Tese de

Mestrado

Cancelamento de Anomalias em Teorias de Calibre Não Abelianas

Rafael Chaves Souto Araújo

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas-CBPF

Rio de Janeiro, Agosto de 2006

“Algo só é impossível até que alguém duvide e prove o contrário”.

Albert Einstein

A todos aqueles que me ensinaram a trilhar o caminho do coração.

Agradecimentos

Primeiramente, ao meu orientador, Tião, pela confiança depositada em mim, sua disponibilidade e vontade na formação dos alunos. Ao professor Helayël, pelo seu sempre estampado sorriso no rosto e por me transmitir sua paixão e dedicação à ciência. Ao CBPF por me dar todas as ferramentas necessárias à minha formação e à conclusão deste trabalho. À CAPES e à FAPERJ, pelo apoio financeiro concedido, sem o qual este trabalho não seria possível. Aos amigos Ale, Colo, Dani, Guada, Jana, Nato, Seba, Salib pelos momentos incríveis. Aos amigos Habib e Milvi, por transformar nossa sala um lugar perfeito. Ao Herman, pela amizade e interesse em meu trabalho. Ao rio Quilpo, por uma tarde maravilhosa. À companheira Mel, por tudo. Aos meus pais, Luís e Zoé, e minha irmã Joanna, pelo apoio incondicional. À minha mulher, Ana, por quem meu amor justificaria somente a mais bela das teorias.

Resumo

Analisamos a ação de um mecanismo de cancelamento de anomalias na simetria de calibre (que funciona em teorias abelianas) sobre teorias não abelianas. Expandindo os elementos do grupo de calibre em série, mostramos que este mecanismo não funciona no caso não abeliano. Consideramos casos particulares ($SU(N)$ em duas dimensões e $SU(2)$ em d dimensões) que confirmam o caso geral.

Abstract

We analyse the action of a mechanism for gauge anomaly cancellation (which works in abelian theories) in the context of non abelian gauge theories. Expanding the gauge group elements in series, we show that this mechanism does not work in the non abelian case. We consider particular cases ($SU(N)$ in two dimensions and $SU(2)$ in d dimensions) that agree with the general situation.

Conteúdo

Introdução

“Now the ice was broken, the ABJ anomaly opened the door to a deeper understanding of QFT, a new era for field theory research began”

(Reinhold A. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*)

As simetrias e suas respectivas leis de conservação desempenham um papel essencial em nossa compreensão da natureza. Tais leis de conservação são expressas concisamente pelo teorema de Noether, que associa a cada simetria contínua de um dado sistema físico, um conjunto de quantidades conservadas. Ao quantizarmos uma teoria esperamos que tais simetrias permaneçam. Entretanto, como os físicos do século XX foram obrigados a aceitar, conceitos clássicos quase sempre são demolidos ao considerarmos efeitos quânticos, os exemplos mais comuns sendo a dualidade onda-partícula e a relação de incerteza de Heisenberg. De fato, várias leis de conservação, válidas classicamente, são violadas quanticamente. Este fenômeno é denominado *anomalia*.

A importância de uma anomalia em uma teoria quântica de campos está diretamente relacionada ao princípio da simetria de calibre, sendo este a base da compreensão atual sobre as interações fundamentais. A existência de uma anomalia sinaliza a quebra de uma invariância de calibre revelando possíveis inconsistências da teoria. A não manutenção da simetria de calibre quântica implica na quebra das identidades de Ward-Takahashi (ou de Slavnov-Taylor, no caso não abeliano), fundamentais para a prova da renormalizabilidade perturbativa da teoria. São elas que permitem relacionar constantes de renormalização e cancelar divergências que seriam intratáveis de outra maneira. Sem tais identidades, não se poderia garantir a renormalizabilidade perturbativa da teoria, o que a invalidaria na prática.

Entretanto, a identificação de uma anomalia, associada a um modo de evitar suas consequências, gera uma teoria com severas restrições e profundas previsões experimentais, como demonstrado pelo modelo padrão das interações fundamentais. Esse modelo descreve três das quatro interações conhecidas por uma teoria de calibre não abeliana, baseada no grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Tal modelo conseguiu, com notável sucesso, delinear um quadro que, no futuro, talvez permita uma unificação consistente das quatro interações.

A teoria mencionada acima incorpora a presença de bósons vetoriais massivos, cuja presença usualmente implica na violação da simetria de calibre. O problema é contornado pelo mecanismo de Higgs que, no entanto, exige a separação dos férmions de Dirac encontrados na natureza (os léptons e os quarks) em férmions de Weyl (por exemplo, o modelo na fase de simetria não quebrada contém um elétron esquerdo e um direito em multipletos associados a simetrias distintas).

Sabe-se, contudo, que a presença de férmions de Weyl numa teoria de calibre tem como conseqüência a geração de anomalias precisamente na simetria de calibre da teoria. A solução, no modelo padrão, vem do fato de que, graças à representação particular na qual estão colocados os férmions quirais iniciais, a anomalia gerada pela parte leptônica da teoria tem a mesma magnitude e sinal oposto que a gerada pela parte hadrônica. Isso conduz a uma situação em que uma das previsões do modelo consiste precisamente na igualdade do número dessas famílias, fato verificado atualmente após a descoberta do quark top.

Historicamente as anomalias têm um longo caminho percorrido. A descoberta da anomalia quiral data dos trabalhos de Steinberger [1] em 1949, referentes a cálculos de amplitudes de decaimento do π^0, dentro de um modelo do tipo píon-nucleon. H. Fukuda e Y. Miyamoto [2] realizaram independentemente cálculos semelhantes. Dois anos depois, Schwinger [3] destacou o fato de a conservação da corrente axial na eletrodinâmica quântica (EDQ) ser violada ao se regularizar apropriadamente o operador de corrente. No contexto da EDQ bidimensional sem massa, Johnson [4] apontou, em 1963, para a competição entre a simetria de calibre e a simetria axial. Seria apenas no final da década de sessenta que a devida atenção seria dada a estes resultados. Apoiados pela algebra de correntes e pela hipótese PCAC (*partial conservation of the axial current*), Sutherland [5] e Veltman [6] "provaram"que o π^0 não poderia decair em dois fótons, negando um conhecido fato experimental. Tal quebra-cabeças foi resolvido por Bell e Jackiw [7] em 1969 utilizando o modelo sigma: uma possível quebra da simetria axial corrigiria a taxa de decaimento do teorema de Sutherland, em excelente acordo com os dados experimentais. No mesmo ano, conclusões similares obtidas por Adler [8], trabalhando com uma eletrodinâmica espinorial, atraíram definitivamente a atenção para as anomalias e suas consequências.

Este aumento de interesse resultou no estudo intenso das propriedades das anomalias e na descoberta da importância delas em outros contextos [9, 10, 11]. Importantes teoremas foram propostos, como o de Adler-Bardeen [12], que mostrou que a anomalia é completamente determinada pelos cálculos em um laço, não recebendo, portanto, contribuições das correções radiativas. Outros autores foram responsáveis pela conexão entre as anomalias e modernas técnicas matemáticas. A visão não perturbativa das anomalias, dentro do contexto das integrais de trajetória (formalismo que será utilizado nesta dissertação), foi iniciada por Fujikawa [13] em 1979. Interpretações topológicas foram encontradas para a anomalia quiral [14, 15, 16] e relações com as técnicas de cohomologia [17, 18] foram estabelecidas quando Stora e Zumino, usando técnicas de geometria diferencial, encontraram as equações de descida.

Recentemente têm aparecido várias evidências teóricas, de que teorias de calibre anômalas (na simetria de calibre) não são necessariamente inconsistentes. Um trabalho de grande repercussão foi o de Jackiw e Rajaraman [19], no qual os autores mostraram que uma teoria anômala pode ser completamente consistente do ponto de vista físico, desde que se tenha acesso à sua solução exata. Foi então demonstrado, por Faddev e Shatashvilli [20], que a anomalia poderia ser cancelada pela introdução de novos graus de liberdade quânticos na teoria (os *campos de Wess-Zumino*), que transformariam vínculos de segunda classe (correlacionados à anomalia), em vínculos de primeira classe (geradores das transformações de calibre). Tais graus de liberdade extras definiriam uma nova ação efetiva invariante de calibre.

Conforme observado logo depois, a correta compreensão do método de Faddeev-Popov dentro de uma teoria anômala, traduz-se no fato de não podermos mais fatorizar o volume do grupo de calibre, como acontece no caso não anômalo. Esta compreensão levou à descoberta (independente) por Harada e Tsutsui [21] e Babelon, Schaposnik e Viallet [22], de que os graus de liberdade quânticos extras não precisam ser introduzidos externamente à teoria, mas aparecem naturalmente devido à não fatorização do volume do grupo de calibre.

Neste contexto se insere esta dissertação de mestrado. Dada a invariância de calibre da ação efetiva (que inclui os efeitos dinâmicos dos férmions e dos campos de Wess-Zumino), nos perguntamos se é possível estabelecer um análogo do teorema de Noether para teorias anômalas. Isto implica em mostrar que, para teorias de calibre onde funcione o mecanismo de restauração da simetria de calibre, o operador que corresponde quanticamente à divergência covariante da corrente de Noether clássica tenha valor esperado no vácuo nulo. Este resultado foi obtido anteriormente para o caso abeliano por Dias e Proleón Patricio [23] e suas conseqüências apenas começaram a ser exploradas [23, 24]. Neste caso, o cancelamento da anomalia é mostrado (com um argumento de integração funcional) independentemente do modelo e em qualquer número de dimensões. Seguindo a mesma abordagem, analisaremos se o mesmo mecanismo se faz presente no caso de teorias de calibre não-abelianas. Para tanto fazemos, no capítulo 1, uma revisão do ponto de vista funcional para as anomalias, enfatizando a formulação invariante de calibre, que usaremos ao longo da tese. No capítulo 2, restringimos nossa análise à CDQ_2, revisando o cálculo da ação efetiva, enquanto que, no capítulo 3, checamos a ação do nosso mecanismo de cancelamento da anomalia no caso não-abeliano. Ao final, apresentamos nossas conclusões e perspectivas e dedicamos o apêndice A às convenções utilizadas na tese e o apêndice B à particularização dos nossos cálculos do capítulo 3 para o caso do grupo $SU(2)$.

Capítulo 1

Anomalias no Formalismo de Integração Funcional e a Restauração da Simetria

Neste capítulo introduziremos as técnicas que nos permitirão visualizar as anomalias dentro da abordagem funcional, relacionando esta quebra quântica da simetria com o Jacobiano da transformação dos campos fermiônicos. Utilizando o método proposto por Fujikawa, calcularemos as anomalias associadas a algumas teorias e, dentro deste contexto, analisaremos a restauração da simetria de calibre a partir da introdução de graus de liberdade extras.

1.1 O campo de calibre

1.1.1 Eletromagnetismo

No eletromagnetismo clássico a simetria de calibre é uma ferramenta para a eliminação de graus de liberdade reduntantes, resultando, por exemplo, no caráter transverso da propagação da luz no vácuo. Nas modernas teorias sobre as interações fundamentais, entretanto, a simetria de calibre é vista como um princípio básico, um guia essencial na construção de modelos físicos para o comportamento das partículas elementares. Os chamados campos de calibre surgem naturalmente ao considerarmos a existência de uma simetria local em uma teoria. O eletromagnetismo, como teoria de calibre abeliana, é o palco mais natural para enxergarmos mais fácil e profundamente esse mecanismo e tentarmos a sua generalização para teorias mais complexas (leia-se teorias não abelianas).

Considerando a Lagrangeana livre de um campo escalar complexo,

$$\mathcal{L}_0 = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi, \tag{1.1}$$

vemos que essa Lagrangeana é simétrica por uma transformação de calibre global ($\partial_\mu \alpha = 0$)

$$\phi' = \exp(-i\alpha)\, \phi. \tag{1.2}$$

Entretanto, ao considerarmos uma transformação local, vemos que, para manter a Lagrangeana invariante, temos de introduzir a chamada derivada covariante,

$$\mathcal{D}_\mu \phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\, \phi, \tag{1.3}$$

que deve substituir a derivada comum na Lagrangeana do sistema (essa substituição tem uma explicação geométrica, relacionada ao conceito do transporte paralelo de vetores

[25]). O comutador de derivadas covariantes está relacionado ao tensor de intensidade de campo da teoria:

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = -ieF_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{1.4}$$

Além disso, a derivada covariante deve se transformar como o campo, ou seja

$$\mathcal{D}'_\mu \phi' = \left(\partial_\mu - ieA'_\mu\right)\phi' = \exp\left(-i\alpha\right)\mathcal{D}_\mu \phi. \tag{1.5}$$

Para isso ocorrer, o campo de gauge, no caso abeliano, deve se transformar como

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\left(\partial_\mu \alpha\right). \tag{1.6}$$

Para que o campo de calibre tenha uma dinâmica própria, devemos introduzir um termo cinético na Lagrangeana, invariante de Lorentz e de calibre, que gere as equações de Maxwell. Observando que $F^{\mu\nu}$ é invariante de calibre, obtemos, após algumas considerações gerais [26],

$$\mathcal{L} = \left(\mathcal{D}_\mu \phi\right)^* \mathcal{D}^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \tag{1.7}$$

Vê-se assim que o campo de calibre é introduzido naturalmente de maneira a garantir a simetria de calibre do sistema. Como consequência desse novo ponto de vista, teremos agora equações de movimento não lineares. A conservação da carga elétrica é um subproduto da simetria para o caso particular em que o parâmetro é global ($\partial_\mu \alpha = 0$), não precisando ser imposta externamente.

Consideremos agora férmions de Dirac com Lagrangeana dada por

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{2}\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu \psi\right) - \left(\partial_\mu \overline{\psi}\right)\gamma^\mu \psi\right) - m\overline{\psi}\psi. \tag{1.8}$$

Seu acoplamento com o eletromagnetismo é obtido justamente ao impormos a existência de uma simetria local. Isto modificará a Lagrangeana, gerando

$$\mathcal{L} =\frac{i}{2}\left(\overline{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\psi) - (\partial_{\mu}\overline{\psi})\gamma^{\mu}\psi\right) - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + ej^{\mu}A_{\mu}, \tag{1.9}$$

onde,

$$j^{\mu} = \overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi, \tag{1.10}$$

é a corrente conservada em virtude da simetria global e independente de A_{μ}. As novas equações de movimento são não lineares e acopladas:

$$\mathcal{D}_{\mu}F^{\mu\nu} = -ej^{\nu}, \tag{1.11}$$

$$\left(i\gamma^{\mu}\mathcal{D}_{\mu}\psi - m\right)\psi = 0. \tag{1.12}$$

1.1.2 Generalização para campos não abelianos

O campo irá se transformar de acordo com representações irredutíveis de um grupo de Lie, por exemplo $SU(N)$, cuja transformação genérica pode ser escrita como

$$U = \exp\left(-i\theta^{a}T_{a}\right), \tag{1.13}$$

com $a = 1, ..., n^2-1$, θ^a, parâmetros reais e T_a sendo os geradores do grupo. A unitaridade das transformações implica em hermiticidade dos geradores:

$$UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = I \rightarrow T_a = T_a^{\dagger}, \tag{1.14}$$

e em que seu traço seja nulo pois

$$\det U = \det\left(\exp\left(-i\theta^{a}T_{a}\right)\right) = \exp(\mathrm{tr}\left(-i\theta^{a}T_{a}\right)) = 1 \rightarrow \mathrm{tr}\ (T_a) = 0. \tag{1.15}$$

Os geradores obedecem relações de comutação características da álgebra de Lie do grupo:

$$[T_a, T_b] = if^{c}_{ab}T_{c.} \tag{1.16}$$

A simetria de calibre local introduz, da mesma forma que no caso abeliano, um campo de calibre A_μ, tomando valores na álgebra de Lie de $SU(N)$ e transformando-se como

$$A'_\mu = U^{-1} A_\mu U + \frac{i}{e} U^{-1} (\partial_\mu U). \tag{1.17}$$

Como pertence à algebra de lie, A_μ pode ser escrito como:

$$A_\mu = A^a_\mu T_a. \tag{1.18}$$

A derivada covariante é dada naturalmente por

$$\mathcal{D}_\mu \phi = (\partial_\mu \mathbf{1} - ieA_\mu). \tag{1.19}$$

O tensor de intensidade de campo $F_{\mu\nu}$ continua sendo dado em termos do comutador das derivadas covariantes, mas agora não é mais linear em A_μ:

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{e} \left[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu\right] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie \left[A_\mu, A_\nu\right], \tag{1.20}$$

com $F_{\mu\nu}$ também tomando valores na algebra de Lie,

$$F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu} T_a. \tag{1.21}$$

A partir da lei de transformação para a derivada covariante podemos tirar a transformação para o tensor de intensidade de campo o que resulta em

$$F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^{-1}. \tag{1.22}$$

Utilizando o traço, podemos montar um objeto invariante de calibre e de Lorentz, já que

$$\text{tr } (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})' = \text{tr } \left(U F_{\mu\nu} U^{-1} U F^{\mu\nu} U^{-1}\right) = \text{tr } (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}). \tag{1.23}$$

Para que não dependamos de representações particulares, normaliza-se o traço por

$$\text{tr } (T_a T_b) = \delta_{ab},$$

já que assim

$$\mathrm{tr}\ (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = \mathrm{tr}\ (T_a T_b)\, F^a_{\mu\nu} F^{b\mu\nu} = \sum_a F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} \equiv F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}. \tag{1.24}$$

Dentro deste contexto, podemos descrever uma teoria de calibre genérica por uma ação $I\left[\psi, \overline{\psi}, A_\mu\right]$, escrita explicitamente em termos de sua parte de calibre e de sua parte fermiônica, tal que

$$I\left[\psi, \overline{\psi}, A_\mu\right] = I_G\left[A_\mu\right] + I_F\left[\psi, \overline{\psi}, A_\mu\right] = \int dx \frac{1}{2} \mathrm{tr}\ (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \int dx \overline{\psi} D \psi, \tag{1.25}$$

com $D = i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu = i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ieA_\mu\right)$ sendo o *operador de Dirac* da teoria. A ação possui a propriedade clássica

$$I\left[\psi^{U^{-1}}, \overline{\psi}^{U^{-1}}, A^U_\mu\right] = I\left[\psi, \overline{\psi}, A_\mu\right], \tag{1.26}$$

onde a notação quer dizer

$$\begin{aligned} \psi^U &= U\psi, \\ \overline{\psi}^U &= \overline{\psi} U^{-1}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Essa invariância (no caso global) conduz à conservação clássica da corrente

$$J^\mu_a = \overline{\psi} \gamma^\mu T_a \psi, \tag{1.28}$$

tal que

$$\left(\mathcal{D}_\mu J^\mu\right)_a = 0. \tag{1.29}$$

1.2 O método de Faddeev-Popov

O propagador livre de uma teoria é dado pelo inverso do operador da parte da Lagrangeana que é quadrática nos campos. Ao construirmos as integrais de caminho, em algum momento estaremos interessados em calcular os propagadores, já que é a partir deles que definimos perturbativamente qualquer teoria. Porém, ao lidarmos com teorias de calibre, o cálculo desse operador inverso pode não existir, justamente devido à liberdade extra propiciada pelas transformações de calibre. Consideremos, por exemplo, a Lagrangeana eletromagnética livre

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{1.30}$$

que pode ser reescrita, a menos de uma quadridivergência, como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A_\mu(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)A^\nu. \tag{1.31}$$

É fácil mostrar que o operador $(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)$ não tem inversa. Em uma teoria abeliana o campo de calibre se transforma como

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x). \tag{1.32}$$

Assim qualquer calibre puro, ou seja

$$\bar{A}^\nu(x) = \partial^\nu\Lambda(x), \tag{1.33}$$

constituir-se-á num autovetor nulo do operador que queremos inverter

$$(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)\partial^\nu\Lambda = (\Box\partial_\mu - \partial_\mu\Box)\Lambda = 0, \tag{1.34}$$

resultando assim na impossibilidade da inversão. A ausência de um propagador impossibilita, então, a definição perturbativa da teoria.

