

Segmentação de Imagens e Realce de Bordas utilizando Equações de Difusão Inversa Estabilizada (SIDE)

Aline da Rocha Gesualdi Mello, Marcello Campos,
Marcelo Portes de Albuquerque, Eugênio Soares Caner,
Márcio Portes de Albuquerque, Érica Marques da Silva

Processamento de Sinais Aleatórios
Laboratório de Processamento Digital de Sinais e Imagens (LPDSI/CAT/CBPF)
Rio de Janeiro, 23 de agosto de 2004

Abstract

Neste relatório apresentamos uma técnica, rápida e eficaz, de segmentação de imagens e realce de bordas com objetivo de aplicá-la em imagens de ultra-som e tomografia computadorizada da mama. Serão apresentados os conceitos desta técnica de segmentação por difusão inversa (SIDE, do inglês *Stabilized Inverse Diffusion Equation*), suas propriedades e os resultados obtidos na segmentação das imagens propostas.

1 Introdução

A análise de um algoritmo robusto e eficiente para segmentação de imagens e realce de bordas é o escopo deste trabalho. Um estudo inicial da técnica SIDE é apresentado em ([1]).

1.1 Descrição do problema e motivação

Segmentar um sinal 1-D ou 2-D significa dividi-lo em diversas regiões de modo que o sinal seja homogêneo dentro de cada região e mude abruptamente entre regiões. O significado exato da palavra "homogêneo" depende da aplicação: usualmente significa variações suaves, intensidades constantes ou textura uniforme.

O objetivo deste trabalho é desenvolver e analisar um algoritmo de segmentação de imagens rápido e robusto. Ele deve ser robusto para ruídos de alta amplitude, os quais não são caracterizados em termos de distribuições probabilísticas. As aplicações de interesse exemplificadas neste relatório são imagens de ultra-som e tomografia da mama de pacientes com tumor. O método deve ser robusto também ao efeito de *blur* (borrar), porque a segmentação destas imagens visa a localização do tumor para possíveis análises futuras, como, por exemplo, cálculo de seu perímetro, área, centro de massa e etc.

As equações de difusão inversa estabilizada (SIDEs) são motivadas pela utilização das evoluções especificadas pelas equações diferenciais parciais. O paradigma por trás das SIDEs, levantados por [2, 3, 4, 7], é tratar a imagem de entrada como dados iniciais para as equações diferenciais de difusão. Estas normalmente são funções de três variáveis: duas espaciais (uma para cada dimensão da imagem) e uma de escala, também chamada de tempo devido a sua semelhança com as equações de evolução encontradas na física.

O ponto de partida para o estudo das SIDs são as difusões anisotrópicas introduzidas por Perona e Malik [4, 5]. Estas evoluções possuem descontinuidades na lateral direita e funcionam como difusões inversas em quase toda parte com estabilização resultante da presença de descontinuidades na lateral direita. Como será apresentado, o espaço escala de tais equações é a família de segmentações da imagem original, com resolução das evoluções de segmentação dependentes dos valores do parâmetro de escala t .

1.2 Organização do relatório

Iniciamos a próxima seção apresentando a notação utilizada para representação das imagens e das funções de evolução. Em seguida, na seção 4 apresentaremos a definição das equações de difusão inversa estabilizada e um algoritmo recursivo de segmentação ou agrupamento de regiões e, na seqüência suas propriedades para sinais 2-D. Na seção 6, utilizaremos o algoritmo descrito na implementação da segmentação de imagens de ultra-som e tomografia computadorizada. Por fim, apresentaremos as conclusões e perspectivas de implementações futuras.

2 Notação

Nesta seção iremos descrever a notação utilizada neste relatório. Um sinal 2-D a ser processado é simbolizado por $u^0(x, y)$. O índice 0 denota que o sinal será processado por meio de equações diferenciais parciais (PDE) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_t &= \mathcal{F}(u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) \\ u(0, x, y) &= u^0(x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

onde a variável t chamada de escala ou tempo, e a solução $u(t, x, y)$ para (1), em $0 \leq t \leq \inf$, são chamadas de espaço escala. As derivadas parciais com relação a t , x e y são simbolizadas pelos índices sub-escritos, e \mathcal{F} é o operador. O espaço escala é chamado linear (não linear) se \mathcal{F} for um operador linear (não linear).

