

Introdução ao Processamento de Sinais

Aline R. Gesualdi, Marcelo P. de Albuquerque, Márcio P. de Albuquerque

19 de Dezembro, 2003

Resumo

Esta nota técnica apresenta uma introdução sobre processamento de sinais. Serão apresentados alguns conceitos básicos sobre representação de sinais e sistemas discretos nos domínios do tempo e da frequência. Enfatizamos as aplicações destes conceitos no cotidiano bem como a utilização de ferramentas de processamento de sinais na resolução de problemas. Inicialmente abordamos os conceitos de sinais e sistemas, as operações básicas entre sinais, o processo de amostragem e a caracterização de sinais lineares e invariantes no tempo (LTI) no domínio do tempo. Em seguida, passamos à representação de sinais LTI no domínio da frequência. Neste momento veremos a representação de sinais por Série de Fourier e a Transformada Z. Por fim, nas duas últimas seções serão abordados a representação de sistemas LTI no domínio da transformada e o processamento digital de sinais no tempo contínuo.

Sumário

1	Representação de sinais e sistemas discretos no domínio do tempo	3
1.1	Sinais discretos no tempo	3
1.2	Operações com seqüências	4
1.3	O processo de amostragem	4
1.4	Sistemas discretos no tempo	5
1.5	Caracterização no domínio do tempo de sistemas LTI discretos	5
1.6	Representação de estados de sistemas LTI discretos no tempo	6
2	Representação de sinais no domínio da transformada	7
2.1	Análise de freqüência de sinais contínuos no tempo	7
2.2	Transformada de Fourier - Representação de Fourier em sinais	8
2.3	A transformada Z	12
2.4	A Transformada Z inversa	15
2.5	Proriedades da transformada Z	15
3	Representação de Sistemas LTI no domínio da transformada	15
3.1	A resposta em freqüência	16
3.2	A função de transferência	17
4	Processamento digital de sinais no tempo contínuo	18
4.1	Amostragem de sinais no tempo contínuo	18
4.2	Projeto de filtros “ <i>anti-aliasing</i> ”	20
4.3	Conversor analógico digital	21
4.4	Conversor digital analógico	22
4.5	Projeto de filtros para reconstrução do sinal	24
	Referências	24

1 Representação de sinais e sistemas discretos no domínio do tempo

Os sinais de uma forma ou outra, constituem um ingrediente básico de nossa vida diária. Uma forma comum de comunicação humana, por exemplo, é o uso de sinais de fala seja na conversação frente a frente ou por um canal telefônico. Outra forma comum é a visual, com sinais assumindo a forma de imagens de pessoas ou objetos que nos cercam.

Um sinal é formalmente definido como uma função de uma ou mais variáveis, a qual veicula informações sobre a natureza de um fenômeno físico. Quando a função depende de uma única variável, diz-se que o sinal é unidimensional, por exemplo, os sinais de fala. Quando a função depende de duas ou mais variáveis, diz-se que o sinal é multidimensional como, por exemplo, as imagens.

A maioria dos sinais que encontramos são gerados de modo natural. No entanto, um sinal pode ser gerado sinteticamente ou por simulação. Desta forma, suas variáveis independentes podem ser contínuas ou discretas e os sinais podem ser tanto funções contínuas ou discretas de suas variáveis independentes. Em geral, em processamento digital de sinais (PDS) efetuamos transformações de sua representação base para uma representação do mesmo sinal em outro domínio, com o intuito de explicitar características específicas.

1.1 Sinais discretos no tempo

Em PDS os sinais são representados por seqüências de números, chamados amostras. O valor de uma amostra de um típico sinal discreto ou seqüência no tempo é denominado $x[n]$, com o argumento n sendo um inteiro que varia entre $-\infty$ à ∞ . Devemos ressaltar que $x[n]$ é definido somente para valores inteiros de n e é indefinido para qualquer valor não inteiro de n [1].

Em algumas aplicações uma seqüência discreta no tempo é gerada pela amostragem periódica de um sinal contínuo no tempo. O espaçamento T entre duas amostras consecutivas é chamado de intervalo de amostragem ou período de amostragem.

Tipos de seqüências

Um sinal discreto no tempo pode ser classificado de diversas formas como, por exemplo, pelo número de amostras que definem uma seqüência, pela simetria das amostras com relação ao índice de tempo, por sua periodicidade, energia, somabilidade e potência.

