente com as respectivas condições de (des)continuidade para os campos), conservação da carga, invariância de calibre, equação de onda e graus de liberdade físicos, força de Lorentz e condutividade de um gás de elétrons. Na seção seguinte, as configurações de carga e de corrente mais elementares do eletromagnetismo clássico de MCS são estudadas: carga puntiforme em repouso e em movimento retilíneo uniforme, capacitor de placas paralelas e um fio reto e infinito com corrente estacionária. Algumas relações interessantes são obtidas, típicas das $(2+1)$ dimensões e também válidas no eletromagnetismo puro-Maxwell, como, por exemplo, a força entre dois fios paralelos. Também são consideradas questões relativas às unidades das grandezas em tais dimensões, que se mostram nem sempre iguais às suas correspondentes em $(3+1)D$.

1.1 Propriedades Básicas da Lagrangeana de MCS

1.1.1 Equações de Campo, Conservação da Carga e Invariância de Calibre

A densidade de Lagrangeana que exhibe o Eletromagnetismo de Maxwell em (2+1) dimensões e que também incorpora o termo de Chern-Simons é [1]:

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\kappa A_\lambda - J_\mu A^\mu, \quad (1.1)$$

onde, como de costume,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.2)$$

A_μ sendo o potencial eletromagnético em (2+1)D, m o coeficiente de massa topológica do termo de CS e J_μ a 3-corrente. Além disso, utilizam-se as seguintes convenções: os índices gregos abrangem todas as dimensões do espaço-tempo (2+1)-dimensional: $\mu, \nu, \lambda, \kappa, \text{etc.} = 0, 1, 2$, enquanto que os latinos referem-se apenas aos espaciais: $i, j, k, l, \text{etc.} = 1, 2$; as coordenadas cartesianas contra-variantes e covariantes do espaço-tempo são definidas, respectivamente, por: $x^\mu \equiv (x^0, x^i) \equiv (x^0, \vec{x})$ e $x_\mu \equiv (x_0, x_i) \equiv (x^0, -x^i) \equiv (x^0, -\vec{x})$, sendo o tempo denotado por $t \equiv x_0 \equiv x^0$ e as coordenadas estritamente espaciais por $x^i \equiv \vec{x}$; portanto, o tensor métrico é dado por: $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$; as derivadas parciais são, coerentemente, definidas assim: $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu = (\partial_0 = \partial^0 \equiv \partial_t, \partial_i = \vec{\nabla})$ e $\partial^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu = (\partial^0 = \partial_0 \equiv \partial_t, \partial^i = -\partial_i = -\vec{\nabla})$; o tensor unitário totalmente anti-simétrico (tensor de Levi-Civita) é definido da seguinte forma: $\epsilon^{012} = \epsilon_{012} \equiv +1$.

Uma pequena variação δA_μ no campo de calibre produz uma correspondente variação δL na Lagrangeana. É imediato mostrar que a variação do primeiro termo da Lagrangeana — o chamado termo cinético — é:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu. \quad (1.3)$$

Do mesmo modo, e já considerando o cancelamento de uma derivada total após a

integração na ação $\int \mathcal{L}_{MCS} d^3x$, obtém-se a correspondente variação do termo de Chern-Simons:

$$\tilde{m}\epsilon^{\nu\kappa\lambda}\partial_\kappa A_\lambda\delta A_\nu. \quad (1.4)$$

Finalmente, a variação do terceiro termo da Lagrangeana — o de interação — é simplesmente igual a $-J^\nu\delta A_\nu$. Portanto, pelo princípio da mínima ação, chega-se às equações de campo de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m\epsilon^{\nu\kappa\lambda}\partial_\kappa A_\lambda = J^\nu. \quad (1.5)$$

Definindo-se:

$$\tilde{F}^\mu \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}, \quad (1.6)$$

e — uma vez que $\epsilon^{\nu\kappa\lambda}$ é totalmente anti-simétrico — usando somente a parte anti-simétrica de $\partial_\kappa A_\lambda$, ou seja, $\frac{1}{2}(\partial_\kappa A_\lambda - \partial_\lambda A_\kappa) = \frac{1}{2}F_{\kappa\lambda}$, pode-se reescrever as equações de campo acima como:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{m}{2}\epsilon^{\nu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda} = J^\nu, \quad (1.7)$$

ou:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m\tilde{F}^\nu = J^\nu, \quad (1.8)$$

com a identidade adicional abaixo,

$$\partial_\nu \tilde{F}^\nu = 0, \quad (1.9)$$

que é simplesmente uma outra maneira de se escrever a identidade de Bianchi, $\epsilon^{\nu\kappa\lambda}\partial_\nu F_{\kappa\lambda} = 0$. Além disso, aplicando ∂_ν nas equações de campo (1.8), obtém-se a conservação da carga, $\partial_\nu J^\nu = 0$.

A invariância manifesta das equações de campo (1.8) sob as transformações de calibre $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ não ocorre na Lagrangeana de MCS, Eq. (1.1), exceto para o primeiro termo, ou seja, puro-Maxwell. Contudo, sob uma transformação de calibre, a ação $\int \mathcal{L}_{MCS} d^3x$ é invariante, se for considerado o cancelamento dos termos de superfície.

Realmente, fazendo a substituição $A_\mu \rightarrow A'_\mu$ na Eq. (1.1), a Lagrangeana \mathcal{L}_{MCS} varia por uma parcela que é apenas uma derivada total:

$$\delta\mathcal{L}_{MCS} = \partial_\mu(J^\mu\Lambda + \Lambda\epsilon^{\mu\kappa\lambda}\partial_\kappa A_\lambda), \quad (1.10)$$

onde a condição de conservação da carga precisou ser usada.

Também é possível escrever as equações de campo em termos dos campos elétrico e magnético se, como em (3+1) dimensões, definirem-se:

$$A^\mu \equiv (\Phi, \vec{A}) \quad (1.11)$$

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = \frac{\partial}{\partial t}(-\vec{A}_i) - \vec{\nabla}_i \Phi \equiv \vec{E}_i \quad (1.12)$$

$$B \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} \equiv \epsilon_{ij}\partial_i \vec{A}_j, \quad (1.13)$$

onde $\epsilon_{ij} \equiv \epsilon_{0ij} = \epsilon^{0ij}$ (ϵ^{ij} não precisa ser definido). Ressalte-se, de passagem, que a notação acima, \vec{A}_i , não é redundante, pois, pelas convenções anteriormente fixadas, $A_i \neq \vec{A}_i$ (de fato, $\vec{A}_i = A^i = -A_i$). Além disso, é importante notar que a terceira equação define um campo magnético B *escalar*, uma característica peculiar de (2+1) dimensões.

Portanto,

$$\tilde{F}^\mu = (-B, -E_y, E_x). \quad (1.14)$$

Após fixar-se $\nu = (0, i)$ na Eq. (1.8), ela pode — juntamente com a Eq. (1.9) — ser reescrita da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - mB = \rho \quad (1.15)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.16)$$

$$\vec{\nabla} B - m\vec{E} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1.17)$$

que são as equações de Maxwell-Chern-Simons (MCS), e onde foram usadas as seguintes

definições (\vec{v} é um 2-vetor qualquer):

$$\tilde{v}_i \equiv \epsilon_{ij} \vec{v}_j \Rightarrow \tilde{v} \perp \vec{v} \quad (1.18)$$

$$\tilde{\vec{E}}_i \equiv \epsilon_{ij} \vec{E}_j = -\tilde{F}^i = \tilde{F}_i \quad (1.19)$$

$$J^\mu \equiv (\rho, \vec{J}). \quad (1.20)$$

1.1.2 Equações de onda e graus de liberdade físicos

A partir de (1.8), pode-se usar $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e o calibre de Lorentz ($\partial_\mu A^\mu = 0$) para se obter a equação de onda para A^ν :

$$\square A^\nu + m\epsilon^{\nu\kappa\lambda} \partial_\kappa A_\lambda = J^\nu. \quad (1.21)$$

Fixando-se $\nu = (0, i)$, é possível escrever as equações acima em termos de Φ e de \vec{A} :

$$\square \Phi - m\vec{\nabla} \times \vec{A} = \rho \quad (1.22)$$

e

$$\square \vec{A} + m \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \Phi \right) = \vec{J}. \quad (1.23)$$

A fim de se obterem as equações de onda para \vec{E} e B , é suficiente aplicar $\partial/\partial t$ nas Eqs. (1.16) e (1.17) e usar as seguintes identidades: $\epsilon_{ij}\epsilon_{jk} = -\delta_{ik}$, $\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$. O resultado é:

$$(\square + m^2)\vec{E} = m\vec{J} - \vec{\nabla}\rho - \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad (1.24)$$

e

$$(\square + m^2)B = -m\rho + \vec{\nabla} \times \vec{J}. \quad (1.25)$$

Assim, o coeficiente m do termo de Chern-Simons representa a massa do campo de calibre após a sua quantização. Ela é chamada de *massa topológica*, pelas razões já apontadas e com mais detalhes na Ref. [1] e respectivas citações.

Das considerações acima, conclui-se que, enquanto em (3+1) dimensões $F_{\mu\nu}$ tem seis componentes, correspondentes a \vec{E} e a \vec{B} , em (2+1) dimensões, por sua vez, o campo de Maxwell (e de MCS) tem somente três graus de liberdade: dois para \vec{E} e um para B . Porém, apenas um destes é físico. De fato, considerando-se soluções de ondas planas, $(\vec{E}, B) = (\vec{E}_0, B_0) \exp i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$, no vácuo ($J^\nu = 0$), as equações de campo de MCS, Eqs. (1.15-1.16), conduzem a:

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} = mB \quad (1.26)$$

$$\tilde{k} \cdot \vec{E} = -\omega B, \quad (1.27)$$

as quais informam que: (i) em uma onda plana de MCS, o campo elétrico tem, como é usual, uma componente que é perpendicular à direção de propagação, mas também possui uma componente ao longo da mesma; (ii) existe uma diferença de fase de 90° entre o campo magnético, B , e a componente de \vec{E} ao longo da direção de propagação; (iii) ambas as componentes de \vec{E} são proporcionais a B , indicando que existe somente um grau de liberdade físico, correspondendo (por exemplo) a B . Além disso, das equações de onda pode-se obter a relação de dispersão

$$\vec{k}^2 = \omega^2 - m^2 \quad (1.28)$$

e, a partir da Eq. (1.17), é possível mostrar que

$$\vec{E} = -\frac{B}{\vec{k}^2}(\omega\tilde{k} + im\vec{k}), \quad (1.29)$$

o que confirma as observações (i–iii) acima. Finalmente, pode-se observar que, quando o parâmetro de CS tende a zero (ou, equivalentemente, quando a frequência (ou energia) do modo é alta, $\omega \gg m$), só resta a componente usual do campo elétrico. E vice-versa, ou seja, o termo de CS prevalece em baixas energias (o que já poderia ser visto diretamente do Lagrangeano, pois o termo de CS possui uma derivada a menos do que

o termo puro-Maxwell e, portanto, no domínio de frequências, está multiplicado por um fator de frequência a menos).

Pode-se verificar mais explicitamente as considerações acima tomando (digamos) a parte real das Eqs. (1.26–1.29) como correspondendo aos campos físicos. Neste processo, as quantidades constantes e uniformes \vec{E}_0 e B_0 serão consideradas como complexas. Uma abordagem mais geral seria tratar o vetor de onda \vec{k} como uma quantidade também complexa, o que nos conduziria à possibilidade de ondas planas inomogêneas; porém, isto não será feito aqui (o leitor interessado poderá consultar a Ref. [43, Cap.7]). As expressões resultantes são:

$$E_x = \frac{mB_0}{k} \sin(kx - \omega t) \quad (1.30)$$

$$E_y = \frac{\omega B_0}{k} \cos(kx - \omega t) \quad (1.31)$$

$$B = B_0 \cos(kx - \omega t), \quad (1.32)$$

onde, sem perda de generalidade, a quantidade B_0 foi considerada real e a direção de propagação \vec{k} foi tomada como paralela ao eixo x .

Outra questão importante, obviamente, é a energia conduzida por estas ondas planas, que pode ser representada pelo vetor de Poynting, \vec{S} . Como se sabe, a componente- i de \vec{S} é, por definição, igual à componente Θ^{0i} do tensor energia-momento simétrico, $\Theta^{\mu\nu}$. Porém, para a Lagrangeana de MCS, este tensor é exatamente igual ao de uma teoria puro-Maxwell, uma propriedade geral que surge se um termo topológico (como o de Chern-Simons) é acrescentado a uma densidade de Lagrangeana (em nosso caso, uma puro-Maxwell), na medida em que tal termo não se acopla a uma métrica externa $g^{\mu\nu}$: note-se que o termo de CS contém o tensor de Levi-Civita, $\epsilon_{\mu\nu\kappa}$, que é totalmente anti-simétrico, enquanto $g^{\mu\nu}$ é simétrico. Assim, a partir do bem-conhecido [43, Cap.12] tensor energia-momento de Maxwell,

$$\Theta^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda} F_{\lambda\kappa} F^{\kappa\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda},$$

obtem-se:

$$\vec{S} = \vec{E}B, \quad (1.33)$$

que é nada mais do que a natural versão (2+1)-dimensional da familiar expressão $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$. Porém, uma vez que agora existe uma componente longitudinal E_x não nula do campo elétrico, então \vec{S} não aponta sempre na direção de propagação, mas às vezes tem uma componente perpendicular a \vec{k} . A situação é resumida na Fig. 1.1, onde os vetores relevantes são mostrados em tempos diferentes, para o mesmo ponto fixo x . Fica evidente que uma parte da energia eletromagnética é conduzida ao longo da direção de propagação, mas existe uma quantidade de energia que oscila na direção transversal, y .

Pode-se verificar imediatamente a conservação da energia das ondas planas de MCS no vácuo, isto é, $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$, ou, equivalentemente, $\partial u / \partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$, onde u é a densidade de energia ou de Hamiltoniana,

$$u \equiv \Theta^{00} = (E^2 + B^2)/2. \quad (1.34)$$

Realmente, o uso direto de (1.30–1.32) e (1.28) conduz a:

$$u(x, t) = u_E(x, t) + u_B(x, t), \quad (1.35)$$

onde:

$$u_E(x, t) \equiv E^2/2 = (E_x^2 + E_y^2)/2 = \frac{B_0^2}{2} [(m/k)^2 + \cos^2(\phi_t)] \quad (1.36)$$

$$u_B(x, t) \equiv B^2/2 = \frac{B_0^2}{2} \cos^2(\phi_t), \quad (1.37)$$

com o símbolo ϕ_t significando $kx - \omega t$. Assim,

$$u(x, t) = \frac{B_0^2}{2} [(m/k)^2 + 2 \cos^2(\phi_t)]. \quad (1.38)$$

[Neste ponto, nota-se que, semelhantemente ao caso puro-Maxwell, os máximos e mínimos

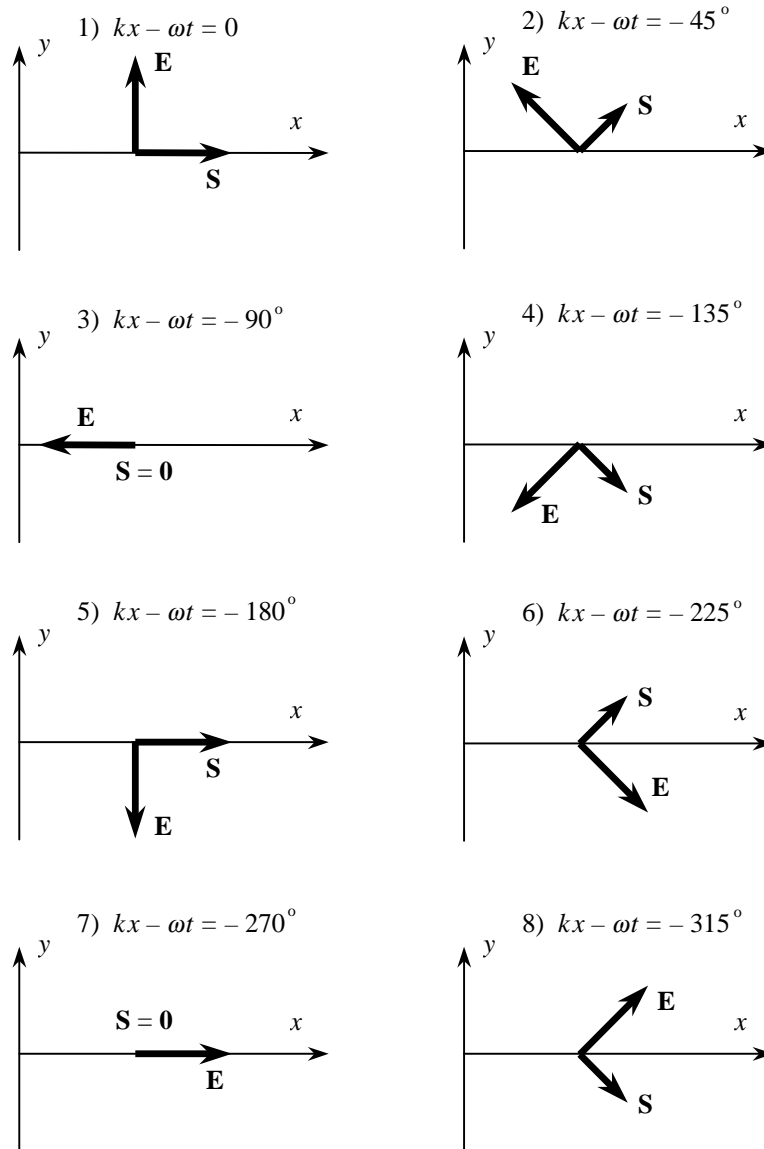


Figura 1.1: O vetor de Poynting \vec{S} e o campo elétrico \vec{E} de uma onda plana homogênea propagando-se ao longo da direção x , mostrados em diferentes instantes de tempo e numa posição fixa, x , do espaço. (Aqui, fez-se $\omega = m$; para $m/\omega \rightarrow 0$, conforme indicado no texto, as componentes y de \vec{S} e x de \vec{E} também vão tendendo a zero. E vice-versa.)

das energias elétrica e magnética acontecem simultaneamente, mas, por outro lado, a densidade de energia nunca é zero em um ponto fixo e as energias elétrica e magnética não são iguais entre si (por causa da componente longitudinal do campo elétrico).] De forma semelhante, o vetor de Poynting é dado por:

$$\vec{S}(x, t) = \frac{B_0^2}{k} [\omega \cos^2(\phi_t) \hat{x} - m \sin(\phi_t) \cos(\phi_t) \hat{y}], \quad (1.39)$$

com \hat{x} e \hat{y} representando os usuais vetores unitários cartesianos. (Nota-se que a componente y exibe a característica oscilatória já mostrada na Fig. 1.1.) Por fim, a relação de conservação de energia pode imediatamente ser conferida, por substituição direta.

A propagação de ondas no Eletromagnetismo de MCS exibe outras peculiaridades (como a reverberação de pulsos), as quais não serão exploradas aqui, mas que podem ser encontradas na Ref. [5].

1.1.3 Equações de Campo na forma integral

A fim de melhorar a intuição no eletromagnetismo de MCS, poderá ser útil a obtenção da versão integral das equações de campo de MCS, Eqs. (1.15–1.17), e as correspondentes condições de (des)continuidade para \vec{E} e B . Estes são os objetivos desta seção. Para clarear a influência de cada característica, será considerada, primeiro, uma situação de puro-Maxwell estático para, em seguida, incluir-se o termo topológico de CS e, finalmente, permitir-se que os campos variem com o tempo.

Depois da integração sobre uma área que inclui a região onde a densidade de carga localizada ρ é diferente de zero, a lei de Gauss (1.15), juntamente com $m = 0$ (somente por enquanto), dá:

$$\oint_C \vec{E} \cdot \hat{n} ds = q, \quad (1.40)$$

onde C é a curva fechada que delimita a área de integração (a *curva* gaussiana), q é a carga total dentro de C e \hat{n} é um vetor unitário normal exterior, que aponta para fora de C . Este resultado é bem conhecido e é simplesmente a versão (2+1)D da familiar

lei de Gauss. Pode-se ainda reescrever esta equação numa forma ainda mais familiar se for incluído um fator multiplicativo $1/\epsilon_0$ no membro direito, definindo-se deste modo as unidades electrostáticas do SI em (2+1) dimensões, ou o que poderia ser denominado de SI *planar*¹. Uma conseqüência importante é a correspondente lei de Coulomb (isto é, q sendo a carga puntiforme de uma partícula), que agora se escreve, em unidades SI planares,

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \hat{r}, \quad (1.41)$$

em vez da dependência $1/r^2$ de (3+1)D, um exemplo de um resultado geral de teoria de campos, que diz que as divergências são menos severas em dimensões mais baixas.

A Eq. (1.16) não precisa de uma versão integral, uma vez que, no caso estático com o qual se está lidando, ela pode ser substituída pela definição de um potencial escalar Φ tal que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$, da mesma maneira como se faz em (3+1)D.

A última equação de MCS, Eq. (1.17), ainda com o caso estático e com $m = 0$, é integrada sobre uma curva aberta C através da qual a densidade de corrente \vec{J} flui (ver Fig. 1.2a), resultando:

$$\int_C \vec{\nabla} B \cdot \hat{n} ds = I, \quad (1.42)$$

onde

$$I = \int_C \vec{J} \cdot \hat{n} ds$$

é a corrente total que flui pela curva C . A equação integral de MCS acima fica:

$$\int_C \left(\frac{\partial B}{\partial y}, -\frac{\partial B}{\partial x} \right) \cdot (n_x, n_y) ds = I,$$

e pode ser utilizada uma terceira dimensão auxiliar [ver Fig. 1.2b, onde $v = ds/dt$, e então $\hat{t} \equiv \vec{v}/v = v^{-1}(dx/dt, dy/dt) = (dx/ds, dy/ds)$, levando a $\hat{n} \equiv \hat{t} \times \hat{k} = (dy/ds, -dx/ds)$],

¹Nesta definição, nota-se que a unidade SI planar para a constante ϵ_0 é diferente da sua análoga em (3+1)D: $C^2 s^2/kg m^2$, em vez de $C^2 s^2/kg m^3$.

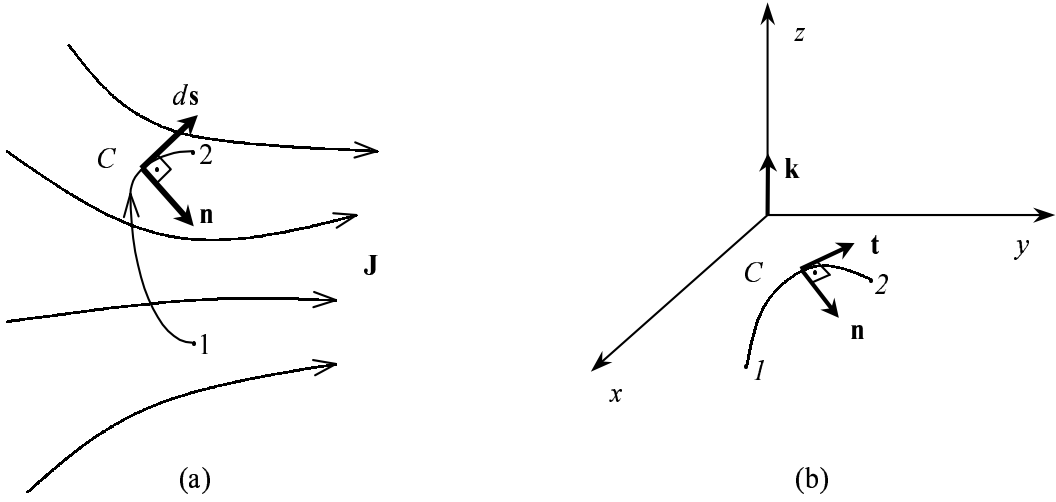


Figura 1.2: (a) Curva de integração C da Eq. (1.43). (b) A terceira dimensão auxiliar usada para se obter a Eq. (1.43).

para se obter:

$$\int_C \left(\frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy \right) = I,$$

ou:

$$B_2 - B_1 = I, \quad (1.43)$$

que é o análogo (2+1)D da lei de Ampère², B_2 (B_1) sendo o valor do campo magnético no fim (origem) da curva orientada C .