Iremos considerar uma versão semi-discreta da equação (1), obtida pela discretização das variáveis espaciais e deixando t contínuo. Uma imagem de tamanho $N \times N$ a ser processada é simbolizada por \mathbf{u}^0 ; sendo uma matriz N^2 -dimensional no espaço \mathbb{R}^{N^2} . Iremos utilizar **negrito** para simbolizar sinais e imagens discretos. A matriz \mathbf{u}^0 é a condição inicial para a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(t) &= \mathcal{F}(\mathbf{u})(t), \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0, \end{aligned} \tag{2}$$

onde $\mathbf{u}(t)$ corresponde ao espaço escala, e $\dot{\mathbf{u}}(t)$ é a sua derivada com relação a t . As imagens \mathbf{u}^0 e $\mathbf{u}(t)$ são matrizes cujas entradas na i -ésima linha e j -ésima coluna são os pixels $u_{i,j}^0$ e $u_{i,j}(t)$, respectivamente.

O operador \mathcal{F} de interesse realiza diferenças da forma $u_{n+1} - u_n$, para simplificar os cálculos definiremos amostras não existentes no sinal, como u_0 e u_{N+1} , atribuindo os valores $u_0 = u_1$ e $u_{N+1} = u_N$.

O operador \mathcal{F} será tipicamente o negativo do gradiente de alguma energia funcional, denominada por $\mathcal{E}(\mathbf{u})$. Esta energia dependerá das primeiras diferenças de \mathbf{u} da seguinte forma:

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \sum_{(s,r) \in \mathcal{N}} E(u_s u_r), \quad (3)$$

onde

- E é uma função ímpar;
- s e r são índices singulares se \mathbf{u} for uma imagem 2-D;
- \mathcal{N} é a lista de todos os pares de pixels vizinhos: s e r são vizinhos se e somente se $(s, r) \in \mathcal{N}$

Um pixel (i, j) em uma imagem possui quatro vizinhos: $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i, j-1)$ e $(i, j+1)$.

3 SIDE: A Definição

Como apresentamos na seção anterior, utilizaremos espaço discreto e tempo contínuo para as evoluções representando como em (2), onde \mathbf{u} é o sinal discreto, *i.e.*, uma imagem de $N \times N$ pontos $u_{i,j}$ ($\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N^2}$). A condição inicial \mathbf{u}_0 corresponde ao sinal original a ser processado, e $\mathbf{u}(t)$ representa a evolução deste sinal no tempo (t), resultando em uma família de sinais tempo-espaço de $0 \leq t \leq \infty$.

O operador não linear \mathcal{F} de interesse pode ser visualizado através de um modelo mecânico simples [12, 1]. Vamos interpretar $\mathbf{u}(t)$ como uma matriz de posições das N^2 partículas de massa M_1, \dots, M_N , descrito na Figura 1. As partículas são forçadas a se mover sobre as N linhas verticais e sobre as N linhas horizontais. Uma partícula (i, j) está conectada com molas a seus vizinhos: $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i, j-1)$ e $(i, j+1)$, exceto as partículas das quatro quinas (possuindo dois vizinhos) e as de borda (que possuem três vizinhos). Cada mola possui extensão vertical v e horizontal h , com energia $E(v)$ ($E(h)$), *i.e.*, a energia da mola entre as partículas n e $(n+1)$ é dada por $E(u_{n+1} - u_n)$. As funções de energia $E(v)$ ($E(h)$) devem ser sempre positiva, par, ter condição inicial nula e possuir derivada positiva em todo seu intervalo.

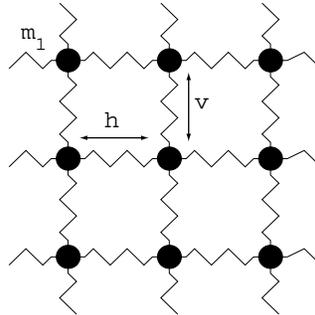


Figure 1: Modelo massa mola.

