

# Introdução à filtragem digital e aos sinais aleatórios

*Aline R. Gesualdi, Marcelo P. de Albuquerque, Márcio P. de Albuquerque*

19 de Dezembro, 2003

## **Resumo**

Esta nota técnica apresenta uma introdução aos filtros digitais e aos sinais aleatórios. Serão apresentados alguns conceitos básicos utilizados na estrutura e no desenvolvimento dos filtros digitais, os conceitos básicos dos sinais aleatórios e uma introdução aos conceitos de filtragem adaptativa. Inicialmente abordamos as estruturas dos filtros digitais, apresentando filtros como resposta finita e infinita ao impulso. Em seguida, apresentamos a abordagem básica do projeto de filtros digitais. Logo após, apresentamos os sinais aleatórios, suas propriedades estatísticas e sua aplicação no cotidiano. Por fim, veremos uma introdução aos filtros e suas aplicações.

## Sumário

<b>1</b>	<b>Filtros digitais: estrutura e desenvolvimento</b>	<b>3</b>
1.1	Estruturas de filtros digitais . . . . .	3
1.2	Projeto de filtros digitais . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Sinais aleatórios</b>	<b>7</b>
2.1	Propriedades estatísticas de uma variável aleatória . . . . .	8
2.2	Propriedades estatísticas de um sinal aleatório . . . . .	8
2.3	Sinais aleatórios no sentido estacionário amplo . . . . .	8
2.4	Sinais ergódico . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Filtragem adaptativa</b>	<b>9</b>
3.1	Filtro de Wiener . . . . .	9
3.2	Filtros adaptativos . . . . .	12
3.3	Filtros adaptativos nas formas complexa e real . . . . .	13
3.4	Filtros adaptativos não-lineares . . . . .	13
3.5	Aplicações . . . . .	14
	<b>Referências</b>	<b>15</b>

# 1 Filtros digitais: estrutura e desenvolvimento

## 1.1 Estruturas de filtros digitais

A descrição de sistemas discretos no tempo  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$  expressa que a  $n$ -ésima amostra de saída é a soma de convolução entre a entrada e a resposta ao impulso do sistema e é a caracterização fundamental de filtros digitais LTI. A soma de convolução, em princípio, pode ser utilizada para implementar filtros digitais com resposta ao impulso conhecidas, e sua implementação envolve operações simples como adição, multiplicação e atraso. Para sistemas LTI com resposta ao impulso de comprimento infinito essa abordagem não é prática. No entanto, para filtros digitais LTI com respostas a impulsos infinita (IIR) descrita por uma equação diferencial de coeficientes constantes,

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N \frac{d_k}{d_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{p_k}{d_0} x[n-k] \quad (1)$$

e para filtros LTI digitais com resposta ao impulso de comprimento finito descrita pela equação

$$y[n] = \sum_{k=N_1}^{N_2} h[k]x[n-k] \quad (2)$$

a relação entrada saída envolve uma soma finita de produtos, e uma aplicação direta baseadas nestas equações é bastante prática.

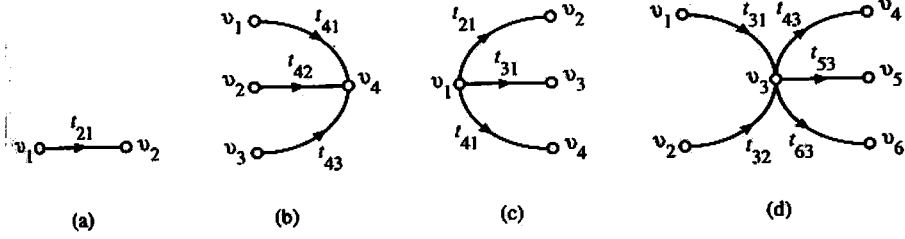
### Representação em diagrama de blocos

O algoritmo computacional de um filtro digital LTI pode ser convenientemente representado por diagramas de blocos. Existem diversas vantagens na representação de filtros digitais em diagramas de blocos, que são:

- é fácil escrever algoritmos computacionais por inspeção;
- é fácil analisar um diagrama de blocos e determinar a relação explícita entre entrada e saída;
- é fácil manipular um diagrama de blocos e derivar outro equivalente permitindo a implementação de diferentes algoritmos computacionais;
- é fácil determinar as condições obrigatórias de hardware;
- é fácil desenvolver representações em diagramas de blocos diretamente a partir de funções de transferência propiciando uma variedade de representações equivalentes.

### Representação “*flow-graph*” de sinais

Em um sinal “*flow-graph*”, as variáveis dependentes e independentes são representadas por nós  $v_k$ , enquanto as unidades de multiplicação e atraso são representadas por ramificações diretas. No último caso, a ramificação direta possui um símbolo anexado significando o ganho do ramo ou transmissão, que para um ramo multiplicador é o valor do coeficiente de multiplicação e para o atraso é simplesmente  $z^{-1}$ . Frequentemente, uma ramificação direta iniciando no nó  $v_1$  e terminando no nó  $v_2$  é representada pelo símbolo  $(v_1, v_2)$ . A figura abaixo exemplifica os elementos básicos da representação de um filtro digital LTI.