Resumindo, as equações de Maxwell estáticas em (2+1)D ficam conforme abaixo:

$$\oint_C \vec{E} \cdot \hat{n} ds = q \quad (1.44)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (1.45)$$

$$B_2 - B_1 = I. \quad (1.46)$$

Agora será incluída a massa topológica do fóton: é preciso integrar as Eqs. (1.15–1.17), semelhantemente ao que foi feito acima, mas agora não descartando mais os termos em

²Aqui, pode-se fazer uma observação análoga à última nota de rodapé, referente à lei de Gauss e à constante ϵ_0 : nota-se que a versão SI da lei de Ampère em (2+1)D deve ter um fator extra multiplicativo μ_0 em seu membro direito, o que leva à seguinte unidade para esta constante: kg/C^2 , em vez de kgm/C^2 , como ocorre com sua bem-conhecida correspondente em (3+1)D.

m. As equações estáticas de MCS que resultam são:

$$\oint_C \vec{E} \cdot \hat{n} ds = q + m\Phi_B \quad (1.47)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (1.48)$$

$$B_2 - B_1 = I + m \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (1.49)$$

A primeira equação, uma lei de Gauss modificada, mostra que é possível haver um fluxo elétrico líquido através de uma curva fechada, mesmo se $q = 0$. Além disso, pode-se mostrar que esta equação tem, num caso de puro-CS [isto é, sem o termo de Maxwell em (1.1)], um membro esquerdo nulo, dando origem a uma ligação entre carga elétrica, q , e fluxo magnético³, $\Phi_B \equiv \int B dx dy$, um resultado importante na descrição de anyons [6]. A última equação é uma lei de Ampère modificada, onde a diferença de potencial $\int_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Phi_1 - \Phi_2$ entre as extremidades da curva de integração C contribui para a diferença do valor do campo magnético B em tais pontos. Nota-se também que, para B uniforme, esta equação descreve o efeito Hall, pois relaciona a corrente com uma diferença de potencial elétrico transversal.

Finalmente, um cálculo semelhante conduz às equações integrais de MCS completas, isto é, válidas para $m \neq 0$ e em situações não necessariamente estáticas:

$$\oint_C \vec{E} \cdot \hat{n} ds = q + m\Phi_B \quad (1.50)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (1.51)$$

$$B_2 - B_1 = I + \frac{d\Phi_E}{dt} + m \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (1.52)$$

onde o fluxo elétrico $\Phi_E \equiv \int_C \vec{E} \cdot \hat{n} ds$ é através da linha aberta C , em vez de ser através

³Aqui, apesar da planaridade (em que B não é um vetor, mas sim um escalar) e do correspondente elétrico, onde o respectivo fluxo é definido por uma integral no comprimento (e não na área), será mantido, por tradição, o termo *fluxo* magnético.

de uma área. Estas equações, em unidades SI planares, ficam como segue:

$$\oint_C \vec{E} \cdot \hat{n} ds = \frac{q}{\epsilon_0} + \frac{mc^2}{\hbar} \Phi_B \quad (1.53)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (1.54)$$

$$B_2 - B_1 = \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_E}{dt} + \frac{m}{\hbar} \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (1.55)$$

onde a constante de Planck, \hbar , naturalmente ainda não possui significado quântico algum, desempenhando aqui meramente o papel de um fator de conversão (noutras palavras, poder-se-ia trabalhar com $\mu \equiv m/\hbar$).

A principal novidade nas equações de MCS, expressa pelos termos que contêm a massa m , é a possibilidade, no vácuo ($q = I = 0$), de o campo elétrico (magnético) ser produzido por um campo magnético (elétrico) estático, em contraste com o caso puro-Maxwell, onde um campo magnético (elétrico) *variável* seria necessário para tanto. Assim, o próprio conceito de carga elétrica é agora muito diferente do habitual, uma vez que não pode produzir só um campo elétrico mas também um magnético, e serão vistos alguns exemplos simples que ilustram tais propriedades. Por outro lado, como será visto na próxima seção, a força de Lorentz, que retrata como os campos agem numa carga elétrica, não é modificada pelo termo de CS e só o campo elétrico pode agir em uma carga em repouso, sendo necessária uma velocidade para que o campo magnético possa agir sobre ela, da mesma maneira que no caso habitual (puro-Maxwell), seja em (3+1)D ou (2+1)D.

Antes de terminar esta seção, serão obtidas as condições de continuidade para \vec{E} e B . A partir das equações integrais acima, considerando-se uma interface (uma curva) entre os dois meios (1) e (2), na qual existam uma densidade de carga linear λ e uma corrente i , pode-se construir um circuito de integração bem pequeno, C , como mostrado na Fig. 1.3a, para obter, respectivamente de (1.53) e (1.54), os seguintes resultados:

$$\hat{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \quad (1.56)$$

$$\tilde{\hat{n}} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0, \quad (1.57)$$

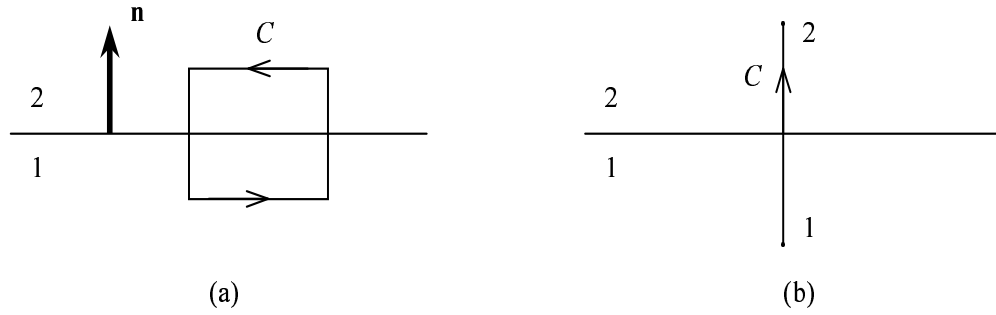


Figura 1.3: (a) Caminho de integração C usado para obter as Eqs. (1.56–1.57). (b) Caminho de integração C usado para obter a Eq. (1.58).

com a primeira (segunda) equação expressando a condição de continuidade para a componente normal (tangente) de \vec{E} . [Foi usada a identidade $\vec{a} \times \vec{b} = -\tilde{\vec{a}} \cdot \vec{b}$.] A equação correspondente para B é obtida da Eq. (1.53) e o circuito C da Fig. 1.3b:

$$B_2 - B_1 = \mu_0 I. \quad (1.58)$$

Nota-se que estas são as mesmas condições de continuidade para o caso puro-Maxwell, isto é, o termo de CS não desempenha nenhum papel aqui.

1.1.4 Força de Lorentz

Agora, a expressão para a força de Lorentz será deduzida. Será usado um procedimento semelhante ao que é feito na Ref. [44]: parte-se de um Lagrangeano total que é a soma dos seguintes Lagrangeanos parciais: um, referente aos campos, isto é, a integral espacial das duas primeiras parcelas da Eq. (1.1) e, o outro, correspondente a uma partícula de carga $-e$ e massa M :

$$L_{\text{total}} = L_{\text{campos}} + L, \quad (1.59)$$

onde

$$L = \frac{Mv^2}{2} - e\vec{A} \cdot \vec{v} + e\Phi, \quad (1.60)$$

\vec{v} sendo a velocidade da partícula e Φ e \vec{A} respectivamente os potenciais escalar e vetorial de MCS. Para obter as equações de movimento da partícula, basta considerar L . O

momento generalizado é

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = M\vec{v} - e\vec{A}. \quad (1.61)$$

As equações de Euler-Lagrange são $d/dt(\partial L/\partial \vec{v}) = \partial L/\partial \vec{x} \equiv \vec{\nabla}L$ e

$$\vec{\nabla}L = -e\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v}) + e\vec{\nabla}\Phi. \quad (1.62)$$

Mas⁴

$$[\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v})]_i = \partial_i(A_j v_j) = v_j \partial_i A_j$$

e

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + v_j \partial_j A_i,$$

de tal forma que as equações de Euler-Lagrange se tornam:

$$\frac{d(Mv_i)}{dt} = -eE_i - ev_j(\partial_i A_j - \partial_j A_i) = -eE_i - e\epsilon_{ij}v_j B, \quad (1.63)$$

onde as Eqs. (1.12) e (1.13) foram usadas. Por conseguinte, a expressão desejada para a força de Lorentz em (2+1)D é:

$$\frac{d(M\vec{v})}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v}B, \quad (1.64)$$

que pode ser vista como uma natural adaptação para (2+1)D da conhecida expressão em (3+1)D.

1.1.5 Condutividade de um gás de elétrons em (2+1)D

Nesta seção será obtida, em um caso puro-(2+1)D, a expressão do tensor de condutividade de um gás de elétrons, que revelar-se-á igual à encontrada, por exemplo, nas Refs. [45, 46, 10], onde se utiliza um enfoque (3+1)-dimensional, isto é, com a habitual fórmula para

⁴Daqui por diante nesta seção, A_i significa $(\vec{A})_i$.

a força de Lorentz. Ao contrário, aqui será usada a Eq. (1.64), de maneira a se obter a equação de movimento para um dos elétrons, que, portanto, é dada por:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v}B - \frac{\vec{p}}{\tau}, \quad (1.65)$$

onde $\vec{p} = m\vec{v}$ é o momento linear do elétron e τ é o tempo livre médio entre colisões com as imperfeições da rede.

Daqui em diante, o procedimento é idêntico ao que se faz nas referências mencionadas: toma-se a média de todas as equações idênticas à Eq. (1.65) acima (uma para cada elétron) — o que equivale a se reinterpretar a última equação como sendo agora referente a valores médios para o conjunto de elétrons — e considera-se uma configuração com densidade de corrente estacionária, $\vec{J} = -ne\vec{p}/M$ (n é a densidade superficial de elétrons), caso em que $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$. Depois de alguma álgebra simples, obtém-se:

$$\vec{E} = \rho\vec{J}, \quad (1.66)$$

onde o tensor resistividade ρ é dado pela fórmula usual:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_0 & \frac{B}{ne} \\ -\frac{B}{ne} & \rho_0 \end{pmatrix}, \quad (1.67)$$

com ρ_0 sendo definido por

$$\rho_0 = \frac{M}{ne^2\tau}.$$

Finalmente, obtém-se o tensor condutividade σ pela sua definição, $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, ou $\sigma = \rho^{-1}$:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c\tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ \omega_c\tau & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.68)$$

que, como já antecipado, é o mesmo e bem-conhecido resultado fornecido por uma abor-

dagem (3+1)D, e onde:

$$\sigma_0 = \rho_0^{-1}$$

e

$$\omega_c = \frac{eB}{M}$$

é a frequência de cíclotron.

1.2 Configurações básicas de carga e corrente no Eletromagnetismo de MCS

1.2.1 Carga puntiforme em repouso na origem

Substituindo na Eq. (1.25) as expressões para a densidade de carga e corrente de uma carga puntiforme q em repouso na origem, $\rho = q\delta^2(\vec{x})$ e $\vec{J} = \vec{0}$, tem-se:

$$(\nabla^2 - m^2)B = mq\delta^2(\vec{x}). \quad (1.69)$$

Da mesma forma, na Eq. (1.17), assumindo-se $\partial E/\partial t = 0$ (caso estático), obtém-se:

$$\vec{E} = \frac{\vec{\nabla}B}{m}. \quad (1.70)$$

Assim, é suficiente resolver a Eq. (1.69) para B , porque \vec{E} é diretamente obtido da Eq. (1.70). A solução da Eq. (1.69) é:

$$B(\vec{x}) = -\frac{mq}{2\pi}K_0(mr), \quad (1.71)$$

onde r é a coordenada radial (a distância medida a partir da carga puntiforme) e $K_0(mr)$ é conhecida como função de Bessel de ordem zero de argumento imaginário, que pode ser

definida por [47, Eq.3.754,2]:

$$K_0(mr) = \int_0^\infty \frac{\cos(mx) dx}{\sqrt{\beta^2 + x^2}}. \quad (1.72)$$

Conseqüentemente,

$$\vec{E}(\vec{x}) = \hat{r} \frac{mq}{2\pi} K_1(mr), \quad (1.73)$$

onde \hat{r} é o vetor unitário na direção radial e foi usada a seguinte identidade:

$$K_0'(u) = -K_1(u). \quad (1.74)$$

É interessante usar o comportamento assintótico de $K_0(mr)$ e $K_1(mr)$,

$$\lim_{z \rightarrow 0} K_0(z) = -\ln \frac{z}{2} + 1 \quad (1.75)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} K_1(z) = \frac{1}{z}, \quad (1.76)$$

para verificar que, no limite $m \rightarrow 0$, as expressões acima para $B(\vec{x})$ e $\vec{E}(\vec{x})$ se reduzem às do caso puro-Maxwell em (2+1)D, que são:

$$B(\vec{x}) = 0 \quad (1.77)$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \hat{r} \frac{q}{2\pi r}, \quad (1.78)$$

que diferem do resultado do Eletromagnetismo usual de (3+1)D, em que o campo elétrico possui a tradicional dependência em $1/r^2$, mas que correspondem à restrição ao plano xy da situação (3+1)-dimensional bem conhecida, de um fio estático ao longo do eixo z , uniformemente carregado.

1.2.2 Carga puntiforme em movimento uniforme

Agora, será considerado o caso de uma carga puntiforme em movimento uniforme com velocidade v ao longo da direção e sentido de y positivo. Da última seção, já se conhecem as

expressões para $\vec{E}(\vec{x})$ e $B(\vec{x})$ no sistema de coordenadas S' , fixo na partícula. Assim, para se obterem as expressões dos campos $\vec{E}(\vec{x})$ e $B(\vec{x})$ produzidos por esta mesma partícula no sistema de coordenadas S (“em repouso”), basta usar um “boost” de Lorentz ao longo da direção y , com velocidade $-v$. Mas, para isso, é necessário usar as quantidades covariantes de Lorentz $F_{\mu\nu}$ e \tilde{F}_μ , assim como as relações:

$$\vec{E}_i(\vec{x}, t) = F_{0i}(\vec{x}, t) \quad (1.79)$$

$$B(\vec{x}, t) = -\tilde{F}^0(\vec{x}, t). \quad (1.80)$$

O resultado é (para um ponto situado no eixo x , de maneira muito semelhante à Ref. [43, p. 427]):

$$B(x, 0, t) = \frac{\gamma m q}{2\pi} \left[-K_0(mr') - \frac{xvK_1(mr')}{r'} \right] \quad (1.81)$$

$$E_x(x, 0, t) = \frac{\gamma m q}{2\pi} \left[vK_0(mr') + \frac{xK_1(mr')}{r'} \right] \quad (1.82)$$

$$E_y(x, 0, t) = -\frac{\gamma m q}{2\pi} \frac{vtK_1(mr')}{r'}, \quad (1.83)$$

onde, como de costume, $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$, e:

$$r' = \sqrt{x^2 + (\gamma vt)^2}. \quad (1.84)$$

1.2.3 O capacitor de “placas” paralelas

Aqui, serão obtidos os análogos MCS das fórmulas bem conhecidas para o campo no interior de um capacitor com placas paralelas, onde a palavra “placa”, é claro, significa um segmento de linha reta em um mundo (2+1)D com o qual se está lidando aqui. Primeiramente, será obtida uma expressão para o campo gerado por apenas uma de tais “placas”, cuja carga será considerada como estando uniformemente distribuída ao longo de seu comprimento. Partindo da Eq. (1.25) e tomando a placa como estando situada ao

longo do eixo y , obtém-se:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - m^2\right) B(x) = m\rho(x), \quad (1.85)$$

onde $\vec{J} = \vec{0}$ e $\partial/\partial t = 0$ foram usados, como também $\partial/\partial y = 0$, devido à simetria da distribuição de carga. Mas, designando a densidade linear de carga da “placa” por λ , então $\rho(x) = \lambda\delta(x)$ e, portanto, $B(x)/m\lambda$ é a função de Green do operador $d^2/dx^2 - m^2$. Por meio de uma transformada de Fourier de x para k e de uma integração sobre o semicírculo superior (inferior) do plano complexo k , para x positivo (negativo), obtém-se:

$$B(x) = -\frac{\lambda}{2}e^{-m|x|}. \quad (1.86)$$

A partir deste resultado, pode-se usar a Eq. (1.17) para se obter o campo elétrico,

$$\vec{E} = \vec{\nabla}B \Rightarrow \vec{E} = (E_x, 0), \text{ onde } E_x = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\epsilon_0}e^{-mcx/\hbar} & , x > 0 \\ -\frac{\lambda}{2\epsilon_0}e^{mcx/\hbar} & , x < 0, \end{cases} \quad (1.87)$$

onde, agora, foram usadas as unidades do SI em (2+1)D.

Nota-se que, no limite $m \rightarrow 0$, a expressão acima para o campo elétrico reduz-se ao esperado, ou seja, $E = \lambda/2\epsilon_0$, que é o análogo em (2+1)D da bem conhecida expressão em (3+1)D puro-Maxwell, $E = \sigma/2\epsilon_0$. Por outro lado, não se pode concluir da Eq. (1.86) que, no mesmo limite, se tem $B = 0$, como seria esperado: para isso, é necessário partir diretamente das equações de campo, como por exemplo, a Eq. (1.52), que, sob as condições deste problema, possui membro direito nulo se $m = 0$, independentemente de onde estejam os pontos (1) e (2) (ao contrário do que ocorre no caso $m \neq 0$); ou seja, o campo magnético B é uniforme. Que ele vale zero, conclui-se pelo simples fato de o mesmo não possuir fontes, em argumento exatamente igual ao que se faz no Eletromagnetismo usual de (3+1) dimensões, ao se aplicar a Lei de Ampère a uma situação estática e sem corrente.

Sejam agora duas placas idênticas à considerada acima, dispostas paralelamente e separadas por uma distância d , com cargas iguais e opostas. Então, os campos elétrico

e magnético gerados pelas duas placas no espaço entre elas são dados pelas respectivas somas algébricas,

$$E_x = \frac{qe^{-mcd/2\hbar}}{\epsilon_0\ell} \cosh(mcx/\hbar) \quad (1.88)$$

$$B = \frac{c\mu_0qe^{-mcd/2\hbar}}{\ell} \sinh(mcx/\hbar), \quad (1.89)$$

onde a placa positiva (negativa) foi considerada como estando na posição $x = -d/2$ ($x = +d/2$) e a relação $c^2\epsilon_0\mu_0 = 1$ foi usada⁵, como também a suposição usual de que efeitos de borda não são relevantes (ou seja, o comprimento da placa, ℓ , é muito maior do que d , e $q = \lambda\ell$).

Pode-se definir uma quantidade chamada capacitância, definida pela relação usual $C = q/V$, onde V é a diferença de potencial entre as placas. Além disso, pode-se argumentar que a presença do campo B enseje a possibilidade de se definir também uma indutância, L' , para o mesmo objeto, mas é preciso lembrar que não há corrente i alguma que permita a definição usual $L' = \Phi_B/i$. Talvez seja possível definir outro tipo de indutância, digamos, $L'' = \Phi_B/q$, já que agora o campo magnético é gerado pela carga q , em vez de por uma corrente i . No entanto, não se adotará tal procedimento aqui.

Assim, a capacitância C pode ser encontrada do modo padrão: a partir da expressão para o campo elétrico acima, deduz-se a diferença de potencial V entre as placas por meio de $V = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s}$ e então utiliza-se a definição $C = q/V$. O resultado é:

$$C = \frac{mc\epsilon_0\ell}{\hbar} \left(1 - e^{-mcd/\hbar}\right), \quad (1.90)$$

do qual se pode concluir que a influência da massa do fóton, m , é no sentido de aumentar a capacitância.

É importante ressaltar que, se tivesse sido considerado $m \rightarrow 0$ na expressão da

⁵Esta relação permanece válida no presente modelo (2+1)-dimensional, uma vez que ela emerge naturalmente quando se escrevem as equações de onda (1.24) e (1.25) em unidades SI planares, e é, como no bem-conhecido caso de Maxwell em (3+1)D, simplesmente a definição da velocidade da onda eletromagnética.

Eq. (1.88) para o campo elétrico, o resultado seria $C = \epsilon_0 \ell / d (1 - mcd/2\hbar)$, que se torna $C = \epsilon_0 \ell / d$ quando $m = 0$, que é o resultado esperado, na medida em que é o mesmo do Eletromagnetismo de puro-Maxwell em (2+1)D, no qual $E = \lambda/\epsilon_0$, sendo tais relações as análogas às bem conhecidas relações em (3+1)D, $E = \sigma/\epsilon_0$ e $C = \epsilon_0 A/d$. Finalmente, nota-se que, por causa das diferentes unidades de ϵ_0 em (2+1)D, não se tem $C = \epsilon_0 \times$ (uma distância), mas sim $C = \epsilon_0 \times$ (uma quantidade adimensional).

Das Eqs. (1.34), (1.88) e (1.89), obtém-se a densidade de energia *total* dentro do capacitor:

$$u(x) = \frac{q^2}{2\epsilon_0 \ell^2} e^{-mcd/\hbar} \cosh 2mcx/\hbar. \quad (1.91)$$

Nota-se que, no caso $m = 0$, esta expressão, como esperado, se torna $u = q^2/2\epsilon_0 \ell^2 = (q^2/2C)/\ell d = U/\ell d$, onde $U = \int dx dy u = q^2/2C$, correspondendo somente à parcela *eletrostática* da energia no interior do capacitor, pois agora $B = 0$, já que a ausência do termo de CS não permite mais que uma carga elétrica produza um campo magnético.

1.2.4 Um fio com corrente estacionária

Nesta seção serão obtidos os campos elétrico e magnético de MCS produzidos por uma configuração que consiste em uma corrente estacionária I na direção y , ou seja,

$$\rho = 0 \quad (1.92)$$

$$\vec{J} = I\delta(x)\hat{y}. \quad (1.93)$$

Como em (3+1)D, será admitido que $\partial\vec{E}/\partial t = \vec{0}$ e $\partial B/\partial t = 0$. As equações de MCS, Eqs. (1.15–1.17), são, portanto,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = mB \quad (1.94)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (1.95)$$

$$\vec{\nabla} B - m\vec{E} = \vec{J}, \quad (1.96)$$

podendo-se obter B a partir da primeira equação, desde que se tenha resolvido a equação de onda para \vec{E} , Eq. (1.24):

$$(\nabla^2 - m^2)\vec{E} = -m\vec{J}, \quad (1.97)$$

que, neste caso, é o mesmo que substituir $B = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}/m$ na Eq. (1.96). Esta equação — considerando que $\partial\vec{E}/\partial y = \vec{0}$, devido à simetria da configuração — conduz a:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - m^2\right)E_x(x) = -mI\delta(x) \quad (1.98)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - m^2\right)E_y(x) = 0. \quad (1.99)$$

A solução geral para a segunda equação acima é $E_y(x) = Ae^{mx} + A'e^{-mx}$, onde, por razões físicas, as constantes A e A' anulam-se respectivamente para $x > 0$ e $x < 0$, levando a $E_y(x) = A'e^{-mx}$ para $x > 0$ e $E_y(x) = Ae^{mx}$ para $x < 0$. Mas $|A| = |A'|$, por simetria. Além disso, a Eq. (1.95) estabelece que $\partial_x E_y = \partial_y E_x = 0$, isto é, $\pm m|A|e^{\pm mx} = 0 \Rightarrow |A| = 0$ e, finalmente,

$$E_y(x) = 0. \quad (1.100)$$

Agora, só resta resolver a equação para $E_x(x)$, o que pode ser feito por meio de uma transformada de Fourier de x para k e de uma integração sobre o semicírculo superior (inferior) do plano complexo k , para x positivo (negativo). O resultado é:

$$E_x(x) = \begin{cases} \frac{I}{2}e^{-mx} & , x \geq 0 \\ \frac{I}{2}e^{mx} & , x < 0, \end{cases} \quad (1.101)$$

ou, equivalentemente,

$$E_x(x) = \frac{I}{2}e^{-m|x|}. \quad (1.102)$$

Portanto, o campo magnético é

$$B(x) = \begin{cases} -\frac{I}{2}e^{-mx} & , x \geq 0 \\ \frac{I}{2}e^{mx} & , x < 0, \end{cases} \quad (1.103)$$

que corresponde, no limite $m \rightarrow 0$, à restrição ao plano xy da situação (3+1)-dimensional em que a corrente I está ao longo do plano yz : pelo Eletromagnetismo usual, tal configuração, de fato, fornece um campo magnético uniforme e apontando no sentido $+z$ ($-z$) no semiplano esquerdo (direito) do plano xy .