Partindo das condições impostas para as funções energia podemos atribuir a sua derivada o nome de função força $\mathcal{F}(v)$ ($\mathcal{F}(h)$). As funções $\mathcal{F}(v)$, $\mathcal{F}(h)$ devem ser positiva para todo intervalo, possuir condição inicial nula e ser ímpar. Partindo do pressuposto que o movimento das partículas são não conservativos, *i.e.*, o movimento irá cessar após um pequeno intervalo de tempo e recomeçar com velocidade zero. A variação no movimento da partícula (i, j) é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{i,j} = & \frac{1}{m_{i,j}} (F(u_{i+1,j} - u_{i,j}) - F(u_{i,j} - u_{i-1,j})) \\ & + F(u_{i,j+1} - u_{i,j}) - F(u_{i,j} - u_{i,j-1}), \end{aligned} \quad (4)$$

com $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, N$, e convencionando que $u_{0,j} = u_{1,j}$, $u_{N+1,j} = u_{N,j}$, $u_{i,0} = u_{i,1}$ e $u_{i,N+1} = u_{i,N}$ devido a falta de mola em $1 \leq i \leq N$ e $1 \leq j \leq N$. Nós também iremos nos referir $m_{i,j}$ como sendo a "massa da (i, j) -ésima partícula".

$\mathcal{F}(v)$ ($\mathcal{F}(h)$) é chamada de "força de difusão". Quando esta for monotonicamente crescente, como ilustrado na Figura 2(a). A energia associada à $\mathcal{F}(v)$ ($\mathcal{F}(h)$) é chamada de "energia de difusão" e a evolução expressa em (4) de "difusão". A Figura 2(b) representa a "força de difusão inversa", pois $\mathcal{F}(v) = -\mathcal{F}(v)$. A evolução associada a esta força é chamada de "difusão inversa". As difusões inversas possuem a característica de realçar diferenças abruptas em \mathbf{u} , correspondentes as "bordas". No entanto, as difusões inversas puras ocasionam evoluções instáveis (pois os pequenos ruídos arbitrários também são amplificados).

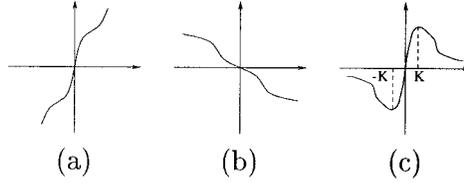


Figure 2: Funções força: (a) difusão, (b) difusão inversa, e (c) Perona-Malik.

4 Equações de Difusão Inversa Estáveis (SIDEs): Definição

Nesta seção, nós introduziremos uma função força descontínua, que será utilizada no sistema da Equação (4), mas que possui descontinuidades na lateral direita (RHS). O tipo de função força que nos interessa está representado na Figura 3. Esta função $\mathcal{F}(u)$ deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(v) & \leq 0 \quad \text{para } v \neq 0, \\ \mathcal{F}(0^+) & > 0 \\ \mathcal{F}(v_1) & = \mathcal{F}(v_2) \Leftrightarrow v_1 = v_2 \end{aligned}$$

onde $\mathcal{F}(h)$ satisfaz as mesmas propriedades.

Comparando este tipo de força com a função força de Perona-Malik, representada na Figura 2(c), podemos notar que este é um caso particular para $K = 0$ e para a função linear. No entanto, por causa da descontinuidade na origem da Figura 3, temos que redefinir as soluções

de (4) para esta função. Realmente, se (4) envolve pontos de descontinuidade na lateral direita (RHS), o valor de (4) no ponto de descontinuidade depende aparentemente da direção de aproximação à zero (porque $\mathcal{F}(0^+) \neq \mathcal{F}(0^-)$). Deste modo, nós precisamos de uma definição especial da trajetória de evolução nestes pontos de descontinuidade. A evolução resultante deve existir e ter solução estável e única conforme os dados iniciais.

Iremos descrever como definir soluções para (4) e para funções força (5). Assumindo que os resultados das evoluções estarão bem posicionados, nós demonstraremos que eles têm as propriedades qualitativas que desejamos, ou seja, que eles são estáveis e agem como difusões inversas e por conseguinte realçam as bordas.

Considere a evolução (4) com o $\mathcal{F}(v)$ da Figura 3, com as condições iniciais de (5) e com todas as massas $m_{i,j}$ iguais a 1. Note que a RHS de (4) possui descontinuidade em um ponto de \mathbf{u} se e somente se $u_{i,j} = u_{i+1,j}$ ou $u_{i,j} = u_{i,j+1}$ ou $u_{i,j} = u_{i-1,j}$ ou $u_{i,j} = u_{i,j-1}$ para qualquer (i, j) entre 1 e $N - 1$. Neste momento quando a trajetória atinge tal ponto em \mathbf{u} , precisaremos da seguinte definição: Em termos de nosso modelo massa-mola ilustrado na Figura 1, uma vez que as posições verticais ou horizontais de duas partículas vizinhas $u_{i,j}$ e $(u_{i+1,j}, u_{i,j+1}, u_{i-1,j}$ ou $u_{i,j-1})$ são iguais, a mola que conecta ambas é transformada em um elo rígido. Em outras palavras, as duas partículas são simplesmente unidas formando uma única partícula com o dobro da massa (Figura 4)