- **Classificação por tamanho** - Uma seqüência pode possuir comprimento *finito* ou *infinito*. As seqüências de comprimento infinito podem ser *causal* quando os valores são definidos para valores de n maiores que zero e, *anti causal* para valores de n negativos.
- **Classificação baseada em simetria** - Uma seqüência pode ser *conjugada simétrica*, ou par, se $x[n] = x^*[-n]$. Uma seqüência *conjugada anti-simétrica* é chamada ímpar. Qualquer função pode ser expressa pela soma dos seus conjugados simétrico e anti-simétrico.
- **Classificação baseada em periodicidade** - A seqüência é periódica se satisfaz a seguinte equação $\tilde{x} = \tilde{x}[n + kN]$ para todo n , onde N corresponde ao período.
- **Outros tipos de classificação** - Uma seqüência é chamada *limitada* se todas suas amostras possuírem magnitude menor ou igual à um valor positivo B_x . Uma seqüência é chamada

absolutamente somável se a soma das amostras for um valor finito. Uma seqüência possui sua *energia* definida pela soma dos quadrados das amostras.

Algumas seqüências básicas

Alguns tipos de seqüências são importantes para a análise e design de sistemas discretos no tempo, estas são chamadas seqüências básicas. Uma seqüência arbitrária pode ser expressa em termos de seqüências básicas. Essa representação permite o cálculo da resposta de sistemas discretos no tempo a sinais discretos no tempo arbitrários, se o último for expresso em termos das seqüências básicas[2].

As seqüências básicas são definidas como:

- **Seqüência impulso unitário** - A amostra em $n = 0$ possui amplitude de valor 1 e as demais amostras são iguais a zero.
- **Seqüência degrau unitário** - As amostras em $n < 0$ são iguais a zero e para $n \geq 0$ elas são iguais a 1.
- **Seqüências exponenciais e senoidais** - As seqüências exponenciais são representadas por: $x[n] = A\alpha^n$, onde α pode ser um número real ou complexo ($\alpha = e^{(\sigma_0 + j\omega_0)}$). As seqüências senoidais são formadas pela soma de seqüências exponenciais complexas.

Um sistema discreto no tempo é completamente caracterizado no domínio do tempo pela sua resposta à aplicação da seqüência impulso unitário.

1.2 Operações com seqüências

Um sistema de entrada e saída simples opera em uma seqüência de entrada de acordo com certas regras e produz uma seqüência de saída. Um sistema discreto no tempo é construído de forma a remover a componente de ruído aditivo apresentado na entrada. Na maioria dos casos a operação que define um dado sistema discreto no tempo é composta por algumas operações básicas, descritas a seguir.

- **Operações básicas** - produto, adição, multiplicação por um escalar, reversão no tempo, atraso, interpolação e decimação.
- **Representação de uma seqüência arbitrária** - qualquer seqüência pode ser representada pelas operações básicas da soma, atraso e multiplicação por um escalar aplicadas a funções impulso unitário.

1.3 O processo de amostragem

Uma seqüência em tempo discreto é obtida pela amostragem uniforme de um sinal contínuo no tempo. A relação entre esses dois sinais é dada pela equação:

$$x[n] = x_a(t)_{t=nT}, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

onde a variável t do sinal contínuo está relacionada com a variável n do sinal discreto somente nos instantes discretos t_n dado por:

$$t_n = nT = \frac{n}{F_T} = \frac{2\pi n}{\Omega_T} \quad (2)$$

onde $F_T = 1/T$ e representa a frequência de amostragem e $\Omega_T = 2\pi F_T$ é denominada frequência angular.

Um sinal periódico contínuo no tempo deve ser amostrado com frequência superior a maior frequência existente no sinal para não gerar erros de amostragem no sinal discreto. Esses erros aparecem sobre a forma de frequências que não estavam presentes no sinal, chamadas de frequências de *aliasing*. Através do teorema de Nyquist podemos provar que a frequência de amostragem deve ser no mínimo maior que duas vezes a frequência do sinal.