Uma outra forma, mais simples, de se obterem os resultados acima para $E_x(x)$ e $B(x)$ é proceder semelhantemente ao que foi feito acima com E_y : das soluções físicas gerais da Eq. (1.98), ou seja⁶, $E_x(x) = Ae^{-mx}$ para $x > 0$ e $E_x(x) = Ae^{mx}$ para $x < 0$, conclui-se que $B = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}/m = -Ae^{-mx}$ para $x > 0$ e $B = Ae^{mx}$ para $x < 0$. Finalmente, o valor $A = I/2$ pode ser obtido por meio da condição de continuidade para B , Eq. (1.58).

Neste ponto, é oportuno introduzir a expressão para a força entre dois fios paralelos e a lei de Biot-Savart, o que será feito primeiramente em puro-Maxwell e, depois, em um contexto de MCS. No primeiro caso, usando a lei integral de Ampère em unidades SI planares, Eq. (1.43), e também a relação de simetria $|B(0^+)| = |B(0^-)|$, conclui-se que o campo magnético gerado pelo fio é dado por:

$$B = \mu_0 I/2 \text{ para } x < 0 \quad (1.104)$$

$$B = -\mu_0 I/2 \text{ para } x > 0. \quad (1.105)$$

Assim, é de se esperar que a lei de Biot-Savart em um Eletromagnetismo (2+1)D puro-Maxwell seja dada pela expressão

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^2}, \quad (1.106)$$

já que, para o fio retilíneo infinito com corrente I , e depois de uma apropriada integração sobre todos os elementos de corrente do fio, esta expressão se torna justamente o resultado acima, Eqs. (1.104–1.105). Portanto, a força por unidade de comprimento entre dois fios

⁶“A priori”, uma outra possibilidade seria $E_x(x) = Ae^{-mx}$ para $x > 0$ e $E_x(x) = -Ae^{mx}$ para $x < 0$, mas, devido à Eq. (1.56), isto implicaria a existência de uma concentração de carga ao longo do fio, o que não é verdade.

paralelos a e b , $\vec{F}_{ab}/\ell = I_b \vec{\ell}_b B_a/\ell$, com B_a dado pelas Eqs. (1.104–1.105), é:

$$\frac{\vec{F}_{ab}}{\ell} = \frac{\mu_0 I_a I_b}{2} \hat{x}, \quad (1.107)$$

que mostra ser independente da distância d entre os fios, em contraste com a bem-conhecida dependência em $1/d$ de fios em (3+1)D, mas semelhante à força entre duas placas infinitas em (3+1)D, como esperado, pois, com um apropriado “boost” de Lorentz, os fios com correntes paralelas se tornam duas “placas” carregadas.

No caso de MCS (ou seja, $m \neq 0$), também vale $\vec{F}_{ab} = I_b \vec{\ell}_b B_a$, pois isto nada mais é do que uma variante da força de Lorentz, que já foi mostrada como sendo independente de m . Contudo, B_a é agora dado pela Eq. (1.103) e portanto a força entre os fios é:

$$\frac{F_{ab}}{\ell} = \frac{\mu_0 I_a I_b}{2} e^{-md}, \quad (1.108)$$

onde d é a distância entre os fios.

Uma pequena observação: em (2+1)D (puro-Maxwell ou MCS), o campo B produzido pelo fio não é infinito nele, ao contrário do caso em (3+1)D, onde o mesmo diverge com $1/x$. No entanto, a mais correta comparação se dá conforme o comentário logo após a Eq. (1.103), onde se evidenciou que o verdadeiro análogo (3+1)-dimensional do fio aqui estudado é uma corrente ao longo do plano yz . Por outro lado, o verdadeiro equivalente ao fio (3+1)-dimensional (cuja dimensão é $1 = 3 - 2$) seria, analogamente, uma variedade com dimensão igual a $2 - 2 = 0$, ou seja, algo ineficaz para uma corrente, mas que, no entanto, é possível no caso de uma *carga* (puntiforme), para a qual já foi visto, pelas Eqs. (1.71) e (1.75), que, de fato, o campo B diverge sobre a carga.

Capítulo 2

Algumas Configurações Especiais do Eletromagnetismo de MCS

No presente Capítulo, estudam-se, nas duas primeiras seções: (i) o análogo, em $(2+1)D$, do solenóide (distribuição de corrente que produz um campo magnético uniforme) e (ii) os campos produzidos por uma distribuição de corrente inspirada numa amostra de Efeito Hall, isto é, uma fita com corrente (que, para simplificação da análise, é considerada como estando uniformemente distribuída pela largura da fita). No caso (i), mostra-se que, no eletromagnetismo de MCS, uma situação estacionária com campo magnético uniforme é impossível (no vácuo); porém, o que mais se aproxima de tal situação é a configuração de dois fios retos e infinitos, paralelos, com correntes em sentidos opostos. Com relação ao caso (ii), consegue-se obter uma solução analítica para os campos produzidos pela corrente na fita. Além disso, constata-se uma interessante relação com o Efeito Hall Radial usual de $(3+1)D$. Finalmente, estudam-se as Dinâmicas Clássica e Quântica de um elétron submetido aos campos produzidos por tais configurações, obtendo-se com certa facilidade as soluções para o primeiro caso e encontrando-se algumas dificuldades,

ainda não superadas, no segundo.

2.1 Dois fios com correntes estacionárias em sentidos opostos

Aqui será estudado o caso de dois fios condutores retilíneos paralelos, separados por uma distância $2L$, com correntes elétricas em sentidos opostos, e ambas iguais a I . Sejam os fios paralelos ao eixo y , com a corrente no sentido negativo de y localizada em $x = -L$ e a outra, em $x = L$. Assim, existem três regiões distintas, como pode ser visto na Fig. 2.1: (I) $x < -L$; (II) $-L \leq x \leq L$; e (III) $x > L$. O interesse nesta configuração justifica-se pelo fato de ela corresponder, no eletromagnetismo puro-Maxwell em (2+1)D, ao protótipo mais simples de um indutor, desempenhando o mesmo importante papel que um solenóide em (3+1)D. Realmente, se forem somadas as contribuições ao campo B geradas por cada fio, dadas pelas Eqs. (1.104–1.105), obtêm-se $B = \mu_0 I =$ uniforme entre os fios e $B = 0$ nas regiões (I) e (III). A indutância é determinada pela definição usual, $L' \equiv \Phi_B/I$:

$$L' = \frac{B \cdot 2L\ell}{I} = \mu_0 A, \quad (2.1)$$

onde $A = 2L\ell$ é a área do indutor, com seu comprimento ℓ sendo considerado como muito maior do que a distância $2L$ entre os fios. Semelhantemente ao que já aconteceu com a relação entre a capacitância e a constante ϵ_0 , as diferentes dimensões de μ_0 em (2+1)D conduzem a $L' = \mu_0 \times$ (uma área), em vez da relação usual em (3+1)D, $L' = \mu_0 \times$ (uma distância).

Retornando agora para o caso MCS e considerando a região (II), entre os fios: das Eqs. (1.102) e (1.103), são conhecidas as expressões para os campos \vec{E} e B produzidos por cada fio. Somando as contribuições dos dois fios, obtêm-se, para a região entre eles,

$$\vec{E} = Ie^{-mL} \sinh mx \hat{x} \quad (2.2)$$

$$B = Ie^{-mL} \cosh mx, \quad (2.3)$$

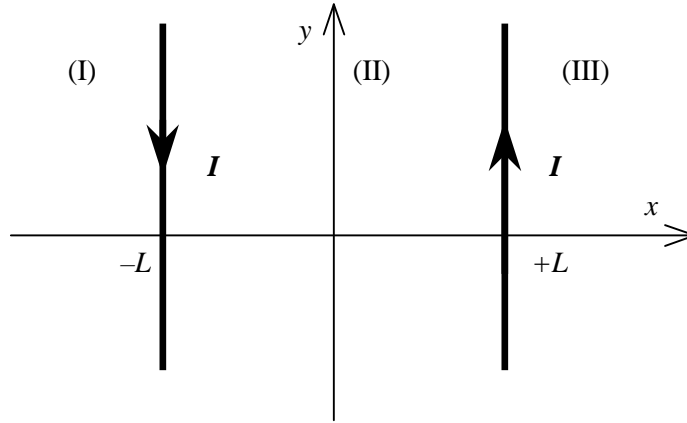


Figura 2.1: As três regiões determinadas por 2 fios paralelos com correntes em sentidos opostos ao longo da direção y .

onde \hat{x} é o vetor unitário na direção x .

Algumas considerações sobre o valor da massa do fóton, m , tornam-se oportunas agora¹. Se o Eletromagnetismo de MCS for aplicado a supercondutores planares (como já se sabe serem os supercondutores de alta temperatura crítica), então, ao se comparar a Eq. (1.25) com a que se obtém a partir das equações de London para a supercondutividade [3] (de fato, tais equações são idênticas), pode-se concluir que vale a relação $m = \hbar/\lambda c$, onde λ é a profundidade de penetração (do campo magnético), cujos valores, de acordo com experiências no Efeito Meissner [3], são da ordem de $\lambda \approx 10^{-8} \sim 10^{-6}$ metros, conduzindo a $m/M \approx 10^{-6} \sim 10^{-4}$, sendo M a massa do elétron. Por outro lado, se a Eletrodinâmica de MCS for usada para descrever uma outra realização bem conhecida da física planar, que é o Efeito Hall Quântico, então o parâmetro m é, “a priori”, livre. Mas, neste último caso, por se tratar de material não supercondutor, não há Efeito Meissner, o que equivale a se ter λ muito maior (ou m muito menor) do que no caso de um supercondutor. Portanto, em ambos os casos, é lícito desprezar termos de segunda ordem em mx e/ou em mL , isto é, $mL \ll 1$ (no caso do supercondutor, esta última relação equivale a se considerar $L \ll 300 \text{ \AA}$, ou seja, uma estrutura nanoscópica).

¹Lembrar da observação feita na Introdução, a respeito de como se devem interpretar corretamente as comparações com dados experimentais nesta tese.

Conseqüentemente, as Eqs. (2.2–2.3) podem ser aproximadas para:

$$\vec{E} = Imx \hat{x} \quad (2.4)$$

$$B = I(1 - mL), \quad (2.5)$$

ou, em unidades SI planares,

$$\vec{E} = \frac{c^2 \mu_0}{\hbar} Imx \hat{x} \quad (2.6)$$

$$B = \mu_0 I(1 - mLc/\hbar). \quad (2.7)$$

Note-se que o campo magnético, nesta aproximação, volta a ser uniforme, como em puro-Maxwell, só que com um valor ligeiramente menor do que $\mu_0 I$ (da analogia com o solenóide em (3+1)D, mencionada acima, e assumindo, como de resto, em toda esta tese, que $m > 0$).

2.1.1 Um elétron entre os fios (Mecânica Clássica)

Se uma partícula de massa M e carga elétrica q ($q = -e$ para um elétron) é colocada entre os fios, ela será submetida à força de Lorentz, Eq. (1.64) e, portanto, as equações de movimento de Euler-Lagrange para esta partícula são (assumindo as aproximações apresentadas no final da última seção):

$$M\ddot{x} = qImx + qB\dot{y} \quad (2.8)$$

$$M\ddot{y} = -qB\dot{x}, \quad (2.9)$$

onde, como já destacado na Eq. (2.5), $B = I(1 - mL)$. As soluções são:

$$x(t) = -\frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) + C \quad (2.10)$$

$$y(t) = \frac{qv_0 B}{M\omega^2} \sin(\omega t + \varphi) - \left(\frac{ImC}{B}\right)t + D, \quad (2.11)$$

onde v_0 , φ , C e D são constantes de integração e:

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{qB}{M}\right)^2 - \frac{qIm}{M}}, \quad (2.12)$$

ou, em unidades SI em (2+1)D,

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{qB}{M}\right)^2 - \frac{qImc^2\mu_0}{M\hbar}}, \quad (2.13)$$

que sempre é uma quantidade bem definida, no sentido de que $\omega^2 > 0$, uma vez que só será considerado o caso de um elétron², $q = -e$.

É interessante notar que, no limite $m \rightarrow 0$, as soluções acima são as mesmas que se esperam numa teoria puro-Maxwell em (2+1)D, com $\omega = \omega_c \equiv |qB|/M =$ frequência de ciclotron, e a partícula movendo-se com velocidade de módulo constante $v = v_0$ em uma trajetória circular de raio $R = v/\omega_c = Mv/|qB|$, como de costume. Por exemplo, fixando $\varphi = C = D = 0$, um elétron se move em sentido anti-horário em um círculo centrado na origem, com velocidade constante v_0 . Porém, quando se leva em conta a massa do fóton, a principal característica nova é o segundo termo na equação para $y(t)$ acima, o que significa que existe uma velocidade de arrasto $v_d = -ImC/B$, perpendicular ao campo elétrico. Então, o efeito da massa do fóton é induzir uma condutividade transversal, também chamada de condutividade Hall. (Na realidade, na abordagem topológica do Efeito Hall Quântico [48], a massa de Chern-Simons é proporcional à condutividade Hall, quando um potencial periódico é considerado.)

Finalmente, é preciso notar que, embora a massa do fóton, m , tenha sido considerada tão pequena a ponto de os campos elétrico e magnético serem dados pelas Eqs. (2.4–2.7), isto não permite que se conclua (incorretamente) que $\omega \approx \omega_c$, uma vez que, neste caso, a Eq. (2.13) e $B \approx \mu_0 I$ implicariam um valor infactível para a corrente I , de

²Uma situação simétrica a esta ocorre quando $q > 0$ e as correntes da Fig. 2.1 estão invertidas. As outras situações (isto é, $q > 0$ e as correntes como na Fig. 2.1 ou $q < 0$ e as correntes invertidas na referida figura) permitem a possibilidade de $\omega^2 < 0$, o que significa soluções para $x(t)$ e $y(t)$ que são exponenciais decrescentes com o tempo em vez de funções harmônicas. Tais casos não serão estudados aqui.

aproximadamente 10^{11} ampères! Pelo contrário, a conclusão correta é que, para valores razoáveis de I , necessariamente se tem $\omega \gg \omega_c$.

Agora, será estudada a possibilidade de a partícula carregada considerada nesta seção estar limitada à região entre os fios. Começando com as equações de movimento da partícula, Eqs. (2.10) e (2.11), e lembrando que as constantes de integração são relacionadas a uma escolha particular das condições iniciais, será considerado, por exemplo, que $x(0) = y(0) = 0$. Neste caso, aquelas equações levam a:

$$C = \frac{v_0}{\omega} \cos \varphi \quad (2.14)$$

$$D = -\frac{qv_0 B}{M\omega^2} \sin \varphi. \quad (2.15)$$

As velocidades iniciais também devem ser especificadas, e será escolhido $\dot{x}(0) = 0$, o que conduz a $v_0 \sin \varphi = 0$, por causa da derivada da Eq. (2.10). Então, esta escolha é equivalente a $\varphi = 0$. Assim, as Eqs. (2.14) e (2.15) acima se tornam:

$$C = \frac{v_0}{\omega} \quad (2.16)$$

$$D = 0. \quad (2.17)$$

A componente y da velocidade inicial é, portanto,

$$\dot{y}(0) = -\frac{v_0}{\omega} \left(\frac{eB}{M} + \frac{Im}{B} \right), \quad (2.18)$$

ou, em unidades SI em (2+1)D,

$$\dot{y}(0) = -\frac{v_0}{\omega} \left(\frac{eB}{M} + \frac{\mu_0 c^2}{\hbar} \frac{Im}{B} \right) \equiv -v_0 \frac{\bar{\omega}}{\omega} \equiv -\bar{v}_0. \quad (2.19)$$

Usando $B > 0$, pode-se imediatamente verificar que

$$\omega^2 = \omega_c \bar{\omega}. \quad (2.20)$$

Contudo, ainda não foi escolhido o valor de $\dot{y}(0)$. Se for fixado $\dot{y}(0) = 0$, a constante v_0 é zero e as soluções são triviais, $x(t) = y(t) = 0$, como no modelo em (3+1)D. É mais interessante considerar o caso em que a partícula tem uma velocidade inicial finita na direção y , por exemplo, $\dot{y}(0) = -\bar{v}_0 < 0$ (ou seja, a constante de integração v_0 foi escolhida como sendo positiva e \bar{v}_0 é o módulo da velocidade inicial), de forma que as equações de movimento são:

$$x(t) = -\frac{\bar{v}_0\omega_c}{\omega^2}(\cos\omega t - 1) \quad (2.21)$$

$$y(t) = -\frac{\bar{v}_0\omega_c}{\omega^2}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\sin\omega t + \frac{Im}{B}t\right), \quad (2.22)$$

que conduzem a

$$\dot{x}(t) = \frac{\bar{v}_0\omega_c}{\omega}\sin\omega t \quad (2.23)$$

$$\dot{y}(t) = -\frac{\bar{v}_0\omega_c}{\omega^2}\left(\omega_c\cos\omega t + \frac{Im}{B}\right), \quad (2.24)$$

de tal forma que a velocidade v num instante arbitrário t é

$$v^2(t) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(\frac{\bar{v}_0\omega_c}{\omega^2}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{Im}{B}\right)^2 + \frac{2\omega_c Im}{B}\cos\omega t + (\omega^2 - \omega_c^2)\sin^2\omega t\right], \quad (2.25)$$

que não é uma constante, a menos que $m = 0$ (caso puro-Maxwell, já mencionado acima).

A fim de encontrar a condição para o confinamento da partícula entre os fios, primeiramente serão verificados os valores máximo e mínimo da coordenada x :

$$x_{max} = 2\bar{v}_0\omega_c/\omega^2 \quad (2.26)$$

$$x_{min} = 0. \quad (2.27)$$

Para haver confinamento, é necessário que $x_{max} < L$, ou

$$\bar{v}_0 < L\omega^2/2\omega_c = L\bar{\omega}/2. \quad (2.28)$$

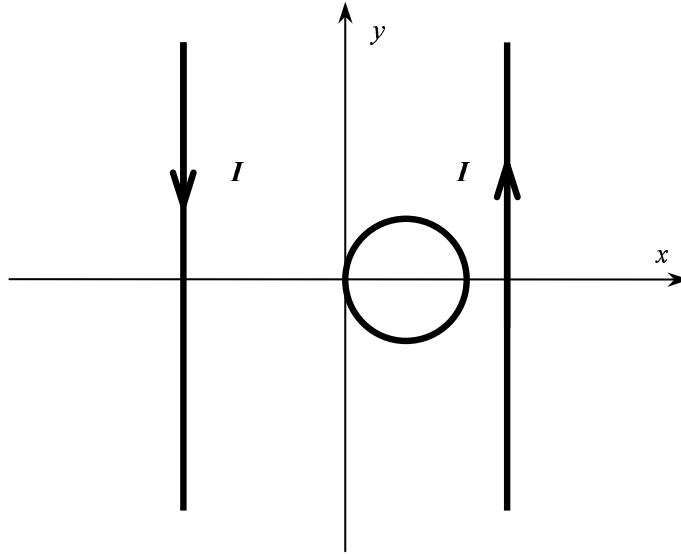


Figura 2.2: Trajetória de um elétron confinado entre os fios.

Usando $B \approx \mu_0 I$, $m \approx 10^{-5} M$ (devido à discussão que se segue à Eq. (2.3)), pode-se estimar a ordem de grandeza da constante $\bar{\omega}$. Em unidades SI planares, o resultado é:

$$\bar{\omega} \approx 10^5 I + 10^{16} \approx 10^{16}, \quad (2.29)$$

onde, no último passo, consideraram-se somente valores realísticos para a corrente, isto é, $I \ll 10^{11}$. Finalmente, usa-se a condição $L \ll 300 \text{ \AA}$, obtida no fim da última seção, para se calcular a ordem de grandeza da velocidade inicial \bar{v}_0 , a fim de que a partícula esteja confinada entre os fios:

$$\bar{v}_0 < 10^8 \text{ m/s}, \quad (2.30)$$

condição esta que é necessariamente satisfeita, ao menos na medida em que a teoria da relatividade permaneça válida! A trajetória do elétron confinado, com as condições iniciais consideradas aqui, está esquematicamente representada na Fig. 2.2. É claro que, se o elétron não é submetido a estas mesmas condições iniciais, ele não estará necessariamente confinado.

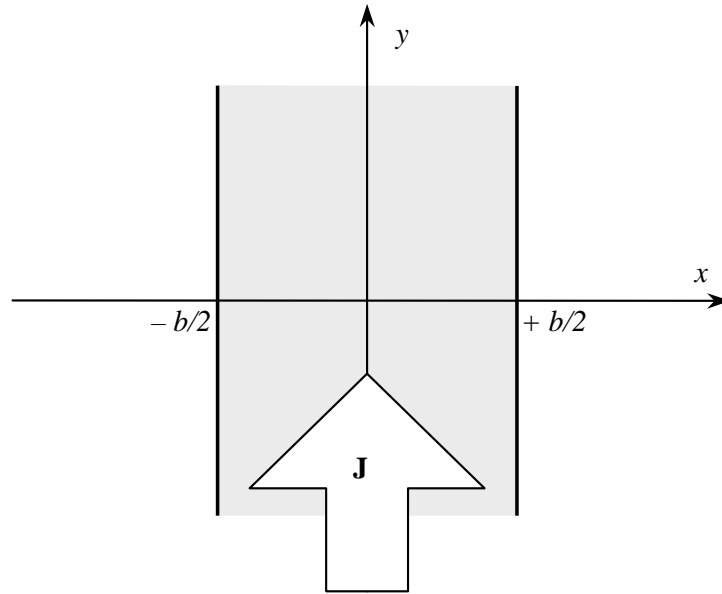


Figura 2.3: Uma fita condutora infinita, de largura b , percorrida por uma corrente elétrica estacionária I na direção do eixo y (positivo), uniformemente distribuída pela sua largura.

2.2 Uma fita condutora com uma corrente estacionária uniformemente distribuída

Nesta seção será considerada uma fita de largura b , percorrida por uma corrente elétrica estacionária I ao longo de seu comprimento infinito, que será escolhido como sendo paralelo ao eixo y , que por sua vez coincide com o eixo de simetria da fita (ver Fig. 2.3). Será estudado primeiramente o caso puro-Maxwell ($m = 0$) e só depois o caso de MCS ($m \neq 0$).