Este problema se relaciona com o fato de que, em uma teoria de calibre, a integral funcional usual não é bem definida, já que a integração sobre o campo inclui infinitos campos que correspondem a situações físicas equivalentes (que se relacionam entre si por uma transformação de calibre), produzindo assim um resultado infinito para o funcional gerador. Vamos indicar, abaixo, que ao resolvermos este problema, automaticamente conseguimos definir a teoria de modo que o propagador exista.

Nas teorias de calibre clássicas somos obrigados a escolher representantes, dentre todos os campos equivalentes fisicamente, para poder resolver as equações de movimento. Isto é feito através da escolha de *condições de calibre.* A extensão deste procedimento para a quantização constitui o *método de Faddeev-Popov.* Começamos escolhendo condições de calibre f_a,

$$f_a\left[A_\mu\right] = 0. \tag{1.35}$$

que devem satisfazer basicamente o requerimento de ser atingíveis (dada uma solução das equações de movimento, deve existir uma transformação de calibre que a leve a uma configuração que satisfaça às equações acima) e possuir solução única. Definimos, agora, um funcional $\Delta_{FP}\left[A_\mu\right]$ do campo de calibre através da seguinte relação:

$$\Delta_{FP}\left[A_\mu\right] \int dg \prod_a \delta\left(f_a\left[A_\mu^g\right]\right) = 1. \tag{1.36}$$

É fácil ver que $\Delta_{FP}\left[A_\mu\right]$ é invariante de calibre e dado por (ver [27] para uma discussão mais detalhada)

$$\Delta_{FP}\left[A_\mu\right] = \det\left(\left.\frac{\delta f_a\left[A_\mu^g\right]}{\delta\theta^b}\right|_{\theta=0}\right), \tag{1.37}$$

onde θ^b são os parâmetros que caracterizam g. Isto nos permite escrever a amplitude vácuo-vácuo como

$$Z = \int d\psi d\overline{\psi} dA_\mu dg \Delta_{FP}\left[A_\mu\right] \prod_a \delta\left(f_a\left[A_\mu^g\right]\right) \exp\left(iI\left[\psi, \overline{\psi}, A_\mu\right]\right). \tag{1.38}$$

Se fizermos uma transformação de calibre $A_\mu \rightarrow A_\mu^{g^{-1}}$ e usarmos a propriedade de simetria da ação clássica e a invariância de calibre da medida de integração para o potencial de calibre A_μ

$$dA_\mu = dA_\mu^{g^{-1}}, \tag{1.39}$$

a amplitude vácuo-vácuo fica dada por

$$\begin{aligned} Z &= \int d\psi d\overline{\psi} dA_\mu^{g^{-1}} dg \Delta_{FP}\left[A_\mu^{g^{-1}}\right] \prod_a \delta\left(f_a\left[\left(A_\mu^{g^{-1}}\right)^g\right]\right) \exp\left(iI\left[\psi, \overline{\psi}, A_\mu^{g^{-1}}\right]\right) \\ &= \int d\psi d\overline{\psi} dA_\mu dg \Delta_{FP}\left[A_\mu\right] \prod_a \delta\left(f_a\left[A_\mu\right]\right) \exp\left(iI\left[\psi^g, \overline{\psi}^g, A_\mu\right]\right). \end{aligned} \tag{1.40}$$

Desta forma, toda a dependência em g está contida em ψ^g. Assim, *se a medida fermiônica for invariante de calibre*,

$$d\psi = d\psi^{g^{-1}} \tag{1.41}$$

podemos realizar mais uma mudança de variáveis

$$\psi = \psi'^{g^{-1}}, \tag{1.42}$$

$$\overline{\psi} = \overline{\psi}'^{g^{-1}}, \tag{1.43}$$

e eliminar completamente a dependência em g da integral, fatorizando, portanto, a integral funcional em g e gerando, assim, uma constante infinita (o volume do grupo de calibre), que pode ser retirada com a normalização adequada. Após esta normalização, a amplitude vácuo-vácuo ficará definida como

$$Z = \int d\psi d\overline{\psi} dA_\mu \Delta_{FP}\left[A_\mu\right] \prod_a \delta\left(f_a\left[A_\mu\right]\right) \exp\left(iI\left[\psi, \overline{\psi}, A_\mu\right]\right).$$

Adicionando as fontes externas (poderíamos ter começado com elas presentes, o resultado seria o mesmo), teremos o funcional gerador. Nesta expressão, a delta funcional garante que a integração seja feita levando em consideração apenas um potencial correspondente a cada situação física, eliminando o infinito que provinha deste fato. Com um pouco mais de trabalho pode-se mostrar que o propagador da teoria agora está bem definido também.

Como ficará claro adiante, os campos de Wess-Zumino aparecerão em decorrência do fato de a medida de integração fermiônica não ser invariante. Esta não invariância também será responsável pelo aparecimento das anomalias, como também veremos a seguir.

1.3 Origem da anomalia

Em teorias de calibre, lidamos com funcionais geradores dados por

$$Z[\eta,\overline{\eta},\mathcal{J}_a^\mu] = \int d\psi d\overline{\psi} dA_\mu \exp\left(iI\left[\psi,\overline{\psi},A_\mu\right]\right) + i\int dx\left[\overline{\eta}\psi + \eta\overline{\psi} + \mathcal{J}_a^\mu A_\mu^a\right]. \tag{1.44}$$

Conforme discutido na introdução, a existência da anomalia está vinculada à manutenção, ou não, da conservação da corrente quando esta for um operador. A integração da equação para o funcional gerador não deve depender das váriaveis utilizadas, e podemos, portanto, realizar a seguinte transformação de variáveis,

$$\begin{aligned} \psi^\theta &= (1 + i\theta^a T_a)\psi, \\ \overline{\psi}^\theta &= \overline{\psi}(1 - i\theta^a T_a), \end{aligned} \tag{1.45}$$

que é uma transformação de calibre infinitesimal. Como o resultado da integral deve ser o mesmo para ambas as variáveis temos que

$$Z = Z_\theta. \tag{1.46}$$

Assim

$$
\begin{aligned}
Z_\theta =& \int d\psi^\theta d\overline{\psi}^\theta dA_\mu \exp\left(iI\left[\psi^\theta, \overline{\psi}^\theta, A_\mu\right] + i\int dx \left[\overline{\eta}\psi^\theta + \overline{\psi}^\theta\eta + \mathcal{J}_a^\mu A_\mu^a\right]\right) \\
=& \int J^{-1}\left[A_\mu, \theta\right] d\psi d\overline{\psi} dA_\mu \exp\left(iI\left[\psi, \overline{\psi}, A_\mu\right] + i\int dx \left[\overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta + \mathcal{J}_a^\mu A_\mu^a\right]\right) \\
&+ i\int dx (i\theta^a[D_\mu J_a^\mu + \overline{\eta} T_a \psi - \overline{\psi} T_a \eta]),
\end{aligned} \tag{1.47}
$$

com $J_a^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu T_a \psi$. Dado o caráter infinitesimal da transformação, expandimos funcionalmente o Jacobiano em primeira ordem em θ^a,

$$
J^{-1}\left[A_\mu, \theta\right] = 1 - \int dx \theta^a \mathcal{A}_a\left(A_\mu\right) + ..., \tag{1.48}
$$

e obtemos, exigindo a igualdade $Z = Z_\theta$, que

$$
\begin{aligned}
&\int d\psi d\overline{\psi} dA_\mu \left(\theta^a\left[-D_\mu^a J_a^\mu - \mathcal{A}_a\left(A_\mu\right) + \overline{\eta} T_a \psi - \overline{\psi} T_a \eta\right]\right) \\
&\times \exp\left(iI\left[\psi, \overline{\psi}, A_\mu\right] + i\int dx \left[\overline{\eta}\psi + \eta\overline{\psi} + \mathcal{J}_a^\mu A_\mu^a\right]\right) = 0.
\end{aligned} \tag{1.49}
$$

Fazendo as fontes externas iguais a zero, obtemos:

$$
\int d\psi d\overline{\psi} dA_\mu D_\mu^a J_a^\mu \exp\left(iI\left[\psi, \overline{\psi}, A_\mu\right]\right) = -\int d\psi d\overline{\psi} dA_\mu \mathcal{A}_a\left(A_\mu\right) \exp\left(iI\left[\psi, \overline{\psi}, A_\mu\right]\right), \tag{1.50}
$$

o que, pela relação entre os valores esperados de operadores e a integral funcional, é expressão de

$$
\langle 0| D_\mu^a J_a^\mu |0\rangle = -\langle 0| \mathcal{A}_a\left(A_\mu\right) |0\rangle . \tag{1.51}
$$

Através do ponto de vista funcional fica claro, então, que a anomalia em uma simetria de calibre é intrinsecamente relacionada à não invariância da medida de integração fermiônica sob tal transformação de simetria.

1.4 O funcional de Wess-Zumino

Um objeto que nos será de grande valor é o chamado funcional de Wess-Zumino, α_1, em termos do qual podemos reescrever o Jacobiano da medida fermiônica,

$$J[A_\mu,\theta] = \exp\left(i\alpha_1\left[A_\mu, g^{-1}\right]\right). \tag{1.52}$$

Em $\theta = 0$, o Jacobiano deve, obviamente ser igual à identidade. Isso impõe a seguinte relação ao funcional α_1:

$$\alpha_1\left[A_\mu, 1\right] = 0. \tag{1.53}$$

Expandindo para θ infinitesimal temos

$$J\left[A_\mu,\theta\right] = 1 + i\int dx\theta^a \left.\frac{\delta\alpha_1\left[A_\mu, g^{-1}\right]}{\delta\theta^a}\right|_{\theta=0} + ... \tag{1.54}$$

o que nos permite identificar

$$\mathcal{A}_a(A_\mu) = i\left.\frac{\delta\alpha_1\left[A_\mu, g^{-1}\right]}{\delta\theta^a}\right|_{\theta=0} \tag{1.55}$$

A grande vantagem de escrevermos a anomalia em termos deste funcional é que podemos relacioná-lo explicitamente com o determinante fermiônico do operador de Dirac D da teoria. Notando que

$$\int d\psi d\overline{\psi} \exp\left(i\int dx\overline{\psi}D\left(A_\mu\right)\psi]\right) = \det D\left(A_\mu\right), \tag{1.56}$$

e que

$$\begin{aligned}\det D\left(A_\mu\right) &= \int d\psi^\theta d\overline{\psi}^\theta \exp(i\int dx\left[\overline{\psi}^\theta D(A_\mu)\psi^\theta\right]\\ &= \int J^{-1}\left[A_\mu,\theta\right] d\psi d\overline{\psi}\exp\left(i\int dx\overline{\psi}D\left(A_\mu^{g^{-1}}\right)\psi]\right)\\ &= \exp\left(-i\alpha_1\left[A_\mu, g^{-1}\right]\right)\det D\left(A_\mu^{g^{-1}}\right),\end{aligned} \tag{1.57}$$

obtemos então uma relação de grande valia, que será usada reiteradamente ao longo dos cálculos, a saber

$$\alpha_1[A_\mu, g^{-1}] = i \ln \left(\frac{\det D\left(A_\mu\right)}{\det D\left(A_\mu^{g^{-1}}\right)} \right). \tag{1.58}$$

1.5 Formulação invariante de calibre

Conforme foi visto acima, a anomalia se caracteriza justamente pela não invariância da medida de integração fermiônica. Ao utilizarmos o método de Faddeev-Popov vemos então que o volume do grupo de calibre não se fatoriza, já que:

$$d\psi^\theta d\overline{\psi}^\theta = J\left[A_\mu, \theta^{-1}\right] d\psi d\overline{\psi} = \exp\left(i\alpha_1\left(A_\mu, g^{-1}\right)\right) d\psi d\overline{\psi}. \tag{1.59}$$

Desta forma, a amplitude vácuo-vácuo será dada por:

$$Z = \int d\psi d\overline{\psi} dA_\mu dg \Delta_{FP}\left[A_\mu\right] \prod_a \delta\left(f_a\left[A_\mu\right]\right) \exp\left(iI\left[\psi, \overline{\psi}, A_\mu^{g^{-1}}\right] + i\alpha_1\left[A_\mu, g^{-1}\right]\right). \tag{1.60}$$

A não fatorização do volume do grupo de calibre gera naturalmente novos graus de liberdade, expressos pelos campos de Wess-Zumino $\theta_a\left(x\right)$, que caracterizam a integração sobre o grupo de calibre

$$dg \equiv \prod_a d\theta_a(x) \equiv d\theta. \tag{1.61}$$

Seguindo o espírito do trabalho de Harada e Tsutsui, mostraremos que a introdução desses novos graus de liberdade implica numa ação invariante de calibre. Para a demonstração definamos

$$\exp\left(iW\left[A_\mu\right]\right) = \det D\left[A_\mu\right], \tag{1.62}$$

de onde podemos tirar a relação

$$\alpha_1\left[A_\mu, g\right] = W\left[A_\mu^g\right] - W\left[A_\mu\right], \tag{1.63}$$

com a qual vemos que (na equação abaixo, h designa um outro elemento do grupo de calibre)

$$\begin{aligned}
\alpha_1\left[A_\mu^h, g^{-1}\right] &= W\left[A_\mu^{hg^{-1}}\right] - W\left[A_\mu^h\right] \\
&= \alpha_1\left[A_\mu, hg^{-1}\right] - \alpha_1\left[A_\mu, h\right].
\end{aligned} \tag{1.64}$$

Definimos agora uma ação efetiva composta dos campos originais mais os campos extras de Wess-Zumino como

$$\exp\left(iI_{\text{ef}}\left[A_\mu\right]\right) = \int d\psi d\overline{\psi} dg \exp\left(iI\left[\psi, \overline{\psi}, A_\mu\right] + i\alpha_1\left[A_\mu, g^{-1}\right]\right). \tag{1.65}$$

Esta nova ação é invariante de calibre, dado que

$$\begin{aligned}
\exp(iI_{\text{ef}}[A_\mu^h]) &= \int d\psi d\overline{\psi} dg \exp\left(iI\left[\psi, \overline{\psi}, A_\mu^h\right] + i\alpha_1\left[A_\mu^h, g^{-1}\right]\right) \\
&= \int d\psi d\overline{\psi} dg \exp\left(iI\left[\psi^{h^{-1}}, \overline{\psi}^{h^{-1}}, A_\mu\right] + i\alpha_1\left[A_\mu, hg^{-1}\right] - i\alpha_1\left[A_\mu, h\right]\right) \\
&= \int d\psi d\overline{\psi} dg \exp\left(iI\left[\psi, \overline{\psi}, A_\mu\right] + i\alpha_1\left[A_\mu, \left(gh^{-1}\right)^{-1}\right]\right) \\
&= \int d\psi d\overline{\psi} d(gh^{-1}) \exp\left(iI\left[\psi, \overline{\psi}, A_\mu\right] + i\alpha_1\left[A_\mu, \left(gh^{-1}\right)^{-1}\right]\right) \\
&= \exp(iI_{\text{ef}}[A_\mu]).
\end{aligned} \tag{1.66}$$

A invariância da ação efetiva nos fornece um forte indício do *cancelamento da anomalia referente à simetria de calibre*, dado que esta é restaurada no nível quântico.

1.6 A anomalia de ABJ

Em seus estudos sobre algebra de correntes, Adler [8], Bell e Jackiw [7] descobriram que a validade da identidade de Ward para correntes vetoriais-axiais não era automaticamente satisfeita quando havia férmions na teoria. A causa disto era que alguns diagramas de um laço introduziam termos anômalos que impossibilitavam as identidades de Ward de se reproduzirem recursivamente em ordens mais altas da expansão perturbativa. Com o objetivo de mostrar explicitamente como as identidades de Ward se modificam na presença de um termo anômalo, consideraremos o contexto da eletrodinâmica.