Podemos notar na figura que existe basicamente três tipos de nós. O nó  $v_4$  (b) chamado de nó de decaimento possui somente ramos de chegada, o nó  $v_1$  (c) chamado nó fonte possui apenas nós de saída. No entanto, em geral, um nó interno terá uma combinação de ramos de entrada e saída, como ilustrado em (d). Um nó com apenas uma saída e uma entrada é chamado de nó de corrente.

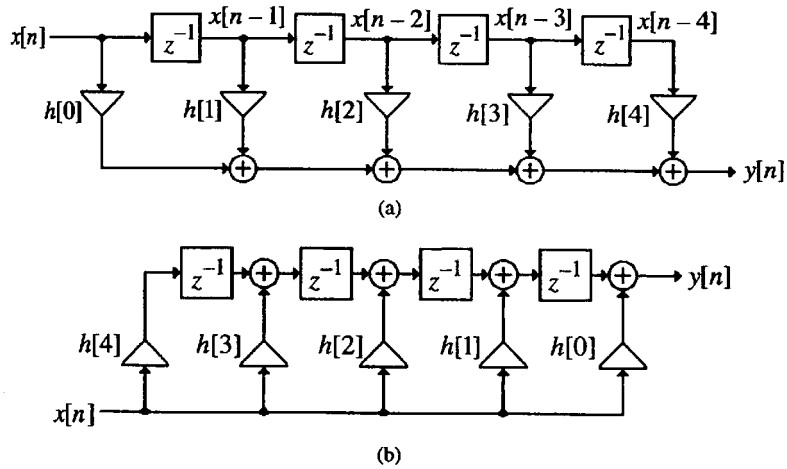
No processo de análise, geralmente, nós removemos alguns ramos e nós de um dado “*flow-graph*”. A representação reduzida é chamada de sub-gráfico.

### Estrutura básica de um filtro FIR digital

Um filtro FIR de comprimento  $M$  é caracterizado por  $M$  coeficientes e, em geral, sua implementação requer  $M$  multiplicadores e  $M - 1$  adições de duas entradas. Estruturas nas quais os coeficientes de multiplicação são exatamente os coeficientes da função de transferência são chamadas de **estruturas de forma direta**. A realização direta de um filtro FIR pode ser rapidamente desenvolvida pela equação

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n - k] \tag{3}$$

como ilustra a figura abaixo para  $M=5$ .



Analisando a estrutura fornece

$$y[n] = h[0]x[n] + h[1]x[n - 1] + h[2]x[n - 2] + h[3]x[n - 3] + h[4]x[n - 4] \tag{4}$$

### Estrutura básica de filtros IIR

Os filtros digitais causais IIR são caracterizados por uma função de transferência da forma

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{p_0 + p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \dots + p_Mz^{-M}}{d_0 + d_1z^{-1} + d_2z^{-2} + \dots + d_Nz^{-N}}. \tag{5}$$

ou, sob a forma equivalente

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N \frac{d_k}{d_0} y[n-k] + \sum k = 0M \frac{p_k}{d_0} x[n-k] \quad (6)$$

A partir da representação por equações a diferenças podemos observar que para o cálculo da  $n$ -ésima amostra de saída é necessário o conhecimento das amostras passadas da seqüência de saída. Em outras palavras, a realização de um filtro causal IIR requer alguma forma de realimentação.

A função de transferência de um filtro IIR digital de ordem  $N$  é caracterizada por  $2N + 1$  coeficientes e, em geral, requer em sua implementação  $2N + 1$  multiplicações e  $2N$  adições de duas entradas. Assim como nos filtros FIR, nas estruturas dos filtros IIR os coeficientes dos multiplicadores são exatamente os coeficientes da função de transferência. Essas estruturas são chamadas de *forma direta*.

Os filtros digitais IIR também podem ser representados em representações em cascata, paralela e em espaço de estados.

### Filtros passa tudo

O filtro passa tudo é uma realização especial do filtro IIR. Os filtros IIR possuem função de transferência com magnitude unitária para todas as frequências. O filtro passa tudo é freqüentemente utilizado como equalizador de atraso, implementação simultânea de filtros de primeira ordem passa-altas e passa-baixas frequências e a implementação simultânea de filtros de segunda ordem passa-faixa e rejeita-faixa. A construção de filtros passa tudo pode ser realizada de duas formas, que são: realização baseada na abordagem da extração de multiplicadores e realização baseada na extração de dois pares.