2.2.1 O caso puro-Maxwell ($m = 0$)

As equações de campo são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.31)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (2.32)$$

$$\vec{\nabla} B = \vec{J}, \quad (2.33)$$

onde $\vec{J} = \frac{I}{b}\hat{y}$ para $-b/2 < x < b/2$ e $\vec{J} = \vec{0}$ para os demais valores de x , com \hat{y} sendo o vetor unitário na direção y .

Devido à simetria da configuração, não há razão alguma para \vec{E} nem B dependerem de y , e portanto será considerado $\partial/\partial y = 0$ e $\partial/\partial x = d/dx$ (uma vez que o sistema é estacionário, isto é, também vale $\partial/\partial t = 0$). Considerando primeiro a região no interior da fita, $-b/2 < x < b/2$, as três equações acima fornecem, respectivamente,

$$E_x = C \quad (2.34)$$

$$E_y = C' \quad (2.35)$$

$$B = -Ix/b + C'', \quad (2.36)$$

onde os C 's são constantes de integração. A fim de que $|B(0^+)| = |B(0^-)|$ (devido à simetria da configuração), deve-se fazer $C'' = 0$.

Para a região externa à fita, $x < -b/2$ e $x > b/2$, procede-se de forma análoga para obter:

$$E_x = K \quad (2.37)$$

$$E_y = K' \quad (2.38)$$

$$B = K'', \quad (2.39)$$

onde os K 's também são constantes de integração. Agora, usam-se as condições de continuidade, Eqs. (1.56–1.58), para se deduzirem as seguintes relações:

$$K = C \quad (2.40)$$

$$K' = C' \quad (2.41)$$

$$K'' = -I/2 \text{ para } x > +b/2 \quad (2.42)$$

$$K'' = +I/2 \text{ para } x < -b/2, \quad (2.43)$$

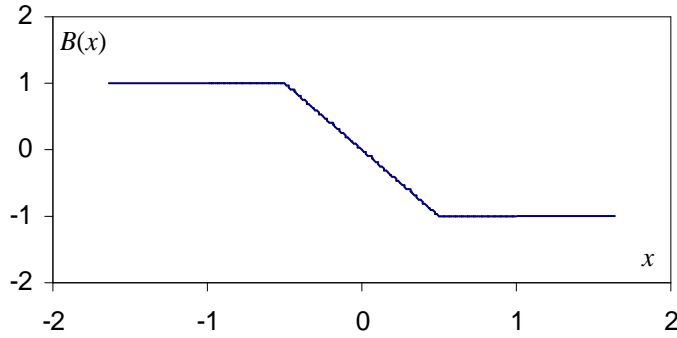


Figura 2.4: O campo magnético B produzido pela corrente I uniformemente distribuída pela largura b da fita, no caso puro-Maxwell ($m = 0$), no qual o campo elétrico produzido pela corrente é zero, como no Eletromagnetismo usual. (Fez-se $b = 1$ e $I = 2$.)

onde assumiu-se a ausência de distribuições de carga e/ou corrente nas bordas, de acordo com a hipótese de que $J = I/b =$ uniforme no interior da fita.

Assim, percebe-se que o valor de C , a componente x do campo elétrico, pode ser, a princípio, diferente de zero. É costume considerar-se $C = 0$, uma vez que não há carga (as fontes de \vec{E}). No entanto, poderia existir uma distribuição de carga no infinito fornecendo o campo elétrico uniforme $E_x = C$. Apesar destas considerações, aqui será feita apenas a escolha padrão, $C = 0$. Com relação à componente y , os mesmos argumentos podem ser usados e, portanto, será escolhido $C' = 0$. Tem-se, então, apenas um campo magnético, dado por

$$B(x) = -Ix/b, \quad (2.44)$$

estando os resultados coletados na Fig. 2.4.

A configuração da fita que está sendo considerada aqui é o análogo da situação descrita na Seção 1.2.4, exceto pelo fato de que, agora, a corrente, em vez de fluir ao longo apenas do eixo y , flui através de toda a largura, b , da fita. Da mesma forma que, naquele caso, viu-se que a correspondência em (3+1)D era com a corrente fluindo através do plano yz , aqui, tal correspondência se dá com a corrente fluindo através do que poderia ser chamado de um “plano gordo”, isto é, o plano xy “alargado” para ter a largura b .

2.2.2 O caso de MCS ($m \neq 0$)

Nesta seção será visto que as principais novidades trazidas pela presença da massa topológica são a quebra da não dependência de B com x (fora da fita) e o aparecimento de um campo elétrico transversal *somente* no interior da fita, caindo exponencialmente fora dela. Neste sentido, pode-se argumentar que a presença do termo de CS torna a descrição em (2+1)D mais realista, na medida em que dá um B menor para pontos longe da fita (em vez de um B uniforme), merecendo, também por isso, estar presente numa teoria em (2+1)D, e não “apenas” por constituir, junto com o termo de Maxwell, no Lagrangeano mais geral em tais dimensões que não quebra as simetrias da teoria (calibre e Lorentz).

Agora, as equações de campo, Eqs. (1.15–1.16), são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = mB \quad (2.45)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (2.46)$$

$$\vec{\nabla} B - m\vec{E} = \vec{J}, \quad (2.47)$$

onde, como antes, $\vec{J} = \frac{I}{b}\hat{y}$ para $-b/2 < x < b/2$ e $\vec{J} = \vec{0}$ nos demais casos. Novamente valem $\partial/\partial y = \partial/\partial t = 0$ e $\partial/\partial x = d/dx$. Da Eq. (2.45), substitui-se $B = (dE_x/dx)/m$ na Eq. (2.47) para se obter:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - m^2 \right) E_x(x) = -mJ_y \quad (2.48)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - m^2 \right) E_y(x) = 0, \quad (2.49)$$

onde a segunda equação conduz a $E_y = 0$, conforme apontado na Seção 1.2.4. A expressão para $E_x(x)$ será deduzida considerando-se primeiro que, para $x > b/2$ ou $x < -b/2$, a primeira equação acima se torna:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - m^2 \right) E_x(x) = 0,$$

que possui a seguinte solução:

$$E_x(x) = Ae^{-mx} \text{ para } x > b/2 \quad (2.50)$$

$$E_x(x) = Ae^{mx} \text{ para } x < -b/2, \quad (2.51)$$

onde A é uma constante de integração e já foi usado o fato de que a simetria da configuração implica que o módulo de \vec{E} em cada lado da fita deve ser o mesmo (o sinal positivo entre ambos foi escolhido porque, caso contrário, a Eq. (1.56) implicaria uma concentração de carga ao longo da fita, que não existe). Agora, para a região interna à fita, $-b/2 < x < b/2$, tem-se:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - m^2\right) E_x(x) = -\frac{mI}{b},$$

que possui a seguinte solução geral:

$$E_x(x) = A'e^{-mx} + A''e^{mx} + A''', \quad (2.52)$$

onde os A 's também são constantes. A substituição desta solução na equação diferencial de origem permite calcular o termo constante, referente à solução da particular, $A''' = I/mb$. Além disso, a continuidade de E_x em $x = \pm b/2$ implica que

$$A'' = A'$$

e

$$A' = \frac{Ae^{-mb/2} - I/mb}{2 \cosh mb/2}.$$

Logo,

$$E_x(x) = \frac{Ae^{-mb/2} - I/mb}{\cosh mb/2} \cosh mx + \frac{I}{mb} \text{ para } -b/2 < x < b/2, \quad (2.53)$$

e, portanto, usando a Eq. (2.45), obtém-se:

$$B(x) = -Ae^{-mx} \text{ para } x > b/2 \quad (2.54)$$

$$B(x) = Ae^{mx} \text{ para } x < -b/2 \quad (2.55)$$

$$B(x) = \frac{Ae^{-mb/2} - I/mb}{\cosh mb/2} \sinh mx \text{ para } -b/2 < x < b/2. \quad (2.56)$$

Finalmente, calcula-se a constante A por meio da condição de continuidade de B em $x = \pm b/2$, Eq. (1.58):

$$A = \frac{I}{mb} \sinh mb/2. \quad (2.57)$$

Os resultados acima podem ser resumidos da seguinte forma:

$$E_x(x) = \frac{I \sinh mb/2}{mb} e^{-m|x|} \text{ para } |x| > b/2 \quad (2.58)$$

$$E_x(x) = \frac{I}{mb} \left[\frac{e^{-mb/2} \sinh mb/2 - 1}{\cosh mb/2} \cosh mx + 1 \right] \text{ para } -b/2 < x < b/2 \quad (2.59)$$

$$E_y(x) = 0 \quad (2.60)$$

e

$$B(x) = -\frac{I \sinh mb/2}{mb} e^{-mx} \text{ para } x > b/2 \quad (2.61)$$

$$B(x) = +\frac{I \sinh mb/2}{mb} e^{mx} \text{ para } x < -b/2 \quad (2.62)$$

$$B(x) = \frac{I}{mb} \frac{e^{-mb/2} \sinh mb/2 - 1}{\cosh mb/2} \sinh mx \text{ para } -b/2 < x < b/2, \quad (2.63)$$

e seus gráficos estão esboçados na Fig. 2.5.

Como é de se esperar, no limite $b \rightarrow 0$ as equações acima consistentemente se transformam nos campos produzidos por um fio, dados pelas Eqs. (1.102–1.103).

O papel do parâmetro de CS, m , está ilustrado na Fig. 2.6. Com relação ao limite $m \rightarrow \infty$, os dois gráficos inferiores da figura indicam que, neste limite, tanto o campo elétrico como o magnético tendem a zero, ao mesmo tempo em que vão mais claramente

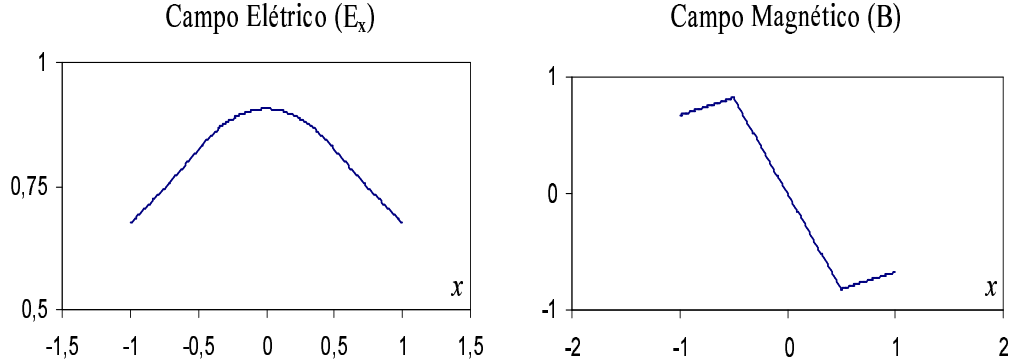


Figura 2.5: Os campos elétrico e magnético produzidos por uma densidade de corrente uniforme no interior de uma fita de largura b , para o caso de MCS ($m \neq 0$), dados pelas Eqs. (2.58–2.63). (Fez-se $b = 1$, $I = 2$ e $m = 0, 4$.)

se localizando no interior e nas bordas da fita, respectivamente. O limite $m \rightarrow 0$ traz o resultado esperado para o campo magnético, ou seja, igual ao que se obteve na seção anterior. Já no que se refere ao campo elétrico, há um resultado interessante: de todas as constantes permitidas pela teoria puro-Maxwell (Eq. (2.34)), ele tende a se firmar numa constante específica, $I/2$, em vez de zero, como se fez na Seção anterior, em analogia com o Eletromagnetismo usual. Portanto, a condutividade Hall, ou transversa, σ_H , definida por $J_y = \sigma_H E_x$, surge naturalmente na teoria de MCS, mesmo quando $m \rightarrow 0$, ficando, neste limite, totalmente determinada pela geometria da configuração e dada por $\sigma_H = 1/b$.

2.2.3 O Efeito Hall radial

Nesta seção será discutido o análogo, em (2+1)D, tanto para o caso puro-Maxwell como para o caso de MCS, do Efeito Hall radial. No entanto, para facilitar a consulta, será revista primeiramente a descrição do efeito usual, em (3+1)D. Será apresentada a abordagem padrão, que pode ser encontrada por exemplo na Ref. [49]. Seja um fio cilíndrico de raio R , com uma densidade de corrente uniforme \vec{J} ao longo de seu eixo, escolhido como sendo coincidente com o eixo z . O cálculo do campo magnético no interior do fio é

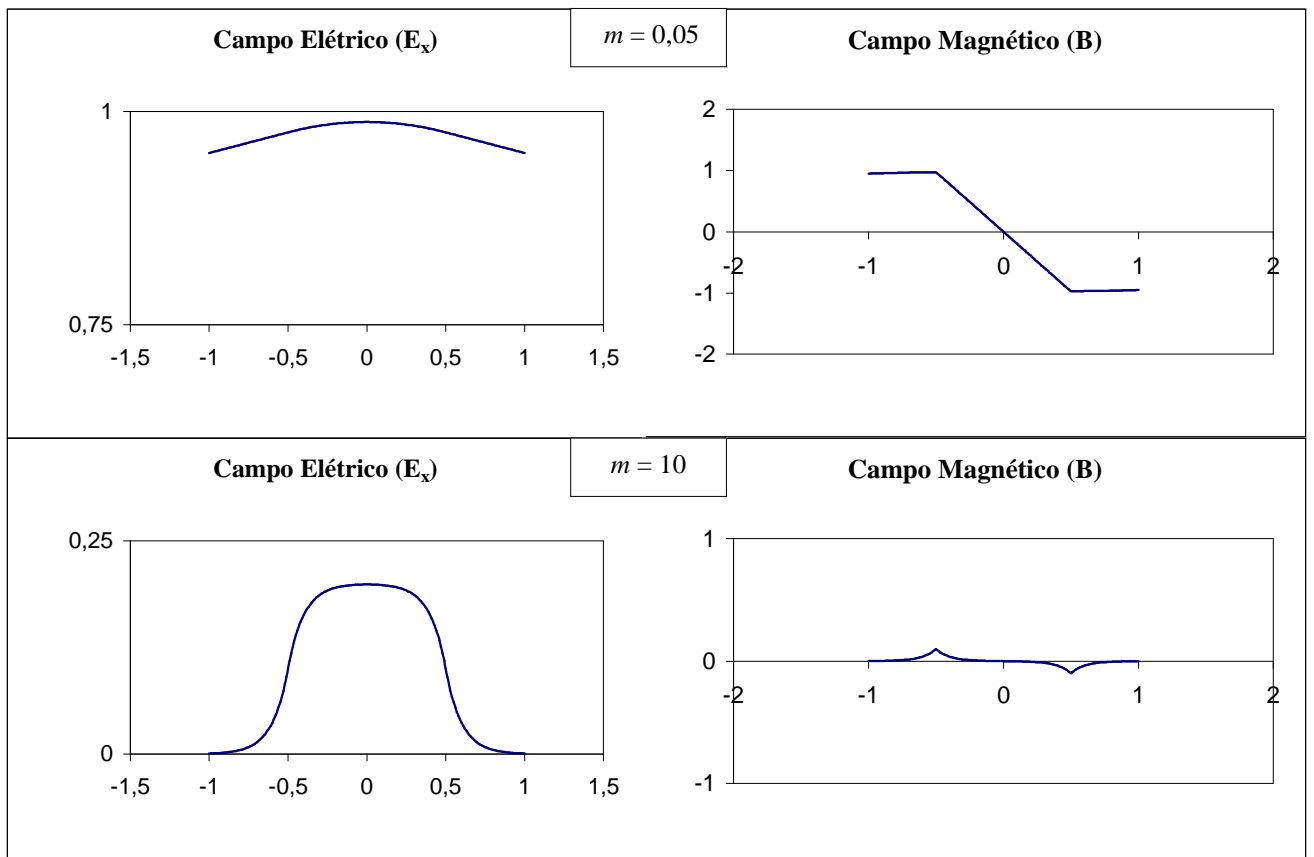


Figura 2.6: Os campos eléctrico e magnético produzidos por uma densidade de corrente uniforme no interior de uma fita de largura b , nos seguintes limites: acima, $m \rightarrow 0$ ($m = 0,05$) e, abaixo, $m \rightarrow \infty$ ($m = 10$). É importante observar as escalas dos gráficos. (Fez-se $b = 1$ e $I = 2$.)

um problema da Física básica de graduação, cujo resultado é:

$$B(r) = (\mu_0 I / 2\pi R^2) r, \quad (2.64)$$

com a direção de \vec{B} sendo dada pela regra do “parafuso”, da mão direita. Este campo magnético força os portadores de carga (assumidos aqui como sendo elétrons) a se concentrarem no volume do fio, deixando uma carga positiva na superfície lateral do cilindro. Por sua vez, a carga negativa no interior do cilindro produz um campo elétrico \vec{E} que tende a repelir os novos elétrons que também tentam estar lá devido ao campo magnético. A situação final estacionária consiste numa igualdade entre estas duas forças, o que conduz a:

$$\vec{E}(r) = -(\mu_0 I v / 2\pi R^2) r \hat{r}, \quad (2.65)$$

onde v é a velocidade de arrasto (“drift”) dos elétrons de condução. A lei de Gauss permite que se calcule em seguida a distribuição de carga negativa:

$$\rho_- = -I v / \pi R^2 c^2, \quad (2.66)$$

ou seja, independente da posição r . Finalmente, usando o fato de que o fio é eletricamente neutro, obtém-se a densidade superficial de cargas positivas ao longo da superfície lateral do cilindro:

$$\sigma_+ = I v / 2\pi R c^2. \quad (2.67)$$

Agora, os mesmos argumentos acima serão aplicados ao caso puro-Maxwell em (2+1)D, partindo da Eq. (2.44), que se refere à fita estudada nas seções anteriores. É fato, já mencionado anteriormente, que o análogo (3+1)-dimensional da fita não é a configuração cilíndrica a que se acabou de referir. Não obstante, a seguir serão demonstradas algumas semelhanças (e diferenças) entre os resultados da fita (2+1)-dimensional e o cilindro (3+1)-dimensional.

Na fita, a força magnética — agora dada pela Eq. (1.64) — cria uma distribuição de

cargas negativas no “corpo” da mesma e, na situação estacionária, há um campo elétrico dado por³:

$$\vec{E} = -(Iv\mu_0/b)x\hat{x}. \quad (2.68)$$

A lei de Gauss pode então ser usada para dar a densidade (superficial) de carga:

$$\sigma_- = -\frac{Iv}{bc^2}. \quad (2.69)$$

Novamente, pode-se argumentar que o condutor é neutro e obter a densidade (linear) de carga em cada fronteira lateral da fita:

$$\lambda_+ = \frac{Iv}{2c^2}. \quad (2.70)$$

Passando para a descrição de MCS: agora, não existe apenas um campo magnético no interior da fita, mas também um campo elétrico, conforme mostrado na Fig. 2.5. Além disso, os valores máximos de E e B são iguais, conforme pode ser demonstrado a partir das Eqs. (2.59) e (2.63) e se pode observar nas Figs. 2.5 e 2.6. Assim, já que, tipicamente, os elétrons de condução possuem velocidade $v \ll 1 = c$, o segundo termo da força de Lorentz, Eq. (1.64), é desprezível. Portanto, diferentemente do que ocorre no Efeito Hall radial em (3+1)D e na fita de (2+1)D puro-Maxwell, vistos acima, onde o campo *magnético* forçava os elétrons para o corpo do condutor, deixando, como consequência, uma carga positiva nas duas fronteiras da mesma, agora, na descrição de MCS, em vez disso, o que se tem, essencialmente, é um campo *elétrico* \vec{E} dirigido para a direita, que força os elétrons *apenas para o lado esquerdo*, concentrando-os em $x = -b/2$ (e obviamente deixando uma carga positiva e igual em $x = b/2$). Novamente, tais elétrons produzem um outro campo elétrico⁴ E' , que, na situação estacionária final, iguala-se ao original,

³É interessante comparar as expressões para B e E nos casos do cilindro em (3+1)D e da fita em (2+1)D (puro-Maxwell), respectivamente dadas pelas Eqs. (2.64), (2.65) e (2.44), (2.68): usando o fato de que $b = 2R$ e $x = r$, elas se tornam praticamente idênticas, exceto por um fator πR que falta nos denominadores das expressões em (2+1)D.

⁴e também um outro campo magnético, que é desprezível, pelas mesmas razões já apontadas.

$E' = E$. Na realidade, esta é apenas uma descrição aproximada, pois a igualdade entre o campo elétrico E produzido pela corrente, dado pela Eq. (2.59), e o campo elétrico E' produzido pelas cargas concentradas nas bordas, dado pela Eq. (1.88) não pode ser implementada para todos os valores de x . Portanto, a situação estacionária final não consiste simplesmente em densidades lineares de carga de sinais opostos em cada lado da fita, mas sim em algo mais complicado, mas certamente com cargas de sinais opostos mais concentradas perto de $x \approx \pm b/2$. Contudo, como já mostrado na Seção 2.1, se a fita constar de uma estrutura nanoscópica com $b/2 \ll 300 \text{ \AA}$, pode-se usar o fato de que o parâmetro m é muito pequeno e expandir as expressões de E e E' em séries de Taylor, obtendo-se os seguintes resultados aproximados:

$$E \approx \frac{\mu_0 I c}{2} \quad (2.71)$$

$$E' \approx \frac{\lambda}{\epsilon_0}, \quad (2.72)$$

onde $\lambda = q/\ell$ na Eq. (1.88), que pode ser calculado a partir da igualdade entre E e E' , dando:

$$\lambda \approx \frac{I}{2c}, \quad (2.73)$$

onde foi usada a relação $c^2 \mu_0 \epsilon_0 = 1$.

Da discussão acima, pode-se dizer que o análogo em (2+1)D do Efeito Hall radial, numa visão de MCS, deve ser mais propriamente chamado de algo como “Efeito Hall elétrico transversal”. Além disso, a situação é bem mais difícil de ser analisada, no sentido de que não se pode obter tão facilmente as expressões exatas das densidades de carga próximo das bordas, como foi feito em (3+1)D (Efeito Hall radial) e em (2+1)D (fita no caso puro-Maxwell). De fato, seria necessário resolver as configurações de carga, corrente e campos, em equações diferenciais parciais acopladas, dentro da fita, a fim de se resolver este problema totalmente, o que, contudo, não será feito aqui.

2.3 Algumas configurações de Mecânica Quântica

Nesta seção, será aplicada a equação de Schrödinger a um elétron submetido a campos externos de MCS específicos, que são: os gerados pelos dois fios da Seção 2.1 e os gerados por uma fita como a da Seção 2.2.

2.3.1 Um elétron entre os fios (Mecânica Quântica)

Uma situação importante em Mecânica Quântica é conhecida como problema de Landau [50] e consiste em um elétron no plano xy submetido a um campo magnético uniforme e constante na direção z , o qual pode ser conseguido facilmente, usando-se, por exemplo, um solenóide. Porém, numa abordagem puramente (2+1)-dimensional, um solenóide é algo inconcebível e a forma mais simples de se obter um campo magnético uniforme e constante é, no eletromagnetismo puro-Maxwell, por meio dos dois fios da Seção 2.1, como já visto. No entanto, quando se passa para a teoria de MCS, esta configuração não mais produz um campo magnético uniforme, como se pode constatar na Eq. (2.3). Além disso, as equações de MCS mostram que, no vácuo ($J^\mu = 0$), a existência de um campo magnético uniforme e constante é possível apenas se um campo elétrico *variável* estiver também presente⁵, o que fugiria do escopo do presente trabalho. De qualquer forma, é lícito afirmar que a configuração do eletromagnetismo de MCS mais *parecida* com o problema de Landau é a de um elétron entre os dois fios, que já foi estudada na Seção 2.1.1 numa abordagem de Mecânica Clássica, e que agora será considerada sob o ponto de vista da Mecânica Quântica.