As equações diferenciais para as outras partículas não são alteradas. Similarmente, se m partículas consecutivas atingirem a mesma posição vertical, elas serão unidas em uma única partícula de massa m ($1 \leq m \leq N$). Desta forma, teremos:

$$\begin{aligned} \dot{u}_n &= \dots = \dot{u}_{n+m-1} \\ &= \frac{1}{m} (\mathcal{F}(u_{n+m} - u_{n+m-1}) - \mathcal{F}(u_n - u_{n-1})) \\ &\text{if } u_{n-1} \neq u_n = u_{n+1} = \dots \\ &= u_{n+m-2} = u_{n+m-1} \neq u_{n+m} \end{aligned}$$

Note que este sistema é o mesmo que (4), mas com possibilidades de massas diferentes. É conveniente reescrever esta equação de modo a indicar explicitamente a redução do número de variáveis de estado:

$$\dot{u}_{n_i} = \frac{1}{m_{n_i}} \sum_{n_j \in \mathcal{A}_{n_i}} \mathcal{F}(u_{n_j} - u_{n_i}), \quad (5)$$

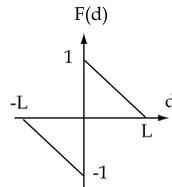


Figure 3: Função força para equação de difusão inversa. $\mathcal{F}(v) = \text{sgn}(v) - \frac{v}{L}$, sendo $L > \max(\mathbf{u}^0)$

onde m_{n_i} é a massa da partícula n_i (= o número de pixels na região n_i). \mathcal{A}_{n_i} é o conjunto de índices de todos os vizinhos de n_i , *i.e.*, de todas as partículas que estão conectadas a n_i por molas.

A partícula composta descrita pela posição vertical u_{n_i} e massa m_{n_i} consiste da união de m_{n_i} massas unitárias das partículas, como ilustra a Figura 4. A evolução pode ser pensada naturalmente como uma seqüência de estágios. Durante cada estágio, o lado direito de (5) é contínuo. Quando a solução atinge uma descontinuidade do lado direito, há uma redução de estágios e um agrupamento de m_{n_i} 's. A solução prossegue de acordo com a equação modificada até que outro ponto de descontinuidade seja atingido.

Podemos notar que esta evolução produz automaticamente uma segmentação multiescala do sinal original (se nós vemos cada partícula composta como uma região do sinal). A evolução descrita pode ser resumida no seguinte algoritmo:

- i. Inicialização: cada amostra é uma região distinta;
- ii. Desenvolva a equação (5) até que os valores em duas ou mais vizinhanças se tornem iguais;
- iii. Agrupe as regiões que possuam vizinhos iguais;
- iv. Retorne ao passo 2.

5 Propriedades da SIDE 2D

As SIDEs descritas nas seções anteriores reúnem um conjunto de propriedades interessantes, que validam e explicam sua aplicabilidade em problemas de segmentação.

- i. (**Princípio do máximo**). Todo máximo local é decrescido e todo mínimo local é aumentado pela SIDE. Deste modo,

$$u_i(t) < \max_n u_n(0) \quad \text{para } t > 0 \quad (6)$$

Utilizando este resultado, podemos provar:

- ii. (**evolução em tempo finito**). A SIDE, iniciada em $\mathbf{u} = (u_1^0, \dots, u_N^0)^T$, atinge o equilíbrio em tempo finito. Prova em [8].

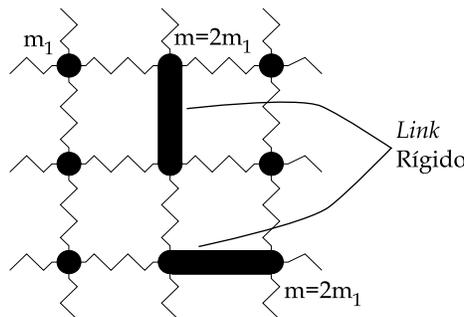


Figure 4: Representação da união de duas partículas.