1.4 Sistemas discretos no tempo

Sistema é qualquer entidade que interage com o meio ambiente, recebendo desde informações ou ações chamadas entradas ou excitações e reagindo sobre o meio ambiente devolvendo saídas ou respostas. A função de um sistema discreto no tempo é processar uma dada seqüência de entrada e gerar uma seqüência de saída. Na maioria das aplicações utilizamos sistemas de uma entrada e uma saída. A saída é gerada seqüencialmente, iniciando com um certo valor do índice de tempo n . Podemos citar alguns sistemas como, por exemplo, o acumulador, o *up-sampler*, o sistema de média móvel, entre outros[3].

Os sistemas discretos no tempo podem ser classificados da seguinte forma:

- Linearidade
- Invariância ao deslocamento
- Causalidade
- Estabilidade

1.5 Caracterização no domínio do tempo de sistemas LTI discretos

Na maioria dos casos sistemas LTI (lineares e invariantes no tempo) são compostos por interconexões simples de subsistemas. De modo a analisarmos sistemas no domínio do tempo, nós temos que desenvolver relações pertinentes entre suas entradas e saídas, bem como a caracterização da suas interconexões.

Relação entrada saída

As propriedades de linearidade e invariância no tempo mostram que um sistema LTI é completamente especificado pela sua resposta ao impulso, *i.e.*, com sua resposta ao impulso, podemos calcular a saída de um sistema para qualquer entrada arbitrária. A expressão que caracteriza a resposta do sistema discreto é chamada soma de convolução e é descrita pela fórmula:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (3)$$

onde $h[n]$ é a resposta ao impulso. A operação de soma de convolução é *comutativa*, *associativa* e *distributiva*.

Esquemas de interconexão simples

Os dois esquemas para desenvolvimento de sistemas LTI complexos são *conexões em cascata* e *conexões paralelas*. A resposta ao impulso de uma conexão em cascata é a convolução das respostas ao impulso independentes ($h[n] = h_1[n] \otimes h_2[n]$). A resposta ao impulso de uma conexão paralela é a soma das convoluções independentes ($h[n] = h_1[n] + h_2[n]$).

Condição de estabilidade para sistemas LTI

Um sistema é considerado estável se suas amostras na saída possuem magnitude finita para qualquer seqüência de valores finitos apresentada na entrada. A condição de estabilidade para sistemas LTI discretos no tempo é que a soma do valor absoluto da resposta ao impulso seja limitada.

Condição de causalidade

Um sistema LTI discreto no tempo é causal se e somente se sua seqüência de resposta ao impulso for igual a zero para índices de tempo negativo. O acumulador discreto no tempo é um exemplo de sistema causal.

Classificação de sistemas LTI discretos

Os sistemas LTI normalmente são classificados de acordo com comprimento e sua resposta ao impulso ou de acordo com o método utilizado para determinar as amostras de saída.

- **Classificação baseada no comprimento da resposta ao impulso** - Se a resposta ao impulso possuir comprimento finito dizemos que o sistema é FIR, resposta finita ao impulso. O sistema de médias móveis é um exemplo de sistemas FIR. Outra classificação é quando o comprimento da resposta ao impulso é infinito, sendo chamado de IIR, resposta ao impulso infinita. O acumulador é um sistema IIR.
- **Classificação baseada no processo de cálculo da saída** - Se a saída pode ser calculada seqüencialmente, sabendo somente as amostras passadas e a presente, dizemos que o sistema é *não recursivo*. Se por outro lado o cálculo das amostras de saída depender das saídas passadas, entradas passadas e entrada atual dizemos que o sistema é *recursivo*.
- **Classificação baseada em coeficientes** - O terceiro esquema de classificação está baseado na natureza real ou complexa da seqüência de resposta ao impulso. O sistema pode ser classificado como *sistema complexo em tempo discreto* ou *sistema real em tempo discreto*.

1.6 Representação de estados de sistemas LTI discretos no tempo

Uma alternativa de representação de sistemas causais LTI é dado pelas equações de estado. Elas podem ser obtidas pela redução da equação de N -ésima ordem para um sistema de N equações de primeira ordem. As equações de representação de estado de um sistema LTI são dadas pelo vetor de estados e pelas matrizes de transição de estados.

$$\mathbf{s}[n + 1] = \mathbf{A}\mathbf{s}[n] + \mathbf{B}x[n] \quad (4)$$

$$y[n] = \mathbf{C}\mathbf{s}[n] + \mathbf{D}x[n] \quad (5)$$

onde \mathbf{s} é o estado do sistema e \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} são matrizes de parâmetros de estado.