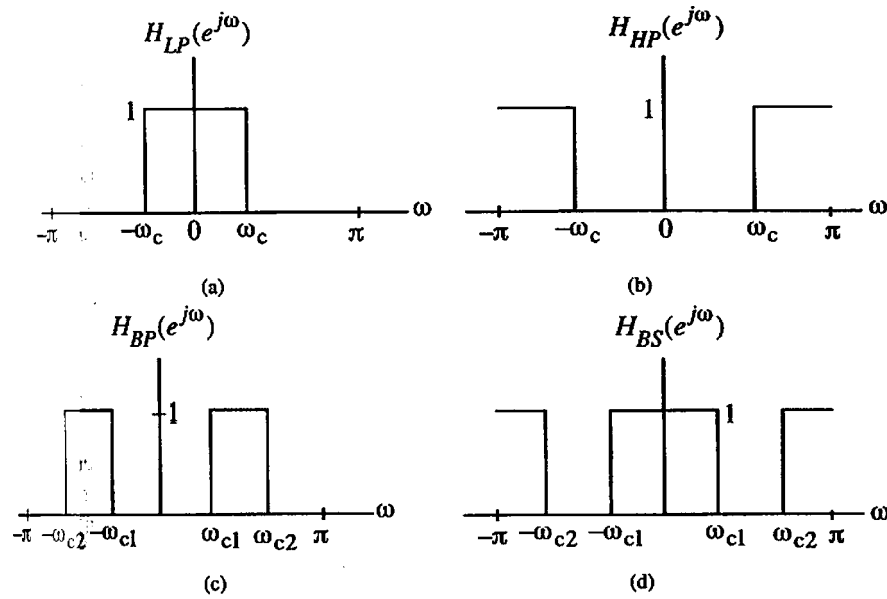
## 1.2 Projeto de filtros digitais

Um passo importante no desenvolvimento de filtros digitais é a determinação de uma função de transferência  $G(z)$  realizável aproximando as especificações de resposta em frequência. Se desejarmos construir um filtro IIR é necessário especificar também se  $G(z)$  é estável. O processo de obtenção da função de transferência  $G(z)$  é denominado *projeto de filtros digitais*. Depois de obter  $G(z)$ , o próximo passo é obter uma estrutura apropriada para o filtro.

### Considerações preliminares

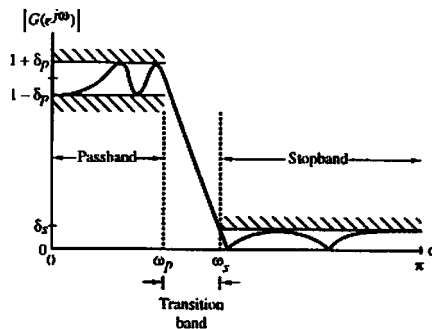
Antes de desenvolvermos a função de transferência  $G(z)$  devemos especificar sua resposta em frequência e determinar se o projeto é de um filtro FIR ou IIR.

**Especificação de filtros digitais:** Assim como nos filtros analógicos, na maioria das aplicações é necessário especificar a resposta de magnitude e de fase dos filtros digitais. Existem quatro tipos básicos de filtros, como ilustra a figura abaixo.



Como a resposta ao impulso correspondentes a cada um desses filtros é não-causal e de comprimento infinito, estes filtros não são realizáveis. Uma maneira de desenvolver uma aproximação realizável a estes filtros é truncar a resposta ao impulso.

Portanto, como no caso de projeto de filtros analógicos, o problema de especificação da resposta em magnitude de um filtro digital na banda de passagem e na banda de rejeição são dados por algumas tolerâncias aceitáveis. Em adição, uma banda de transição é especificadas entre a banda de passagem e a de rejeição para permitir que a magnitude decaia suavemente, como ilustra a figura abaixo.



Na banda de passagem, definida por  $0 \leq \omega \leq \omega_p$ , precisamos de magnitude próximas de 1 com erro de  $\pm\delta_p$ . Na banda de rejeição, definida por  $\omega_s \leq \omega \leq \pi$ , precisamos que a magnitude seja aproximadamente zero, com um erro de  $\pm\delta$ . As frequências  $\omega_s$  e  $\omega_p$  são chamadas, respectivamente, de *freqüência de borda passa-banda* e *freqüência de borda rejeita-banda*. Os limites das tolerâncias nas bandas de passagem e banda de rejeição são chamados *valores de pico de "ripple"*. Note que a resposta em frequência de um filtro digital é uma função periódica em  $\omega$ , e a resposta em magnitude de um coeficiente real do filtro é uma função ímpar de  $\omega$ . Como resultado, as especificações de um filtro digital são dadas na faixa  $0 \leq \omega \leq \pi$ .