Comecemos considerando as amplitudes de três partículas na eletrodinâmica, dadas por

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu\lambda}\left(k_1,k_{2,}q\right) &= i\int d^4xd^4yd^4z\exp\left(ik_1x+ik_2y-iqz\right)\left\langle 0\right| T\left(j_\mu\left(x\right)j_\nu\left(y\right)j^5_\lambda\left(z\right)\right)\left|0\right\rangle, \\
T_{\mu\nu}(k_1,k_2,q) &= i\int d^4xd^4yd^4z\exp\left(ik_1x+ik_2y-iqz\right)\left\langle 0\right| T\left(j_\mu\left(x\right)j_\nu\left(y\right)P\left(z\right)\right)\left|0\right\rangle,
\end{aligned}
\tag{1.67}
$$

onde $j_\mu(x)$, $j^5_\mu(x)$ e $P(x)$ são as correntes vetorial, vetorial axial e pseudoescalar respectivamente, dadas por

$$
\begin{aligned}
j_\mu\left(x\right) &= \overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x), \\
j^5_\mu(x) &= \overline{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x), \\
P(x) &= \overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x).
\end{aligned}
\tag{1.68}
$$

Para estabelecer a identidade de Ward precisamos diferenciar as amplitudes acima. No espaço dos momenta, após uma integração por partes, teremos a relação

$$
q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}\left(k_1,k_{2,}q\right) = i\int d^4xd^4yd^4z\exp\left(ik_1x+ik_2y-iqz\right)\partial^\lambda_z\left\langle 0\right| T\left(j_\mu\left(x\right)j_\nu\left(y\right)j^5_\lambda\left(z\right)\right)\left|0\right\rangle. \tag{1.69}
$$

Usando a lei clássica para a conservação da corrente axial,

$$
\partial^\mu j^5_\mu(x) = 2imP(x), \tag{1.70}
$$

e considerando cuidadosamente a contribuição dos comutadores das componentes zero das correntes, obtemos, após a diferenciação da amplitude, a seguinte identidade

$$q^{\lambda}T_{\mu\nu\lambda}\left(k_1,k_{2,}q\right)=2mi\int d^4xd^4yd^4z\exp\left(ik_1x+ik_2y-iqz\right)\left\langle 0\right|T\left(j_{\mu}\left(x\right)j_{\nu}\left(y\right)P\left(z\right)\right)\left|0\right\rangle ,$$
$$=2mT_{\mu\nu}. \tag{1.71}$$

Obtemos, assim, a chamada identidade de Ward axial

$$q^{\lambda}T_{\mu\nu\lambda}\left(k_1,k_{2,}q\right)=2mT_{\mu\nu}. \tag{1.72}$$

Procedendo da mesma forma, obtemos a identidade de Ward vetorial dada por

$$k^{\mu}T_{\mu\nu\lambda}=k^{\nu}T_{\mu\nu\lambda}=0. \tag{1.73}$$

Entretanto ao calcularmos a contribuição de primeira ordem para $T_{\mu\nu\lambda}$ e $T_{\mu\nu}$ vemos que essas identidades não são respeitadas. Especificamente, ao calcularmos os diagramas relevantes, realizamos um translação na variável de integração, ação não legítima numa integral divergente [28]. Esta divergência traduz-se em uma definição não única de $T_{\mu\nu\lambda}$ e $T_{\mu\nu}$. Cálculos detalhados [29] mostram que, ao levarmos em conta essas divergências, as identidades de Ward axial e vetorial ficam modificadas por

$$q^{\lambda}T_{\mu\nu\lambda}\left(k_1,k_{2,}q\right)=2mT_{\mu\nu}-\frac{1-\Delta}{4\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k_1^{\alpha}k_2^{\beta},$$
$$k_1^{\mu}T_{\mu\nu\lambda}=\frac{1+\Delta}{8\pi^2}\varepsilon_{\nu\lambda\alpha\beta}k_1^{\alpha}k_2^{\beta}, \tag{1.74}$$

sendo Δ um parâmetro relacionado à regularização das divergências que aparecem nos diagramas. De forma a eliminar os infinitos da teoria temos de realizar a correta regularização desses diagramas. Vemos, assim, que as identidades de Ward vetorial e axial não podem ser satisfeitas com a mesma escolha de Δ. Se identidade axial é satisfeita a vetorial não é, e vice versa.

Tanto no contexto da regularização de Pauli-Villars [30] quanto na regularização dimensional [31, 32], vemos que a amplitude regularizada satisfaz automaticamente a identidade de Ward vetorial enquanto a axial não. Pode-se dizer que estas regularizações selecionam a identidade a ser conservada, no caso, a identidade vetorial. Em termos da corrente axial, esta anomalia se traduz em um termo extra na lei de conservação clássica

$$\partial^\mu j_\mu^5(x) = 2imP + \mathcal{A}, \tag{1.75}$$

sendo $\mathcal{A}$ o famoso termo anômalo de ABJ

$$\mathcal{A} = \frac{e^2}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}. \tag{1.76}$$

Como veremos a seguir, num exemplo em duas dimenses, essa anomalia pode ser calculada mais facilmente no contexto das integrais de trajetória.

1.7 Cálculo da anomalia pelo método de Fujikawa

O método de Fujikawa para o cálculo de anomalias se baseia nas integrais funcionais. Conforme mostrado na seção 1.3 , sob o ponto de vista funcional, as anomalias resultam da não-invariância da medida de integração funcional sob uma transformação de simetria. Como a anomalia envolve apenas termos de primeira ordem no parâmetro da transformação, estaremos interessados em calcular $\det\left[D+\delta D\right]/\det\left[D\right]$. Esta fração pode ser escrita em termos de uma integral funcional como

$$\frac{\det\left[D+\delta D\right]}{\det\left[D\right]} = \frac{\int \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c e^{-S[D+\delta D]}}{\int \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c e^{-S[D]}}, \tag{1.77}$$

com c representando os campos fermiônicos, ou seja,

$$S[D] = \int d^d x \bar{c} D c \tag{1.78}$$

(vale observar que estamos trabalhando no espaço euclideano, nesta seção; nossos resultados, porém, podem ser facilmente continuados para o espaço de Minkowski). Da mesma forma temos

$$S[D+\delta D] = \int d^d x \left\{ \bar{c}(1+\frac{1}{2}\delta D D^{-1}) D (1+\frac{1}{2}D^{-1}\delta D) c \right\} + \mathcal{O}((\delta D)^2). \tag{1.79}$$

Realizando uma redefinição dos campos fermiônicos tal que

$$\begin{aligned} c \to c' &= (1+\frac{1}{2}D^{-1}\delta D)c, \\ \bar{c} \to \bar{c}' &= (1+\frac{1}{2}\delta D D^{-1})\bar{c}, \end{aligned} \tag{1.80}$$

teremos

$$S[D+\delta D] = \int d^d x \bar{c}' D c' + \mathcal{O}((\delta D)^2). \tag{1.81}$$

O Jacobiano desta transformação, definido por

$$\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c = J \mathcal{D}\bar{c}'\mathcal{D}c', \tag{1.82}$$

está relacionado ao operador de Dirac através de (1.77)

$$J = \frac{\det[D+\delta D]}{\det[D]}. \tag{1.83}$$

O cálculo do Jacobiano pode ser realizado expandindo os campos c ($\bar{c}$) em um conjunto completo de funções ortogonais φ_n tal que

$$\begin{aligned} c(x) &= \sum a_n \varphi_n(x), \\ \bar{c}(x) &= \sum \bar{a}_n \bar{\varphi}_n(x), \\ \int d\mu(x) \bar{\varphi}_n \varphi_n &= \delta_{nm}. \end{aligned} \tag{1.84}$$

Sendo o campo c ($\overline{c}$) fermiônico, os a_n ($\overline{a}_n$) devem pertencer a uma álgebra de Grassman. Da mesma forma os campos transformados c' ($\overline{c}'$) terão uma expansão correspondente com coeficientes a'_n ($\overline{a}'_n$), de modo que os dois conjuntos de coeficientes estarão relacionados por uma transformação unitária

$$\begin{aligned} a' &= Ua, \\ \overline{a}' &= \overline{a}'\overline{U}, \end{aligned} \tag{1.85}$$

com

$$\begin{aligned} U_{mn} &= \delta_{mn} + \int d\mu(x)\overline{\varphi}_m(x)\frac{1}{2}D^{-1}\delta D\varphi_n(x) \\ \overline{U}_{mn} &= \delta_{mn} + \int d\mu(x)\overline{\varphi}_m(x)\frac{1}{2}\delta D D^{-1}\varphi_n(x) \end{aligned} \tag{1.86}$$

Usando a propriedade dos determinantes

$$\ln\det D = \mathrm{tr}\,\ln D, \tag{1.87}$$

teremos que

$$\prod_n d\overline{a}'_n da'_n = \prod_n d\overline{a}_n da_n e^{-\mathrm{tr}\,\ln(\overline{U}U)}, \tag{1.88}$$

onde o sinal de menos aparece por estarmos tratando de variáveis de Grassman, situação na qual o determinante do Jacobiano é justamente o inverso do caso bosônico. Em termos dos campos fermiônicos originais, dado que

$$\mathcal{D}\overline{c}\mathcal{D}c \to \prod_n d\overline{a}_n \prod_n da_n, \tag{1.89}$$

temos

$$\mathcal{D}\overline{c}\mathcal{D}c = \exp\left(\frac{1}{2}\int d\mu(x)\overline{\varphi}_n(x)(\delta D D^{-1} + D^{-1}\delta D)\varphi_n(x)\right)\mathcal{D}\overline{c}'\mathcal{D}c'. \tag{1.90}$$

A expressão acima é divergente (dado que, explicitando a forma de δD e D, podemos identificar nela um traço funcional envolvendo a quantidade $\sum_n \varphi_n(x)\overline{\varphi}_n(x) = \delta(0)$) necessitando, portanto, ser regularizada apropriadamente. Formalmente a medida de integração fermiônica pode ser escrita como

$$\mathcal{D}\overline{c}\mathcal{D}c = e^{-\operatorname{tr} D^{-1}\delta D}\mathcal{D}\overline{c}'\mathcal{D}c', \tag{1.91}$$

o que nos permite escrever o Jacobiano como

$$\ln J = \operatorname{tr} D^{-1}\delta D = \delta w_D. \tag{1.92}$$

O cálculo do Jacobiano dado acima não depende da escolha das funções de base, mas depende da maneira escolhida para se realizar a regularização. A escolha da regularização, por sua vez, desde que possibilite ao traço da expressão acima ser bem definido, depende da simetria que queremos preservar. Consideraremos a seguir dois casos ilustrativos em duas dimensões: primeiramente, a transformação associada à anomalia quiral e depois a transformação associada à anomalia de calibre da CDQ$_2$ com acoplamento quiral (a serem discutidas no capítulo 2) .

1.7.1 Anomalia quiral

Neste caso estaremos lidando com uma transformação sobre o operador de Dirac tal que

$$i\not{D} \to e^{\gamma_5\theta^a(x)T_a}\left(i\not{D}\right)e^{\gamma_5\theta^a(x)T_a}, \tag{1.93}$$

o que implica em

$$\delta\left(i\not{D}\right) \to \left(i\not{D}\right)\gamma_5\theta^a T_a + \gamma_5\theta^a T_a\left(i\not{D}\right). \tag{1.94}$$

Impondo que o operador D utilizado anteriormente seja tal $D = \left(i\not{D}\right)^2$, relacionado ao tipo de regularização que queremos fazer, teremos δD

$$\delta D \to D\gamma_5\theta^a T_a + 2D^{1/2}\gamma_5\theta^a T_a D^{1/2} + \gamma_5\theta^a T_a D. \tag{1.95}$$

Podemos assim escrever

$$\ln J = \delta w_D = \delta w_{\left(i\not{D}\right)^2} = \lim_{\epsilon\to 0} 4\mathrm{tr}\,\left[e^{-\epsilon D}\gamma_5\theta^a T_a\right], \tag{1.96}$$

onde o fator de amortecimento $e^{-\epsilon D}$ foi introduzido de forma a regularizar o traço. Podemos reescrever a equação acima de forma a explicitar o fator anômalo tal que

$$\delta w_D = \int d^d x \mathcal{A}(x)\theta^a(x) T_a, \tag{1.97}$$

com

$$\mathcal{A}(x) = 2\lim_{\epsilon\to 0}\sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 e^{-\epsilon\left(i\not{D}\right)^2}\varphi_n(x). \tag{1.98}$$

A expressão acima não deve depender da escolha da base. Portanto, escolhendo as funções $\varphi_n(x)$ para que sejam ondas planas e notando que

$$\begin{aligned} \left(i\not{D}\right)^2 &= -D_\mu D_\mu + X, \\ \text{com } X &= \frac{ie}{4}\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right] F_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{1.99}$$

sendo $F_{\mu\nu}$ o tensor de intensidade de campo para a teoria não abeliana, temos portanto

$$\begin{aligned} \left(i\not{D}\right)^2 e^{ipx} &= \left(-D_\mu D_\mu + X\right) e^{ipx}, \\ \left(-D_\mu D^\mu + X\right) e^{ipx} &= e^{ipx}\left[\left(p_\mu - iD_\mu\right)^2 + X\right]. \end{aligned} \tag{1.100}$$

A anomalia pode, então, ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= 2\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{tr}\left\{\gamma_5\int\frac{d^d p}{(2\pi)^2}e^{-ip\cdot x}e^{-\varepsilon D}e^{ip\cdot x}\right\} \\ &= 2\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{tr}\left\{\gamma_5\int\frac{d^d p}{(2\pi)^2}e^{-\varepsilon(p^2-2ip\cdot D-D^2+X)}\right\}. \end{aligned} \tag{1.101}$$

Fazendo uma mudança de variáveis $(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}p = k$ e expandindo em potências de ε temos

$$\mathcal{A}(x) = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{tr}\left\{\gamma_5\frac{1}{\varepsilon^{\frac{d}{2}}}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^2}e^{-k^2}\left[1+2i(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}k\cdot D+\varepsilon\mathcal{D}^2-\varepsilon X+O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})\right]\right\}. \quad (1.102)$$

Obviamente, para duas dimensões, não precisamos computar termos de ordem mais elevada. Usando o fato de que

$$\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}e^{-k^2} = \frac{1}{4\pi}$$

e

$$\mathrm{tr}\,(\gamma_5) = 0,$$

teremos, para a anomalia quiral,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2\pi}\mathrm{tr}\,\{\gamma_5 X\} = \frac{e}{2\pi}\epsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (1.103)$$

1.7.2 Anomalia de calibre

Nesse caso a tranformação sobre o operador de Dirac com acoplamento quiral direito será dada por

$$i\not{D} \to \overline{U}i\not{D}U, \quad (1.104)$$

com

$$U = \exp(i\theta^aT_a + i\gamma_5\theta^aT_a) = \exp(2iP_+\theta^aT_a), \quad (1.105)$$

$$\overline{U} = \exp(-i\theta^aT_a + i\gamma_5\theta^aT_a) = \exp(-2iP_-\theta^aT_a),$$

o que implica em

$$\delta(i\not{D}) \to (i\not{D})2iP_+\theta^aT_a - 2iP_-\theta^aT_a(i\not{D}). \quad (1.106)$$

Desta vez para que o operador D seja positivo definido fazemos $D = (i\not{D})^\dagger(i\not{D})$, o que nos dá δD

$$\delta D \rightarrow -D2iP_+\theta^a T_a - D^{1/2}2iP_+\theta^a T_a D^{1/2} + D^{1/2}2iP_-\theta^a T_a D^{1/2} + 2iP_-\theta^a T_a D. \quad (1.107)$$

Assim, obtemos

$$\ln J^{(+)} = \delta w_{D^a} = \delta w_{(i\not{D})^\dagger(i\not{D})} = -\lim_{\epsilon\rightarrow 0} 4\mathrm{tr}\left[e^{-\epsilon D}\gamma_5\theta^a T_a\right], \quad (1.108)$$

equação equivalente a (1.96) porém com sinal oposto e com o operador D definido diferentemente. O sinal (+) se refere ao tipo de acoplamento com o qual estamos lidando.

Para o acoplamento quiral esquerdo devemos substituir P_+ por P_- e vice versa, de forma que

$$\ln J^{(-)} = \delta w_{D^a} = \delta w_{(i\not{D})^\dagger(i\not{D})} = \lim_{\epsilon\rightarrow 0} 4\mathrm{tr}\left[e^{-\epsilon D}\gamma_5\theta^a T_a\right]. \quad (1.109)$$

Veremos que esse sinal oposto em J_+ e J_- será o responsável pelo cancelamento da anomalia no modelo padrão. Realizando agora cálculos semelhantes aos da anomalia quiral, vemos que a anomalia de calibre esquerda será

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{(-)}(x) &= 2\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\mathrm{tr}\left\{\gamma_5\frac{1}{\varepsilon^{\frac{d}{2}}}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^2}e^{(-k^2+2e(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}P_+k\cdot A - i\varepsilon eP_+(\partial_\mu A_\mu) - \varepsilon e^2P_+A_\mu A_\mu + \varepsilon P_+X)}\right\} \\
&= 2\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\mathrm{tr}\left\{\begin{array}{c}\gamma_5\frac{1}{\varepsilon^{\frac{d}{2}}}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^2}e^{-k^2}[1+2e(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}P_+k\cdot A - i\varepsilon eP_+(\partial_\mu A_\mu) - \varepsilon e^2P_+A_\mu A_\mu \\ +2e^2\varepsilon P_+(k\cdot A)^2 + \varepsilon P_+X]\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

Notando que

$$\int\frac{d^dk}{(2\pi)^2}e^{-k^2} = \frac{1}{4\pi},$$

e

$$\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}e^{-k^2}k_\mu k_\nu = A\eta_{\mu\nu}, \quad (1.110)$$

com a constante A determinada por

$$\eta_{\mu\nu}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}e^{-k^2}k_\mu k_\nu=\eta_{\mu\nu}A\eta_{\mu\nu}=2A, \tag{1.111}$$

o que fornece

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}e^{-k^2}k^2=\frac{1}{8\pi}\int du(e^{-u}u)\\&=\frac{1}{8\pi},\end{aligned}$$

vemos que esses dois termos se cancelam

$$\begin{aligned}&=2\lim_{\varepsilon\to0}\mathrm{tr}\left\{\gamma_5\frac{1}{\varepsilon}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^2}e^{-k^2}[-\varepsilon e^2P_+A_\mu A_\mu+4e^2\varepsilon P_+(k\cdot A)^2]\right\}\\&=2\lim_{\varepsilon\to0}\mathrm{tr}\left\{\gamma_5(-\frac{1}{4\pi}e^2P_+A_\mu A_\mu+A\eta_{\mu\nu}\frac{1}{4\pi}e^2P_+A_\mu A\nu]\right\}\\&=0,\end{aligned}$$

o que nos permite calcular a anomalia como

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{(-)}(x)&=2\lim_{\varepsilon\to0}\mathrm{tr}\left\{\gamma_5\frac{1}{\varepsilon^{\frac{d}{2}}}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^2}e^{-k^2}[-i\varepsilon eP_+(\partial_\mu A_\mu)+\varepsilon P_+X_a]\right\}\\&=\frac{1}{2\pi}\mathrm{tr}\left\{\gamma_5[-ieP_+(\partial_\mu A_\mu)+P_+X]\right\}\\&=\frac{1}{4\pi}\mathrm{tr}\left\{\gamma_5[-ie\gamma_5(\partial_\mu A_\mu)+X]\right\}\\&=-\frac{1}{4\pi}\left\{ie(\partial_\mu A_\mu)+\frac{e}{2}\epsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right\}.\end{aligned}$$

Da mesma forma teremos

$$\mathcal{A}^{(+)}(x)=+\frac{1}{4\pi}\left\{ie(\partial_\mu A_\mu)+\frac{e}{2}\epsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right\}. \tag{1.112}$$

Vemos assim que uma teoria com acoplamento quiral direito tem a mesma anomalia porém com sinal oposto ao de uma teoria com acoplamento quiral esquerdo. Vemos assim que teorias com férmions de Dirac (sem massa) acoplados vetorialmente, que são equivalentes a dois férmions de Weyl, um direito e outro esquerdo, acoplados de modo quiral, não têm anomalia na simetria de calibre.