2 Representação de sinais no domínio da transformada

2.1 Análise de frequência de sinais contínuos no tempo

A transformada de Fourier é uma dentre muitas ferramentas matemáticas úteis na análise e projeto de sistemas LTI, outra ferramenta é a série de Fourier. Estas representações em sinais envolvem basicamente a decomposição de sinais em termos de componentes senoidais (ou exponenciais complexas). Com essa decomposição o sinal é dito como representado no domínio da frequência[4].

É bem conhecido que um prisma pode dividir a luz (luz do sol) nas cores do arco-íris. Isaac Newton utilizou o termo espectro para descrever bandas de cores contínuas. A análise freqüencial de um sinal envolve a resolução deste em termos de suas freqüências. Ao invés de luz, nossos sinais sob formas de onda são funções do tempo. A recombinação de componentes senoidais para reconstruir o sinal original é basicamente o problema de síntese de Fourier. O problema de análise do sinal é basicamente o mesmo do caso da decomposição da luz no prisma.

A série de Fourier de sinais contínuos no tempo

Nesta seção apresentaremos a ferramenta de análise em frequência para sinais contínuos no tempo e periódicos. Exemplos de sinais periódicos encontrados na prática são: ondas quadradas, retangulares, triangulares e senóides e exponenciais complexas. A representação matemática básica de sinais periódicos é a série de Fourier, *i.e.*, é a soma ponderada de senoidais ou exponenciais complexas harmonicamente relacionadas.

A combinação linear de exponenciais complexas é dada por:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t} \quad (6)$$

que é um sinal periódico com período $T_p = 1/F_0$. Portanto podemos pensar em sinais exponenciais como blocos básicos com os quais podemos construir sinais periódicos de vários tipos, bastando somente escolher a frequência fundamental e os coeficientes c_k .

Um ponto importante que podemos levantar é a convergência da série para qualquer valor de t . As condições de Dirichlet garantem a convergência no valor médio. As condições são:

- O sinal $x(t)$ possui um número finito de descontinuidades em qualquer período.
- O sinal $x(t)$ contém um número finito de máximos e mínimos durante qualquer período.
- O sinal $x(t)$ é absolutamente somável em qualquer período.

$$\int_T |x(t)| dt < \infty \quad (7)$$

Todos os sinais periódicos práticos satisfazem essas condições. A condição mais fraca é que o sinal tenha energia finita em um período, isto é,

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty. \quad (8)$$

Note que a equação 7 implica em 8, mas não vice-versa. Tanto a equação 8 quanto a de Dirichlet formam condições suficientes mas não necessárias, i.e., existem sinais que possuem representação em série de Fourier mas não satisfazem estas condições.

Em resumo, se $x(t)$ é um sinal periódico que satisfaz as condições de Dirichlet, ele pode ser representado por série de Fourier, as relações importantes da série estão resumidas abaixo.

Equação de síntese

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t} dt \quad (9)$$

Equação de análise

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt \quad (10)$$

A transformada de Fourier de sinais aperiódicos no tempo contínuo

Consideremos um sinal aperiódico $x_p(t)$ com período T_p . Certamente, $x_p(t) = x(t)$ no limite $T_p \rightarrow \infty$. A transformada de Fourier é expressa pelas seguintes equações:

Transformada Direta:

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi F t} dt \quad (11)$$

Transformada inversa:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi F t} dF \quad (12)$$

As condições *condições Dirichlet* garantem a transformada de Fourier

2.2 Transformada de Fourier - Representação de Fourier em sinais

Transformada de Fourier em tempo discreto

A transformada de Fourier em tempo discreto (DTFT), ou simplesmente, a transformada de Fourier de uma seqüência no tempo discreto $x[n]$, é a representação da seqüência em termos de exponenciais complexas $\{e^{-j\omega n}\}$ onde ω é a freqüência real. A representação em DTFT de uma seqüência, se existir, é única e a seqüência original pode calculada pela sua DTFT e pela operação de transformação inversa. Nós descobriremos a condição para a sua existência e iremos fazer um resumo das propriedades importantes.