**Seleção do tipo de filtro:** A segunda abordagem de interesse é a seleção do tipo de filtro, i.e., se iremos utilizar um filtro FIR ou IIR. Existem muitas vantagens na utilização de um filtro FIR, uma vez que este pode ser projetado com fase linear e a estrutura do filtro é sempre estável com coeficientes de filtro quantizados. No entanto, na maioria dos casos, a ordem  $N_{FIR}$  do filtro

FIR é consideravelmente mais alta que a ordem  $N_{IIR}$  de um filtro IIR equivalente e com as mesmas especificações de magnitude.

Em geral, a implementação de filtros FIR requer aproximadamente  $N_{FIR}$  multiplicações por amostra de saída, enquanto que um filtro IIR requer  $2N_{IIR} + 1$  multiplicações por amostra de saída. Se o filtro FIR for projetado com fase linear, então o número de multiplicações por amostra de saída reduz para aproximadamente  $(N_{FIR} + 1)/2$ . Do mesmo modo, a maioria dos projetos de filtros IIR resulta em funções de transferência com zeros no círculo unitário e, a realização em cascata de um filtro de ordem  $N_{IIR}$  com zeros no círculo unitário requer  $(3N_{IIR} + 3)/2$  multiplicações por amostra de saída. Na prática a relação entre  $N_{FIR}/N_{IIR}$  é da ordem de 10 ou mais e, como resultado, os filtros IIR são computacionalmente mais eficientes. No entanto, se o atraso de grupo de um filtro IIR for equalizado cascadeando o filtro com um equalizador passa tudo, então a vantagem computacional não será mais tão significativa. Em muitas aplicações, a linearidade da resposta de fase de um filtro digital não é relevante, tornando o filtro IIR preferível por causa do baixo custo computacional.

**Abordagem básica no projeto de filtros digitais:** No caso do projeto de filtros IIR, a prática mais comum é converter as especificações do filtro digital em especificações de um protótipo passa-baixas analógico, determinar a função de transferência do filtro passa-baixas analógico e depois transformar na função de transferência digital desejada. Esse método tem sido largamente utilizado pelas seguintes razões:

- Técnicas analógicas de aproximações são altamente avançadas.
- Elas normalmente permitem soluções de forma fechada.
- Tabelas extensivas estão disponíveis para o projeto de filtros analógicos.
- Muitas aplicações requerem a simulação digital de filtros analógicos.

Dois abordagens são utilizadas para o projeto de filtros IIR, que são: o mapeamento da invariância ao impulso e a transformação bilinear.

Os filtros FIR por sua vez não possuem em seu projeto nenhuma conexão com o projeto de filtros analógicos. O projeto de filtros digitais FIR está baseado na aproximação direta da resposta em magnitude especificada. Duas abordagens diretas no projeto de filtros FIR podem ser utilizadas, que são: a forma truncada da série de Fourier e a abordagem de amostragem em frequência.

## 2 Sinais aleatórios

Os sinais discretos no tempo podem ser unicamente determinados por um processo bem definido como, por exemplo, uma expressão matemática. Estes sinais são chamados determinísticos, uma vez que todos os valores das amostras da seqüência são bem definidos no índice de tempo.

Sinais que possuem os valores das amostras gerados de forma aleatória não podem ser previsto no tempo. Estes sinais são denominados sinais aleatórios ou sinais estocásticos. Podemos citar alguns exemplos de sinais aleatórios, que são: sinais de voz, música, etc. Outro exemplo é o sinal de erro formado pela diferença entre a versão amostrada ideal e a versão quantizada, gerada na prática por um conversor analógico digital.

Sinais ou processos aleatórios em tempo discreto consiste de um conjunto de seqüências discretas no tempo. Uma dada seqüência deste conjunto é chamada realização do processo aleatório. Em um determinado índice de tempo  $n$ , o valor da amostra observada  $x[n]$  é o valor da variável aleatória  $X[n]$ . Portanto, um processo aleatório é composto por uma família de variáveis aleatórias.

## 2.1 Propriedades estatísticas de uma variável aleatória

A propriedade estatística de uma variável aleatória depende de sua função de distribuição de probabilidade, ou função de densidade de probabilidade. Esta função representa a probabilidade que a variável aleatória  $X$  pode assumir numa determinada faixa de valores de  $-\infty$  a  $\alpha$ .

As três propriedades estatísticas mais comuns que caracterizam uma variável aleatória são: média ou valor esperado  $m_x$ , a média do valor quadrado da variável  $E(X^2)$ , e a variância  $\sigma_X^2$ . A raiz quadrada da variância é denominado desvio padrão  $\sigma_X$ .

No caso de duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  as propriedades estatísticas conjuntas e individuais são de interesse prático. A probabilidade que  $X$  assuma um valor entre a faixa  $-\infty$  a  $\alpha$  e que  $Y$  assuma um valor dentro da faixa de  $-\infty$  a  $\beta$  é chamada *função de probabilidade conjunta* ou *função de densidade de probabilidade conjunta*. As propriedades estatísticas conjunta entre duas variáveis aleatórias são descritas pela correlação cruzada e pela covariância cruzada.