Capítulo 2

Cálculo da Ação Efetiva da CDQ_2 com acoplamento quiral

Neste capítulo calcularemos inicialmente a ação efetiva para o modelo da CDQ_2 sem acoplamento quiral seguindo o método delineado em [33], que requer o cálculo da corrente em termos dos campos de calibre, a partir da integração da equação da anomalia. Mostraremos, em seguida, que a ação efetiva do modelo com o acoplamento quiral pode ser obtida a partir daquela do modelo sem acoplamento com uma escolha adequada do calibre no cone de luz.

2.1 Simetrias da CDQ_2

Queremos calcular a ação efetiva da CDQ_2, definida pela densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathrm{tr}\ (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \overline{\psi}D\psi, \tag{2.1}$$

com $F_{\mu\nu}$ sendo o tensor de intensidade de campo e ψ representando um multipleto de campos fermiônicos na representação fundamental do grupo de calibre. Estamos interessados inicialmente em um modelo no qual o operador de Dirac seja

$$D = i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/.$$

As equações de campo derivadas dessa Lagrangeana são

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{ab}_{\mu}F^{\mu\nu}_{b} + e\overline{\psi}\gamma^{\nu}\tau^{a}\psi = 0, \\ iD\!\!\!\!/\psi = \gamma^{\mu}(i\partial_{\mu} + e\tau^{a}A^{a}_{\mu})\psi = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

com $\mathcal{D}^{ab}_{\mu} = (\delta^{ab}\partial_{\mu} + ef^{acb}A^{c}_{\mu})$ sendo a derivada covariante na representação adjunta. As transformações de calibre associadas a ψ são

$$\begin{aligned} &\psi' = U\psi, \\ &\overline{\psi}' = \psi^{\dagger\prime}\gamma^{0} = \psi^{\dagger}U^{\dagger}\gamma^{0} = \overline{\psi}U^{\dagger}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde

$$\begin{aligned} U = \exp(i\theta^{a}T_{a}), \\ U^{\dagger} = \exp(-i\theta^{a}T_{a}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Pela aplicação do teorema de Noether vemos que a corrente conservada covariantemente será $J^{a}_{\mu} = \overline{\psi}\gamma_{\mu}T^{a}\psi$

$$\mathcal{D}^{ab}_{\mu}J^{\mu b} = 0. \tag{2.5}$$

Da mesma forma, a teoria tem simetria quiral clássica, sob transformações $\psi' = U_5\psi$, com U_5 dado por

$$U_5 = \exp(\gamma_5 \theta^a T_a), \tag{2.6}$$

que leva à conservação covariante de $J_\mu^{5a} = \overline{\psi}\gamma_5\gamma_\mu T^a\psi$

$$\mathcal{D}_\mu^{ab} J^{5b\mu} = 0.$$

Na teoria quântica, a corrente de calibre será representada por um operador, cujo valor esperado no vácuo define a quantidade $J_\mu^a(x|\,A)$:

$$J_\mu^a(x|\,A) = \left\langle \overline{\psi}\gamma_\mu \tau^a \psi \right\rangle. \tag{2.7}$$

Levando em consideração a definição de ação efetiva dada no capítulo 1, é imediato ver que

$$eJ_\mu^a(x|\,A) = \frac{\delta W[A]}{\delta A_a^\mu(x)}, \tag{2.8}$$

onde observamos que

$$W[A] = -i \ln \frac{\det i\not{D}[A]}{\det i\partial}.$$

No nível quântico, contudo, a conservação da corrente axial não será mantida, conforme demonstrado na seção 1.6. Utilizaremos essa quebra da simetria quiral para o cálculo da corrente de calibre $J_\mu^a(x|\,A)$.

2.2 Cálculo da corrente

Integrando a relação (2.8) podemos calcular a ação efetiva. Para tanto devemos saber quem é a corrente $J_\mu^a(x|\,A)$ explicitamente em termo dos campos de calibre A_μ. Notando que no caso bidimensional, devido à relação $\gamma_\mu \gamma_5 = \varepsilon_{\mu\nu}\gamma^\nu$, temos uma relação entre a corrente de calibre e a corrente quiral:

$$J^b_{5\mu}(x|\, A) = \left\langle \overline{\psi}\gamma_\mu \gamma_5 \tau^b \psi \right\rangle_A = \varepsilon_{\mu\nu} J^{\nu b}(x|\, A). \tag{2.9}$$

Utilizando a equação para a anomalia quiral obtida em (1.103) teremos

$$\mathcal{D}^{ab}_\mu J^{5\mu b} = -\widetilde{\mathcal{D}}^{ab}_\mu J^{\mu b} = \frac{e}{2\pi}\varepsilon^{\mu\nu} F^a_{\mu\nu}.$$

Integrando a equação acima podemos, portanto, calcular a corrente $J^a_\mu(x|\, A)$, o que faremos a seguir. Utilizaremos, alternadamente, índices de Minkowski e índices de cone de luz, dependendo de qual seja a escolha mais conveniente (ver apêndice A para definições).

Introduzindo a função de Green do operador $\mathcal{D}^{ab}_\mu$ através da equação

$$\mathcal{D}^{ab}_\pm K^{bc}_\pm = \mp \delta^{ac}\delta(x-y), \tag{2.10}$$

teremos

$$J^a_{5\pm} = \frac{e}{2\pi}\int d^2y K^{ab}_\pm(x, y|\, A)\mathcal{A}(y), \tag{2.11}$$

sendo $\mathcal{A}(y)$ a anomalia na conservação da corrente. A função de Green K_μ depende do campo de calibre externo A_μ, o qual pode ser escrito em termos de campos que tomam valores na representação adjunta,

$$\mathcal{A}^{ab}_\mu = f^{acb} A^c_\mu, \tag{2.12}$$

de forma que

$$\mathcal{D}^{ab}_\pm \delta(x-y) = (\delta^{ab}\partial_\pm + e f^{acb} A^c_\pm)\delta(x-y) = (\delta^{ab}\partial_\pm + e\mathcal{A}^{ab}_\pm)\delta(x-y). \tag{2.13}$$

Notando que a função $K_\pm$ é justamente a inversa do operador de Dirac $D_\mp$, ou seja, formalmente,

$$K_\pm = \frac{1}{D_\mp[A_\mp]} = \frac{1}{\partial_\mp + eA_\mp} = \frac{1}{\partial_\mp(1 + e\partial^{-1}_\mp A_\mp)}, \tag{2.14}$$

podemos expandir a expressão acima em uma série geométrica para obtermos

$$\frac{1}{\partial_\mp(1+e\partial_\mp^{-1}A_\mp)} = (1 - e\partial_\mp A_\mp + e^2\partial_\mp^{-1}A_\mp\partial_\mp^{-1}A_\mp - ...)\partial_\mp^{-1}. \tag{2.15}$$

Com as funções de dois pontos definidas de modo que

$$\begin{aligned} D_\pm(x) &= \partial_\pm D_F(x), \\ D_F(x) &= -\frac{i}{4\pi}\ln(-x^2+i\epsilon), \\ \partial_\mp D_\pm(x) &= \delta^2(x), \end{aligned} \tag{2.16}$$

K_μ pode ser expandido em uma série nos campos $\mathcal{A}_\mu^{ab}$:

$$\begin{aligned} K_\pm^{ab}(x,y|\,A) = \mp\delta^{ab}D_\pm(x-y) \mp \sum_{n=1}^{\infty}(-e)^n \int d^2x_1\cdots d^2x_n D_\pm(x-x_1)\cdots D_\pm(x-x_n)\times \\ \times\,[\mathcal{A}_\mp(x_1)\cdots\mathcal{A}_\mp(x_n)]^{ab}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Reescrevendo os campos de calibre A_μ^{ab} na representação fundamental, a equação acima fica:

$$\begin{aligned} K_\pm^{ab}(x,y|\,A) = \mp\delta^{ab}D_\pm(x-y) \mp \sum_{n=1}^{\infty}(ie)^n \int d^2x_1\cdots d^2x_n D_\pm(x-x_1)\cdots D_\pm(x-x_n)\times \\ \times\,\mathrm{tr}\,\{T^a[A_\mp(x_1),[A_\mp(x_2),\cdots[A_\mp(x_n),\tau^b]]\}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Usando o fato de que

$$\begin{aligned} F_{+-} &= -\partial_- A_+ + \mathcal{D}_+ A_-, \\ F_{-+} &= -\mathcal{D}_- A_+ + \partial_+ A_-, \end{aligned} \tag{2.19}$$

e que

$$\varepsilon_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}(y) = 2F^{01}(y) = -F^{+-}(y),$$

a corrente $J^b_{5\mu}(x|\, A)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} J^a_{5\pm}(x|\, A) &= \frac{e}{2\pi}\int d^2y K^{ab}_{\pm}(x,y|\, A)\mathcal{A}(y) \\ &= \frac{e}{2\pi}\int d^2y K^{ab}_{\pm}(x,y|\, A)\varepsilon_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma b}(y) \\ &= -\frac{e}{2\pi}\int d^2y K^{ab}_{\pm}F^{+-b} \\ &= \frac{e}{2\pi}A_{\pm}(x) \pm \frac{e}{2\pi}\int d^2y K^{ab}_{\pm}\partial_{\pm}A^b_{\mp}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

onde no último passo foi utilizada a equação (2.10).

Se notarmos que $\varepsilon_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma b}$ é um escalar, veremos que $\partial_{\pm}A^b_{\mp}$ tem que ser uma bidivergência, o que nos autoriza a realizar uma integração parcial nas variáveis de cone de luz e por a zero os termos de fronteira. Assim, a equação para a corrente fica

$$\begin{aligned} J^a_{5\pm} = {}& \frac{e}{2\pi}A^a_{\pm}(x) - \frac{e}{2\pi}\int d^2y\partial_{\pm}D_{\pm}(x-y)A^a_{\mp}(y) \\ & + \frac{i}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}(ie)^n\int d^2x_1\cdots d^2x_n D_{\pm}(x-x_1)\cdots D_{\pm}(x-x_n)\times \\ & \times \operatorname{tr}\{T^a[A_{\mp}(x_1),[A_{\mp}(x_2),\cdots[A_{\mp}(x_{n-1}),\partial_{\pm}A_{\mp}(x_n)]\}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Usando

$$\begin{aligned} T^{(n)}_{\pm} = {}& \frac{1}{2\pi}\int d^2x_1\cdots d^2x_n D_{\pm}(x-x_1)\cdots D_{\pm}(x-x_n)\times \\ & \times [A_{\mp}(x_1),[A_{\mp}(x_2),\cdots[A_{\mp}(x_{n-1}),\partial_{\pm}A_{\mp}(x_n)], \end{aligned} \tag{2.22}$$

a corrente se reescreve como

$$eJ^a_{5\pm} = \frac{e^2}{2\pi}A^a_{\pm}(x) - \frac{e^2}{2\pi}\int d^2y\partial_{\pm}D_{\pm}(x-y)A^a_{\mp}(y) + \operatorname{tr}\sum_{n=2}^{\infty}(ie)^{n+1}T^aT^{(n)}_{\pm}. \tag{2.23}$$

Definimos um funcional

$$T_{\pm}(x|\, A^{(r)}) = \sum_{n=1}^{\infty}(ie)^{n+1}T^{(n)}_{\pm}(x|\, A^{(r)}), \tag{2.24}$$

com

$$T^{(1)}_{\pm}(x|\,A^{(r)}) = \frac{1}{2\pi}\int dz D_{\pm}(x-z)\partial_{\pm}A^{(r)}_{\mp}(z),$$

e

$$A^{(r)}_{\mp}(x) = rA_{\mp}(x),$$

de modo que a corrente possa ser escrita sucintamente como

$$eJ^{a}_{5\pm} = \frac{e^2}{2\pi}A^{a}_{\pm}(x) + \mathrm{tr}\,[T^a T_{\pm}(x|\,A)]. \tag{2.25}$$

2.3 Ação efetiva da CDQ$_2$

Pelas parametrizações realizadas acima vê-se que a ação pode ser escrita como

$$W[A] = W[0] + \frac{e^2}{4\pi}\int d^2x A_+ A_- \tag{2.26}$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\int_0^1 dr \int d^2x \left[A_-(x)T_+(x|\,A^{(r)}) + A_+(x)T_-(x|\,A^{(r)})\right]\right\}. \tag{2.27}$$

Utilizando a equação (2.25) e a conservação covariante da corrente, vemos que os funcionais geradores $T_{\pm}(x|\,A)$ obdecem à seguinte equação diferencial

$$\partial_{\mp}T_{\pm} = -\frac{e^2}{2\pi}\partial_{\pm}A^{(r)}_{\mp} + ie\left[A^{(r)}_{\mp}, T_{\pm}\right] \tag{2.28}$$

Os campos de gauge em duas dimensões sempre podem ser parametrizados por

$$\begin{aligned} eA^{(r)}_{+} &= U_r^{-1} i\partial_+ U, \\ eA^{(r)}_{-} &= V_r i\partial_- V_r^{-1}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

com

$$eA_+ = \frac{\partial}{\partial r}\left(U_r^{-1} i\partial_+ U\right).$$

Com essa parametrização vemos que (2.28) é resolvida por $T_\pm(x|\, A^{(r)})$ escritos como

$$T_+ = -\frac{e}{2\pi} V_r i\partial_+ V_r^{-1},$$
$$T_- = -\frac{e}{2\pi} U_r^{-1} i\partial_- U_r. \tag{2.30}$$

De modo a simplificar o cálculo podemos fazer uso da invariância de calibre da ação efetiva. Assim, se escolhermos um calibre no cone de luz tal que $A_- = 0$ teremos equivalentemente $V = 1$. Introduzindo $A_\pm^{(r)}$e $T_\pm$ na expressão para a ação efetiva e fazendo uso do calibre citado teremos:

$$\begin{aligned} W[A] - W[0] &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{tr} \int_0^1 dr \int d^2x A_+(x) T_-(x|\, A^{(r)}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{tr} \int_0^1 dr \int d^2x (U_r^{-1} i\partial_- U_r)\frac{\partial}{\partial r}(U_r^{-1} i\partial_+ U) \\ &= \frac{1}{4\pi}\mathrm{tr} \int_0^1 dr \int d^2x \left[(U_r^{-1} i\partial_- U_r)\frac{\partial}{\partial r}(U_r^{-1} i\partial_+ U) + (U_r^{-1} i\partial_+ U_r)\frac{\partial}{\partial r}(U_r^{-1} i\partial_- U)\right] \\ &+ \frac{1}{4\pi}\mathrm{tr} \int_0^1 dr \int d^2x \left[(U_r^{-1} i\partial_- U_r)\frac{\partial}{\partial r}(U_r^{-1} i\partial_+ U) - (U_r^{-1} i\partial_+ U_r)\frac{\partial}{\partial r}(U_r^{-1} i\partial_- U)\right]. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Notamos que o primeiro termo envolve uma derivada total em relação r e o que nos dá justamente a ação do modelo sigma principal (veja por exemplo, o capítulo 9 da referência [33]) enquanto o segundo termo pode ser manipulado de forma a gerar a ação de Wess-Zumino, após uma integração parcial em ∂_+. Temos como resultado final, portanto,

$$\begin{aligned} W[A] - W[0] &= \frac{1}{4\pi}\mathrm{tr} \int d^2x (U^{-1}\partial_+ U)(U^{-1}\partial_- U) \\ &- \frac{1}{4\pi}\mathrm{tr} \int_0^1 dr \int d^2x U_r^{-1}\dot{U}_r \left[(U_r^{-1}\partial_+ U_r), (U_r^{-1}\partial_- U)\right], \end{aligned} \tag{2.32}$$

onde $U = U_1$ e $\dot{U}_r$ denota diferenciação em relação a r. A simetria de calibre da ação efetiva nos permite concluir que o resultado, em um calibre arbitrário, pode ser obtido simplesmente pelas substituições

$$\begin{aligned} U_r &\rightarrow G_r = U_r V_r, \\ U &\rightarrow G = UV, \end{aligned} \tag{2.33}$$

de forma que a ação efetiva pode ser escrita no espaço de Minkowski como

$$\begin{aligned} W[A] - W[0] = -\Gamma[G] &= -\frac{1}{8\pi}\int d^2x \mathrm{tr}\,(\partial^\mu G)G^{-1}(\partial_\mu G) \\ &- \frac{1}{4\pi}\mathrm{tr}\int_0^1 dr \int d^2x \epsilon^{\mu\nu}\mathrm{tr}\,\left[G_r^{-1}\dot{G}_r G_r^{-1}(\partial_\mu G_r)G_r^{-1}(\partial_\nu G_r)\right] \\ &= -S_{WZ} - S_{P\sigma M}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

$\Gamma[G]$ é chamada de ação de Wess-Zumino-Witten (WZW) que pode ser escrita como a soma do termo de Wess-Zumino S_{WZ} e a ação do modelo sigma principal $S_{P\sigma M}$.

Este mesmo resultado pode ser obtido pelo procedimento de Polyakov-Wiegmann [34].