Definição: A transformada de Fourier discreta no tempo $X(e^{j\omega})$ de uma seqüência $x[n]$ é definida por

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}, \quad (13)$$

Em geral $X(e^{j\omega})$ é uma função complexa da variável real ω e pode ser escrita como

$$X(e^{j\omega}) = X_{re}(e^{j\omega}) + jX_{im}(e^{j\omega}), \quad (14)$$

onde $X_{re}(e^{j\omega})$ e $X_{im}(e^{j\omega})$ são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de $X(e^{j\omega})$. A transformada $X(e^{j\omega})$ pode ser expressa da seguinte forma alternativa:

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{-j\theta(\omega)}, \quad (15)$$

onde

$$\theta(\omega) = \arg\{X(e^{j\omega})\} \quad (16)$$

A função magnitude é representada por $|X(e^{j\omega})|$ e a função de fase é representada por $\theta(\omega)$. Em muitas aplicações, a transformada de Fourier é chamada espectro de Fourier e as funções $|X(e^{j\omega})|$ e $\theta(\omega)$ são referenciadas como *espectro de magnitude* e *espectro de fase*, respectivamente. O complexo conjugado de $X(e^{j\omega})$ é representado por $X^*(e^{j\omega})$.

Note pela equação 15 que se nós substituirmos $\theta(\omega)$ por $\theta(\omega) + 2\pi k$, onde k é um número inteiro, $X(e^{j\omega})$ permanece o mesmo, significando que a função fase não pode ser unicamente especificada para qualquer transformada de Fourier. Desta forma, iremos assumir que a função fase $\theta(\omega)$ é restringida pela seguinte faixa de valores:

$$-\pi \leq \theta(\omega) < \pi$$

chamada de valor principal. Algumas seqüências possuem descontinuidades em 2π na resposta de fase da transformada de Fourier. Nestes casos, é comum considerar um tipo alternativo de função da fase onde a descontinuidade é removida em 2π . O processo de remoção das descontinuidades é chamado “*unwrapping the phase*” e a nova função fase $\theta_c(\omega)$ indica uma função contínua em ω .

Devemos ressaltar que para a maioria das seqüências discretas no tempo suas DFTs podem ser expressas em termos da soma de séries geométricas convergentes.

Em resumo, podemos verificar pela definição que a transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ da seqüência $x[n]$ é uma função contínua em ω e é também uma função periódica em ω com período de 2π . Como resultado, os coeficientes de Fourier $x[n]$ podem ser calculados a partir de $X(e^{j\omega})$ utilizando a integral de Fourier dada por:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\Omega n} d\omega \quad (17)$$

chamada de *transformada inversa de Fourier de tempo discreto*. As equações 13 e 17 constituem o par Transformada de Fourier de tempo discreto (DTFT) da seqüência $x[n]$.

Condição de convergência: Se uma seqüência $x[n]$ for absolutamente somável, *i.e.*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty, \quad (18)$$

a série da equação 13 converge uniformemente para uma função contínua de ω . Desta forma a equação 18 garante que

$$|X(e^{j\omega})| < \infty \quad \forall \omega \quad (19)$$

e é a condição suficiente para a existência da transformada de Fourier.

Uma seqüência absolutamente somável

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \right)^2 \quad (20)$$

sempre possui energia finita. No entanto, uma seqüência de energia finita não necessariamente é absolutamente somável, a seqüência abaixo representa um exemplo.

$$x_1[n] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, & n \geq 1, \\ 0, & n \leq 0 \end{cases} \quad (21)$$

Tipo de propriedade	seqüência tamanho N	DFT N pontos
	$g[n]$	$G(e^{j\omega})$
	$h[n]$	$H(e^{j\omega})$
Linearidade	$\alpha g[n] + \beta h[n]$	$\alpha G(e^{j\omega}) + \beta H(e^{j\omega})$
Deslocamento no tempo	$g[n - n_0]$	$e^{-jn_0} G(e^{j\omega})$
Deslocamento na freqüência	$e^{j\omega_0 n} g[n]$	$G(e^{j(\omega - \omega_0)})$
Diferenciação na freqüência	$ng[n]$	$j \frac{dG(e^{j\omega})}{d\omega}$
Convolução	$g[n] \otimes h[n]$	$G(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$
Modulação	$g[n] h[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\theta}) H^*(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$