Dois variáveis aleatórias são estatisticamente independentes se a probabilidade conjunta for igual à multiplicação das probabilidades independentes. E as variáveis conjuntas são descorrelacionadas ou linearmente independentes se a média conjunta for igual à multiplicação das médias independentes.

## 2.2 Propriedades estatísticas de um sinal aleatório

As propriedades estatísticas de um sinal aleatório é dada pelas propriedades estatísticas das variáveis aleatórias contidas no mesmo. Em geral a média, o valor médio quadrático e a variância de um sinal aleatório discreto no tempo são funções do índice de tempo  $n$  e podem ser consideradas como seqüências.

Freqüentemente desejamos obter a relação estatística entre as amostras de um sinal aleatório em tempos discretos diferentes. Essa relação é denominada *autocorrelação*. Outra relação importante entre as amostras de um sinal aleatório é chamada *autocovariância*.

## 2.3 Sinais aleatórios no sentido estacionário amplo

Em geral as propriedades estatísticas de um sinal aleatório discreto no tempo, como as funções média, variância, autocorrelação e autocovariância, são funções que variam ao longo do tempo. A classe de sinais aleatórios usualmente encontradas em aplicações de processamento digital de sinais é chamada de estacionária no sentido amplo (WSS), que caracteriza processos aleatórios que são independentes no tempo ou independentes da origem. Um processo WSS possui média igual para todos os índices de tempo e as funções de autocorrelação e autocovariância dependem somente da diferença entre os índices de tempo.

## 2.4 Sinais ergódico

Em muitas situações práticas os sinais aleatórios de interesse não podem ser descritos em termos de expressões analíticas simples. Desta forma, o cálculo de suas propriedades estatísticas envolve a resolução de integrais definidas e somatórios. Normalmente somente uma porção finita da realização do sinal é disponível, a partir da qual temos que estimar as propriedades estatísticas.

Um sinal aleatório estacionário é caracterizado como ergódico de todas as propriedades estatísticas de uma única realização são suficientes para caracterizar o processo aleatório. A média de um sinal ergódico é obtida pelo operador esperança no limite que as realizações tendem a infinito. Na prática



a operação de limite não pode ser aplicada e, portanto a média é calculada pelo somatório das amostras.

### 3 Filtragem adaptativa

O problema de filtragem linear utilizando propriedades estatísticas de certos parâmetros disponíveis do sinal de entrada e do ruído aditivo, não desejado, é chamado filtragem adaptativa. O objetivo da filtragem adaptativa é projetar filtros a partir de dados ruidosos de entrada, e minimizar os efeitos do ruído de acordo com algum critério estatístico. Em um evento, podemos utilizar um filtro para executar três tarefas básicas de processamento de informação, que são:

1. Filtragem: que significa a extração de informação sobre uma quantidade de interesse no tempo  $t$  utilizando dados medidos até o instante  $t$ .
2. Suavização: que diferencia da filtragem no sentido que a informação da quantidade de interesse não precisa estar disponível no tempo  $t$ , e os dados medidos após o tempo  $t$  podem ser utilizados para obter a informação. Isso significa que na suavização há um atraso na produção do resultado de interesse.
3. Predição: que é o lado da previsão do processamento da informação. O objetivo aqui é derivar a informação sobre qual quantidade de interesse será obtida no tempo futuro  $t + \tau$ , para  $\tau > 0$ , utilizando dados medidos até o tempo  $t$ .

Podemos classificar filtros como lineares e não-lineares. Um filtro é dito como linear se a filtragem, suavização ou predição da quantidade na saída do dispositivo for uma função linear das observações aplicadas na entrada do filtro. Caso contrário o filtro é não-linear.

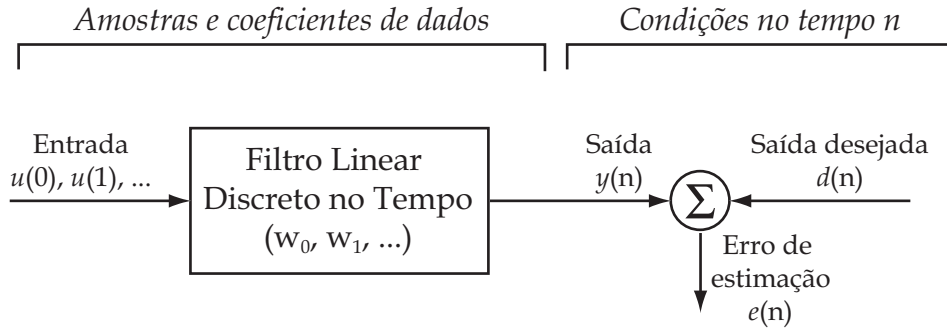
Na solução do problema de filtragem linear por abordagem estatística assumimos a utilização de alguns parâmetros estatísticos (i.e., média e funções de correlação) do sinal útil e do ruído aditivo. A condição do projeto de filtros lineares com entradas ruidosas é minimizar os efeitos do ruído na saída do filtro de acordo com alguns critérios estatísticos. Uma abordagem útil para o problema de otimização do filtro é minimizar o valor médio quadrático do sinal de erro que é definido pela diferença da resposta desejada com a saída atual do filtro. Para entradas estacionárias, a solução resultante é comumente conhecida como filtro de Wiener, que é dito como sendo ótimo no sentido médio quadrático. O gráfico do valor médio quadrático do sinal de erro pelos parâmetros ajustáveis do filtro linear é referenciado como superfície de performance de erro. Os pontos mínimos deste gráfico representam as soluções de Wiener.