2.4 Ação Efetiva da CDQ$_2$ com acoplamento quiral

Neste caso, com acoplamento quiral (esquerdo), o operador de Dirac se modifica para:

$$D = i\partial\!\!\!/_\mu + eP_- A\!\!\!/_\mu, \tag{2.35}$$

com

$$P_- = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5). \tag{2.36}$$

A simetria global associada ao termo $\overline{\psi}D\psi$ será

$$U = \exp(i\theta^a T_a - i\gamma_5\theta^a T_a) = \exp(2iP_-\theta^a T_a), \tag{2.37}$$

$$\overline{U} = \exp(-i\theta^a T_a - i\gamma_5\theta^a T_a) = \exp(-2iP_+\theta^a T_a),$$

com campo de gauge A_μ se tranformando como

$$A'_\mu = U_g A_\mu U_g^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu U_g)U_g^\dagger,$$

com $U_g = \exp(i\theta^a T_a)$. Vamos mostrar a invariância do termo fermiônico explicitamente:

$$\begin{aligned}\overline{\psi}' D'\psi' &= \overline{\psi U}\gamma^\mu(i\partial_\mu + eP_-A'_\mu)U\psi \\ &= i\overline{\psi U}\gamma^\mu U(\partial_\mu\psi) + i\overline{\psi U}\gamma^\mu(\partial_\mu U)\psi + \overline{\psi U}\gamma^\mu eP_-A'_\mu U\psi \\ &= i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\overline{\psi}\gamma^\mu U^\dagger(\partial_\mu U)\psi + \overline{\psi}\gamma^\mu U^\dagger eP_-A'_\mu U\psi.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Notando que

$$\begin{aligned}e^{iP_-M} &= 1 + iP_-M + (iP_-M)^2 + (iP_-M)^3 + ... \\ &= 1 + P_-(iM + (iM)^2 + (iM)^3 + ...) \\ &= 1 + P_-(e^{iM} - 1),\end{aligned}$$

teremos

$$\begin{aligned}iU^\dagger\partial_\mu U &= i(1 + P_-(U_g^\dagger - 1))\partial_\mu(1 + P_-(U_g - 1)) \\ &= i(P_- + P_-P_-U_g^\dagger - P_-P_-1))\partial_\mu(U_g) \\ &= iP_-(U_g^\dagger)\partial_\mu(U_g),\end{aligned} \tag{2.39}$$

e

$$
\begin{aligned}
e\overline{\psi}\gamma^\mu U^\dagger P_- A'_\mu U\psi &= e\overline{\psi}\gamma^\mu(1+P_-(U_g^\dagger - 1))P_- A'_\mu U\psi \\
&= e\overline{\psi}\gamma^\mu P_- U_g^\dagger A'_\mu U\psi \\
&= e\overline{\psi}\gamma^\mu U_g^\dagger A'_\mu P_- U\psi \\
&= e\overline{\psi}\gamma^\mu P_- U_g^\dagger A'_\mu U_g\psi. \qquad (2.40)
\end{aligned}
$$

Substituíndo na equação original teremos

$$
\begin{aligned}
\overline{\psi}' D'\psi' &= i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\overline{\psi}\gamma^\mu P_-(U_g^\dagger)\partial_\mu(U_g)\psi + e\overline{\psi}\gamma^\mu P_- U_g^\dagger A\prime_\mu U\psi \\
&= i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\overline{\psi}\gamma^\mu P_-(U_g^\dagger)\partial_\mu(U_g)\psi + e\overline{\psi}\gamma^\mu P_- U_g^\dagger U_g A_\mu U_g^\dagger U_g\psi \\
&- i\overline{\psi}\gamma^\mu P_- U_g^\dagger(\partial_\mu U_g)U_g^\dagger U_g\psi \qquad (2.41) \\
&= \overline{\psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu\psi + eP_- A_\mu)\psi = \overline{\psi}D\psi. \qquad (2.42)
\end{aligned}
$$

Vale notar que caso tivéssemos um acoplamento quiral direito, tal que

$$D = i\not{\partial}_\mu + eP_+\not{A}_\mu, \qquad (2.43)$$

com

$$P_+ = \frac{1}{2}(1+\gamma_5). \qquad (2.44)$$

todas as contas efetuadas acima continuariam válidas, com P_- substituído por P_+. Entretanto, conforme notado na seção 1.7, a anomalia associada teria a mesma forma, mas sinal oposto.

A corrente clássica conservada covariantemente será $J_\mu^a = \overline{\psi}\gamma_\mu T^a P_-\psi$ tal que

$$\mathcal{D}_\mu^{ab} J^{\mu b} = 0.$$

Conforme demonstrado na seção 1.6, o análogo quântico para essa corrente, dado por

$$J^a_\mu(x|\,A) = \left\langle \overline{\psi}\gamma_\mu \tau^a P_- \psi \right\rangle, \tag{2.45}$$

não obedece à lei clássica de conservação. A princípio, poderíamos calcular a ação efetiva associada seguindo o mesmo método delineado nas seções anteriores. Ao realizar esse processo nos deparamos com equações diferenciais análogas a (2.28), para as quais não conseguimos, contudo, uma solução. Um método alternativo para o cálculo dessa ação efetiva se dá ao notarmos que a Lagrangeana da CDQ$_2$, sem o acoplamento quiral, pode ser escrita explicitamente em termos de férmions direitos e esquerdos como:

$$\begin{aligned} \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/\right)\psi &= \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/\right)P_+\psi + \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/\right)P_-\psi \\ &= \overline{\psi}_R\left(i\partial_+ + eA_+\right)\psi_R + \overline{\psi}_L\left(i\partial_- + eA_-\right)\psi_L. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Assim, utilizando um procedimento de regularização invariante de calibre para a teoria vetorial, poderíamos obter, por exemplo, $W^L[A]$ (a ação efetiva para o caso de acoplamento quiral esquerdo), a partir de (2.32) simplesmente fazendo $A_+ = 0$. Isto equivale a por $U = 1$ nas expressões

$$\begin{aligned} eA_+ &= U^{-1} i\partial_+ U, \\ eA_- &= V i\partial_- V^{-1}, \end{aligned} \tag{2.47}$$

ou,

$$eA_\mu = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu})V^{-1} i\partial^\nu V.$$

Assim, vemos que $W^L[A] = -\Gamma[V]$, é justamente a ação WZW, particularizada para $U = 1$. A transformação de gauge $A_\mu \to A^h_\mu$, pelas equações acima equivale à transformação

$V \to hV$. Chamaremos de γ_1 o funcional de Wess-Zumino definido em (1.58), obtido para uma regularização invariante de calibre da teoria vetorial (já que não existem tais regularizações no caso quiral). Ele será dado, portanto, por

$$\gamma_1[A,h] = \Gamma[hV] - \Gamma[V], \tag{2.48}$$

que, pelo uso da fórmula de Polyakov-Wiegmann [34],

$$\Gamma[AB] = \Gamma[A] + \Gamma[B] + \frac{1}{4\pi}\int d^2x \mathrm{tr}\left[(A^{-1}\partial_+ A)(B\partial_- B^{-1})\right], \tag{2.49}$$

se reescreve como

$$\gamma_1[A,h] = \Gamma[h] - \frac{ie}{4\pi}\int d^2x \mathrm{tr}\left[A^\mu h^{-1}(\partial_\mu - \widetilde{\partial}_\mu)h\right]. \tag{2.50}$$

Esta, entretanto, é somente uma de várias regularizações possíveis. Em geral, regularizações não invariantes de calibre implicam na adição de um termo massivo na forma $\frac{ae^2}{8\pi}\mathrm{tr}\, A_\mu^2$ à ação efetiva, com a sendo um parâmetro real. Considerando a invariância da medida de integração sobre o grupo de calibre, já usada na seção 1.4, a ação $W^L[A]$ se escreve como

$$e^{iW^L[A]} = e^{\frac{ae^2}{4\pi}\mathrm{tr}\, A_\mu^2}\int \mathcal{D}h e^{i\gamma_1[A,h]} \tag{2.51}$$

Nesse caso $\alpha_1[A,g]$ para a teoria obtida através de uma regularização genérica, será:

$$\alpha_1[A,g] = -(1-a)S_{P\sigma M}[g] - S_{WZ}[g] + \frac{ie}{4\pi}\int d^2x \mathrm{tr}\left[A^\mu g^{-1}((1-a)\partial_\mu + \widetilde{\partial}_\mu)g\right]. \tag{2.52}$$

No limite em que $a \to 0$, temos obviamente que $\gamma_1[A,h] = \alpha_1[A,g]$.

A anomalia pode ser obtida através de $\alpha_1[A,g]$, o que nos dá

$$\mathcal{A}^a(x) = i\frac{\delta\alpha_1[A,g]}{\delta\theta^a(x)}\bigg|_{\theta^a=0} = \frac{ie}{4\pi}\left[(1-a)\partial_\mu - \widetilde{\partial}_\mu\right]A^{\mu,a}(x). \tag{2.53}$$

Juntando todas essas considerações, o resultado final, após a integração sobre os férmions, é uma ação efetiva bosonizada (lembremos que ainda há integrações sobre A_μ, h e g a serem feitas):

$$I_{\text{Bos}} = \int d^2x \text{tr} \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{ae^2}{8\pi} A_\mu A^\mu \right\} + \gamma_1 [A, h] + \alpha_1 [A, g] . \tag{2.54}$$

É possível mostrar que as equações de movimento que se seguem desta ação bosonizada são:

$$\begin{aligned} D_\mu F^{\mu\nu} + e\mathcal{J}^\nu &= 0, \\ D_\mu \left[-ih^{-1} \left(\partial^\mu - \tilde{\partial}^\mu \right) h \right] &= -e \left(\partial^\mu - \tilde{\partial}^\mu \right) A_\mu, \\ D_\mu \left[-ig^{-1} \left((1-a) \partial^\mu - \tilde{\partial}^\mu \right) g \right] &= -e \left((1-a) \partial^\mu - \tilde{\partial}^\mu \right) A_\mu, \end{aligned} \tag{2.55}$$

onde

$$\mathcal{J}^\mu := -\frac{i}{4\pi} h^{-1} \left(\partial^\mu - \tilde{\partial}^\mu \right) h + \frac{i}{4\pi} g^{-1} \left((a-1) \partial^\mu - \tilde{\partial}^\mu \right) g + \frac{ae}{4\pi} A_\mu \tag{2.56}$$

é a expressão bosonizada para a corrente que deveria ser conservada em função da simetria de calibre

$$\mathcal{J}_a^\mu = \left\langle i\bar{\psi} \gamma^\mu T_a P_- \psi \right\rangle_{h,g,A} \tag{2.57}$$

(o subscrito indica que a integração funcional não está abrangendo os campos A_μ, h e g). Ela, de fato, é conservada, *mesmo considerando o campo* A_μ *externo*

$$D_\mu \mathcal{J}^\mu = 0. \tag{2.58}$$

Este resultado, conseqüencia da invariância de calibre da ação efetiva, nos incentiva a buscar mecanismos de cancelamento da anomalia, dos quais trataremos no capítulo seguinte.

Capítulo 3

O Cancelamento da Anomalia na Simetria de Calibre

Conforme demonstrado no Capítulo 1 a presença dos campos de Wess-Zumino é responsável pela restauração quântica da simetria de calibre em nível não perturbativo, restauração esta expressa pela invariância da ação efetiva. É natural supor que, com a simetria restaurada, tenhamos conservação quântica das correntes classicamente conservadas, ou seja, que deva existir algum mecanismo através do qual a anomalia se cancele. Investigaremos, inicialmente, teorias de calibre abelianas em dimensões arbitrárias, onde a integração funcional nos permitirá visualizar tal mecanismo de cancelamento. Aplicaremos, então, o mesmo raciocínio para teorias não abelianas.

3.1 Discussão Geral

O valor esperado no vácuo da anomalia é dado por

$$\langle \mathcal{A}_a(x) \rangle = i \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \mathcal{A}_a(x) \exp(iI\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right]). \tag{3.1}$$

Inserindo o "1" de Faddeev-Popov, como no capítulo 1, e fazendo as mesmas manipulações anteriores, é imediato ver que chegamos a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_a(x) \rangle = i \int d\psi d\bar{\psi} \mathcal{D} A_\mu d\theta \mathcal{A}_a^{g^{-1}}(x) \\ \times \exp(iI\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right] + i\alpha_1\left[A_\mu, g^{-1}\right]), \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde, como antes, $d\theta \equiv \prod_a d\theta_a$ e definimos

$$\mathcal{D} A_\mu := dA_\mu \Delta_{\mathrm{FP}}[A_\mu] \prod_a \delta(f_a(A_\mu)).$$

Assim, vemos que o operador relevante a ser considerado na teoria com campos de Wess-Zumino é a transformada de calibre da anomalia, $\mathcal{A}_a^{g^{-1}}(x)$. Vamos considerar separadamente os casos abeliano e não abeliano. Para chamar a atenção sobre o campo de Wess-Zumino, mudaremos um pouco a notação, usando $A_\mu^\theta(x)$ para denotar o que antes chamávamos de $A_\mu^g(x)$ e chamando a transformada de calibre da anomalia de $\mathcal{A}_a^\theta(x)$.

3.1.1 Caso Abeliano

Vamos considerar o caso $U(1)$, para o qual o elemento do grupo é caracterizado por um único parâmetro θ:

$$g = e^{i\theta(x)}.$$

Utilizando (1.64), vemos que a anomalia pode ser reescrita como

$$\mathcal{A}(x) = \left.\frac{\delta W\left[A_\mu^\theta\right]}{\delta\theta(x)}\right|_{\theta=0} = \left.\int dz \frac{\delta W\left[A_\mu^\theta\right]}{\delta A_\mu^\theta(z)} \frac{\delta A_\mu^\theta(z)}{\delta\theta(x)}\right|_{\theta=0}$$
$$= \int dz \frac{\delta W\left[A_\mu\right]}{\delta A_\mu(z)} \left(\left.\frac{\delta A_\mu^\theta(z)}{\delta\theta(x)}\right|_{\theta=0}\right). \tag{3.3}$$

O termo $\delta W\left[A_\mu\right]/\delta A_\mu(z)$ depende da teoria específica sob consideração. Para avançar na discussão geral, precisamos calcular

$$\left.\frac{\delta A_\mu^\theta}{\delta\theta(x)}\right|_{\theta=0}.$$

No caso abeliano, sabemos que

$$A_\mu^\theta = A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta(x).$$

Com isso, podemos escrever

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{g}\int dz \frac{\delta W\left[A_\mu\right]}{\delta A_\mu(z)}\partial_\mu\delta(z-x) \tag{3.4}$$
$$= \frac{1}{g}\partial_\mu\frac{\delta W\left[A_\mu\right]}{\delta A_\mu(x)}.$$

Vamos mostrar que a transformada de calibre da anomalia $\mathcal{A}^\theta(x)$ pode ser escrita como a derivada funcional de $\alpha_1\left[A_\mu, g\right]$, em relação a θ. Utilizando a expressão para a anomalia dada acima e considerando sua transformada de calibre vemos que

$$\mathcal{A}^\theta = \left(\frac{1}{g}\partial_\mu\frac{\delta W\left[A_\mu\right]}{\delta A_\mu(z)}\right)^\theta$$
$$= \frac{1}{g}\partial_\mu\frac{\delta W\left[A_\mu^\theta\right]}{\delta A_\mu^\theta(x)}$$
$$= -\frac{1}{g}\int dz \frac{\delta W\left[A_\mu^\theta\right]}{\delta A_\mu^\theta(z)}\partial_\mu\delta(z-x)$$
$$= \int dz \frac{\delta W\left[A_\mu^\theta\right]}{\delta A_\mu^\theta(z)}\frac{\delta A_\mu^\theta(z)}{\delta\theta(x)}$$
$$= \frac{\delta W\left[A_\mu^\theta\right]}{\delta\theta(x)} = \frac{\delta\alpha_1\left[A_\mu, g\right]}{\delta\theta(x)}. \tag{3.5}$$

O valor esperado para a anomalia, considerando explicitamente os campos de Wess-Zumino, será portanto

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}(x) \rangle &= -\int d\psi d\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu d\theta \times \frac{\delta}{\delta\theta(x)} \alpha_1 \left[A_\mu, g^{-1}\right] \exp(iI\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right] + i\alpha_1 \left[A_\mu, g^{-1}\right]) \\ &= i\int d\psi d\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu d\theta \times \frac{\delta}{\delta\theta(x)} [\exp(iI\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right] + i\alpha_1 \left[A_\mu, g^{-1}\right])]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Integrando explicitamente os graus de liberdade fermiônicos obtemos o determinante fermiônico que, embora não possa ser calculado de forma fechada, para dimensões superiores a 2, pode ser tornado numa quantidade finita e bem definida em cada ordem de g, através de regularização e renormalização [23, 24]. Não há resultados exatos também para a integração posterior, sobre A_μ. Contudo, a integração sobre os campos de Wess-Zumino θ nos dá

$$\langle \mathcal{A}(x) \rangle = \int d\theta \frac{\delta}{\delta\theta} F[\theta] = 0, \tag{3.7}$$

o que é uma conseqüência da invariância translacional da integração funcional[1]. Podemos dizer, assim, que se a teoria for bem definida não perturbativamente, teremos fortes

[1] A invariância translacional da integral funcional requer que

$$\int d\phi F[\phi + \delta\phi] = \int d\phi F[\phi].$$

Daí

$$\begin{aligned}\int d\phi \left(F[\phi] + \int dx \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) \right) &= \int d\phi F[\phi] \\ \Rightarrow \int dx \int d\phi \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) &= 0.\end{aligned}$$

Como $\delta\phi(x)$ é arbitrário, a única forma da igualdade acima ser sempre válida é

$$\int d\phi \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} = 0$$

indicações de que a anomalia se cancela. Não dizemos que temos uma *prova* devido ao caráter extremamente formal da integral funcional em teoria quântica de campos.

Exemplos

De maneira a exemplificar o cancelamento da anomalia para o caso abeliano, consideremos dois modelos específicos em 2D: o modelo de Schwinger e o modelo de Schwinger quiral (estudos detalhados destes modelos podem ser achados em [33]). Nestes modelos, as integrações sobre os férmions podem ser efetuadas exatamente, resultando em ações efetivas dadas por:

$$W^{\mathrm{S}}[A_\mu] = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{e^2}{2\pi} A_\mu \left[\frac{(a+1)}{2} \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\Box} \right] A_\nu \right\}, \tag{3.8}$$

$$W^{\mathrm{Sq}}[A_\mu] = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{e^2}{8\pi} A_\mu \left[a\eta^{\mu\nu} - (\eta^{\mu\alpha} - \epsilon^{\mu\alpha}) \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\Box} \left(\eta^{\beta\nu} - \epsilon^{\beta\nu} \right) \right] A_\nu \right\}, \tag{3.9}$$

com o parâmetro a representando uma ambiguidade no cálculo dos determinantes fermiônicos associados. Os termos de Wess-Zumino associados à anomalia podem ser facilmente calculados pela equação (1.64):

$$\alpha_1^{\mathrm{S}}[A_\mu, \theta] = \frac{(a+1)}{\pi} \int d^2x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta) + e\theta \partial_\mu A^\mu \right], \tag{3.10}$$

$$\alpha_1^{\mathrm{Sq}}[A_\mu, \theta] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left\{ \frac{(a-1)}{2} (\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta) - e\theta \left[(a-1)\partial_\mu A^\mu + \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \right] \right\}. \tag{3.11}$$

Consideremos o valor esperado da anomalia no modelo de Schwinger. Usando (1.55), a anomalia se escreve como

$$\mathcal{A}^{\mathrm{S}}[A_\mu] = -i \frac{e(a+1)}{\pi} \partial_\mu A^\mu. \tag{3.12}$$

Computando o valor esperado teremos

$$\left\langle \mathcal{A}^{\mathrm{S}} \right\rangle = -i \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu dg \left(\frac{e(a+1)}{\pi} \partial_\mu A^\mu \right) \exp(iI[\psi, \overline{\psi}, A_\mu^{g^{-1}}]).$$

Introduzindo o "1" de Fadeev-Popov e realizando as transformações de calibre necessárias o valor esperado se reescreve como

$$\left\langle \mathcal{A}^{\mathrm{S}} \right\rangle = -i \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu d\theta \Delta_{FP}[A_\mu]\delta(f[A_\mu]) \left(\frac{e(a+1)}{\pi} \left[\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{e} \Box \theta \right] \right)$$
$$\times \exp(iI[\psi, \overline{\psi}, A_\mu^{g^{-1}}] + (i\alpha_1[A_\mu, \theta^{-1}])). \tag{3.13}$$

Observando que

$$\left(\frac{e(a+1)}{\pi} \left[\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{e} \Box \theta \right] \right) = \frac{\delta\alpha_1 \left[A_\mu, \theta^{-1} \right]}{\delta\theta\left(x\right)}$$

teremos uma integração do tipo descrito em (3.7), que se anula por invariância translacional da integral funcional. O cálculo para o modelo de Schwinger quiral segue linhas inteiramente similares, conduzindo, também, à anulação do valor esperado da anomalia.