6 Implementação das equações SIDE e Resultados obtidos

Caracterizamos imagens de ultra-som e tomografia da mama como imagens iniciais (\mathbf{u}^0) da evolução. Desejamos obter a segmentação das imagens em duas regiões.

Utilizaremos o algoritmo descrito na seção 4 na implementação da evolução SIDE. A escolha da função força que melhor se adapta a esta situação é uma questão em aberto. Utilizaremos a função força linear $\mathcal{F}(v) = \text{sign}(v) - \frac{v}{L}$, ilustrada na Figura 3. A implementação requer que L seja sempre maior que o intervalo dinâmico do sinal a ser processado.

O programa que implementa a evolução SIDE é descrito como:

begin

Leitura da imagem \mathbf{u}^0

Inicialização das variáveis:

$K = 0,04$ (constante que determina se dois vizinhos são iguais caso $|a - b| < K \rightarrow a = b$)

$\lambda = 0,01$ (passo de escala t ou iteração (atualização))

$Mass = \text{ones}(N \times M)$ (matriz de inicialização das massas com tamanho igual a \mathbf{u}^0 .)

Começa com a segmentação mais fina cada amostra é uma região distinta de massa 1.

$Regions = N * M$ (número inicial de regiões (número de pixels em \mathbf{u}^0 .)

$L = \max(\text{diff } \mathbf{u}_{n_j}) \quad \forall n_j \in \mathcal{A}_{n_i}$

$\mathcal{F}(v) = \text{sign}(v) - v/L$ (definição da função força \mathcal{F} .)

$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}^0$

while $Regions > 2$ **do**

$\mathbf{u}_{n_{col}} = \text{diff}(\mathbf{u}_n)$ (calcula a diferença nas colunas da imagem)

for $col = 1$ **to** M **do**

Procura por vizinhos nas colunas com valores menores que K

Agrupar regiões em \mathbf{u}_n caso a condição anterior seja satisfeita

Atualiza matriz $Mass$ e número $Regions$

od

$\mathbf{u}_{n_{row}} = \text{diff}(\mathbf{u}_n)$ (calcula a diferença nas colunas da imagem)

for $row = 1$ **to** N **do**

Procura por vizinhos nas linhas com valores menores que K

Agrupar regiões em \mathbf{u}_n caso a condição anterior seja satisfeita

Atualiza matriz $Mass$ e número $Regions$

od

$\mathbf{u}_{aux} = \mathcal{F}(\mathbf{u}_n)$ (aplicação da função força.)

$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_n + \lambda * \mathbf{u}_{aux} / Mass$

Imagem da evolução na próxima iteração.

od

end

O programa que implementa a SIDE executa n iterações para atingir o número de regiões igual a 2. Este número varia conforme a complexidade da imagem inicial, das constantes K e λ e da função força (\mathcal{F}). É importante destacar que estas constantes influenciam na convergência das imagens, e que sua determinação baseia-se em uma análise subjetiva das imagens durante a evolução.

As figuras 5 e 6 ilustram o processo de evolução obtido na segmentação de imagens de ultra-som e tomografia computadorizada.

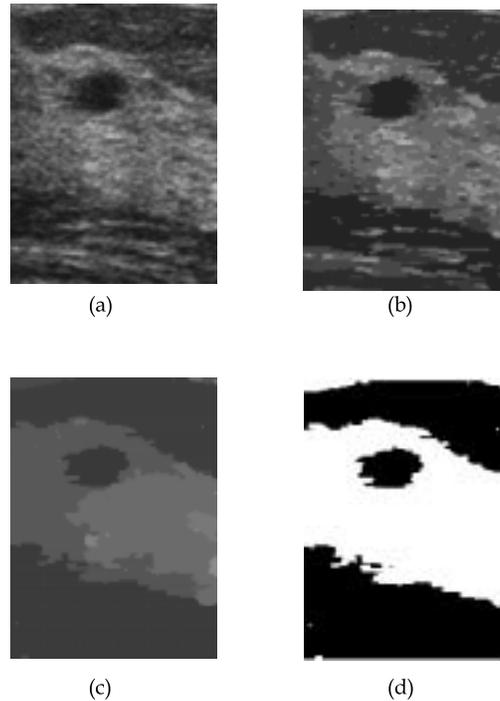


Figure 5: Resultado obtido na evolução de uma imagem de ultra-som. (a) imagem original, (b) imagem com 1000 regiões, (c) imagem com 4 regiões e (d) imagem com duas regiões.