O filtro de Wiener é inadequado para lidar com situações de não-estacionaridades do sinal e/ou ruído intrínsecas ao problema. Nestas situações o filtro ótimo tem que assumir a forma de variação no tempo. Uma solução altamente recomendável a este problema mais difícil é o filtro de Kalman.

#### 3.1 Filtro de Wiener

Considere o diagrama de blocos da Figura 3.1 que representa um filtro linear em tempo discreto. As entradas consistem da série temporal  $u(0), u(1), u(2), \dots$ , e o filtro é caracterizado pela resposta ao impulso  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$ . Em um tempo discreto  $n$ , o filtro produz a saída denominada  $y(n)$ . Esta saída é utilizada para fornecer uma estimação da resposta desejada  $d(n)$ . Com a entrada do filtro e a resposta desejada representada por realizações únicas do respectivo processo estatístico, a estimação

é acompanhada por um erro com características estatísticas próprias. Em particular, o erro de estimação,  $e(n)$ , é definido pela diferença entre a resposta desejada  $d(n)$  e a saída do filtro  $y(n)$ .



A escolha por um filtro de duração finita ao impulso (FIR) ou por um de duração infinita (IIR) é ditado por considerações práticas. Para o início do desenvolvimento da teoria de filtragem de Weiner, assumiremos filtros IIR. Os filtros FIR são considerados como casos especiais.

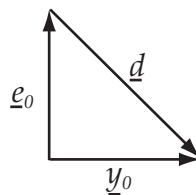
Outra escolha a ser feita é sobre o critério de otimização estatística a ser escolhido. Especificamente devemos considerar o projeto de otimização de filtros pela *minimização da função custo*, ou índice de performance, selecionando a seguinte lista de possibilidades:

1. Valor médio quadrático do erro de estimação.
2. Esperança do valor absoluto do erro de estimação.
3. Esperança da terceira ou mais alta potência do valor absoluto do erro de estimação.

### O princípio da ortogonalidade

Representa um dos teoremas mais elegantes no assunto de filtragem linear ótima e também fornece base matemática de verificação se um filtro linear está operando em condições ótimas.

A condição necessária e suficiente para a minimização da função custo é que o erro de estimação seja ortogonal a cada amostra de entrada na estimação da resposta desejada no tempo  $n$ .



$$E[u(n-k)e_0^*(n)] = 0 \quad (7)$$

$$E[y_0(n)e_0^*(n)] = 0 \quad (8)$$

$$\hat{d}(n, u_n) = y_0(n) \quad (9)$$

### Erro médio quadrático mínimo

O erro médio quadrático normalizado é representado pela equação 10

$$\epsilon = 1 - \frac{\sigma_d^2}{\sigma_d^2} \quad 0 \leq \epsilon \leq 1 \quad (10)$$

Se  $\epsilon$  for zero o filtro ótimo opera perfeitamente, a pior situação possível é quando  $\epsilon = 1$ .

### Equação Wiener-Hopf

O princípio da ortogonalidade descrito em 7 especifica as condições necessárias e suficientes para operação ótima de um filtro. Desta forma, podemos reformular as condições de um filtro ótimo para:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^* u(n-k) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (12)$$

Substituindo 11 e 12 em 7 temos

$$\sum_{i=0}^{\infty} \omega_{0i} r(i-k) = p(-k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

onde  $r$  é a função de autocorrelação e  $p$  é a função de correlação cruzada descrita por:

$$r(i-k) = E[u(n-k)u^*(n-i)] \quad (14)$$

$$p(-k) = E[u(n-k)d^*(n)] \quad (15)$$

O sistema de equações 13, 14 e 15 são chamadas equações de Wiener-Hopf, e é representada por:

$$\underline{\underline{R}} = E[\underline{u}(n)\underline{u}^H(n)] \quad (16)$$

$$\underline{p} = E[\underline{u}(n)\underline{d}^*(n)] \quad (17)$$

$$\underline{\omega}_0 = \underline{\underline{R}}^{-1}\underline{p} \quad (18)$$

A representação em forma canônica mostra que  $\underline{\underline{R}}$  pode ser expressa em termos dos autovalores e autovetores.