3.1.2 Caso Não Abeliano

Neste caso a transformação de calibre sobre os campos A_μ será dada por

$$A_\mu^\theta = h^{-1} A_\mu h + \frac{i}{g} h^{-1} \left(\partial_\mu h \right),$$

onde $h\left(x\right) = \exp\left(i\theta^a\left(x\right) T_a\right)$ e $A_\mu = A_\mu^a T_a$, com

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c. \tag{3.14}$$

Seguindo a inspiração obtida com o caso abeliano vamos calcular a anomalia através da fórmula (1.55). Em primeira ordem, então:

$$\begin{aligned}
h^{-1}A_\mu h &= \left(1 - i\theta^a T_a + \frac{i^2}{2!}\theta^a T_a \theta^b T_b - \frac{i^3}{3!}\theta^a T_a \theta^b T_b \theta^c T_c + ...\right) A_\mu \\
&\times \left(1 + i\theta^a T_a + \frac{(i)^2}{2!}\theta^a T_a \theta^b T_b + \frac{(i)^3}{3!}\theta^a T_a \theta^b T_b \theta^c T_c + ...\right) \\
&= A_\mu - i\theta^a T_a A_\mu + A_\mu i\theta^a T_a + O\left(\theta^2\right) \\
&= A_\mu - i\theta^a A_\mu^b \left[T_a, T_b\right] + O\left(\theta^2\right) \\
&= A_\mu + \theta^a A_\mu^b f_{abc} T_c + O\left(\theta^2\right). \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Para calcular o segundo termo $h^{-1}\left(\partial_\mu h\right)$, primeiramente observemos a forma de $\partial_\mu h$:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu h &= \partial_\mu \left(1 + i\theta^a T_a + \frac{i^2}{2!}\theta^a T_a \theta^b T_b + \frac{i^3}{3!}\theta^a T_a \theta^b T_b \theta^c T_c + ...\right) \\
&= i\left(\partial_\mu \theta^a\right) T_a + \frac{i^2}{2!}\left[\left(\partial_\mu \theta^a\right) T_a \theta^b T_b + \theta^a T_a \left(\partial_\mu \theta^b\right) T_b\right] \\
&+ \frac{i^3}{3!}\left[\left(\partial_\mu \theta^a\right) T_a \theta^b T_b \theta^c T_c + \theta^a T_a \left(\partial_\mu \theta^b\right) T_b \theta^c T_c\right. \\
&\left.+\theta^a T_a \theta^b T_b \left(\partial_\mu \theta^c\right) T_c\right] + ... \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Multiplicando por h^{-1},

$$\begin{aligned}
h^{-1}\left(\partial_\mu h\right) &= i\left(\partial_\mu \theta^a\right) T_a + \frac{i^2}{2!}\left(\partial_\mu \theta^a\right)\theta^b \left[T_a, T_b\right] + \frac{i^3}{3!}\left(\partial_\mu \theta^a\right)\theta^b \theta^c \left[\left[T_a, T_b\right], T_c\right] + ... \\
&= i\left(\partial_\mu \theta^y\right) T_y + \frac{i^2}{2!}\left(\partial_\mu \theta^a\right)\theta^b f_{ab}^y T_y + \frac{i^3}{3!}\left(\partial_\mu \theta^a\right)\theta^b \theta^c f_{ab}^d f_{dc}^y T_y + ... \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Ao considerarmos a quantidade (1.55) vemos que apenas os termos de primeira ordem em θ irão contribuir, já que faremos $\theta^a = 0$ ao final. Assim,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\delta A_\mu^\theta(z)}{\delta\theta^a(x)}\right|_{\theta=0} &= \frac{\delta}{\delta\theta^a(x)}\Big(A_\mu(z) + \theta^a(z) A_\mu^c f_{acb} T_b \\
&\quad \left.+ \frac{i}{g}\left(i\partial_\mu\theta^b(z)\right) T_b + O\left(\theta^2\right)\Big)\right|_{\theta=0} \\
&= +\delta(z-x) A_\mu^c f_{acb} T_b - \frac{1}{g}\delta_a^b\left(\partial_\mu\delta(z-x)\right) T_b \\
&= -\frac{1}{g}\partial_\mu\delta(z-x) T_b + \delta(z-x) f_{acb} A_\mu^c T_b \\
&= -\frac{1}{g}\left(\delta_a^b\partial_\mu - g f_{acb} A_\mu^c\right) T_b \delta(z-x).
\end{aligned}$$

Escrevendo $A_\mu^\theta(z) = A_\mu^{\theta,b}(z) T_b$ e usando a independência linear dos T_b,

$$\left.\frac{\delta A_\mu^{\theta,b}(z)}{\delta\theta^a(x)}\right|_{\theta=0} = -\frac{1}{g}\left(\delta_a^b\partial_\mu - g f_{acb} A_\mu^c\right)\delta(z-x). \tag{3.18}$$

Com isso, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_a(x) &= -\int dz \frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A_\mu^b(z)} \frac{1}{g}\left(\mathcal{D}_\mu\right)_a^b \delta(z-x) \\
&= -\int dz \frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A_\mu^b(z)} \frac{1}{g}\left(\delta_a^b\partial_\mu - g f_{acb} A_\mu^c\right)\delta(z-x) \\
&= \frac{1}{g}\left(\delta_a^b\partial_\mu + g f_{acb} A_\mu^c\right)\frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A_\mu^b(z)} \\
&= \frac{1}{g}\left(\delta_a^b\partial_\mu - g f_{bca} A_\mu^c\right)\frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A_\mu^b(z)} \\
&= \frac{1}{g}\left(\mathcal{D}_\mu\right)_b^a \frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A_\mu^b(x)}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Esta expressão é equivalente à do caso abeliano, dada por (3.4).

Para tentar obter o cancelamento da anomalia pelo mesmo caminho que foi trilhado no caso abeliano, devemos mostrar que a transformada de calibre da anomalia pode ser escrita como a derivada funcional, em relação a θ^a, do termo de Wess-Zumino $\alpha_1[A_\mu, \theta]$.

Tomando a expressão da anomalia calculada acima e considerando a sua transformada de calibre,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_a^\theta &= \left(\frac{1}{g}\left(\mathcal{D}_\mu\right)_b^a \frac{\delta W\left[A_\mu\right]}{\delta A_\mu^b\left(x\right)}\right)^\theta \\ &= \frac{1}{g}\left(\mathcal{D}_\mu^\theta\right)_b^a \frac{\delta W\left[A_\mu^\theta\right]}{\delta A_\mu^{\theta,b}\left(x\right)} \\ &= -\int dz \frac{\delta W\left[A_\mu^\theta\right]}{\delta A_\mu^{\theta,b}\left(z\right)} \frac{1}{g}\left(\mathcal{D}_\mu^\theta\right)_a^b \delta\left(z-x\right).\end{aligned} \tag{3.20}$$

Vamos, então, investigar se

$$\frac{1}{g}\left(\mathcal{D}_\mu^\theta\right)_a^b \delta\left(z-x\right) = \frac{\delta A_\mu^{\theta,b}\left(z\right)}{\delta\theta^a\left(x\right)}.$$

Se isto for verdade, poderemos escrever

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_a^\theta\left(x\right) &= \int dz \frac{\delta W\left[A_\mu^\theta\right]}{\delta A_\mu^{\theta,b}\left(z\right)} \frac{\delta A_\mu^{\theta,b}\left(z\right)}{\delta\theta^a\left(x\right)} \\ &= \frac{\delta W\left[A_\mu^\theta\right]}{\delta\theta^a\left(x\right)} = \frac{\delta\alpha_1\left[A_\mu,\theta\right]}{\delta\theta^a\left(x\right)},\end{aligned}$$

o que demonstraria o cancelamento do valor esperado da anomalia, pelos mesmos argumentos utilizados anteriormente.

Queremos mostrar então que

$$\frac{1}{g}(\delta_a^b\partial_\mu - gf_{acb}A_\mu^{\theta,c})\delta(z-x) = \frac{\delta A_\mu^{b,\theta}}{\delta\theta(x)^a}.$$

Essa igualdade pode ser separada em duas, uma dependente da constante de acoplamento g e outra não. Considerando o termo $h^{-1}A_\mu h$, explicitamente a igualdade se reescreve como (estaremos usando a convenção $f_{ac}^b = f_{bac} = f_{acb}$):

$$-f_{ac}^b(h^{-1}A_\mu h)^c\delta(z-x) = \frac{\delta(h^{-1}A_\mu h)^b}{\delta\theta(x)^a}. \tag{3.21}$$

Usando a expansão para o termo $h^{-1}A_\mu h$ e usando a relação acima para a comparação termo a termo da série (até $O(\theta^3)$), vemos que, para a identidade acima ser satisfeita, devemos ter:

$$A^x_\mu f^z_{mx} = A^w_\mu f^z_{mw},$$

$$\frac{1}{2}A^x_\mu \theta^a (f^w_{mx} f^z_{aw} + f^w_{ax} f^z_{mw}) = A^x_\mu \theta^a f^z_{mw} f^w_{ax}.$$

Usando a identidade de Jacobi em termos das constantes de estrutura

$$f^m_{jk} f^n_{lm} + f^m_{lj} f^n_{km} + f^m_{kl} f^n_{jm} = 0,$$

podemos reescrever os termos de ordem mais baixa como

$$(f^w_{mx} f^z_{aw} + f^w_{ax} f^z_{mw}) = -f^w_{am} f^z_{xw} + 2 f^w_{ax} f^z_{mw}$$

$$\begin{aligned}&(f^w_{mx} f^g_{aw} f^z_{bg} + f^w_{ax} f^g_{mw} f^z_{bg} + f^w_{ax} f^g_{bw} f^z_{mg})\\ &= (-f^w_{am} f^g_{xw} f^z_{bg} - 2 f^w_{ax} f^g_{bm} f^z_{wg} + 3 f^w_{ax} f^g_{bw} f^z_{mg}).\end{aligned}$$

Vê-se assim que cada termo da expansão de $\delta(h^{-1}A_\mu h)^b/\delta\theta(x)^a$ tem um termo igual à de $-f^b_{ac}(h^{-1}A_\mu h)^c$, porém geram-se n termos extras para cada ordem n da expansão em série. A princípio, estes termos extras serão infinitos, sem forma fechada e diferentes de zero, como o cálculo dos termos de mais baixa ordem para o caso $SU(2)$ demonstra. Concluímos, assim, que a abordagem que utilizamos para o caso abeliano falha para o caso não abeliano.

Exemplo

Consideremos o modelo da CDQ$_2$ com acoplamento quiral para o qual sabemos haver uma anomalia associada à simetria de calibre. No capítulo 2 calculamos explicitamente o funcional α_1 associado a esta teoria e podemos portanto investigar se a igualdade

$$\mathcal{A}^{\theta} = C \cdot \frac{\delta\alpha_1 \left[A_\mu, \theta\right]}{\delta\theta\left(x\right)}$$

é satisfeita neste caso, com a constante C a ser estabelecida.

Podemos separar nossa análise em uma parte dependente do campo de gauge A^μ e em outra, não dependente. Considerando a parte que depende de A^μ vemos que a expansão do funcional α_1 pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\alpha_1\left[A, g\right] &= \frac{ie}{4\pi}\int d^2x \mathrm{tr}\left[A^\mu g^{-1}((1-a)\partial_\mu - \widetilde{\partial}_\mu)g\right] \\
&= \frac{ie}{4\pi}\int d^2x A^{\mu y}\left[i((1-a)\partial_\mu - \widetilde{\partial}_\mu)\theta^y + \frac{i^2}{2!}((((1-a)\partial_\mu - \widetilde{\partial}_\mu)\theta^a)\theta^b f^y_{ab}\right. \\
&\left. + \frac{i^3}{3!}((((1-a)\partial_\mu - \widetilde{\partial}_\mu)\theta^a)\theta^b\theta^c f^d_{ab} f^y_{dc} + O\left(\theta^4\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Realizando a derivada funcional em relação ao parâmetro de transformação θ^a obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\alpha_1\left[A, g\right]}{\delta\theta^m\left(x\right)} &= -i((1-a)\partial_\mu - \widetilde{\partial}_\mu)A^{\mu m} + i^2 A^{\mu y}\left(((1-a)\partial_\mu - \widetilde{\partial}_\mu)\theta^a\right) f^y_{am} \\
&+ \frac{i^2}{2!}((((1-a)\partial_\mu - \widetilde{\partial}_\mu)A^{\mu y})\theta^a f^y_{am} + \frac{i^3}{2}A^{\mu y}\left(((1-a)\partial_\mu - \widetilde{\partial}_\mu)\theta^a\right)\theta^b f^d_{am} f^y_{db} \\
&- \frac{i^3}{3!}((((1-a)\partial_\mu - \widetilde{\partial}_\mu)A^{\mu y})\theta^b\theta^c f^d_{mb} f^y_{dc} + O\left(\theta^3\right).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Conforme mostrado no capítulo 2, a anomalia associada é dada por

$$\mathcal{A}^a(x) = -\left.\frac{\delta\alpha_1[A, g]}{\delta\theta^a\left(x\right)}\right|_{\theta^a=0} = \frac{ie}{4\pi}\left[(1-a)\partial_\mu - \widetilde{\partial}_\mu\right] A^{\mu,a}(x). \tag{3.24}$$

Considerando agora a anomalia transformada, vemos que a parte dependente de A^μ pode ser escrita, a menos de uma constante multiplicativa como

$$
\begin{aligned}
\left[(1-a)\partial_\mu - \widetilde{\partial}_\mu\right](hA_\mu h^{-1})^m = {} & i((1-a)\partial_\mu - \widetilde{\partial}_\mu)A_\mu^m + i^2(((1-a)\partial_\mu - \widetilde{\partial}_\mu)A_\mu^x)\theta^a f_{ax}^m \\
& + i^2 A_\mu^x(((1-a)\partial_\mu - \widetilde{\partial}_\mu)\theta^a) f_{ax}^m \\
& + \frac{i^3}{2}(((1-a)\partial_\mu - \widetilde{\partial}_\mu)A_\mu^x)\theta^a\theta^b f_{ax}^e f_{be}^m \\
& + \frac{i^3}{2}A_\mu^x(((1-a)\partial_\mu - \widetilde{\partial}_\mu)\theta^a)\theta^b f_{ax}^e f_{be}^m \\
& + \frac{i^3}{2}A_\mu^x\theta^b(((1-a)\partial_\mu - \widetilde{\partial}_\mu)\theta^a) f_{bx}^e f_{ae}^m + O\left(\theta^3\right). \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

Vemos, portanto, que $\mathcal{A}^{a,\theta}(x)$ contém termos, em sua expansão, iguais aos de $\delta\alpha_1[A,g]/\delta\theta^a\,(x)$. Há, porém, termos extras que são dados por

$$
\mathcal{A}^{\theta,m}(x) - \frac{\delta\alpha_1[A,g]}{\delta\theta^m\,(x)} = +\frac{i^2}{2}(\partial_\mu A_\mu^x)\theta^a f_{ax}^m + \frac{i^3}{3}(\partial_\mu A_\mu^x)\theta^a\theta^b f_{ax}^e f_{be}^m + \frac{i^3}{2}A_\mu^x(\partial_\mu\theta^a)\theta^b f_{ax}^e f_{be}^m + O\left(\theta^3\right). \qquad (3.26)
$$

Da mesma forma que no caso geral, investigado anteriormente, estes termos extras não parecem ter forma fechada, o que nos impossibilita afirmar algo sobre sua integração funcional. Concluímos, assim, que o mecanismo responsável pelo cancelamento da anomalia no caso abeliano não se repete no caso não abeliano.

Fizemos uma tentativa de organizar a dependência funcional em θ^a desses termos, calculando-os para o caso em que o grupo de calibre é $SU\,(2)$. Não pudemos interpretar os resultados obtidos de modo que pudéssemos progredir na resposta à questão sobre o cancelamento ou não da anomalia, no caso não abeliano. Exibimos esse cálculo em detalhe no apêndice B.

Conclusão

Após um longo caminho percorrido, as anomalias são entendidas hoje como parte essencial na correta quantização de teorias de calibre, sendo estas o paradigma sob o qual as interações entre as partículas fundamentais são entendidas. A compreensão das anomalias teve um papel decisivo no entendimento tanto experimental quanto teórico de diversos fenômenos relacionados à física de partículas, culminando na previsão de um novo constituinte fundamental da matéria, o quark top. Do ponto de vista teórico, a não conservação quântica da simetria de calibre, é um dos principais problemas a ser enfrentado no processo de renormalização de uma teoria, dado que identidades essenciais na prova de renormalizabilidade não são válidas na presença de uma anomalia na simetria de calibre. Sendo assim, a possibilidade do cancelamento da anomalia, tema desta dissertação, é um critério valioso na escolha de teorias concorrentes em uma mesma situação física.

A ferramenta fundamental ao longo deste trabalho foi o formalismo de integração funcional, que nos permitiu enxergar com relativa facilidade, no contexto de teorias abelianas, o fato do valor esperado da anomalia anular-se, resultando na conservação ao nível quântico, de quantidades clássicas. Este cancelamento é apoiado pela restauração da simetria de calibre, a qual surge naturalmente ao compreendermos que teorias anômalas geram graus de liberdade extras que, por sua vez, definem uma ação efetiva invariante de calibre. Guiados por essa invariância e pelo sucesso obtido pelo formalismo no caso abeliano, buscamos explorar suas consequências em teorias não abelianas. A não comutatividade dos geradores impõe sérias dificuldades em nossa análise dado que as quantidades nas quais estamos interessados não possuem, em geral, uma forma fechada. As expansões em série são, portanto, a única alternativa imediata (a menos de casos particulares, como aquele em que o grupo de calibre é $SU(2)$, tratado no apêndice B).