O número de iterações necessário para a convergência foi distinto para as duas imagens ilustradas nas Figuras 5 e 6. Este número para as imagens de ultra-som foi aproximadamente o dobro que para imagem de tomografia. Visualmente podemos notar que as imagens de ultra-som são originalmente mais ruidosas que as de tomografia.

7 Conclusões e Perspectivas

Neste relatório apresentamos uma nova abordagem de realce de bordas e segmentação de imagens de ultra-som e tomografia. Nossa abordagem foi baseada em uma série de equações de evolução que utiliza equações de difusão inversa estabilizada ou SIDEs. Esta evolução, que é descontínua na lateral direita, possui alguns conceitos iguais aos de outros métodos evolutivos. Observamos sucesso na segmentação das imagens escolhidas.

Utilizamos como função força uma função linear, e os ajustes dos parâmetros passo de escala (λ) e regiões homogêneas (K) foram feitos de forma subjetiva. Observamos que o algoritmo possui convergência lenta quando o passo λ e K são pequenos e convergência rápida para λ e K altos. Quando λ e K são altos, no entanto, nem sempre há convergência para as duas regiões desejadas.

A proposição de estudos futuros desta técnica de evolução vem da necessidade de ajustes menos subjetivos para as condições de convergência e a utilização de funções força não lineares.

References

- [1] Gesualdi, A. and Campos, M., *Segmentação de Imagens e Realce de Bordas utilizando Equações de Difusão Inversa Estabilizada (SIDE)*, 1º relatório da disciplina de Processamento de Sinais Aleatórios, nov., **2001**.
- [2] Alvarez, L., Lions, P.L. and Morel, J.M., *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*, II. SIAM J. Numer. Anal, 29(3), **1992**.
- [3] Koenderink, J., *The structure of images*, Biological Cybernetics, 50, **1984**.
- [4] Perona, P. and Malik, J., *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion*, IEEE Trans. on PAMI, 12(7), **1990**
- [5] Perona, P., Shiota, T. and Malik, J., *Anisotropic diffusion*. In [6].
- [6] B.M. ter Harr Romeny, editor, *Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision*, Kluwer Academic Publishers, **1994**.
- [7] Witkin, A., *Scale-space filtering*, In Int. Joint Conf. on AI, pages 1019-1022, Karlsruhe, **1983**.
- [8] Pollak, I., *Nonlinear Scale Space Analysis in Image Processing*, PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, **1995**.
- [9] Perona, P. and Malik, J., *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion*, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. 12, no. 7, **1990**.
- [10] Perona, P., Shiota, T. and Malik, J., *Anisotropic diffusion*, in Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision, B. M. ter Haar Romeny, Ed. Norwell, MA: Kluwer, **1994**.
- [11] Brice, C. and Fennema, C., *Scene analysis using regions*, Artif. Intell., vol. 1, **1970**.
- [12] Pollak, I., Willsky, S. and Krim, H., *Image segmentation and edge enhancement with stabilized inverse diffusion equations*, IEEE Trans. on Image Processing, vol. 9, no. 2, **2000**.
- [13] Geman, D. and Reynolds, G., *Constrained restoration and the recovery of discontinuities*, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell, vol. 14, no. 3, **1992**.
- [14] Mumford, D. and Shah, J., *Boundary detection by minimizing functionals, I*, inProc. CVPR, San Francisco, CA, **1985**.

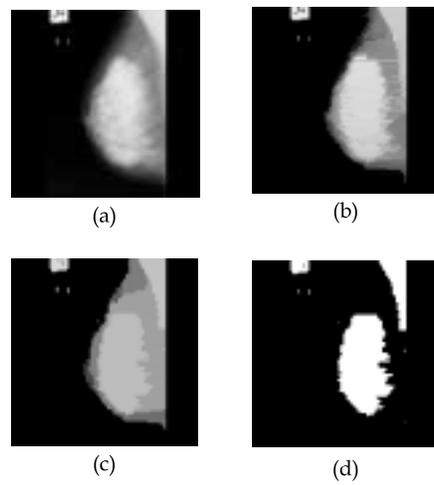


Figure 6: Resultado obtido na evolução de uma imagem de tomografia computadorizada. (a)imagem original, (b) imagem com 500 regiões, (c) imagem com 5 regiões e (d) imagem com duas regiões.