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{Q}}\underline{\underline{\Lambda}}\underline{\underline{Q}}^H \quad (19)$$

onde  $\underline{\underline{\Lambda}}$  é a matriz diagonal de autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$  da matriz de correlação, e a matriz  $\underline{\underline{Q}}$  possui em suas colunas os autovalores  $q_1, q_2, \dots, q_M$ . A versão transformada do vetor  $\underline{\omega}$  é dada por:

$$\underline{v} = \underline{\underline{Q}}^H(\underline{\omega} - \underline{\omega}_0) \quad (20)$$

O novo formalismo do erro quadrático é:

$$J = J_{min} + \sum_{k=1}^M \lambda_k |v_k|^2 \quad (21)$$

### 3.2 Filtros adaptativos

O projeto de filtros de Wiener requer informação *a priori* sobre a estatística dos dados a serem processados. O filtro é ótimo somente quando características estatísticas dos dados de entrada coincidem com as informações *a priori* as quais o filtro fora projetado. Quando essa informação não é conhecida completamente, no entanto, pode não ser possível o projeto do filtro de Wiener ou então o projeto pode não ser mais ótimo. Uma abordagem direta que utilizamos em tais operações é o procedimento “estimação e conexão”. Este é um processo de dois estágios através do qual o filtro estima os parâmetros estatísticos dos sinais relevantes conecta os resultados obtidos em uma fórmula não-recursiva para o cálculo dos parâmetros do filtro. Em operações em tempo real, este procedimento possui a desvantagem de precisar de dispositivos de hardware excessivamente elaborados e caros. Um método mais eficiente é a utilização de filtros adaptativos[5].

O filtro adaptativo conta com algoritmos recursivos em sua operação, o que torna possível para o filtro operar de forma satisfatória em um ambiente onde o conhecimento completo das características do sinal não são disponíveis. O algoritmo começa a partir de um conjunto predeterminado de condições iniciais, representando o que conhecemos do ambiente. Apesar disso, em um ambiente estacionário, após iterações sucessivas do algoritmo percebemos que ele converge para a solução ótima de Wiener em algum sentido estatístico. Em um ambiente não-estacionário, o algoritmo oferece uma capacidade de rastreamento, a qual permite rastrear variações temporais na estatística dos dados de entrada, desde que as variações sejam suficientemente baixas.

Como conseqüência direta da aplicação de um algoritmo recursivo através do qual os parâmetros de um filtro adaptativo são atualizados de uma iteração para a próxima, os parâmetros tornam-se dependentes dos dados. Isso, então significa que um filtro adaptativo é na realidade um filtro não-linear, no sentido que ele não obedece ao princípio da superposição. Apesar disso a propriedade, filtros adaptativos são comumente classificados como lineares e não-lineares.

Uma variedade de algoritmos recursivos foram desenvolvidos na literatura para a operação da filtragem adaptativa linear. A escolha de um algoritmo sobre o outro é determinada por um ou mais dos seguintes fatores:

- taxa de convergência
- falta de ajustamento
- rastreamento
- robustez
- condição computacional
- estrutura
- propriedades numéricas

Estes fatores, de seus modos, também entram no projeto de filtros não-lineares adaptativos. Particularmente, falamos de algoritmos de filtragem não-linear que convergem em um mínimo local, ou a um mínimo global da superfície de performance de erro.

### 3.3 Filtros adaptativos nas formas complexa e real

No desenvolvimento de filtros adaptativos, é comum assumirmos que os dados de entrada estão sob a forma de banda base. Em algumas aplicações como radar, sonar, a componente de informação do sinal tipicamente consiste num sinal mensagem modulada na onda portadora. A largura de banda do sinal mensagem é usualmente pequena comparada com a frequência da portadora. Em geral a banda base do sinal é complexa.

De acordo com a teoria dos filtros adaptativos os sinais são assumidos como complexos e os algoritmos de filtragem adaptativa são desenvolvidos na forma complexa.