Conforme esperamos que tenha ficado claro ao longo do texto, a condição essencial para o cancelamento da anomalia de calibre em nossa abordagem é a igualdade entre a anomalia transformada e a derivada funcional do termo de Wess-Zumino em relação aos parâmetros de transformação. Consideramos, assim, teorias de calibre não abelianas, genéricas e d-dimensionais, nas quais realizamos uma comparação termo a termo em nossas expansões. Não foi possível enxergar, a princípio, o mesmo mecanismo de cancelamento de anomalias que age no caso abeliano.

As teorias bidimensionais são um bom campo de testes para nossas idéias, dado que, neste caso, existem métodos para realizar a integração sobre os campos fermiônicos, o que nos permite calcular expressamente a ação efetiva associada. Utilizando o método delineado ao longo do Capítulo 2, calculamos a ação efetiva da QCD_2 com acoplamento quiral (porque este é um caso em que, notoriamente, existe anomalia na simetria de calibre). A partir daí, obtivemos uma expressão para a anomalia na simetria de calibre, que pudemos utilizar para seguir com nossas análises, nos mesmos moldes do caso abeliano. As conclusões obtidas foram consistentes com o caso geral, previamente analisado.

A semelhança entre as análises e conclusões tanto no caso d-dimensional quanto no caso bidimensional nos permitem uma nova perspectiva de investigação. Para o caso da QCD_2 considerado, fortes conjecturas apoiam a idéia de que a corrente de Noether associada à simetria de calibre se conserve no nível quântico, resultando, portanto, no cancelamento da anomalia. Se conseguirmos enxergar como esse mecanismo se manifesta em nosso formalismo poderíamos, em princípio, aplicá-lo a teorias d-dimensonais, possibilitando toda uma gama de novas investigações. O cancelamento de anomalias em uma teoria realística resultaria, por exemplo, na não necessidade da igualdade entre o número de quarks e de léptons no modelo padrão. Como conseqüência, um novo caminho na física de partículas e em teorias de cordas poderia ser explorado.

Por fim, esperamos ter ressaltado, neste trabalho, a riqueza e complexidade de teorias de calibre anômalas. Elas não são, necessariamente, teorias inconsistentes. Ao contrário, mostram características profundas e não exploradas. A compreensão mais detalhada do papel das anomalias em Teorias Quânticas de Campos se faz essencial para o entendimento das variadas possibilidades do mundo sub-atômico.

Apêndice A

Convenções

Ao longo da tese estamos trabalhando no espaço de Minkowski. A métrica será dada por

$$g^{00} = -g^{11} = 1, \tag{A.1}$$
$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}.$$

O tensor de Levi-Civita $\varepsilon^{\mu\nu}$ é

$$\varepsilon_{01} = -\varepsilon^{01} = 1, \tag{A.2}$$
$$\varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}.$$

Para o espaço dual usamos a notação

$$\widetilde{a}^{\mu} = \varepsilon^{\mu\nu} a_{\nu.} \tag{A.3}$$

Os vetores no cone de luz podem ser obtidos a partir dos vetores em Minkowski pela relação

$$a^{\pm} = (a^0 \pm a^1), \tag{A.4}$$

a partir da qual obtemos

$$\partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_0 \mp \partial_1) \tag{A.5}$$

e

$$a_\mu b^\mu = \frac{1}{2}(a_+ b_- + a_- b_+). \tag{A.6}$$

Trabalhamos na representação de Weyl, na qual as matrizes γ podem ser escritas como:

$$\gamma^0 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.7}$$

$$\gamma^1 = -i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.8}$$

$$\gamma^5 = \gamma_5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.9}$$

obedecendo as seguintes propriedades

$$\gamma^\mu \gamma^5 = \epsilon^{\mu\nu}\gamma_\nu, \tag{A.10}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \tag{A.11}$$

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2\epsilon^{\mu\nu}\gamma_5. \tag{A.12}$$

Apêndice B

O Exemplo do Grupo $SU(2)$

A idéia subjacente aos cálculos que se seguem é a de procurar observar a forma exata dos termos que violam a fórmula

$$\frac{i}{g}\left(\mathcal{D}_{\mu}^{\theta}\right)_{a}^{b}\delta\left(z-x\right)=\frac{\delta A_{\mu}^{\theta,b}\left(z\right)}{\delta\theta^{a}\left(x\right)},$$

que, como vimos no capítulo 3, é o que precisamos para mostrar, via integral funcional, o cancelamento da anomalia. Isso não é viável para grupos arbitrários. No entanto, para o grupo $SU(2)$, a forma fechada para o elemento genérico do grupo é conhecida. No que se segue, iremos calcular os dois lados da equação acima e procurar compará-los, para o caso em questão.

Vamos considerar o caso do grupo $SU\left(2\right)$ na representação fundamental, com os T_a dados por

$$T_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad T_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\qquad T_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

que satisfazem à álgebra

$$\left[T_a,T_b\right]=i\varepsilon_{abc}T_c.$$

Além disso, os T_a acima possuem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}
T_a^2 &= \frac{1}{4}\mathbf{1}, \\
\{T_a, T_b\} &= \frac{1}{2}\delta_{ab}\mathbf{1}, \\
(\alpha^a T_a)\left(\beta^b T_b\right) &= \frac{i}{2}\left(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right)^c T_c + \frac{1}{4}\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\mathbf{1}, \\
(\theta^a T_a)\left(\theta^b T_b\right) &= \frac{1}{4}\vec{\theta}\cdot\vec{\theta}\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Usando essas propriedades, podemos obter uma forma fechada para o elemento geral de $SU(2)$:

$$\begin{aligned}
\exp\left(i\theta^a T_a\right) &= \mathbf{1} + i\theta^a T_a + \frac{i^2}{2!}\theta^a T_a\theta^b T_b + \frac{i^3}{3!}\theta^a T_a\theta^b T_b\theta^c T_c + ... \\
&= \mathbf{1} + i\theta^a T_a + \frac{i^2}{2!}\left(\frac{1}{4}\vec{\theta}\cdot\vec{\theta}\mathbf{1}\right) + \frac{i^3}{3!}\left(\frac{1}{4}\vec{\theta}\cdot\vec{\theta}\mathbf{1}\right)\theta^a T_a \\
&\quad + \frac{i^4}{4!}\left(\frac{1}{4}\vec{\theta}\cdot\vec{\theta}\mathbf{1}\right)^2 + \frac{i^5}{5!}\left(\frac{1}{4}\vec{\theta}\cdot\vec{\theta}\mathbf{1}\right)^2\theta^a T_a + ... \\
&= \mathbf{1}\left(1 + \frac{i^2}{2!}\left(\frac{1}{4}\vec{\theta}\cdot\vec{\theta}\right) + \frac{i^4}{4!}\left(\frac{1}{4}\vec{\theta}\cdot\vec{\theta}\right)^2 + ...\right) \\
&\quad + i\theta^a T_a\left(1 + \frac{i^2}{3!}\left(\frac{1}{4}\vec{\theta}\cdot\vec{\theta}\right) + \frac{i^4}{5!}\left(\frac{1}{4}\vec{\theta}\cdot\vec{\theta}\right)^2\right) + ...
\end{aligned}$$

Definimos o vetor $\vec{n}$ através de

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\vec{\theta} &= \frac{1}{2}\theta\vec{n},\; n^2 = 1, \\
\theta &= \sqrt{\left(\theta^1\right)^2 + \left(\theta^2\right)^2 + \left(\theta^3\right)^2}
\end{aligned}$$

Isso simplifica a fórmula acima

$$\begin{aligned}
\exp\left(i\theta^a T_a\right) &= \mathbf{1}\left(1 + \frac{i^2}{2!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{i^4}{4!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^4 + ...\right) \\
&\quad + 2i\frac{\theta^a T_a}{\theta}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{i^2}{3!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^3 + \frac{i^4}{5!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^5\right) + ... \\
&= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2in^a T_a \mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned}$$

Vamos, então, calcular

$$\frac{\delta A_{\mu}^{\theta,b}\left(z\right)}{\delta\theta^{a}\left(x\right)}$$

Primeiramente, necessitamos de $A_{\mu}^{\theta,b}\left(z\right)$. Vamos extraí-lo de

$$A_{\mu}^{\theta,b}\left(z\right)T_{b}=\left(h^{-1}A_{\mu}^{c}T_{c}h\right)^{b}T_{b}-\frac{1}{g}\left(h^{-1}\left(\partial_{\mu}h\right)\right)^{b}T_{b}.$$

Começamos pelo primeiro termo:

$$\begin{aligned}
h^{-1}A_{\mu}^{c}T_{c}h &= A_{\mu}^{c}\exp\left(i\theta^{a}T_{a}\right)T_{c}\exp\left(-i\theta^{a}T_{a}\right)\\
&= A_{\mu}^{c}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-2in^{a}T_{a}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]T_{c}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right.\\
&\quad\left.+2in^{a}T_{a}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\\
&= A_{\mu}^{c}T_{c}\cos^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)-2in^{a}A_{\mu}^{c}\left[T_{a},T_{c}\right]\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\
&\quad+4A_{\mu}^{c}n^{a}n^{b}T_{a}T_{c}T_{b}\mathrm{sen}^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\\
&= A_{\mu}^{c}T_{c}\cos^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)-2in^{a}A_{\mu}^{c}\left[T_{a},T_{c}\right]\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\
&\quad+4A_{\mu}^{c}T_{c}n^{a}n^{b}T_{a}T_{b}\mathrm{sen}^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)+4A_{\mu}^{c}\left[T_{a},T_{c}\right]n^{a}n^{b}T_{b}\mathrm{sen}^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\\
&= A_{\mu}^{c}T_{c}\cos^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)-2in^{a}A_{\mu}^{c}\left[T_{a},T_{c}\right]\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\
&\quad+A_{\mu}^{c}T_{c}\mathrm{sen}^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)+4A_{\mu}^{c}\left[T_{a},T_{c}\right]n^{a}n^{b}T_{b}\mathrm{sen}^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned}$$

Substituindo as relações de comutação,

$$\begin{aligned}
h^{-1}A_{\mu}^{c}T_{c}h &= A_{\mu}^{c}T_{c}+2n^{a}A_{\mu}^{c}\varepsilon_{acd}T_{d}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\
&\quad+4iA_{\mu}^{c}\varepsilon_{acd}T_{d}n^{a}n^{b}T_{b}\mathrm{sen}^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\\
&= A_{\mu}^{c}T_{c}+2\left(\vec{n}\times\vec{A}_{\mu}\right)^{c}T_{c}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\
&\quad+4i\left(A_{\mu}^{c}-n^{c}\left[\vec{n}\cdot\vec{A}_{\mu}\right]\right)T_{c}\mathrm{sen}^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right),
\end{aligned}$$

onde usamos, na passagem para a segunda linha, que

$$A_\mu^c \varepsilon_{acd} T_d n^a n^b T_b = \left(\vec{n} \times \vec{A}_\mu\right)^d T_d n^b T_b = \frac{i}{2} \left(\left(\vec{n} \times \vec{A}_\mu\right) \times \vec{n}\right)^c T_c.$$

Com isto, escrevemos, finalmente:

$$\begin{aligned} h^{-1} A_\mu^c T_c h &= \Big\{ A_\mu^b + 2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\vec{n} \times \vec{A}_\mu\right)^b \\ &\quad -2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(A_\mu^b - n^b \left[\vec{n} \cdot \vec{A}_\mu\right]\right) T_b \Big\} \\ &= \Big\{ A_\mu^b + 2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\vec{n} \times \vec{A}_\mu\right)^b \\ &\quad -2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\delta^{bc} - n^b n^c\right) A_\mu^b T_b \Big\}, \end{aligned}$$

de onde lemos

$$\begin{aligned} \left(h^{-1} A_\mu^c T_c h\right)^b &= A_\mu^b + 2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\vec{n} \times \vec{A}_\mu\right)^b \\ &\quad -2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(A_\mu^b - n^b \left[\vec{n} \cdot \vec{A}_\mu\right]\right). \end{aligned}$$

Vamos agora abordar o termo $h^{-1}\partial_\mu h$:

$$\begin{aligned} h^{-1}\partial_\mu h &= \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - 2in^a T_a \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \partial_\mu \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2in^a T_a \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ &= \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - 2in^a T_a \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \Big[-\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \partial_\mu \left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &\quad +2i\left(\partial_\mu n^a\right) T_a \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2in^a T_a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \partial_\mu \left(\frac{\theta}{2}\right)\Big] \end{aligned}$$

Antes de prosseguir, vamos trabalhar um pouco as relações abaixo:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \theta &= \partial_\mu \left(\theta^a \theta^a\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\theta^b \theta^b\right)^{-1/2} 2\theta^a \partial_\mu \theta^a \\ &= \frac{\theta^a}{\theta} \partial_\mu \theta^a = n^a \partial_\mu \theta^a, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu n^a &= \partial_\mu \left(\frac{\theta^a}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta}\partial_\mu \theta^a - \frac{\theta^a}{\theta^2}\partial_\mu \theta \\
&= \frac{1}{\theta}\partial_\mu \theta^a - \frac{\theta^a}{\theta^2} n^b \partial_\mu \theta^b \\
&= \frac{1}{\theta}\left(\delta^{ab} - n^a n^b\right)\partial_\mu \theta^b
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left(n^a T_a\right)\left(\partial_\mu n^a T_a\right) &= \frac{1}{2}\left(\vec{n}\times\partial_\mu \vec{n}\right)^c T_c + \frac{1}{4}\vec{n}\cdot\left(\partial_\mu \vec{n}\right)\mathbf{1} \\
&= \frac{1}{2\theta}\left(\vec{n}\times\partial_\mu \vec{\theta}\right)^c T_c .
\end{aligned}
$$

Com isto,

$$
\begin{aligned}
h^{-1}\partial_\mu h &= -\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\partial_\mu\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2in^b T_b \mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\partial_\mu\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&\quad + 2i\left(\frac{1}{\theta}\left(\delta^{bc} - n^b n^c\right)\partial_\mu \theta^c\right) T_b \mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&\quad + 2\frac{1}{\theta}\left(\vec{n}\times\partial_\mu \vec{\theta}\right)^b T_b \mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&\quad + 2in^b T_b \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\partial_\mu\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\partial_\mu\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&= 2in^b T_b \partial_\mu\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2i\left(\frac{1}{\theta}\left(\delta^{bc} - n^b n^c\right)\partial_\mu \theta^c\right) T_b \mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&\quad + 2\frac{1}{\theta}\left(\vec{n}\times\partial_\mu \vec{\theta}\right)^b T_b \mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Daqui lemos $(h^{-1}\partial_\mu h)^b$:

$$
\begin{aligned}
\left(h^{-1}\partial_\mu h\right)^b &= 2in^b \partial_\mu\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2i\left(\frac{1}{\theta}\left(\delta^{bc} - n^b n^c\right)\partial_\mu \theta^c\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&\quad + 2\frac{1}{\theta}\left(\vec{n}\times\partial_\mu \vec{\theta}\right)^b \mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Novamente, interrompemos nossa progressão para calcular algumas quantidades que nos serão convenientes:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\theta\left(z\right)}{\delta\theta^a\left(x\right)} &= \frac{\delta}{\delta\theta^a\left(x\right)}\left(\theta^b\theta^b\right)^{1/2}\left(z\right) = \frac{1}{2}\left(\theta^b\theta^b\right)^{-1/2}\left(z\right) 2\theta^c\left(z\right)\frac{\delta\theta^c\left(x\right)}{\delta\theta^a\left(x\right)} \\
&= \frac{\theta^a}{\theta}\left(z\right)\delta\left(z-x\right) = n^a\left(z\right)\delta\left(z-x\right)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta n^b(z)}{\delta\theta^a(x)} &= \frac{\delta}{\delta\theta^a(x)}\left(\frac{\theta^b}{\theta}(z)\right) = \frac{1}{\theta}\delta^{ba}\delta(z-x) - \frac{\theta^b}{\theta^2}\frac{\delta\theta}{\delta\theta^a(x)} \\
&= \frac{1}{\theta}\delta^{ba}\delta(z-x) - \frac{\theta^b}{\theta^2}n^a(z)\,\delta(z-x) \\
&= \frac{1}{\theta}\left(\delta^{ba} - n^b n^a\right)(z)\,\delta(z-x).
\end{aligned}
$$

Derivando funcionalmente em relação a θ^a a equação para $\left(h^{-1}A_\mu^c T_c h\right)^b$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\left(h^{-1}A_\mu^c T_c h\right)^b(z)}{\delta\theta^a(x)} &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\vec{n}\times\vec{A}_\mu\right)^b \frac{\delta\theta(z)}{\delta\theta^a(x)} \\
&\quad -\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\vec{n}\times\vec{A}_\mu\right)^b \frac{\delta\theta(z)}{\delta\theta^a(x)} \\
&\quad +2\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\delta\left(\vec{n}\times\vec{A}_\mu\right)^b(z)}{\delta\theta^a(x)} \\
&\quad +4i\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(A_\mu^b - n^b\left[\vec{n}\cdot\vec{A}_\mu\right]\right)\frac{\delta\theta(z)}{\delta\theta^a(x)} \\
&\quad -4i\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\delta\left(n^b\left[\vec{n}\cdot\vec{A}_\mu\right]\right)(z)}{\delta\theta^a(x)}.
\end{aligned}
$$