Sejam M a massa do elétron e $-e$ a sua carga. Seguindo o procedimento padrão, substitui-se o momento linear $p_i = -i\hbar\partial_i$ pela expressão $-i\hbar\partial_i + eA_i$. Além disso, será escolhido o calibre de Landau, $A_x = 0$ e $A_y = xB$ (que é um caso especial do gauge de Lorentz, $\partial_\mu A^\mu$). Assim, a equação de Schrödinger independente do tempo fica conforme

⁵Pois, sob tais condições, a primeira equação de MCS, Eq. (1.15), indica que $E \neq 0$; portanto, a terceira, Eq. (1.17), indica que $\partial\vec{E}/\partial t \neq \vec{0}$.

abaixo:

$$\frac{1}{2M} \left[p_x^2 + (p_y + eA_y)^2 \right] \Psi_n + (-e\Phi)\Psi_n = \varepsilon_n \Psi_n, \quad (2.74)$$

onde n é um (conjunto de) número(s) quântico(s) e Φ é o potencial elétrico, relacionado ao campo elétrico por meio de $\vec{E} = (\mu_0 c^2 / \hbar) \text{Im} x \hat{x} = -\vec{\nabla} \Phi$ (aqui, como foi feito na Seção 2.1.1, se adota a aproximação expressa pelas Eqs. (2.4) e (2.5)). Escolhendo $\Phi(0) = 0$, obtém-se $\Phi(x) = -(\mu_0 c^2 / \hbar) \text{Im} x^2 / 2$, onde, como antes, m é a massa do fóton. Depois de uma pequena álgebra, a equação acima se torna:

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2M} \left[\left(i \frac{\partial}{\partial y} - \frac{eB}{\hbar} x \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] + \frac{\mu_0 c^2 e I m}{2\hbar} x^2 \right\} \Psi_n(x, y) = \varepsilon_n \Psi_n(x, y). \quad (2.75)$$

Pode-se considerar $\Psi_n(x, y) = \sum_k e^{iky} \varphi_{nk}(x)$, para se chegar a:

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2M\ell^4} (x + k\ell^2)^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\mu_0 c^2}{\hbar} \right) \frac{eIm}{2} x^2 \right\} \varphi_{nk}(x) = \varepsilon_n \varphi_{nk}(x), \quad (2.76)$$

onde ℓ denomina-se *comprimento magnético*, definido por $\ell \equiv \sqrt{\hbar/eB}$. O segundo termo é obviamente a energia cinética, $P^2/2M$, na variável x . O primeiro termo reconhece-se logo como sendo a energia potencial de um oscilador harmônico simples (OHS), $\hbar/2M\ell^4 \equiv M\omega_c^2/2$, o que fornece corretamente a frequência de cíclotron, $\omega_c = eB/M$. Pode-se ver ainda que este OHS está deslocado da origem, com o centro das oscilações localizado em $-k\ell^2$. Esta equação pode ser resolvida tentando-se fundir o último termo do Hamiltoniano com o primeiro (pois ambos são proporcionais a x^2) e, simultaneamente, permitindo-se que o centro das oscilações passe de $-k\ell^2$ para $-b$, a ser determinado. Ou seja, pretende-se chegar a um Hamiltoniano equivalente, dado por:

$$H_0 = \frac{M\omega^2}{2} (x + b)^2 + \frac{P^2}{2M}. \quad (2.77)$$

Comparando os termos em x^2 e em x do Hamiltoniano almejado acima (H_0) com os correspondentes que comparecem na Eq. (2.76), obtém-se respectivamente ω em termos

de ω_c e b em termos de k :

$$\omega^2 = \omega_c^2 (1 + \beta) \quad (2.78)$$

$$b = \frac{k\ell^2}{1 + \beta}, \quad (2.79)$$

onde:

$$\beta \equiv \frac{\mu_0 c^2}{\hbar} \frac{eIm}{M\omega_c^2}. \quad (2.80)$$

No entanto, os termos de ordem x^0 não são iguais, de forma que o Hamiltoniano a que se pretende chegar, H_0 , ainda precisa ser corrigido para $H = H_0 - R$, onde $R \equiv M\omega_c^2(k\ell^2)^2\beta/2(\beta + 1)$ é a diferença entre os termos em x^0 de H_0 e do Hamiltoniano da Eq. (2.76), que de fato representa o problema em tela. O resultado é:

$$\left\{ \frac{M\omega^2}{2} (x + b)^2 + \frac{P^2}{2M} + \frac{M\omega_c^2}{2} (k\ell^2)^2 \frac{\beta}{\beta + 1} \right\} \varphi_{nk}(x) = \varepsilon_{nk} \varphi_{nk}(x), \quad (2.81)$$

onde agora a energia poderá depender também de k . Portanto, a energia do elétron é dada pela soma da energia do OHS com o terceiro termo da equação acima:

$$\varepsilon_{nk} = \hbar\omega (n + 1/2) + \frac{M\omega_c^2}{2} (k\ell^2)^2 \frac{\beta}{\beta + 1}. \quad (2.82)$$

É interessante observar que a expressão acima para a nova frequência do oscilador, ω (no lugar de ω_c), coincide com a que fora obtida na abordagem clássica da Seção 2.1.1, dada pela Eq. (2.12). Abaixo, algumas ordens de grandeza são avaliadas, no SI, utilizando-se alguns valores típicos, $I \approx 10^{-6}$ A e $m \approx 10^{-5}M$, juntamente com a expressão aproximada para o campo magnético entre os fios, $B = \mu_0 I$:

$$\omega_c \approx 10^{-1} \quad (2.83)$$

$$\ell^2 \approx 10^{-3} \quad (2.84)$$

$$\beta \approx 10^{17}, \quad (2.85)$$

de forma que:

$$\omega \gg \omega_c \quad (2.86)$$

$$\beta + 1 \approx \beta \quad (2.87)$$

e portanto a energia ε_{nk} pode ser escrita como

$$\varepsilon_{nk} \cong \hbar\omega (n + 1/2) + \frac{M\omega_c^2\ell^4}{2}k^2 \quad (2.88)$$

e, como $M\omega_c^2\ell^4/2 = \hbar^2/2M$, reconhece-se o segundo termo como sendo, nesta aproximação, a energia cinética ao longo do eixo y . A seguir, a fim de se compararem os dois termos da energia ε_{nk} , será avaliado o valor máximo do vetor de onda, k .

As auto-funções $\varphi_{nk}(x)$ são simplesmente as auto-funções do OHS, neste caso distribuições centradas em $x = -b$. Uma vez que os elétrons estejam confinados entre os fios, tem-se $-L < -b < L$ e, portanto, o valor máximo de b é L , ou, usando a Eq. (2.79),

$$k_{max} = \frac{(\beta + 1)L}{\ell^2}. \quad (2.89)$$

Voltando agora à energia ε_{nk} , dada pela Eq. (2.82): o valor máximo do segundo termo (essencialmente a energia cinética K_y ao longo do eixo y) é:

$$K_{y_{max}} = \frac{\hbar^2 L^2 (\beta + 1) \beta}{2M\ell^4}, \quad (2.90)$$

que está de acordo com o que se esperaria, no sentido de que esta expressão se aproxima de zero quando $m \rightarrow 0$, e os níveis de energia se tornam simplesmente os níveis de Landau, $\hbar\omega_c(n+1/2)$. Usando os valores acima e $L \approx 10^{-9}$ metros (a fim de satisfazer a $L \ll 300 \text{ \AA}$, uma condição estabelecida na Seção 2.1), chega-se a:

$$K_{y_{max}} \approx 10^{-16} \text{ joules}, \quad (2.91)$$

que é muito maior do que o espaçamento entre os “níveis de Landau” do primeiro termo da Eq. (2.82), dado por:

$$\hbar\omega \approx 10^{-26} \text{ joules} \ll K_{y_{max}}. \quad (2.92)$$

Portanto, conclui-se que não é possível tratar o segundo termo da Eq. (2.82) como uma perturbação ao primeiro, cujos “níveis de Landau”, portanto, não podem mais ser preservados em suas respectivas identidades, havendo um “mixing” intenso entre eles. Este resultado não pode ser contornado usando-se outros valores para L , pois somente valores fisicamente inaceitáveis da ordem de 10^{-15} metros poderiam inverter a situação.

2.3.2 Um elétron no interior da fita

Nesta seção será estudada a equação de Schrödinger para um elétron no interior de uma fita infinita e neutra, submetido aos campos gerados por uma densidade de corrente elétrica uniforme que flui na mesma, na direção y , conforme já estudado na Seção 2.2.2. Também será admitida a existência de um campo magnético uniforme extra, externo, aplicado na fita. As expressões para os campos gerados pela corrente na fita, Eqs. (2.59–2.63), serão reescritas conforme abaixo:

$$E_x(x) = \frac{I_0}{mb} \sinh mb/2 e^{-m|x|} \text{ para } |x| > b/2 \quad (2.93)$$

$$E_x(x) = \frac{I_0}{mb} \left[\frac{e^{-mb/2} \sinh mb/2 - 1}{\cosh mb/2} \cosh mx + 1 \right] \text{ para } -b/2 < x < b/2 \quad (2.94)$$

$$E_y(x) = 0 \quad (2.95)$$

e

$$B(x) = -\frac{I_0}{mb} \sinh mb/2 e^{-mx} \text{ para } x > b/2 \quad (2.96)$$

$$B(x) = +\frac{I_0}{mb} \sinh mb/2 e^{mx} \text{ para } x < -b/2 \quad (2.97)$$

$$B(x) = \frac{I_0}{mb} \frac{e^{-mb/2} \sinh mb/2 - 1}{\cosh mb/2} \sinh mx \text{ para } -b/2 < x < b/2, \quad (2.98)$$

onde I_0 seria simplesmente a corrente I , não fosse o fato de que também se está admitindo a existência de um campo magnético externo \bar{B} imposto à fita, de forma semelhante ao que ocorre com uma amostra de Efeito Hall. As equações de MCS implicam que este campo magnético externo induz um campo elétrico extra, $\vec{E}' = (m\bar{B}x + \bar{E})\hat{x}$, onde \bar{E} é uma constante de integração, assim como uma densidade de corrente extra, $\vec{J}' = mE'\hat{y}$, que realça o papel de m como uma condutividade Hall. A densidade de corrente total é $\vec{J} = (I_0/b + J')\hat{y}$. Como a corrente total I é simplesmente a integral $\int_{-b/2}^{+b/2} J dx$, pode-se obter a constante I_0 como função da corrente I : $I_0 = I - mb\bar{E}$, que pode ser substituída nas equações para \vec{E} e B acima. Além disso, a densidade de corrente total agora pode ser escrita como $(I/b + m^2\bar{B}x)\hat{y}$.

Como o parâmetro mb é bem pequeno, as expressões acima para os campos elétrico e magnético produzidos pela corrente na fita podem ser aproximadas, dentro da fita, por $I_0/2$ e $-(I_0/b)x$, respectivamente. Assim, os campos elétrico e magnético totais dentro da fita são dados por:

$$E \cong \frac{I}{2} + \bar{E} + m\bar{B}x \quad (2.99)$$

e

$$B = -\frac{(I - mb\bar{E})}{b}x + \bar{B}. \quad (2.100)$$

Comparando estes campos com os que aparecem na última Seção, conclui-se que, a menos de um termo constante, o campo elétrico é novamente proporcional a x , fornecendo então um potencial Φ com termos proporcionais a x e a x^2 . Também há diferença com relação ao campo magnético: agora existe um termo proporcional a x , correspondendo a A_y proporcional a x^2 . Então, procedendo-se de forma inteiramente análoga ao que foi feito anteriormente com o caso do elétron entre os dois fios, chegar-se-á a uma equação de Schrödinger bem diferente da do problema de Landau, com vários termos extras, cuja solução não é trivial e que demandaria algum tipo de aproximação, o que não será feito aqui.

Capítulo 3

A Teoria de Maxwell-Chern-Simons

Não-mínima e os Férmions

Compostos

A maior parte do conteúdo do presente Capítulo foi publicada na Ref. [7], à exceção de alguns parágrafos da primeira seção, que constam da Ref. [41]. Na primeira seção, faz-se uma revisão do acoplamento não-mínimo típico das $(2+1)$ dimensões, enfatizando-se o seu uso na Mecânica Quântica, o que leva à conclusão de que uma simples redefinição dos campos “faz o serviço”. Mostra-se também uma possível origem para tal acoplamento não-mínimo, baseando-se em trabalhos recentes do orientador desta tese e colaboradores, referentes à redução dimensional de uma teoria de campos com quebra da simetria de Lorentz e de CPT em $(3+1)D$. Na seção seguinte, o que parece ser uma lacuna da literatura é preenchida: obtém-se explicitamente o limite não-relativístico da equação de Dirac, diretamente em $(2+1)D$ (e não após uma redução dimensional a partir de $(3+1)D$): tal

procedimento permite que se utilize a representação espinorial fundamental de (2+1)D, com apenas duas componentes, além do acoplamento não-mínimo da Seção precedente. Fica explícito que, de fato, o parâmetro g de tal acoplamento deve ser encarado como um momento de dipolo *anômalo* (em nível clássico), pois ele gera um termo extra em relação ao análogo em (2+1)D do termo de Pauli. A última seção faz uso da mencionada redefinição de campos e do fato de que o parâmetro g possui, em (2+1)D, a mesma dimensão que o fluxo magnético, para propor uma identificação destas quantidades e um natural paralelo com a teoria de Férmions Compostos (FCs), de Jain, para o EHQF. Algumas aproximações são feitas e verifica-se que tal paralelo é compatível com os resultados desta teoria, quando o campo de calibre segue as equações de MCS.

3.1 O acoplamento não-mínimo em (2+1) dimensões

Em (3+1) dimensões, o dual $\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}$ do campo eletromagnético $F_{\kappa\lambda}$ é um tensor de segunda ordem. Por outro lado, em (2+1) dimensões, ele é um vetor, $\tilde{F}^\mu \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}$, e, portanto, a derivada covariante mínima,

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (3.1)$$

pode ser generalizada para uma não-mínima,

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu + ig\tilde{F}_\mu, \quad (3.2)$$

onde g é o análogo planar do momento de dipolo magnético, que se acopla não-minimamente ao campo magnético¹. De fato, uma vez que $\tilde{F}^\mu = (-B, -E_y, E_x) \equiv (-B, -\vec{E})$, a

¹Note que a derivada (3.2) é covariante, pois o termo não-mínimo é covariante de calibre, pela sua própria definição.

equação acima separa-se em componentes da seguinte forma:

$$\mathcal{D}_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t} + iq\Phi - igB \quad (3.3)$$

e

$$\mathcal{D}_i \equiv \partial_i - iq(\vec{A})_i + ig\vec{E}_i. \quad (3.4)$$

Para se obter a equação de Schrödinger de um elétron sujeito a um campo eletromagnético, procede-se da forma usual: partindo do Hamiltoniano livre, substitui-se $\partial_0 = \partial_t$ por \mathcal{D}_0 , ou, equivalentemente, soma-se o termo

$$q\Phi - gB \quad (3.5)$$

ao Hamiltoniano, e, também, substitui-se ∂_i por \mathcal{D}_i , ou, equivalentemente, substitui-se o momentum, $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$, por

$$\vec{p} - q\vec{A} + g\vec{E}. \quad (3.6)$$

Observa-se imediatamente que estas substituições são equivalentes à prescrição mínima, exceto pelas seguintes mudanças:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{g}{q}B \quad (3.7)$$

e

$$(\vec{A})_i \rightarrow (\vec{A}')_i = (\vec{A})_i - \frac{g}{q}\vec{E}_i, \quad (3.8)$$

as quais, devido às definições²:

$$B \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} \equiv \epsilon_{ij}\partial_i(\vec{A})_j \quad (3.9)$$

²Vale lembrar que a Eq. (3.9) é uma equação *escalar*.

e

$$\vec{E} \equiv \frac{\partial}{\partial t}(-\vec{A}_i) - \vec{\nabla}_i \Phi, \quad (3.10)$$

implicam que:

$$B \rightarrow B' = B + \frac{g}{q} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \quad (3.11)$$

e

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E}' = \vec{E} + \frac{g}{q} \left(\vec{\nabla} B + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \quad (3.12)$$

com a força de Lorentz preservada em sua forma, que, em (2+1) dimensões, conforme visto no Cap. 1, é:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}B. \quad (3.13)$$

O acoplamento não-mínimo estudado aqui pode ser considerado como resultante de uma redução dimensional feita a partir de um modelo de Chern-Simons em (3+1) dimensões que viola a simetria de Lorentz [51], definida pela seguinte derivada:

$$\nabla_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu + i\frac{\gamma}{2}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}v^\nu F^{\kappa\lambda}, \quad (3.14)$$

onde γ é uma constante (assim como q , uma propriedade da partícula), $\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}$ é o tensor (de Levi-Civita) totalmente anti-simétrico em (3+1) dimensões e v^ν é um vetor fixo no espaço-tempo (que viola a simetria de Lorentz). De fato, perfazendo os passos correspondentes a fim de se obter a equação de Schrödinger de uma partícula carregada, observa-se que isto equivale a somar o termo

$$q\Phi - \gamma\vec{v} \cdot \vec{B} \quad (3.15)$$

ao Hamiltoniano e a substituir o momentum por

$$\vec{p} - q\vec{A} + \gamma v^0 \vec{B} - \gamma\vec{v} \times \vec{E}. \quad (3.16)$$

Assim, escolhendo $v^\nu = (0, \vec{v})$ e $\gamma\vec{v} = (0, 0, \gamma v^3)$, imediatamente verifica-se que as redefinições estabelecidas pelas Eqs. (3.5–3.6) são recuperadas exatamente, com a quanti-

dade (3+1)-dimensional γv^3 desempenhando o papel de sua contraparte (2+1)-dimensional, g , e com apenas a terceira (z) componente do campo magnético (3+1)-dimensional \vec{B} e as componentes no-plano (x, y) do campo elétrico \vec{E} contribuindo para o Hamiltoniano, exatamente como se espera que aconteça em (2+1) dimensões.

A fim de se obter um exemplo de aplicação do acoplamento não-mínimo, será retomado o estudo feito na Seção 2.3.1. Conforme visto, o efeito do acoplamento não-mínimo equivale a se redefinir o campo magnético de acordo com a Eq. (3.11), o que transforma a Eq. (2.82) na seguinte:

$$\varepsilon'_{nk} = \hbar\omega' (n + 1/2) + \frac{M\omega_c'^2}{2} (k\ell'^2)^2 \frac{\beta'}{\beta' + 1} - gB, \quad (3.17)$$

que, além do termo em $-gB$, só difere da Eq. (2.82) pelos “primos” superescritos, cujos significados correspondem a se trocar B por B' (seguindo a prescrição (3.11)) nas Eqs. (2.78) e (2.80), assim como na definição da frequência de cíclotron, que passa a ser $\omega_c' \equiv |qB'|/M$.

3.2 Limite não-relativístico da Equação de Dirac em (2+1)D

Efetuando-se as substituições descritas pelas Eqs. (3.5) e (3.6), obtém-se imediatamente a equação de Schrödinger para a função de onda, $\psi(x, y, t)$, de um elétron,

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left\{ q\Phi + \frac{(\vec{p} - q\vec{A} + g\vec{E})^2}{2M} - gB \right\} \psi, \quad (3.18)$$

onde M é a massa do elétron, $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$ é o seu momentum canônico e $-gB$ desempenha o papel de uma energia de dipolo magnético. Na Ref. [18], mostra-se que o termo envolvendo

$g\vec{E}$ dá origem, na teoria escalar, a uma fase de Aharonov-Casher³. Uma boa questão agora seria escrever a equação de Dirac em (2+1) dimensões usando a mesma derivada covariante não-mínima e verificar se o seu limite não-relativístico difere da equação acima por algum termo extra, como ocorre com o termo de Pauli no caso bem-conhecido [52] de acoplamento mínimo em (3+1) dimensões. Esta questão já foi respondida como positiva nas Refs. [14, 15, 16], muito mais explorando-se as peculiares propriedades da dimensionalidade (2+1) do que por meio do uso explícito da equação de Dirac em (2+1) dimensões. Tal abordagem parece estar faltando na literatura e será realizada a seguir⁴, adotando-se o mesmo procedimento usado na Ref. [52].

Na equação de Dirac, $(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - M)\Psi = 0$, usam-se a derivada covariante (3.2) e um espinor de Dirac, $\Psi = (\varphi' \chi')^T$, com duas componentes (devido às três dimensões do espaço-tempo). A seguir, assume-se o limite não-relativístico, no qual a energia de repouso, mc^2 ($c = 1$), é a maior de todas, admitindo-se $(\varphi' \chi') = e^{-imt}(\varphi \chi)$, onde φ e χ variam pouco em função do tempo e satisfazem às seguintes equações acopladas:

$$i\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = (q\Phi - gB) \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - 2M \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} + \tilde{\pi}_x \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} + i\tilde{\pi}_y \begin{pmatrix} -\chi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

onde $\tilde{\pi} = (\pi_y, -\pi_x)$ e $\vec{\pi} = \vec{p} - q\vec{A} + g\vec{E}$ é o momentum cinético, $M\vec{x}$. A seguinte representação das matrizes gama foi usada: $\gamma^0 = \sigma_z$, $\gamma^1 = i\sigma_x$ e $\gamma^2 = i\sigma_y$, sendo as σ 's as usuais matrizes de Pauli 2×2 , e valendo as relações:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1} \quad (3.20)$$

e

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} \mathbf{1} - i\epsilon^{\mu\nu\kappa} \gamma_\kappa, \quad (3.21)$$

³Além da mais familiar fase de Aharonov-Bohm, gerada pelo termo $-q\vec{A}$.

⁴Na Ref. [18], este procedimento é adotado para a teoria escalar, mas o campo fermiônico é considerado somente após uma redução dimensional da equação de Dirac em (3+1) dimensões.

onde $\eta^{\mu\nu}$ é o tensor métrico, $\text{diag}(1, -1, -1)$, e $\mathbf{1}$ é a identidade 2×2 .

No limite não-relativístico e de campos fracos ($2M, \tilde{\pi}_i \gg i\partial_t, q\Phi, gB$), a segunda equação em (3.19) se torna:

$$\chi = \frac{\tilde{\pi}_+ \varphi}{2M}, \quad (3.22)$$

onde $\tilde{\pi}_\pm \equiv \tilde{\pi}_x \pm i\tilde{\pi}_y$, mostrando que χ é desprezível em comparação com φ . Substituindo-se (3.22) na primeira componente da Eq. (3.19), obtém-se:

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(q\Phi - gB + \frac{\pi_- \pi_+}{2M} \right) \varphi, \quad (3.23)$$

que, após as apropriadas substituições, e usando-se $[p_i, f] = -i(\partial_i f)$, fornece o limite não-relativístico da equação de Dirac em (2+1) dimensões, com um acoplamento não-mínimo a um campo de calibre Abelian:

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left\{ q\Phi + \frac{(\vec{p} - q\vec{A} + g\vec{E})^2}{2M} - \frac{qB}{2M} - gB - \frac{g}{2M} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \right\} \varphi. \quad (3.24)$$

No Hamiltoniano que está dentro das chaves da Eq. (3.24), reconhece-se o primeiro termo como sendo a energia elétrica usual do tipo carga-potencial; o segundo termo é a generalização da energia cinética, com o momento cinético agora dado por $\vec{p} - q\vec{A} + g\vec{E}$; os terceiro e quarto termos são respectivamente o termo de Pauli (2+1)-dimensional e uma contribuição de momento magnético anômalo em nível clássico, como descrito nas Refs. [14, 15, 16]; o último termo é uma interação de momento de *quadrupolo* elétrico, que merece uma interpretação mais aprofundada, mas que certamente é muito mais surpreendente (considerando-se tratar de “partícula puntiforme”) do que os dois termos anteriores, uma vez que para estes existe o apelo para o spin da partícula como a interpretação padrão⁵. A equação acima é igual à primeira componente da equação espinorial de duas componentes, Eq. (21) da Ref. [18], que por sua vez foi obtida a partir do limi-

⁵Porém, este mesmo argumento já não pode ser aplicado ao caso escalar, para o qual o termo de momento magnético anômalo permanece, como mencionado anteriormente.

te não-relativístico da equação de Dirac (de quatro componentes) em (3+1) dimensões com um termo de Pauli, por meio de uma redução dimensional. No entanto, a equação acima parece mais natural para descrever uma partícula planar, que não possui dois graus de liberdade de spin, mas apenas um. De qualquer forma, é interessante saber que a abordagem feita aqui, diretamente em (2+1) dimensões, pode descrever essencialmente a mesma física que a redução dimensional feita a partir do mundo “real”, de (3+1) dimensões.