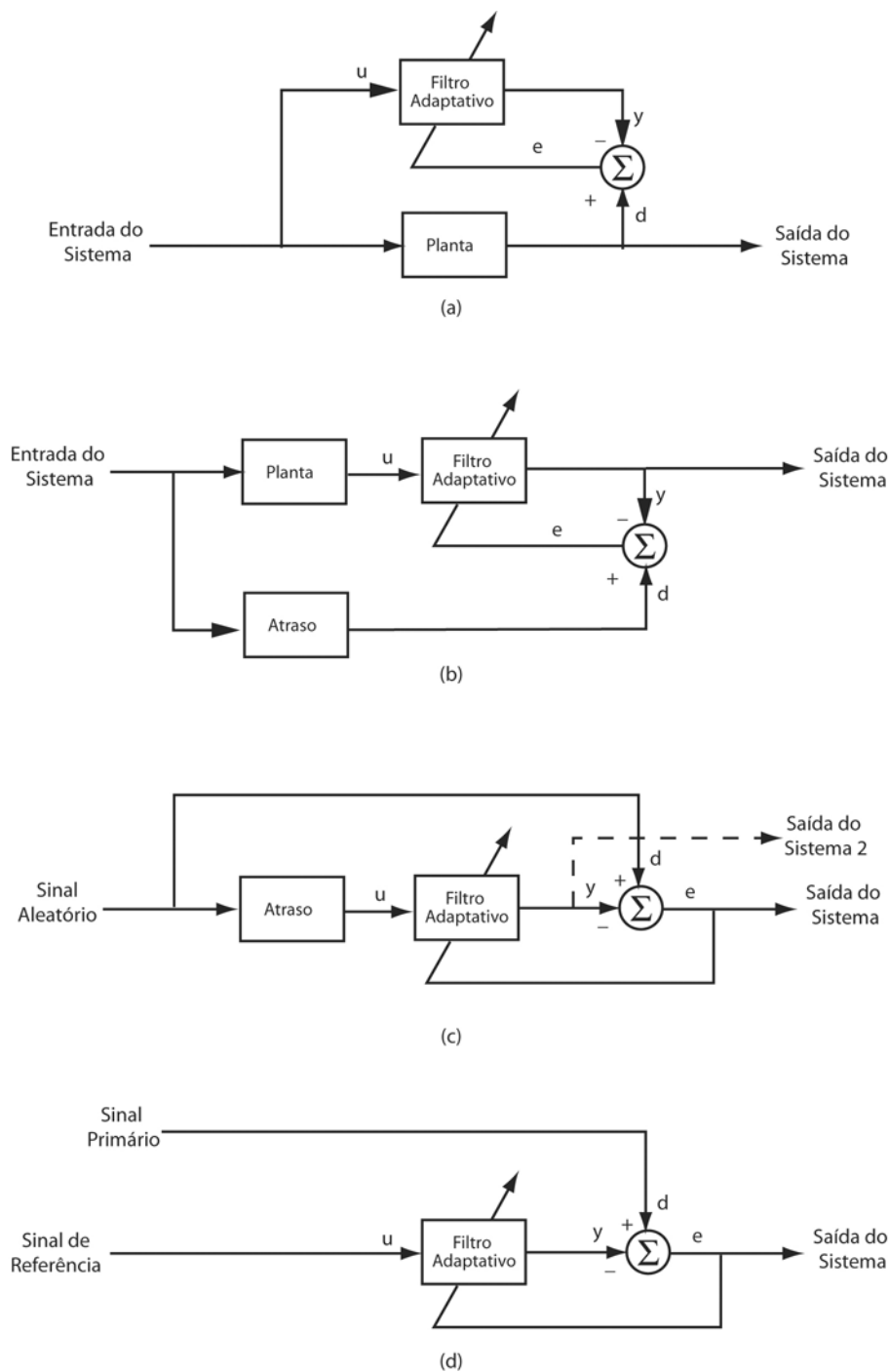
### 3.4 Filtros adaptativos não-lineares

A teoria dos filtros lineares ótimos está baseada no critério do erro médio quadrático. O filtro de Wiener que resulta da minimização tal critério, e que representa o objetivo de filtros lineares num ambiente estacionário, pode estar relacionado somente com estatística de segunda ordem da entrada. Essa restrição limita a habilidade de um filtro adaptativo linear extrair informações de entradas que não são gaussianas. Essa restrição é vencida incorporando algumas não-linearidades na estrutura de filtros adaptativos de forma a levar em consideração estatísticas de alta ordem. Fundamentalmente existem dois tipos de filtros adaptativos não-lineares, que são:

- Filtros adaptativos não-lineares baseados em Volterra
- Redes neuronais artificiais.

### 3.5 Aplicações

As quatro classes de filtros adaptativos estão exemplificadas na figura abaixo:



**Figura:** Quatro classes básicas de aplicações de filtragem adaptativa: (a) classe 1: identificação; (b) classe 2: modelagem inversa; (c) classe III: previsão; (d) classe 4: cancelamento de interferências

As funções básicas das quatro classes básicas de filtros adaptativos são:

- identificação

- modelagem inversa
- predição
- cancelamento de interferência

## Referências

- [1] Mitra S., "Digital Signal Processing, a computer based approach", Editora Mc Graw Hill, Capítulo 2, 1998.
- [2] Oppenheim A., "Discrete-time signal processing", Editora Pearson Higher Education, Capítulo 2, 1989.
- [3] Haykin S., "Sinais e sistemas", Editora John Wiley and Sons Ltd, Capítulo 2.
- [4] Manolakis D., "Digital signal processing", Editora MacMillan Coll Div, 2a. Edição, pag 143, 1992.
- [5] Diniz P., "Adaptative filtering: algorithms and practical implementation".