Notamos que precisamos desenvolver mais algumas expressões:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\left(\vec{n}\times\vec{A}_\mu\right)^b(z)}{\delta\theta^a(x)} &= \frac{\delta\left(\varepsilon_{bcd}n^c A_\mu^d\right)^b(z)}{\delta\theta^a(x)} = \frac{1}{\theta}\varepsilon_{bcd}\left(\delta^{ca} - n^c n^a\right)A_\mu^d(z)\,\delta(z-x) \\
&= \frac{1}{\theta}\varepsilon_{bad}A_\mu^d(z)\,\delta(z-x) - \frac{1}{\theta}n^a\varepsilon_{bcd}n^c A_\mu^d(z)\,\delta(z-x) \\
&= \frac{1}{\theta}\varepsilon_{bad}A_\mu^d(z)\,\delta(z-x) - \frac{1}{\theta}n^a\left(\vec{n}\times\vec{A}_\mu\right)^b\delta(z-x),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\left(n^b\left[\vec{n}\cdot\vec{A}_\mu\right]\right)(z)}{\delta\theta^a(x)} &= \frac{\delta\left(n^b n^c\right)A_\mu^c(z)}{\delta\theta^a(x)} = \frac{\delta n^b}{\delta\theta^a(x)}n^c A_\mu^c(z) + \frac{\delta n^c}{\delta\theta^a(x)}n^b A_\mu^c(z) \\
&= \frac{1}{\theta}\left(\delta^{ba} - n^b n^a\right)n^c A_\mu^c(z)\,\delta(z-x) \\
&\quad + \frac{1}{\theta}\left(\delta^{ca} - n^c n^a\right)n^b A_\mu^c(z)\,\delta(z-x) \\
&= \frac{1}{\theta}\left(\delta^{ba} - n^b n^a\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{A}_\mu\right)(z)\,\delta(z-x) \\
&\quad + \frac{1}{\theta}\left(n^b A_\mu^a - n^b n^a\left(\vec{n}\cdot\vec{A}_\mu\right)\right)(z)\,\delta(z-x) \\
&= \frac{1}{\theta}\left[\left(\delta^{ba} - 2n^b n^a\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{A}_\mu\right) + n^b A_\mu^a\right](z)\,\delta(z-x)
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\left(h^{-1}A_\mu^c T_c h\right)^b(z)}{\delta\theta^a(x)} &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\vec{n}\times\vec{A}_\mu\right)^b n^a(z)\,\delta(z-x) \\
&\quad - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\vec{n}\times\vec{A}_\mu\right)^b n^a(z)\,\delta(z-x) \\
&\quad + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{1}{\theta}\varepsilon_{bad}A_\mu^d(z)\,\delta(z-x) - \frac{1}{\theta}n^a\left(\vec{n}\times\vec{A}_\mu\right)^b\delta(z-x)\right) \\
&\quad + 4i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(A_\mu^b - n^b\left[\vec{n}\cdot\vec{A}_\mu\right]\right)n^a(z)\,\delta(z-x) \\
&\quad - 4i\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{1}{\theta}\left[\left(\delta^{ba} - 2n^b n^a\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{A}_\mu\right) + n^b A_\mu^a\right](z)\,\delta(z-x)\right) \\
&= \cos\theta\left(\vec{n}\times\vec{A}_\mu\right)^b n^a(z)\,\delta(z-x) \\
&\quad + \operatorname{sen}\theta\left(\frac{1}{\theta}\varepsilon_{bad}A_\mu^d(z)\,\delta(z-x) - \frac{1}{\theta}n^a\left(\vec{n}\times\vec{A}_\mu\right)^b\delta(z-x)\right) \\
&\quad + 2i\operatorname{sen}\theta\left(A_\mu^b - n^b\left[\vec{n}\cdot\vec{A}_\mu\right]\right)n^a(z)\,\delta(z-x) \\
&\quad - 4i\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{1}{\theta}\left[\left(\delta^{ba} - 2n^b n^a\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{A}_\mu\right) + n^b A_\mu^a\right](z)\,\delta(z-x)\right).
\end{aligned}
$$

Vamos à segunda parte:

$$\frac{\delta\left(h^{-1}\partial_\mu h\right)^b(z)}{\delta\theta^a(x)} = i\frac{\delta n^b(z)}{\delta\theta^a(x)}\partial_\mu\theta(z) + in^b(z)\,\partial_\mu\left(\frac{\delta\theta(z)}{\delta\theta^a(x)}\right)$$
$$+ 2i\left[\frac{\delta}{\delta\theta^a(x)}\left(\frac{1}{\theta}\left(\delta^{bc}-n^b n^c\right)\partial_\mu\theta^c\right)(z)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{\theta(z)}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta(z)}{2}\right)$$
$$+ i\left(\frac{1}{\theta}\left(\delta^{bc}-n^b n^c\right)\partial_\mu\theta^c(z)\right)\left[\cos^2\left(\frac{\theta(z)}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta(z)}{2}\right)\right]\frac{\delta\theta(z)}{\delta\theta^a(x)}$$
$$+ 2\frac{\delta}{\delta\theta^a(x)}\left[\frac{1}{\theta}\left(\vec{n}\times\partial_\mu\vec{\theta}\right)^b(z)\right]\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta(z)}{2}\right)$$
$$+ 2\left[\frac{1}{\theta}\left(\vec{n}\times\partial_\mu\vec{\theta}\right)^b(z)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{\theta(z)}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta(z)}{2}\right)\frac{\delta\theta(z)}{\delta\theta^a(x)}.$$

Novamente, temos que calcular algumas expressões intermediárias:

$$\frac{\delta}{\delta\theta^a(x)}\left(\frac{1}{\theta}\left(\delta^{bc}-n^b n^c\right)\partial_\mu\theta^c\right)(z) = -\frac{1}{\theta^2}\frac{\delta\theta(z)}{\delta\theta^a(x)}\left(\delta^{bc}-n^b n^c\right)\partial_\mu\theta^c(z)$$
$$+ \frac{1}{\theta}\frac{\delta\left(\left(\delta^{bc}-n^b n^c\right)(z)\right)}{\delta\theta^a(x)}\partial_\mu\theta^c(z) + \frac{1}{\theta}\left(\delta^{bc}-n^b n^c\right)\partial_\mu\frac{\delta\theta^c(z)}{\delta\theta^a(x)}$$
$$= -\frac{1}{\theta^2}n^a\left(\delta^{bc}-n^b n^c\right)\left(\partial_\mu\theta^c(z)\right)\delta(z-x)$$
$$+ \frac{1}{\theta}\left(-\frac{1}{\theta}\left(\delta^{ba}-n^b n^a\right)n^c - \frac{1}{\theta}\left(\delta^{ca}-n^c n^a\right)n^b\right)\partial_\mu\theta^c(z)\,\delta(z-x)$$
$$+ \frac{1}{\theta}\left(\delta^{ba}-n^b n^a\right)\left(\partial_\mu\delta(z-x)\right)$$
$$= \frac{1}{\theta^2}\left(-n^a\left(\delta^{bc}-n^b n^c\right) - n^b\left(\delta^{ca}-n^c n^a\right) - n^c\left(\delta^{ab}-n^a n^b\right)\right)\partial_\mu\theta^c(z)\,\delta(z-x)$$
$$+ \frac{1}{\theta}\left(\delta^{ab}-n^a n^b\right)\left(\partial_\mu\delta(z-x)\right).$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\theta^{a}(x)}\left[\frac{1}{\theta}\left(\vec{n}\times\partial_{\mu}\vec{\theta}\right)^{b}(z)\right] &= -\frac{1}{\theta^{2}}\frac{\delta\theta(z)}{\delta\theta^{a}(x)}\left(\vec{n}\times\partial_{\mu}\vec{\theta}\right)^{b}(z) \\
&\quad +\frac{1}{\theta}\frac{\delta\left(\vec{n}\times\partial_{\mu}\vec{\theta}\right)^{b}(z)}{\delta\theta^{a}(x)} \\
&= -\frac{1}{\theta^{2}}n^{a}\left(\vec{n}\times\partial_{\mu}\vec{\theta}\right)^{b}(z)\,\delta(z-x) \\
&\quad +\varepsilon_{bcd}\left(\frac{\delta n^{c}}{\delta\theta^{a}}\partial_{\mu}\theta^{d}+n^{c}\delta^{da}\partial_{\mu}\delta(z-x)\right) \\
&= -\frac{1}{\theta^{2}}n^{a}\left(\vec{n}\times\partial_{\mu}\vec{\theta}\right)^{b}(z)\,\delta(z-x) \\
&\quad +\varepsilon_{bcd}\left(\frac{1}{\theta}\left(\delta^{ca}-n^{c}n^{a}\right)\left(\partial_{\mu}\theta^{d}\right)\delta(z-x)+n^{c}\delta^{da}\partial_{\mu}\delta(z-x)\right).
\end{aligned}
$$

Voltando à expressão para $\delta\left(h^{-1}\partial_{\mu}h\right)^{b}(z)/\delta\theta^{a}(x)$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\left(h^{-1}\partial_{\mu}h\right)^{b}(z)}{\delta\theta^{a}(x)} = &\left[in^{c}\left(\frac{1}{\theta}\left(\delta^{ba}-n^{b}n^{a}\right)\partial_{\mu}\theta^{c}\right)+in^{b}\left(\frac{1}{\theta}\left(\delta^{ac}-n^{a}n^{c}\right)\partial_{\mu}\theta^{c}\right)\right. \\
&+\frac{i}{\theta^{2}}\left(-n^{a}\left(\delta^{bc}-n^{b}n^{c}\right)-n^{b}\left(\delta^{ca}-n^{c}n^{a}\right)-n^{c}\left(\delta^{ab}-n^{a}n^{b}\right)\right)\partial_{\mu}\theta^{c}\operatorname{sen}\theta \\
&+i\left(\frac{1}{\theta}n^{a}\left(\delta^{bc}-n^{b}n^{c}\right)\partial_{\mu}\theta^{c}\right)\cos\theta+n^{a}\left(\frac{1}{\theta}\left(\vec{n}\times\partial_{\mu}\vec{\theta}\right)^{b}\right)\operatorname{sen}\theta \\
&\left.-\frac{1}{\theta^{2}}n^{a}\left(\vec{n}\times\partial_{\mu}\vec{\theta}\right)^{b}+\varepsilon_{bcd}\left(\frac{1}{\theta}\left(\delta^{ca}-n^{c}n^{a}\right)\left(\partial_{\mu}\theta^{d}\right)\right)(1-\cos\theta)\right]\delta(z-x) \\
&+\left(in^{b}n^{a}+\frac{1}{\theta}\left(\delta^{ab}-n^{a}n^{b}\right)\operatorname{sen}\theta+\varepsilon_{bca}n^{c}(1-\cos\theta)\right)\partial_{\mu}\delta(z-x).
\end{aligned}
$$

Vamos juntar os resultados obtidos até agora:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta A_{\mu}^{\theta,b}(z)}{\delta\theta^{a}(x)} &= \frac{\delta}{\delta\theta^{a}(x)}\left[\left(h^{-1}A_{\mu}^{c}T_{c}h\right)^{b}-\frac{1}{g}\left(h^{-1}\left(\partial_{\mu}h\right)\right)^{b}\right] \\
&= \cos\theta\left(\vec{n}\times\vec{A}_{\mu}\right)^{b}n^{a}(z)\,\delta(z-x) \\
&+ \operatorname{sen}\theta\left(\frac{1}{\theta}\varepsilon_{bad}A_{\mu}^{d}(z)\,\delta(z-x)-\frac{1}{\theta}n^{a}\left(\vec{n}\times\vec{A}_{\mu}\right)^{b}\delta(z-x)\right) \\
&+ 2i\operatorname{sen}\theta\left(A_{\mu}^{b}-n^{b}\left[\vec{n}\cdot\vec{A}_{\mu}\right]\right)n^{a}(z)\,\delta(z-x) \\
&- 4i\operatorname{sen}^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{1}{\theta}\left[\left(\delta^{ba}-2n^{b}n^{a}\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{A}_{\mu}\right)+n^{b}A_{\mu}^{a}\right](z)\,\delta(z-x)\right) \\
&- \frac{1}{g}\left[in^{c}\left(\frac{1}{\theta}\left(\delta^{ba}-n^{b}n^{a}\right)\partial_{\mu}\theta^{c}\right)+in^{b}\left(\frac{1}{\theta}\left(\delta^{ac}-n^{a}n^{c}\right)\partial_{\mu}\theta^{c}\right)\right. \\
&+ \frac{i}{\theta^{2}}\left(-n^{a}\left(\delta^{bc}-n^{b}n^{c}\right)-n^{b}\left(\delta^{ca}-n^{c}n^{a}\right)-n^{c}\left(\delta^{ab}-n^{a}n^{b}\right)\right)\partial_{\mu}\theta^{c}\operatorname{sen}\theta \\
&+ i\left(\frac{1}{\theta}n^{a}\left(\delta^{bc}-n^{b}n^{c}\right)\partial_{\mu}\theta^{c}\right)\cos\theta+n^{a}\left(\frac{1}{\theta}\left(\vec{n}\times\partial_{\mu}\vec{\theta}\right)^{b}\right)\operatorname{sen}\theta \\
&\left.-\frac{1}{\theta^{2}}n^{a}\left(\vec{n}\times\partial_{\mu}\vec{\theta}\right)^{b}+\varepsilon_{bcd}\left(\frac{1}{\theta}\left(\delta^{ca}-n^{c}n^{a}\right)\left(\partial_{\mu}\theta^{d}\right)\right)(1-\cos\theta)\right]\delta(z-x) \\
&- \frac{1}{g}\left(in^{b}n^{a}+\frac{1}{\theta}\left(\delta^{ab}-n^{a}n^{b}\right)\operatorname{sen}\theta+\varepsilon_{bca}n^{c}(1-\cos\theta)\right)\partial_{\mu}\delta(z-x)\,.
\end{aligned}
$$

Comparamos com $\frac{i}{g}\left(\mathcal{D}_{\mu}^{\theta}\right)^{b}_{a}\delta(z-x)=\frac{i}{g}\left(-\delta_{a}^{b}\partial_{\mu}-ig\varepsilon_{bca}A_{\mu}^{\theta,c}\right)\delta(z-x)$. Coletamos, primeiramente, os termos que compõe $A_{\mu}^{\theta,c}$:

$$
\begin{aligned}
A_{\mu}^{\theta,c} &= \left(h^{-1}A_{\mu}^{a}T_{a}h\right)^{c}-\frac{1}{g}\left(h^{-1}\partial_{\mu}h\right)^{c} \\
&= A_{\mu}^{c}+2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\vec{n}\times\vec{A}_{\mu}\right)^{c} \\
&\quad -2\operatorname{sen}^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(A_{\mu}^{c}-n^{c}\left[\vec{n}\cdot\vec{A}_{\mu}\right]\right) \\
&\quad -\frac{i}{g}\left[2in^{c}\partial_{\mu}\left(\frac{\theta}{2}\right)+2i\left(\frac{1}{\theta}\left(\delta^{cd}-n^{c}n^{d}\right)\partial_{\mu}\theta^{d}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right. \\
&\quad \left.+2\frac{1}{\theta}\left(\vec{n}\times\partial_{\mu}\vec{\theta}\right)^{c}\operatorname{sen}^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{i}{g}\left(\mathcal{D}_{\mu}^{\theta}\right)_{a}^{b}\delta\left(z-x\right) &= -\frac{i}{g}\delta_{a}^{b}\partial_{\mu}\delta\left(z-x\right) \\
&+\varepsilon_{bca}\left[A_{\mu}^{c}+2\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\vec{n}\times\vec{A}_{\mu}\right)^{c}\right. \\
&-2\mathrm{sen}^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(A_{\mu}^{c}-n^{c}\left[\vec{n}\cdot\vec{A}_{\mu}\right]\right) \\
&-\frac{i}{g}\left[2in^{c}\partial_{\mu}\left(\frac{\theta}{2}\right)+2i\left(\frac{1}{\theta}\left(\delta^{cd}-n^{c}n^{d}\right)\partial_{\mu}\theta^{d}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right. \\
&\left.\left.+2\frac{1}{\theta}\left(\vec{n}\times\partial_{\mu}\vec{\theta}\right)^{c}\mathrm{sen}^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right]\delta\left(z-x\right).
\end{aligned}$$

Conforme pode ser visto, a estrutura dos termos que divergem de uma expressão para a outra é extremamente complexa, não permitindo a visualização de nada que permita supor o seu cancelamento.

Bibliografia

[1] J. Steinberger, *Phys. Rev.* **76** (1949), 1180.

[2] H. Fukuda e Y. Miyamoto, *Prog. Theor. Phys.* **4** (1949), 347.

[3] J. Schwinger, *Phys Rev.* **82** (1951), 664.

[4] K. Johnson, *Phys Let.* **5** (1963), 253.

[5] D. G. Sutherland, *Nucl. Phys.* **B2** (1967), 433.

[6] M. Veltman, *Proc. Roy. Soc.* **A301** (1967), 107.

[7] J. S. Bell e R. Jackiw, *Nuovo Cimento* **A60**, (1969), 47;

[8] S. Adler, *Phys. Rev* **177** (1969), 2426.

[9] L. Alvarez-Gaumé e P. Ginsparg, *Nucl. Phys.* **B234** (1984), 449.

[10] E. Witten, *Comm. Math. Phys.* **121** (1989), 351.

[11] M. B. Green e J. H. Schwartz, *Phys. Lett.* **149B** (1984), 117.

[12] S. L. Adler e W.A. Bardeen, *Phys. Rev.* **182** (1969), 1517.

[13] K. Fujikawa, *Phys. Rev.* **D21** (1980), 2848.

[14] R. Jackiw e C. Rebbi, *Phys. Rev.* **D14** (1976), 517; **D16** (1977), 1052.

[15] N. K. Nielsen e B. Schoroer, *Nucl. Phys.* **B127**, 493.

[16] M.F. Atiyah e I. M. Singer, *Ann. Math.* **87** (1968), 485.

[17] R. Stora, *Continuum Gauge Theories*, in: *New Developments in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics.* Cargèse Lectures, eds. M. Levy e P. Mitter, Plenum Press, New York (1976), pag. 201.

[18] B. Zumino, *Chiral Anomalies and Differential Geometry*, in: *Relativity, Groups and Topology II.* Les Houches lectures, eds. B. S. DeWitt e R. Stora, North-Holland, Amsterdan (1983), pag. 1291.

[19] R. Jackiw e R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985), 1219.

[20] L. D. Faddeev e S. L. Shatashvili, *Phys. Lett.* **B167** (1986), 225.

[21] K. Harada e I. Tsutsui, *Phys. Lett.* **B183** (1987), 311.

[22] O. Babelon, F. Shaposnik e C. Viallet, *Phys. Lett.* **B177** (1986) 385.

[23] R. C. Proleón Patricio, *Cancelamento de Anomalias em Teorias de Calibre Abelianas*, Dissertação de Mestrado, CBPF, 1998.

[24] M. Moutinho, *Anomalia de Calibre na Eletrodinâmica Quiral em $D = 4$*, Dissertação de Mestrado, CBPF, 2000.

[25] L. Ryder, *Quantum Field Theory*, 1^a edição, Cambridge University Press, Cambridge, (1986)

[26] C. Itzykson e J-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, Nova Iorque (1980).

[27] P. Pascual e R. Tarrach, *QCD: Renormalization for the Practitioner*, Lecture Notes in Physics, vol. 194, Springer-Verlag, Berlin, (1984).

[28] R. Jackiw, *Lectures on Current Algebra and its Applications*, University Press, Princeton, New Jersey (1972).

[29] T. Cheng e L. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press, New York (1984).

[30] W. Pauli e F. Villars, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949), 434.

[31] C. G. Bolinni e J. J. Giambiagi, *Nuovo Cim.* **12B** (1972), 20.

[32] G. 't Hooft e M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44** (1972), 189.

[33] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla e K. D. Rothe, *2 Dimensional Quantum Field Theory*, World Scientific, Singapore (2001).

[34] A. M. Polyakov e P. B. Wiegmann, *Phys Lett.* **131B** (1983) 121; **141B** (1984) 223.