3.3 Conexão com os Férmions Compostos

O campo de calibre, A_μ , será considerado como sendo governado por uma ação de MCS, que, conforme visto no Cap. 1, gera as seguintes equações de campo de Euler-Lagrange [1]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - mB = \rho \quad (3.25)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (3.26)$$

$$\vec{\nabla} B - m\vec{E} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3.27)$$

onde:

$$\vec{\nabla}_i \equiv \epsilon_{ij} \vec{\nabla}_j = \epsilon_{ij} \partial_j \quad (3.28)$$

$$\vec{E}_i \equiv \epsilon_{ij} \vec{E}_j = -\tilde{F}^i = \tilde{F}_i \quad (3.29)$$

$$J^\mu = (\rho, \vec{J}). \quad (3.30)$$

Estas equações não levam em conta os campos eletromagnéticos gerados pelos dipolos magnéticos g , pois foram obtidas utilizando-se o acoplamento *mínimo*. Isto constitui uma aproximação que está em concordância com o fato de que o campo magnético aplicado numa amostra para estudo do Efeito Hall é muito mais intenso do que aqueles campos⁶.

⁶Caso contrário, a Lagrangeana e as equações de campo correspondentemente seriam respectivamente [53]:

Alguns vínculos serão impostos ao sistema, todos eles consistentes com os campos médios numa amostra em experimentos de Efeito Hall: assumir-se-á $\rho = 0$ (amostra localmente neutra) e campos elétrico e magnético constantes no tempo. Portanto,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = mB \quad (3.31)$$

$$\vec{\nabla} B = m\vec{E} - \tilde{\vec{J}}, \quad (3.32)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (3.33)$$

Numa amostra sob condições experimentais típicas do Efeito Hall, os campos elétrico e magnético são também uniformes, mas a não-convencional equação de MCS, Eq. (3.31), não permite que isto seja verdadeiro no que diz respeito ao campo elétrico. De fato, a conexão entre carga elétrica e fluxo magnético (que fica mais evidente após uma integral de área sobre a Eq. (3.25)) é uma característica bem conhecida da teoria de (M)CS, e tanto o campo magnético como a carga elétrica podem ser vistos como fontes para o campo elétrico \vec{E} . Porém, a Eq. (3.32) permite que o campo magnético seja uniforme, desde que a condição $m\vec{E} = \tilde{\vec{J}}$ seja satisfeita, o que nada mais é do que identificar o parâmetro de CS, m , com a condutividade Hall, também outro resultado bem conhecido da teoria de CS (isto é, sem o termo de Maxwell). Aqui, portanto, acabou-se de mostrar a validade de tal resultado também para o caso da eletrostática de MCS (asumindo-se campo magnético uniforme).

A conclusão é que, numa amostra sob as condições experimentais do Efeito Hall, uma partícula que possua tanto uma carga elétrica, q , como um momento de dipolo magnético, g , submetida a campos elétrico e magnético \vec{E} e B , pode ser imaginada como uma partícula com a mesma carga, q , mas com *nenhum* momento de dipolo magnético, “sentindo” os

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\kappa A_\lambda - J_\mu A^\mu - \mu\epsilon^{\mu\kappa\lambda}J_\mu\partial_\kappa A_\lambda; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - mB = \rho - \mu\vec{\nabla} \cdot \tilde{\vec{J}}; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}; \quad \text{e}$$

$$\vec{\nabla} B - m\vec{E} = \tilde{\vec{J}} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \left(\tilde{\vec{\nabla}}\rho + \frac{\partial \tilde{\vec{J}}}{\partial t} \right), \quad \text{onde } \mu \equiv g/q.$$

seguintes campos modificados das Eqs. (3.11) e (3.12):

$$B' = B + \frac{g}{q} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = B \left(1 + \frac{gm}{q} \right) \quad (3.34)$$

e

$$\vec{E}' = \vec{E}, \quad (3.35)$$

onde já foram usadas as Eqs. (3.31) e (3.32), juntamente com $\vec{\nabla} B = 0$.

Será mencionado agora um resultado similar ao acima, que ocorre no modelo de Férmions Compostos (FC), de Jain, para o EHQF [8]: este também se refere a uma redefinição do campo magnético:

$$B^* = B_0 - 2n\rho_e\phi_0, \quad (3.36)$$

onde B_0 é o campo magnético externo experimentado pelo elétron; B^* é o campo magnético efetivo visto pelo FC (isto é, um elétron com um número par de flúxons magnéticos anexados); n é um número inteiro positivo; ρ_e é a densidade (superficial) média de elétrons; e ϕ_0 é o valor do flúxon (o quantum de fluxo magnético), $\phi_0 = hc/e$, ou $\phi_0 = 2\pi/e$ no sistema de unidades em que $\hbar = c = 1$.

Uma vez que um FC possui tanto uma carga elétrica como um fluxo magnético (o qual, como já mencionado, possui, em (2+1) dimensões, a mesma unidade que o momento de dipolo magnético), surge uma analogia entre os seguintes conjuntos (ordenados) de grandezas: $\{B_0, B^*\}$ e $\{B', B\}$. De fato, a partir das Eqs. (3.36) e (3.34), a identificação destes dois pares de grandezas pode ser admitida, desde que se suponha que ($g = -e$):

$$m = -\frac{4\pi\rho_e}{Bg}n. \quad (3.37)$$

Uma quantidade importante no EHQ é o chamado *fator de preenchimento*, $\nu_e = \rho_e\phi_0/B_0$ (ou, identificando-se B_0 com B' e usando-se $\phi_0 = 2\pi/e$, $\nu_e = 2\pi\rho_e/eB'$). Esta grandeza corresponde ao número de níveis de Landau ocupados, ou, mais precisamente, à

razão entre o número de elétrons e a degenerescência de cada nível de Landau. Uma quantidade análoga pode ser definida para os FCs [8]: $\nu_{FC} = \rho_e \phi_0 / B^*$ (ou $\nu_{FC} = 2\pi \rho_e / eB$), onde ν_{FC} e B^* (ou B , como se propõe aqui) podem ser ambos positivos ou ambos negativos, dependendo se os campos magnéticos B_0 e B^* são paralelos ou anti-paralelos. A partir destas duas definições e da Eq. (3.36), obtém-se [8] uma relação entre ν_e e ν_{FC} :

$$\nu_e = \frac{|\nu_{FC}|}{2n |\nu_{FC}| \pm 1}, \quad (3.38)$$

onde o sinal superior (inferior) corresponde a B_0 e B^* serem paralelos (anti-paralelos).

Será considerado agora o sistema de FCs com condutividade Hall quantizada, isto é,

$$m = \frac{e^2}{h} n^* = \frac{e}{\phi_0} n^*, \quad (3.39)$$

onde n^* é um inteiro positivo, igual ao valor absoluto do fator de preenchimento de FCs: $|\nu_{FC}| = n^*$. Esta quantização pode ser obtida, por exemplo, por intermédio do argumento de Laughlin [54] aplicado ao sistema de FCs. Neste caso, a Eq. (3.38) fornece:

$$\nu_e = \frac{n^*}{2n n^* \pm 1}, \quad (3.40)$$

que coincide com quase todos os valores da condutividade Hall (dos elétrons), $\sigma_H = (e^2/h)\nu_e$, observados experimentalmente no EHQF, constituindo assim um dos sucessos do modelo de Jain. Por causa desta relação, o modelo de FCs é conhecido como uma descrição do EHQ Fracionário dos elétrons interagentes, em termos de um EHQ *inteiro* dos FCs livres. A possível equivalência, expressa na proposição (3.37), entre esta característica do modelo de Jain e o modelo de MCS não-mínimo descrito acima (numa abordagem de campo médio) é reforçada pelo fato de que, no caso de EHQ Fracionário (isto é, EHQ inteiro dos FCs, $m = (e/\phi_0)n^*$), a Eq. (3.37) conduz a:

$$g = \mp 2n\phi_0, \quad (3.41)$$

em concordância com a idéia, presente no modelo de Jain, de que um número par de flúxons corresponde ao valor do momento de dipolo magnético do FC. Naturalmente, o caminho tomado para se chegar até aqui poderia ser invertido e a redefinição de Jain, Eq. (3.36), seria demonstrada a partir da presunção da validade da Eq. (3.41). Noutras palavras: adota-se $g = \mp 2n\phi_0$ e a derivada covariante não-mínima (3.2) como uma descrição de partículas com carga e momento magnético (os FCs). Então, supondo-se que o campo de calibre, A^μ , é governado pelas equações de MCS numa aproximação de campo médio (Eqs. (3.31–3.32)), a redefinição do campo magnético, dada pela Eq. (3.34), leva a $B' = B \mp 2n\phi_0 mB/q$, onde B' é o campo magnético visto por partículas com a mesma carga que os FCs, mas com nenhum flúxon anexado (ou seja, os próprios elétrons). Finalmente, faz-se uso da Eq. (3.32) no caso estático e com campo magnético uniforme, para se identificar o parâmetro de CS, m , com a condutividade Hall, a qual, se quantizada como na Eq. (3.39), conduz, juntamente com $q = -e$ e $n^* = |\nu_{FC}| = \rho_e \phi_0 / |B|$, à equação de Jain, Eq. (3.36), com B (B') desempenhando o papel de B^* (B_0).

É notável que o interessante resultado acima tenha sido obtido com aproximações (tipo campo médio) bastantes simples a respeito dos campos no interior de uma amostra sob as condições experimentais do Efeito Hall. No entanto, este mesmo resultado não teria sido atingido se mesmo uma só das seguintes hipóteses feitas aqui não fosse satisfeita:

1. Física planar, que permite a identificação da unidade de g com a de ϕ_0 e a existência do termo de CS.
2. O termo de CS: no caso $m = 0$, a Eq. (3.34) não redefiniria o campo magnético como no modelo de Jain.
3. Acoplamento não-mínimo: idem ao item anterior, caso $g = 0$.
4. O termo de Maxwell, a fim de que a divergência do campo elétrico apareça na Eq. (3.25).

Naturalmente, são necessárias investigações adicionais a fim de se descobrir em que extensão a Eletrodinâmica de MCS não-mínima fornece resultados corretos para o EHQF.

Uma possibilidade de estudo seria relaxar as restrições a respeito dos campos e considerar as flutuações em ρ , por intermédio de uma teoria de campos inteiramente quântica, supondo (por exemplo) que os campos de matéria sejam espinores de Dirac. Outro cálculo, não ligado ao EHQ, mas que poderia trazer resultados úteis, seria o campo eletromagnético produzido por uma carga acelerada, numa teoria de MCS clássica, com acoplamento não-mínimo. Alguns resultados interessantes, como por exemplo a violação do princípio de Huygens, já foram obtidos na Ref. [5], mas em acoplamento mínimo. Pode-se estudar se o acoplamento não-mínimo introduz algum aspecto novo. Provavelmente, algum tipo de campo de dipolo surgirá.

Finalmente, alguns comentários acerca da origem (3+1)-dimensional de g (que viola a simetria de Lorentz), vista anteriormente: o fluxo do FC, g , contém uma contribuição da própria partícula (por meio do parâmetro γ) e uma outra da situação peculiar do espaço-tempo (por meio de $|\vec{v}| = v^3$), que possui uma simetria de Lorentz quebrada que mantém apenas os planos perpendiculares a \vec{v} inalterados. De fato, a construção de FCs só é possível em duas dimensões espaciais (não serão consideradas aqui dimensões espaciais maiores do que três). Uma interpretação para \vec{v} também é possível: este vetor é o responsável pelo confinamento dos elétrons no plano e, portanto, é natural relacionar \vec{v} com a componente z do campo magnético tridimensional, o qual é bastante intenso no EHQF (~ 10 T) e proíbe os elétrons de moverem-se na direção z , quebrando desta forma sua simetria de Lorentz (3+1)-dimensional.

Capítulo 4

Mecânica Quântica Supersimétrica Planar de uma Partícula Carregada em um Campo Eletromagnético Externo

À exceção da primeira seção, o conteúdo deste Capítulo consta da Ref. [41]. Aqui, estuda-se a Mecânica Quântica Supersimétrica (MQS) de uma partícula não-relativística em duas dimensões espaciais, sujeita tanto a um campo magnético como a um campo elétrico, numa formulação de supercampos e com o acoplamento não-mínimo típico de $(2+1)$ dimensões, visto no Capítulo 3. Para tanto, faz-se uma introdução à formulação de supercampos na primeira seção. Nas duas seções seguintes, são contemplados os casos $N=1$ e $N=2$ e a introdução da interação elétrica é adequadamente analisada. Na última seção, demonstra-se que existe a possibilidade de a partícula interagir com um superpo-

tencial Grassmanniano (isto é, de caráter Fermiônico, ou anti-comutante), que pode ser representado por uma interação matricial, de ordem 4×4 , no mínimo.

4.1 MQS no Superespaço

Esta seção introduz os aspectos básicos da Supersimetria (SUSY) em formulação de supercampos, num contexto de “teoria de campo” em $(0+1)$ dimensões (0 espaciais e 1 temporal), isto é, de fato, uma teoria de mecânica da partícula, pois os “campos” (em verdade coordenadas da partícula) dependem de t mas não de \vec{x} . O conteúdo desta seção é baseada na Ref. [55], mas também pode ser encontrado material semelhante na Ref. [38].

Desde a introdução dos conceitos de superespaço e de supercampos [56], os mesmos vêm sendo amplamente utilizados em trabalhos sobre teorias de campo; porém, no contexto de MQS, isto só ocorre muito raramente, talvez devido à ênfase natural que se procura dar às aplicações da MQS em várias áreas da Física Quântica e Estatística [35], menos afeitas a tais técnicas. Apesar de compreensível na exposição de resultados, tal procedimento, quando usado também na prospecção de novidades, pode vir a evitar a descoberta de certos tipos de interação que, na técnica de supercampos, revelam-se muito facilmente. Por exemplo, no final deste Capítulo, será obtido um termo supersimétrico de interação matricial que não seria muito facilmente obtido sem o uso de tal linguagem.

Em MQS, o conceito básico de superespaço é fazer que as coordenadas da partícula dependam não só do tempo t , mas também de um certo número, N , (N é o número de supersimetrias) de parâmetros extras Grassmannianos, isto é, que anti-comutam entre si (mas que comutam com todas as demais grandezas que não sejam também Grassmannianas). Assim, quando $N=1$ por exemplo, faz-se a seguinte extensão: $t \rightarrow (t; \theta)$, onde θ é o parâmetro Grassmanniano adicionado e que portanto satisfaz a $\theta^2 = 0$ (a realização de semelhante álgebra costuma se dar por meio de matrizes; por exemplo, a matriz de Pauli σ_+ satisfaz a esta condição em particular).

É importante que se estabeleçam as propriedades destas quantidades Grassmannianas.

Sendo as letras gregas designativas de tais variáveis anti-comutantes (também denominadas de Fermiônicas, pela analogia com campos) e as latinas referindo-se às variáveis comutantes (ou Bosônicas) usuais, então, por definição, valem as seguintes relações:

$$t\theta = \theta t, \quad x\theta = \theta x \quad (4.1)$$

$$\theta_1\theta_2 = -\theta_2\theta_1, \quad \theta_1^2 = \theta_2^2 = 0. \quad (4.2)$$

Como a ordem do produto é importante, algumas convenções fazem-se necessárias. Por exemplo, uma expansão em série de Taylor, em torno da origem, de uma função de duas variáveis (Grassmannianas ou não) será definida assim:

$$F(x, y) = \sum_n \frac{1}{n!} \left(\delta x \frac{\partial}{\partial x} + \delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n F \Big|_{(0;0)}, \quad (4.3)$$

onde a ordem das derivadas em relação às variações δx e δy devem ser mantidas como acima quando x e/ou y tratar(em)-se de variável(is) anti-comutante(s). Quando F depende de θ (que, como visto, é, por definição, uma variável Grassmanniana), então, como $\theta^2 = 0$, esta série é interrompida logo nos primeiros termos. Por exemplo, a expansão de $F(\theta) = \exp \theta$ é *exatamente*:

$$e^\theta = \sum \frac{\theta^n}{n!} = 1 + \theta \quad (4.4)$$

e, analogamente, vale a relação exata:

$$\cos \theta = 1 \quad (4.5)$$

e *qualquer* função analítica de θ expressa-se assim:

$$f(\theta) = a + \beta\theta, \quad (4.6)$$

onde a e β são constantes (isto é, não dependem de θ), Bosônica e Fermiônica, respec-

tivamente, o que garante que a função $f(\theta)$ seja bosônica¹. No caso de uma coordenada da partícula, $x(t)$, define-se o supercampo coordenada (ou supercoordenada, ou, bem entendido, simplesmente supercampo), $X(t, \theta)$, pela relação:

$$X(t, \theta) = x(t) + i\theta\lambda(t), \quad (4.7)$$

onde $\lambda(t)$ é dito o parceiro supersimétrico, anti-comutante, da variável comutante $x(t)$, e i é a unidade imaginária, acrescentada apenas para facilitar algumas definições.

Também podem ser definidos supercampos Fermiônicos. Por exemplo,

$$\Psi(t, \theta) = \psi(t) + \theta r(t), \quad (4.8)$$

e que portanto satisfaz a

$$\Psi^2 = 0. \quad (4.9)$$

Uma particularidade com relação à operação complexo conjugado: ao contrário do que se faz com números complexos usuais, é preciso definir uma ordem correta. Por analogia com a representação matricial (mas de fato uma necessidade matemática de uma operação dual, como é o caso do complexo conjugado), tem-se:

$$(\theta_1\theta_2)^* \equiv \theta_2^*\theta_1^* \quad (4.10)$$

e, portanto, se θ_1 e θ_2 são reais, obtém-se o peculiar resultado:

$$(\theta_1\theta_2)^* = \theta_2^*\theta_1^* = \theta_2\theta_1 = -\theta_1\theta_2, \quad (4.11)$$

isto é, o produto de duas quantidades Grassmannianas reais é uma quantidade imaginário-puro. Portanto, a fim de se ter uma quantidade real, basta tomar o produto $i\theta_1\theta_2$.

¹De fato, $\beta\theta$ é um produto de um número par de variáveis Grassmannianas, o que sempre dá Bosônico, pois $\varepsilon(\beta\theta) = -\beta\varepsilon\theta = +(\beta\theta)\varepsilon$.

A transformação de SUSY (N=1) é definida no superespaço da seguinte forma:

$$\theta' = \theta + \varepsilon \quad (4.12)$$

$$t' = t + i\varepsilon\theta, \quad (4.13)$$

o que corresponde a um tipo de translação (de parâmetro ε) no superespaço; o fator i , como visto acima, serve para manter o tempo t real. Sob tal transformação, a supercoordenada da partícula, $X(t, \theta)$, passa a ser:

$$X(t, \theta) \rightarrow X(t', \theta') = X(t, \theta) + \delta X(t, \theta), \quad (4.14)$$

ou:

$$X(t + i\varepsilon\theta, \theta + \varepsilon) = X(t, \theta) + \delta X(t, \theta). \quad (4.15)$$

Usando a expansão em série de Taylor conforme visto acima, o membro esquerdo desta equação é:

$$X(t, \theta) + i\varepsilon\theta\partial_t X(t, \theta) + \varepsilon\partial_\theta X(t, \theta) \quad (4.16)$$

e, comparando com o membro direito, obtém-se:

$$\delta X(t, \theta) = \varepsilon(i\theta\partial_t + \partial_\theta) X(t, \theta), \quad (4.17)$$

ou

$$\delta X(t, \theta) = \varepsilon Q X(t, \theta), \quad (4.18)$$

onde:

$$Q \equiv \partial_\theta + i\theta\partial_t \quad (4.19)$$

é o *gerador da SUSY*, que satisfaz à seguinte álgebra de SUSY:

$$Q^2 \equiv \frac{1}{2} \{Q, Q\} = i\partial_t \equiv H, \quad (4.20)$$

juntamente com $[Q, H] = 0$.

Agora, será preciso definir melhor a derivação e integração Grassmannianas. A partir de requisitos bem gerais do Cálculo (por exemplo, a linearidade), podem ser demonstradas as seguintes propriedades [55, 57]:

$$\partial_\theta(\text{const}) = 0 \quad (4.21)$$

$$\partial_\theta\theta = 1 \quad (4.22)$$

$$\partial_\theta [\phi(\theta)\psi(\theta)] = (\partial_\theta\phi)\psi - \phi(\partial_\theta\psi) \quad (4.23)$$

$$\int d\theta \theta = 1 \quad (4.24)$$

$$\int d\theta = 0, \quad (4.25)$$

onde $\phi(\theta)$ é anti-comutante (caso contrário, o sinal do último termo da terceira equação seria positivo, dando a regra de Leibniz usual). As outras quatro propriedades permitem fazer a seguinte identificação

$$\int d\theta (\dots) = \partial_\theta(\dots). \quad (4.26)$$

Trocando i por $-i$ na expressão do gerador Q , tem-se a definição da *derivada covariante de supersimetria*:

$$D \equiv \partial_\theta - i\theta\partial_t. \quad (4.27)$$

A importância desta derivada reside no fato de que, ao contrário de $\partial_\theta X$, DX é um supercampo, isto é, transforma-se como (4.18), sob uma transformação de SUSY:

$$\delta[DX(t, \theta)] = \varepsilon Q[DX(t, \theta)]. \quad (4.28)$$

(o mesmo ocorre com \dot{X} e com produtos de supercampos). Com isso, uma ação $S[x, \dot{x}] = \int dt L(x, \dot{x}; t)$ pode ser estendida para o superespaço assim:

$$S = \int dt d\theta F(X, \dot{X}, DX), \quad (4.29)$$

onde $F(X, \dot{X}, DX)$ satisfaz $L = \int d\theta F$ e é uma função dos supercampos. Por construção, a ação será invariante de SUSY, ou, mais especificamente,

$$\delta L = \frac{d}{dt}(\text{algo}). \quad (4.30)$$

Em especial, a ação

$$S = \frac{i}{2}M \int dt d\theta \dot{X}DX \quad (4.31)$$

dá:

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{i}{2}M\lambda\dot{\lambda} \right), \quad (4.32)$$

ou seja, o termo cinético Bosônico usual e seu parceiro, o termo cinético Fermiônico. Da definição de Hamiltoniano, $H = \dot{x}p_x + \dot{\lambda}p_\lambda - L$ (é importante ressaltar a ordem do produto no segundo termo), onde $p_x = \partial L/\partial \dot{x}$ e $p_\lambda = \partial L/\partial \dot{\lambda}$ são os momenta, chega-se imediatamente a $H = p_x^2/2M$, ou seja, o termo cinético Fermiônico não contribui para o Hamiltoniano.

Passando agora para o caso N=2, as transformações de SUSY são dadas por²:

$$\theta' = \theta + \varepsilon \quad (4.33)$$

$$\bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\varepsilon} \quad (4.34)$$

$$t' = t + i\bar{\varepsilon}\theta + i\varepsilon\bar{\theta} \quad (4.35)$$

e um supercampo Bosônico, por:

$$X(t, \theta, \bar{\theta}) = x(t) + i\bar{\theta}\lambda(t) + i\theta\bar{\lambda}(t) + \theta\bar{\theta}f(t), \quad (4.36)$$

²Aqui, em vez de se designarem os 2 parâmetros Grassmannianos reais por θ_1 e θ_2 , prefere-se utilizar a escolha mais usual de se trabalhar com o par de quantidades complexas conjugadas $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ e $\bar{\theta} = \theta_1 - i\theta_2$.

cuja variação sob uma transformação de SUSY é:

$$\delta X = (\bar{\varepsilon}Q + \varepsilon\bar{Q})X, \quad (4.37)$$

onde:

$$Q \equiv \partial_{\bar{\theta}} + i\theta\partial_t \quad (4.38)$$

$$\bar{Q} \equiv \partial_{\theta} + i\bar{\theta}\partial_t, \quad (4.39)$$

levando à seguinte álgebra de SUSY:

$$Q^2 = 0, \quad \bar{Q}^2 = 0, \quad \{Q, \bar{Q}\} = 2i\partial_t = 2H. \quad (4.40)$$

As derivadas covariantes são definidas por:

$$D \equiv \partial_{\bar{\theta}} - i\theta\partial_t \quad (4.41)$$

$$\bar{D} \equiv \partial_{\theta} - i\bar{\theta}\partial_t, \quad (4.42)$$

satisfazendo:

$$D^2 = 0 \quad (4.43)$$

$$\bar{D}^2 = 0 \quad (4.44)$$

$$\{D, \bar{D}\} = -2i\partial_t \quad (4.45)$$

$$\{D, Q\} = 0. \quad (4.46)$$

Uma ação em particular bem simples é:

$$S = \int dt d\theta d\bar{\theta} \left[\frac{1}{2} \bar{D}XDX - U(X) \right]. \quad (4.47)$$

O primeiro termo dará origem a termos cinéticos e pode ser calculado utilizando-se as

expressões acima para o supercampo e as derivadas covariantes. O segundo termo, contendo o *superpotencial* $U(X)$, fornece a interação da partícula com um campo externo. Expandindo o superpotencial em torno de $X = x$,

$$U(X) = U(x) + (i\bar{\theta}\lambda + i\theta\bar{\lambda} + \theta\bar{\theta}f) \left. \frac{\partial U(X)}{\partial X} \right|_{X=x} + \frac{1}{2} (i\bar{\theta}\lambda + i\theta\bar{\lambda} + \theta\bar{\theta}f)^2 \left. \frac{\partial^2 U(X)}{\partial X^2} \right|_{X=x} \quad (4.48)$$

$$= U(x) + (i\bar{\theta}\lambda + i\theta\bar{\lambda}) U'(x) + \theta\bar{\theta} [fU'(x) + \bar{\lambda}\lambda U''(x)], \quad (4.49)$$

que é uma expansão exata, pois os termos de terceira ordem já dão zero, devido à nilpotência das quantidades Grassmannianas. Usando as propriedades de integração e derivação Grassmannianas, chega-se a uma ação $S = \int dt L$, onde:

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + i\bar{\lambda}\dot{\lambda} + \frac{1}{2} f^2 + fU'(x) + \bar{\lambda}\lambda U''(x), \quad (4.50)$$

referente a uma massa unitária e com o grau de liberdade f sem dinâmica e que portanto pode ser eliminado usando-se a sua equação de movimento, $f = -U'$, dando como resultado:

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + i\bar{\lambda}\dot{\lambda} - \frac{1}{2} U'^2(x) + \bar{\lambda}\lambda U''(x). \quad (4.51)$$

Para os objetivos deste Capítulo, o que foi desenvolvido até aqui é suficiente. Nas próximas seções, as demais informações necessárias serão vistas.

4.2 MQS-N=1

Uma partícula carregada em (2+1)D, não-minimamente acoplada a um campo magnético, é descrita como um sistema de MQS- $N = 1$ por meio da seguinte ação no superespaço:

$$S_1 = \frac{iM}{2} \int dt d\theta (D\vec{X}) \cdot \dot{\vec{X}} + iq \int dt d\theta D\vec{X} \cdot \vec{A}'(\vec{X}), \quad (4.52)$$

onde $\vec{A}'(\vec{X})$ é o (super)potencial vetor em um esquema de acoplamento não-mínimo, dado pela Eq. (3.8), e $\vec{X}(t)$ é o “supercampo real” (de fato, a supercoordenada da partícula), dado por:

$$X^j(t, \theta) = x^j(t) + i\theta\lambda^j(t), \quad j = (1, 2), \quad (4.53)$$

$x^j(t)$ sendo as duas coordenadas reais da partícula planar, $\lambda^j(t)$ seus parceiros supersimétricos Grassmannianos e θ a coordenada real e Grassmanniana que, além do tempo t , parametriza o superespaço, $(t; \theta)$. A derivada supersimetricamente covariante, D , é dada por:

$$D = \partial_\theta - i\theta\partial_t. \quad (4.54)$$

A ação (4.52), $S_1 = \int dt L_1$, separa-se em componentes do supercampo assim:

$$L_1 = \frac{M\dot{\vec{x}}^2}{2} - \frac{iM}{2}\dot{\vec{\lambda}} \cdot \vec{\lambda} + q\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} - g\dot{\vec{x}} \cdot \vec{E} - \frac{iq}{2}(\vec{\lambda} \times \vec{\lambda})B - \frac{ig}{2}(\vec{\lambda} \times \vec{\lambda})(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}), \quad (4.55)$$

onde é preciso notar que

$$\vec{\lambda} \times \vec{\lambda} \equiv \epsilon_{ij}\lambda_i\lambda_j = [\lambda_1, \lambda_2]. \quad (4.56)$$

Uma conveniente mudança de variáveis será feita:

$$\psi \equiv \sqrt{\frac{M}{2}}(\lambda_1 + i\lambda_2) \quad (4.57)$$

$$\bar{\psi} \equiv \sqrt{\frac{M}{2}}(\lambda_1 - i\lambda_2), \quad (4.58)$$

dando origem à seguinte expressão para o Lagrangeano:

$$L_1 = \frac{M\dot{\vec{x}}^2}{2} - \frac{i}{2}(\dot{\psi}\bar{\psi} + \dot{\bar{\psi}}\psi) + q\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} - g\dot{\vec{x}} \cdot \vec{E} + \frac{q}{2M}[\psi, \bar{\psi}]B + \frac{g}{2M}[\psi, \bar{\psi}](\vec{\nabla} \cdot \vec{E}). \quad (4.59)$$

O correspondente Hamiltoniano será obtido depois de um processo de quantização

canônica seguindo a Ref. [35, p.46]. Os momenta Grassmannianos são definidos como

$$\pi \equiv \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\psi}} = -\frac{i}{2}\bar{\psi} \quad (4.60)$$

$$\bar{\pi} \equiv \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = -\frac{i}{2}\psi, \quad (4.61)$$

que correspondem aos vínculos de segunda classe

$$\chi_1 \equiv \pi + \frac{i}{2}\bar{\psi} = 0 \quad (4.62)$$

$$\chi_2 \equiv \bar{\pi} + \frac{i}{2}\psi = 0 \quad (4.63)$$

e conduzem ao seguinte Hamiltoniano:

$$H_1 = \frac{(\vec{p} - q\vec{A} + g\vec{\tilde{E}})^2}{2M} - \frac{q}{2M}[\psi, \bar{\psi}]B - \frac{g}{2M}[\psi, \bar{\psi}](\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + (\pi + \frac{i}{2}\bar{\psi})\mu_1 + (\bar{\pi} + \frac{i}{2}\psi)\mu_2, \quad (4.64)$$

onde as definições usuais, relativas às variáveis Bosônicas, como $p_i = \partial L_1 / \partial \dot{x}_i$, são usadas, e μ_1 e μ_2 são dois multiplicadores de Lagrange Grassmannianos associados aos vínculos (4.62) e (4.63). As equações de movimento correspondentes são:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H_1}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_1}{\partial x_i}, \quad (4.65)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H_1}{\partial \pi}, \quad \dot{\pi} = -\frac{\partial H_1}{\partial \psi}, \quad (4.66)$$

$$\dot{\bar{\psi}} = -\frac{\partial H_1}{\partial \bar{\pi}}, \quad \dot{\bar{\pi}} = -\frac{\partial H_1}{\partial \bar{\psi}}, \quad (4.67)$$

que podem ser usadas juntamente com as condições de consistência $\dot{\chi}_1 = 0$ e $\dot{\chi}_2 = 0$ (que garantem que os vínculos χ_1 e χ_2 permaneçam válidos durante a evolução temporal) para obter $\mu_1 = iqB'\psi/M$ e $\mu_2 = -iqB'\bar{\psi}/M$, onde B' é dado pela Eq. (3.11). O Hamiltoniano que resulta é

$$H_1 = \frac{(\vec{p} - q\vec{A} + g\vec{\tilde{E}})^2}{2M} + \frac{iqB'}{M}(\pi\psi - \bar{\pi}\bar{\psi}). \quad (4.68)$$

Agora, a noção de parênteses de Dirac faz-se necessária. Uma expressão fechada para eles, válida para um sistema como o que está sendo estudado aqui, é dado nas Refs. [35, 58]:

$$\begin{aligned} \{F, G\}_D &= \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial x_i} + \\ &+ (-1)^{\deg F} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial F}{\partial \psi} \frac{\partial G}{\partial \pi} + \frac{\partial F}{\partial \pi} \frac{\partial G}{\partial \psi} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\psi}} \frac{\partial G}{\partial \bar{\pi}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\pi}} \frac{\partial G}{\partial \bar{\psi}} \right] + \\ &+ (-1)^{\deg F} i \left[\frac{\partial F}{\partial \psi} \frac{\partial G}{\partial \bar{\psi}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\psi}} \frac{\partial G}{\partial \psi} - \frac{1}{4} \frac{\partial F}{\partial \pi} \frac{\partial G}{\partial \bar{\pi}} - \frac{1}{4} \frac{\partial F}{\partial \bar{\pi}} \frac{\partial G}{\partial \pi} \right], \end{aligned} \quad (4.69)$$

com $\deg F = 1$ (ou 0) se F é uma função no espaço de fase valorada em números Grassmannianos (ou valorada em números-c comuns). As seguintes propriedades de (anti-)simetria desejadas são válidas: $\{F, G\}_D = \{G, F\}_D$ para $\deg F = \deg G = 1$ e $\{F, G\}_D = -\{G, F\}_D$ para os demais casos. É imediato obter:

$$\{x_i, p_j\}_D = \delta_{ij}, \quad \{\psi, \pi\}_D = \{\bar{\psi}, \bar{\pi}\}_D = -\frac{1}{2} \quad (4.70)$$

$$\{\psi, \bar{\psi}\}_D = -i, \quad \{\pi, \bar{\pi}\}_D = \frac{i}{4}, \quad (4.71)$$

que, por meio do procedimento de quantização canônica, $\{, \}_D \rightarrow [,]/(i\hbar)$ (ou $\{, \}_D \rightarrow \{, \}/(i\hbar)$ no caso de duas variáveis Grassmannianas), conduz à seguinte álgebra de operadores ($\hbar = 1$):

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij}, \quad \{\psi, \pi\} = \{\bar{\psi}, \bar{\pi}\} = -\frac{i}{2} \quad (4.72)$$

$$\{\psi, \bar{\psi}\} = 1, \quad \{\pi, \bar{\pi}\} = -\frac{1}{4}, \quad (4.73)$$

além de $\pi^2 = \bar{\pi}^2 = \psi^2 = \bar{\psi}^2 = 0$. Uma possível realização desta álgebra é dada por:

$$\psi = \sigma_+, \quad \bar{\psi} = \sigma_- \quad (4.74)$$

$$\pi = -\frac{i}{2}\sigma_-, \quad \bar{\pi} = -\frac{i}{2}\sigma_+, \quad (4.75)$$

onde os σ 's são as matrizes de Pauli (e não há nenhuma outra representação inequivalente,

de acordo com a Teoria de Grupos [59]).

Substituindo-se estas equações no Hamiltoniano (4.68), obtém-se finalmente sua versão quantizada:

$$H_1 = \frac{\left(\vec{p} - q\vec{A} + g\vec{\tilde{E}}\right)^2}{2M} - \frac{qB}{2M}\sigma_3 - \frac{g(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{2M}\sigma_3, \quad (4.76)$$

onde a relação $[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_3$ foi usada. Nota-se que este Hamiltoniano revela automaticamente uma partícula de spin-1/2 com momento de dipolo magnético $q\sigma_3/2M$ e fator giromagnético 2, como esperado, pois em acordo com a Ref. [42], sobre MQS (mas sem a formulação de supercampo usada aqui), e com as Refs. [60], que trazem argumentos gerais relativos a partículas em (2+1) dimensões.

É interessante comparar este Hamiltoniano com o da Eq. (3.24), que fora então obtido como o limite não-relativístico da equação de Dirac não-mínima em (2+1) dimensões:

$$H = q\Phi + \frac{\left(\vec{p} - q\vec{A} + g\vec{\tilde{E}}\right)^2}{2M} - \frac{qB}{2M} - gB - \frac{g}{2M}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}). \quad (4.77)$$

Caso se queira supersimetrizar tal modelo, é importante notar que isto não é possível (na MQS-N=1)³ no caso de uma interação via um potencial escalar como o que comparece na equação acima, $q\Phi - gB$. Portanto, a fim de se manter a invariância sob a SUSY-N=1, é necessário que:

$$gB(x, y) = q\Phi(x, y), \quad (4.78)$$

e, em tais condições, passa-se a ter:

$$H = \frac{\left(\vec{p} - q\vec{A} + g\vec{\tilde{E}}\right)^2}{2M} - \frac{qB}{2M} - \frac{g}{2M}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}). \quad (4.79)$$

Comparando-se as Eqs. (4.76) e (4.79), conclui-se que esta última iguala-se à componente de spin-para-cima da primeira. O mesmo acontece com a componente de spin-

³Ver Ref. [36, p.51], onde se mostra também que o mesmo já *não* mais vale para N=2.

para-baixo da Eq. (4.76), quando se utiliza uma representação diferente da expressa pelas Eqs. (4.74–4.75), na qual as matrizes σ_+ e σ_- trocam de papel entre si.

O último termo da Eq. (4.76) pode ser relacionado ao campo magnético, desde que se admita estar numa teoria de Maxwell-Chern-Simons (MCS), na qual, como visto no Cap. 1, valem as seguintes equações de campo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - mB = \rho \quad (4.80)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (4.81)$$

$$\vec{\nabla} B - m\vec{E} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (4.82)$$

onde, como antes, $\vec{\nabla}_i \equiv \epsilon_{ij} \partial_j$, e m é o parâmetro de massa (topológica) de Chern-Simons. De fato, na região onde não há cargas externas ($\rho = 0$), o Hamiltoniano (4.76) adquire a seguinte expressão:

$$H_1 = \frac{(\vec{p} - q\vec{A} + g\vec{E})^2}{2M} - \frac{q\sigma_3}{2M} \left(1 + \frac{gm}{q}\right) B. \quad (4.83)$$

Como conseqüência deste Hamiltoniano, é natural definir um *fator giromagnético efetivo*, γ_{eff} , cujo afastamento do valor padrão, 2, é dado por:

$$\gamma_{\text{eff}} - 2 = \frac{gm}{q} - 1. \quad (4.84)$$

Neste contexto, a condição

$$gm/q = 1 \quad (4.85)$$

é necessária, a fim de se manter o fator giromagnético *efetivo* em seu valor padrão, 2. É interessante notar que esta mesma condição também foi obtida em trabalhos de teoria de campo, só que com outras interpretações: ela transforma uma teoria de MCS interagente numa teoria livre e relaciona-a a uma teoria de puro-CS e aos anyons [14, 53]; ela também dá origem a uma correção radiativa nula, a um laço, para a massa do fóton [53]; e,

finalmente, ela reduz as equações diferenciais dos campos de calibre, de segunda para primeira ordem, permitindo o surgimento de soluções de vórtice [61].

4.3 MQS-N=2

A formulação em supercampos da MQS de Witten (que é unidimensional e $N=2$) pode ser encontrada nas Refs. [38, 62, 63], em termos de um superpotencial escalar (uma função de uma supercoordenada real unidimensional) e consta basicamente do que está feito no final da Seção 4.1. Uma generalização para d dimensões espaciais é apresentada nas Refs. [36, 63], também em termos de um superpotencial escalar, mas agora como uma função das d supercoordenadas reais. Uma abordagem diferente para duas dimensões espaciais, usando um superpotencial vetor em vez de um escalar, é esboçado na Ref. [64], mas sem uma formulação de supercampos.

Por outro lado, a MQS- $N=2$ da equação de Pauli em duas dimensões espaciais é formulada em termos de duas supercoordenadas (complexas), quiral e anti-quiral, nas Refs. [63, 65], por meio de um super(pre)potencial (dito de Kähler), que é uma função destas duas supercoordenadas. A introdução de uma interação elétrica na equação planar de Pauli sem a quebra explícita da SUSY está feita na Ref. [66], mas usando um campo magnético não-estacionário. Nas Refs. [67], o operador de Pauli (incluindo um potencial escalar externo) em duas dimensões espaciais é identificado com uma componente- 2×2 de um super-Hamiltoniano total, 4×4 . Uma formulação de supercampos, $N=2$, abarcando todos estes assuntos, isto é, a equação de Pauli em $(2+1)$ dimensões com interações elétricas, e também considerando o acoplamento planar não-mínimo estudado no Capítulo 3, continuava faltando na literatura. O presente Capítulo é dedicado a preencher esta lacuna. Situações não-estacionárias não serão consideradas neste trabalho e, assim, a interação elétrica só é devida a um potencial escalar. Também, a possibilidade, mencionada acima, de o operador de Pauli ser uma componente do super-Hamiltoniano total não será considerada aqui, mas, em vez disto, ele sempre será considerado como o próprio

super-Hamiltoniano total.

Foi visto, na Seção 3.1, que, para se obter a equação de Schrödinger com um acoplamento não-mínimo, é necessário somar o termo (3.5) ao Hamiltoniano livre e também executar a substituição expressa pela Eq. (3.8). Se a condição (4.78) é válida, então não há potencial de interação escalar algum no Hamiltoniano resultante que, assim, se torna ‘puro-magnético’, permitindo que seja deduzido a partir da superação quiral da Ref. [65]. Tal superação contém, em vez de $\vec{A}(x, y)$, o prepotencial (real) de Kähler, $K(x, y)$ (como será visto abaixo), que satisfaz às seguintes relações (de agora em diante, A_i significa $(\vec{A})_i$):

$$A_j = \epsilon_{jk} \partial_k K \quad (4.86)$$

$$B \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} \equiv \epsilon_{ij} \partial_i A_j = -\nabla^2 K. \quad (4.87)$$

Então, seria desejável descobrir como implementar a prescrição não-mínima da Eq. (3.8) em termos do prepotencial $K(x, y)$. Isto é feito como segue:

$$\begin{aligned} A'_i &= A_i - \frac{g}{q} \tilde{E}_i \\ &= \epsilon_{ij} \partial_j K - \frac{g}{q} \epsilon_{ij} E_j \equiv \epsilon_{ij} \partial_j K - \alpha \epsilon_{ij} E_j \\ &= \epsilon_{ij} [\partial_j K + \alpha (\partial_t A_j + \partial_j \Phi)] \\ &= \epsilon_{ij} \partial_j (K + \alpha \Phi) \equiv \epsilon_{ij} \partial_j K', \end{aligned} \quad (4.88)$$

onde a condição estacionária $\partial_t = 0$ foi usada. Assim, a prescrição procurada pode ser considerada como:

$$K \rightarrow K' = K + \alpha \Phi = K + \alpha^2 B = K - \alpha^2 \nabla^2 K. \quad (4.89)$$

Voltando agora à superação quiral, e usando uma notação semelhante àquela da Ref. [65], as coordenadas do superespaço são o tempo, t , e as variáveis Grassmannianas, θ e $\bar{\theta}$. Em um esquema de acoplamento não-minimo, a superação N=2 para uma

partícula planar com massa M , carga elétrica q e momento de dipolo magnético g , num campo magnético satisfazendo à Eq. (4.87), é dado por:

$$S_2 = \frac{M}{8} \int dt d\theta d\bar{\theta} D\bar{\phi}\bar{D}\phi + q \int dt d\theta d\bar{\theta} K'(\phi, \bar{\phi}), \quad (4.90)$$

onde $K'(\phi, \bar{\phi})$ é o superpotencial dado pelo prepotencial de Kähler redefinido pela Eq. (4.89), agora em termos das supercoordenadas quiral e anti-quiral da partícula, ϕ e $\bar{\phi}$:

$$\phi(t, \theta, \bar{\theta}) = z(t) + \theta\xi(t) - i\theta\bar{\theta}\dot{z}(t) \quad (4.91)$$

$$\bar{\phi}(t, \theta, \bar{\theta}) = \bar{z}(t) - \bar{\theta}\bar{\xi}(t) + i\theta\bar{\theta}\dot{\bar{z}}(t), \quad (4.92)$$

satisfazendo a $\bar{D}\bar{\phi} = D\phi = 0$, e com $z(t) = x(t) + iy(t)$ e $\bar{z}(t) = x(t) - iy(t)$ sendo as variáveis complexas conjugadas que representam as coordenadas reais $x(t)$ e $y(t)$ da partícula, e $\xi(t)$ e $\bar{\xi}(t)$ seus parceiros supersimétricos Grassmannianos. As derivadas supersimétricas são definidas como

$$D = \partial_{\bar{\theta}} - i\theta\partial_t \quad (4.93)$$

$$\bar{D} = \partial_{\theta} - i\bar{\theta}\partial_t. \quad (4.94)$$

A superação (4.90), $S_2 \equiv \int dt L_2$, em componentes, fica:

$$L_2 = \frac{M\dot{\vec{x}}^2}{2} - i\frac{M}{8}(\dot{\xi}\bar{\xi} + \dot{\bar{\xi}}\xi) + q\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} - g\dot{\vec{x}} \cdot \vec{E} + \frac{q}{8}[\xi, \bar{\xi}]B + \frac{g}{8}[\xi, \bar{\xi}](\vec{\nabla} \cdot \vec{E}), \quad (4.95)$$

que, como esperado, é o mesmo resultado que seria obtido caso se partisse de uma superação mínima (isto é, a Eq. (4.90), com $K(\phi, \bar{\phi})$ substituindo $K'(\phi, \bar{\phi})$), e a prescrição não-minima só tivesse sido implementada depois da correspondente quebra em componentes, por meio das Eqs. (3.8) e (3.11). Além disso, este Lagrangeano é idêntico ao caso $N=1$, Eq. (4.59), contanto que a identificação $\psi = \frac{\sqrt{M}}{2}\xi$ seja feita. Assim, todo o procedimento de quantização conduzido depois da Eq. (4.59) pode ser repetido, conduzindo

aos mesmos resultados e atestando, em uma descrição de supercampos, o fato de que em (2+1) dimensões a equação de Pauli possui, em lugar de $N=1$, uma SUSY- $N=2$ [42] (note-se que esta conclusão é válida, independentemente de se o acoplamento é mínimo ou não-mínimo).

4.4 Uma interação mais geral

Finalmente, uma possibilidade mais geral para a interação será discutida agora, na qual os seguintes termos são somados à superação (4.90):

$$\int dt d\theta \Gamma(\phi) + \int dt d\bar{\theta} \bar{\Gamma}(\bar{\phi}), \quad (4.96)$$

onde $\Gamma(\phi)$ e seu complexo conjugado $\bar{\Gamma}(\bar{\phi})$ são necessariamente campos externos Grassmannianos, a fim de que a ação possa ser Bosônica. Os termos correspondentes acrescidos ao Lagrangeano (4.95) são:

$$\xi \Gamma'(z) - \bar{\xi} \bar{\Gamma}'(\bar{z}). \quad (4.97)$$

O campo externo (pseudo-)clássico $\Gamma'(z)$, embora não quantizado, precisa anti-comutar com ξ , assim como com si mesmo. Portanto, ele também pode ser representado por uma matriz 2×2 . Porém, estas exigências de anti-comutação impõem restrições tão severas à matriz $\Gamma'(z)$ que, depois do procedimento de quantização mencionado na Seção 4.2, a contribuição de cada uma das parcelas de (4.97) para o Hamiltoniano é zero. Por outro lado, se as coordenadas de Grassmann quantizadas, ξ e $\bar{\xi}$, e os respectivos momenta são escolhidos como tendo uma representação diferente da que é dada pelas Eqs. (4.74–4.75) (é preciso lembrar que $\psi = \frac{\sqrt{M}}{2}\xi$), então o mesmo já não ocorre. Realmente, considerando-se,

por exemplo,

$$\xi = \sigma_+ \otimes \mathbf{1}_{2 \times 2} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

e

$$\Gamma'(z) \equiv \begin{pmatrix} f(z) & g(z) & h(z) & i(z) \\ j(z) & k(z) & l(z) & m(z) \\ n(z) & o(z) & p(z) & q(z) \\ r(z) & s(z) & t(z) & u(z) \end{pmatrix}, \quad (4.99)$$

as mesmas exigências de anti-comutação para $\Gamma'(z)$ conduzem agora ao seguinte Hamiltoniano:

$$H_2 = \frac{(\vec{p} - q\vec{A} + g\vec{E})^2}{2M} - \frac{qB}{2M}\sigma_3 \otimes \mathbf{1}_{2 \times 2} - \frac{g(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{2M}\sigma_3 \otimes \mathbf{1}_{2 \times 2} + \frac{2}{\sqrt{M}}G(z, \bar{z}), \quad (4.100)$$

onde

$$G(z, \bar{z}) = \begin{pmatrix} 0 & -f(z) & 0 & -h(z) \\ -\bar{f}(\bar{z}) & 0 & \bar{f}^2(\bar{z})/\bar{h}(\bar{z}) & 0 \\ 0 & f^2(z)/h(z) & 0 & f(z) \\ -\bar{h}(\bar{z}) & 0 & \bar{f}(\bar{z}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.101)$$

É importante ressaltar que esta interação mistura as quatro componentes da função de onda, ao contrário do Hamiltoniano original. Os campos de Grassmann $\Gamma'(z)$ e $\bar{\Gamma}'(\bar{z})$ podem ser interpretados como campos externos (pseudo-)clássicos do tipo-fotino, do mesmo modo como o prepotencial eletromagnético $K'(z, \bar{z})$ (ou os potenciais Φ e \vec{A}) normalmente é considerado como um campo externo clássico tipo-fóton. A necessidade de se usar uma função de onda com quatro componentes, aqui, é semelhante ao que acontece em teoria de campo em (2+1)D, quando se é forçado a introduzir Férmions massivos de quatro componentes, a fim de tornar a massa compatível com a simetria de paridade.

Conclusões

Abaixo, são apresentadas as conclusões desta tese:

- O trabalho desenvolvido nos dois primeiros Capítulos permitiu que algumas propriedades básicas da Eletrodinâmica de MCS fossem explicitadas, dentre as quais destacam-se:
 - a visualização do modo de propagação de uma onda plana, evidenciada pelas Eqs. (1.30–1.32) e (1.39) e pela Fig. 1.1;
 - a resolução analítica exata de três problemas: os campos de MCS gerados por uma fita condutora infinita com corrente uniformemente distribuída pela sua largura (e a respectiva analogia com o efeito Hall radial) e as equações de Euler e de Schrödinger para um elétron sujeito aos campos de MCS produzidos por dois fios retos, infinitos e paralelos, com correntes estacionárias em sentidos opostos;
 - as equações de campo de MCS em forma integral, dadas pelas Eqs. (1.50–1.55), assim como a expressão dos campos produzidos por algumas configurações básicas de carga e corrente, colocando assim a Eletrodinâmica de MCS em pé de igualdade com os resultados tradicionais do Eletromagnetismo usual da

- Física Básica, aumentando a intuição física sobre a primeira e trazendo-lhe benefício pedagógico, pela comparação com a Eletrodinâmica usual;
- idem, com relação a propriedades específicas das (2+1) dimensões, como por exemplo as unidades de certas grandezas, tais como carga elétrica e momento de dipolo magnético (igual à de fluxo magnético).
- No Capítulo 3, o último sub-item acima foi explorado no sentido de se fazer um paralelo entre a teoria de MCS não-mínima e o modelo de Férmions Compostos para o EHQF, obtendo-se um resultado positivo, pelo menos no que tange a um dos pilares deste último, que é a redefinição do campo magnético (com relação ao outro pilar, que é a função de onda de Jain, ver sugestões abaixo).
 - Outro resultado do Capítulo 3 foi a obtenção do limite não-relativístico da equação de Dirac em (2+1) dimensões, Eq. (3.24), e a consequente demonstração explícita de que o parâmetro g do acoplamento não-mínimo típico desta dimensionalidade corresponde a um momento de dipolo magnético *anômalo* (isto é, além do relativo ao spin), mesmo para partículas sem spin (anteriormente, tal resultado só era obtido indiretamente, explorando-se as propriedades de simetria dos índices de Lorentz [14, 15, 16], ou então por meio de uma redução dimensional a partir de (3+1) dimensões [18]).
 - No Capítulo 4, a formulação em supercampos da Mecânica Quântica Supersimétrica Planar foi utilizada na equação de Pauli, trazendo os seguintes resultados principais:
 - ao se passar para o esquema de acoplamento não-mínimo apresentado no Capítulo 3, a equação de Pauli não só preserva a sua SUSY-N=2, como passa a admitir a coexistência da interação magnética com uma interação elétrica, via um potencial escalar, desde que este satisfaça à condição dada pela Eq. (4.78);
 - o resultado do sub-item anterior, na hipótese da validade do penúltimo item acima, referente ao Capítulo 3, implica a possibilidade de existência de uma SUSY no sistema de Férmions Compostos que descreve o EHQF;

- outro resultado é a Eq. (4.85), uma condição também obtida em trabalhos de teoria de campo (com outras interpretações), que, aqui, garante que o fator giromagnético efetivo seja igual a seu valor padrão, 2;
- finalmente, graças à formulação em supercampos, demonstrou-se, em (2+1)D, a possibilidade de, mantendo a SUSY, que a partícula interaja com um potencial externo Grassmanniano (isto é, anti-comutante, ou pseudo-clássico), que pode ser representado por uma matriz de ordem 4×4 ou superior.

As sugestões para continuação dos trabalhos aqui apresentados são as que seguem abaixo.

- Condensar os principais resultados dos Capítulos 1 e 2 num artigo no estilo da *American Journal of Physics*, para submissão a esta revista (este trabalho já está em andamento).
- Buscar uma solução, mesmo que aproximada, para o problema apresentado na Seção 2.3.2.
- Verificar se o paralelo desenvolvido na Seção 3.3 pode ser completado a fim de também abranger o segundo pilar do modelo de Férmions Compostos, ou seja, as funções de onda de Jain. Uma idéia para efetivar este trabalho seria escrever uma teoria de campo com um Lagrangeano do tipo que foi mostrado na primeira nota-de-rodapé da referida Seção e, em seguida, tentar obter a configuração de mínima energia por meio de alguma aproximação. O eventual sucesso de semelhante tentativa seria um avanço, na medida em que seria de se esperar que, assim, se pudessem extrair informações que a teoria de Jain não é capaz de fornecer, por ser uma teoria de “ansatz” para a função de onda, ou seja, ela não possui um Lagrangeano. Uma colaboração com algum(ns) pesquisador(es) com experiência em teoria da Matéria Condensada seria certamente muito proveitosa neste trabalho.
- Caso o paralelo da Seção 3.3 se complete conforme a sugestão anterior, verificar

se a SUSY da equação de Pauli estudada no Capítulo 4 pode ser usada para extrair alguma solução exata (ou mesmo aproximada) para o problema dos Férmions Compostos do EHQF.

- Usar a Ref. [55] para expandir a Seção 4.1 e compor uma monografia sobre formulação em supercampos da Mecânica Quântica Supersimétrica (MQS), a ser submetida para publicação no *Physics Reports* (trabalho em andamento). Esta seria uma contribuição interessante, já que os trabalhos em MQS fazem muito pouco uso das técnicas de supercampos.
- Tentar generalizar os resultados do Cap. 4 para casos não-estacionários, usando a Ref. [66].
- Procurar, na Física da Matéria Condensada e na Física Nuclear, algum exemplo de aplicação para o potencial Grassmanniano apresentado na Seção 4.4 e, em caso afirmativo, explorar a SUSY para obter algum resultado exato ou aproximado. Esta possível aplicação não necessariamente envolveria uma interação via fotino (como sugerido no texto da Seção 4.4), mas poderia envolver alguma interação de spin (interação matricial) de uma partícula de spin-3/2 (devido às 4 componentes da função de onda), ou maior⁴.

⁴O Prof. Ivan da Cunha Lima contribuiu com a informação de que existem sistemas de matéria condensada que podem apresentar “buracos” com um spin efetivo igual a 3/2 e sugeri que talvez seja interessante investigar a possibilidade de aplicação do citado potencial à interação spin-órbita em tais sistemas, onde o spin de cada “buraco” interage com o campo magnético produzido pelos demais, em movimento.

Referências

[1] A referência original mais importante é:

S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Ann. Phys. (NY)* 140 (1982) 372–411
[Erratum-ibid. 185 (1988) 406], reimpresso *in* ibid. 281 (2000) 409–449.

Mas também existem as seguintes:

W. Siegel, *Nucl. Phys. B* 156 (1979) 135;

R. Jackiw and S. Templeton, *Phys. Rev. D* 23 (1981) 2291;

J. F. Schonfeld, *Nucl. Phys. B* 185 (1981) 157;

S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* 48 (1982) 975–978.

Alguns artigos introdutórios mais recentes são:

G. V. Dunne, <http://arXiv.org/abs/hep-th/9902115>;

R. Jackiw, “Topics In Planar Physics,” *Nucl. Phys. A (Proc. Suppl.)* 18 (1990) 107–170, também publicado em H. C. Lee (ed.), *Physics, geometry and topology: proceedings. (NATO Advanced Summer Institute and Banff Summer School in Theoretical Physics on Physics, Geometry and Topology, Banff, Canada, Aug 14–25, 1989)*, NATO Advanced Study Institute, Series B: Physics, v. 238, Plenum Press, 1990.

[2] Além do material da Ref. [9], alguns artigos introdutórios específicos do EHQ são:

J. P. Eisenstein, *Am. J. Phys.* 61 (1993) 179–183;

H. Aoki, *Rep. Prog. Phys.* 50 (1987) 665–730;

G. Watson, *Contemp. Phys.* 37 (1996) 127–143;

J. P. Eisenstein and H. L. Stormer, *Science* 248 (1990) 1510–1516;

C. T. Van Degrift, M. E. Cage and S. M. Girvin, *Am. J. Phys.* 58 (1990) 109–123 (uma lista de todos os trabalhos sobre EHQ publicados até então).

Para tratamentos mais completos, ver as seguintes Refs., restritas ao EHQ Inteiro: M. Janßen, O. Viehweger, U. Fastenrath and J. Hajdu, *Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect*, VCH, Weinheim, 1994;

G. Morandi, *Quantum Hall Effect*, Bibliopolis, Nápoles, 1988.

As Refs. [10, 11, 12, 13] são mais dedicadas ao EHQ fracionário.

[3] Ver, por exemplo, G. Burns, *High-Temperature Superconductivity: An Introduction*, Academic Press, San Diego, 1992.

[4] Uma boa referência introdutória é: Ph. de S. Gerbert, *Int. J. Mod. Phys. A* 6 (1991) 173–197.

Para um tratamento mais completo, ver:

F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, World Scientific, Singapore, 1990, que contém os artigos originais mais importantes;

A. Lerda, *Anyons: Quantum Mechanics of Particles with Fractional Statistics*, Lecture Notes in Physics vol. m14, Springer, Berlin, 1992;

R. Iengo and K. Lechner, *Phys. Rept.* 213 (1992) 179;

S. Forte, *Rev. Mod. Phys.* 64 (1992) 193.

[5] W. A. Moura-Melo and J. A. Helayël-Neto, *Phys. Rev. D* 63 (2001) 065013, hep-th/0004143;

W. A. Moura-Melo, *Aspectos Peculiares das Eletrodinâmicas de Maxwell e Maxwell-Chern-Simons Planares*, Tese de Doutorado, CBPF, 2001, disponível em <http://www.cbpf.br/~dcp/papers/>.

[6] G. V. Dunne *in* Ref. [1] e as respectivas referências.

[7] R. C. Paschoal and J. A. Helayël-Neto, *Phys. Lett. A* 313 (2003) 412–417, hep-th/0302014.

- [8] Para uma revisão introdutória com referências originais, ver, por exemplo:
O capítulo de J.K. Jain *in* Ref. [12]; ou
J.K. Jain, *Adv. Phys.* 41 (1992) 105–146; ou
S. H. Simon e A. Lopez & E. Fradkin, dois capítulos *in* Ref. [13], também disponíveis respectivamente em cond-mat/9812186 e cond-mat/9704055.
- [9] Alguns bons artigos introdutórios são:
L. J. Challis, *Contemp. Phys.* 33 (1992) 111–127;
D. F. Holcomb, *Am. J. Phys.* 67 (1999) 278–297 .
- [10] R. E. Prange and S. M. Girvin (Eds.), *The Quantum Hall Effect*, 2nd. ed., Springer-Verlag, New York, 1990.
- [11] T. Chakraborty and P. Pietiläinen, *The Quantum Hall Effects: Fractional and Integral*, 2nd. ed., Springer, Berlin, 1995.
- [12] S. Das Sarma and A. Pinczuk (Eds.), *Perspectives in Quantum Hall Effects*, Wiley, New York, 1997.
- [13] O. Heinonen (Ed.), *Composite Fermions*, World Scientific, Singapore, 1998.
- [14] J. Stern, *Phys. Lett. B* 265 (1991) 119–123.
- [15] I. I. Kogan, *Phys. Lett. B* 262 (1991) 83–87.
- [16] S. M. Latinsky and D. P. Sorokin, *JETP Lett.* 53 (1991) 187–189; *Mod. Phys. Lett. A* 6 (1991) 3525–3530.
- [17] S. K. Paul and A. Khare, *Phys. Lett. B* 193 (1987) 253, erratum-*ibid.* B 196 (1987) 571.
- [18] M. E. Carrington and G. Kunstatter, *Phys. Rev. D* 51 (1995) 1903–1905.
- [19] F. A. S. Nobre and C. A. S. Almeida, *Phys. Lett. B* 455 (1999) 213–216, hep-th/9904159.

- [20] M. E. Carrington et al., Phys. Rev. D 60 (1999) 125018, hep-th/9905172.
- [21] M. E. Carrington and G. Kunstatter, Phys. Rev. D 50 (1994) 2830, hep-th/9403375.
- [22] B. S. Kim, H.-j. Lee and J. H. Yee, Phys. Rev. D 61 (1999) 025010, hep-th/9903138,
e mais algumas referências aí constantes.
- [23] Z. Németh, Phys. Rev. D 58 (1998) 067703, hep-th/9802159.
- [24] D. G. Barci and L. E. Oxman, Phys. Rev. D 52 (1995) 1169–1175, hep-th/9503100.
- [25] H. Nicolai, J. Phys. A 9 (1976) 1497–1506.
- [26] E. Witten, Nucl. Phys. B 188 (1981) 513–554.
- [27] E. Witten, Nucl. Phys. B 202 (1982) 253–316.
- [28] R. W. Haymaker and A. R. P. Rau, Am. J. Phys. 54 (1986) 928.
- [29] L. E. Gendenshtein and I. V. Krive, Sov. Phys. Usp. 28 (1985) 645–666, Usp. Fiz. Nauk 146 (1985) 553–590.
- [30] A. Lahiri, P. K. Roy and B. Bagchi, Int. J. Mod. Phys. A 5 (1990) 1383–1456.
- [31] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Phys. Rept. 251 (1995) 267–385, hep-th/9405029.
- [32] R. de L. Rodrigues, hep-th/0205017.
- [33] A. Khare, Pramana J. Phys. 49 (1997) 41–64.
- [34] M. Chaichian and R. Hagedorn, *Symmetries in Quantum Mechanics: from Angular Momentum to Supersymmetry*, IOP, Bristol, 1998, Cap. 11.
- [35] G. Junker, *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics*, Springer, Berlin, 1996.

- [36] P. G. O. Freund, *Introduction to Supersymmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [37] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, *Supersymmetry in Quantum Mechanics*, World Scientific, Singapore, 2001.
- [38] B. K. Bagchi, *Supersymmetry In Quantum and Classical Mechanics*, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics v. 116, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2001.
- [39] Progress in Supersymmetric Quantum Mechanics, Valladolid, Espanha. 15–19 de julho de 2003, http://metodos.fam.cie.uva.es/~susy_qm_03/.
- [40] J. Lukierski, P. C. Stichel and W. J. Zakrzewski, hep-th/0407247;
 P. K. Ghosh, hep-th/0403083;
 E. Harikumar, V. S. Kumar and A. Khare, Phys. Lett. B 589 (2004) 155–161, hep-th/0402064;
 N. Nekrasov and A. Schwarz, Commun. Math. Phys. 198 (1998) 689–703, hep-th/9802068;
 J. Froehlich, O. Grandjean and A. Recknagel, Commun. Math. Phys. 193 (1998) 527–594, hep-th/9612205.
- [41] R. C. Paschoal, J. A. Helayël-Neto and L. P. G. de Assis, hep-th/0407109, submetido a Phys. Lett. A.
- [42] M. de Crombrugghe and V. Rittenberg, Ann. Phys. 151 (1983) 99–126; ou Ref. [35].
- [43] J. D. Jackson, *Eletrodinâmica Clássica*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1983, 2ª Ed.
- [44] L. D. Landau e E. Lifshitz, *Teoria do Campo*, Mir, Moscou, 1980.
- [45] C. Kittel, *Introduction To Solid State Physics*, Wiley, New York, 1996, 7ª Ed.

- [46] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.
- [47] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York, 1980.
- [48] Ver G. Watson e G. Morandi, ambos *in* Ref. [2].
- [49] A. K. T. Assis, W. A. Rodrigues Jr and A. J. Mania, *Found. Phys.* 29 (1999) 729–753.
- [50] L. D. Landau, *Quantum Mechanics – Nonrelativistic Theory*, Course on Theoretical Physics, Vol. 3, Elsevier Science, 1981, 3rd ed.
- [51] A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich Jr, J. L. Boldo and J. A. Helayël-Neto, *Phys. Rev. D* 67 (2003) 085021;
H. Belich Jr, M. M. Ferreira Jr, J. A. Helayël-Neto and M. T. D. Orlando, *Phys. Rev. D* 67 (2003) 125011, hep-th/0212330, erratum-ibid. *D* 69 (2004) 109903;
H. Belich Jr, M. M. Ferreira Jr, J. A. Helayël-Neto and M. T. D. Orlando, *Phys. Rev. D* 68 (2003) 025005, hep-th/0301224;
H. Belich Jr, J. L. Boldo, L. P. Colatto, J. A. Helayël-Neto and A. L. M. A. Nogueira, *Phys. Rev. D* 68 (2003) 065030, hep-th/0304166;
A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich Jr, J. L. Boldo, L. P. Colatto, J. A. Helayël-Neto and A. L. M. A. Nogueira, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* 127 (2004) 105, hep-th/0305089;
H. Belich Jr, M. M. Ferreira Jr and J. A. Helayël-Neto, hep-th/0401235;
H. Belich Jr, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira Jr, J. A. Helayël-Neto and M. T. D. Orlando, hep-th/0407260.
- [52] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, 1964, Cap. 1.
- [53] Y. Georgelin and J. C. Wallet, *Mod. Phys. Lett. A* 7 (1992) 1149–1156.

- [54] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. B* 23 (1981) 5632.
- [55] Notas de aula do curso *Introdução às Teorias Supersimétricas*, ministrado pelo Prof. José A. Helayël-Neto, CBPF, 2003/1.
- [56] A. Salam and J. Strathdee, *Nucl. Phys. B* 76 (1974) 477–482;
S. Ferrara, J. Wess, B. Zumino, *Phys. Lett. B* 51 (1974) 239–241. Ver também:
A. Salam and J. Strathdee, *Forts. Phys.* 26 (1978) 57–142.
- [57] F. A. Berezin, *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New York, 1966.
- [58] S. Matthiesen, *Supersymmetrische klassische Mechanik und ihre Quantisierung*, Diploma Thesis, Univ. Erlangen-Nürnberg, 1995. Ver também: G. Junker, S. Matthiesen and A. Inomata, *in: Dubna 1995, Symmetry methods in physics: proceedings*, Eds. A. N. Sissakian and G. S. Pogosyan, Dubna, Russia, JINR, 1996, vol. 1, 290–297, hep-th/9510230.
- [59] H. B. Lawson, Jr and M.-L. Michelson, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1989.
- [60] J. L. Cortes et al., *Int. J. Mod. Phys. A* 9 (1994) 953–968, hep-th/9211106;
D. K. Hong and J. Y. Kim, *Phys. Lett. B* 383 (1996) 327–332, hep-th/9512054;
C.-h. Chou et al., *Phys. Lett. B* 304 (1993) 105–110, hep-th/9301037;
I. I. Kogan and G. W. Semenoff, *Nucl. Phys. B* 368 (1992) 718–742;
G. Gat and R. Ray, *Phys. Lett. B* 340 (1994) 162–166, hep-th/9408085.
- [61] M. Torres, *Phys. Rev. D* 46 (1992) R2295–R2298.
- [62] F. Cooper and B. Freedman, *Ann. Phys.* 146 (1983) 262.
- [63] D. Lancaster, *Nuovo Cim. A* 79 (1984) 28.
- [64] A. Das and S. A. Pernice, *Mod. Phys. Lett. A* 12 (1997) 581–588, hep-th/9612125.

- [65] T. E. Clark, S. T. Love and S. R. Nowling, Nucl. Phys. B 632 (2002) 3–50, hep-th/0108243; Mod. Phys. Lett. A 15 (2000) 2105–2112, hep-ph/0012074.
- [66] V. M. Tkachuk, J. Phys. A: Math. Gen. 31 (1998) 1859–1866, quant-ph/9709015.
- [67] A. A. Andrianov and M. V. Ioffe, Phys. Lett. B 205 (1988) 507–510. Ver también: M. V. Ioffe and A. I. Neelov, J. Phys. A: Math. Gen. 36 (2003) 2493, hep-th/0302004; F. Cannata, M. V. Ioffe, A. I. Neelov and D. N. Nishnianidze, hep-th/0405108.