Tabela 1: Propriedades da DTFT

De modo a representar estas seqüências pela transformada de Fourier, é conveniente considerar a convergência de séries infinitas no sentido médio quadrático. Considerando

$$X_K(e^{j\omega}) = \sum_{n=-K}^K x[n] e^{-jn\omega}, \quad (22)$$

temos a convergência média quadrática de $X(e^{j\omega})$, e o erro de energia deve aproximar a zero para cada valor de ω quando K tende a infinito, *i.e.*,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega}) - X_K(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0. \quad (23)$$

Note que uma seqüência degrau unitário não é nem absolutamente somável e nem possui seu quadrado absolutamente somável. Para este tipo de seqüência a representação em Transformada de Fourier é possível utilizando funções delta Dirac. A função delta Dirac ou $\delta(\omega)$ é uma função de ω com altura infinita e largura igual a zero, possuindo área unitária.

Propriedades:

Existem várias propriedades importantes da transformada de Fourier discreta no tempo que são úteis em aplicações de processamento de sinais. As propriedades gerais da transformada de Fourier estão indicadas na tabela 2.2

Transformada discreta de Fourier (DFT)

No caso de seqüências com comprimento finito $x[n]$, $0 \leq n \leq N - 1$, existe uma relação simples entre a seqüência e sua transformada de Fourier discreta no tempo $X(e^{j\omega})$. De fato, para uma seqüência de comprimento N , somente N valores de $X(e^{j\omega})$, chamados de *amostras em freqüência*, em N pontos de freqüência distintos, são suficientes para determinar $x[n]$ e, portanto, $X(e^{j\omega})$ é único. Isto leva ao conceito de transformada de Fourier discreta, uma segunda representação do domínio de transformação que é aplicado somente a uma seqüência de comprimento finito.

Definição: A relação mais simples entre uma seqüência $x[n]$, definida em $0 \leq n \leq N - 1$, de comprimento finito e sua DTFT $X(e^{j\omega})$ é obtida pela amostragem uniforme de $X(e^{j\omega})$ no eixo ω

Tipo de propriedade	seqüência tamanho N	DFT N pontos
	$g[n]$	$G(e^{j\omega})$
	$h[n]$	$H(e^{j\omega})$
Linearidade	$\alpha g[n] + \beta h[n]$	$\alpha G[k] + \beta H[k]$
Deslocamento circular no tempo	$g[(n - n_0)_N]$	$W_N^{kn_0} G[k]$
Deslocamento circular na freqüência	$W_N^{-k_0 n} g[n]$	$G[\langle k - k_0 \rangle_N]$
Dualidade	$G[n]$	$N[g \langle -k \rangle_N]$
Convolução circular N pontos	$\sum_{m=0}^{N-1} g[m]h[\langle n - m \rangle_N]$	$G[k]H[k]$
Modulação	$g[n]h[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} G[m]H[\langle k - m \rangle_N] \theta$

Tabela 2: Propriedades da DFT

entre $0 \leq \omega \leq 2\pi$ em $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Pela equação 13 temos,

$$X[k] = X(e^{j\omega}) |_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (24)$$

Note que $X[k]$ é uma seqüência de comprimento finito, N , no domínio da freqüência. A seqüência $X[k]$ é chamada de transformada discreta de Fourier (DFT) da seqüência $x[n]$. Utilizando uma notação mais comum,

$$W_N = e^{-j2\pi/N}, \quad (25)$$

podemos reescrever a equação 24 como

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (26)$$

A transformada discreta inversa de Fourier (IDFT) é dada por,

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (27)$$

Podemos observar pelas equações 24 e 27 que são necessárias aproximadamente N^2 multiplicações complexas e $N(N-1)$ adições complexas para o cálculo das transformadas DFT e IDFT. No entanto, métodos mais elegantes desenvolvidos reduzem para $N(\log_2 N)$ operações. Estas técnicas são normalmente chamadas de *Fast Fourier Transform* (FFT).

Propriedades da DFT:

Assim como a DTFT, a DFT também satisfaz um número de propriedades que são úteis em aplicações de processamento de sinais. Algumas propriedades são exatamente iguais as da DTFT, enquanto outras são ligeiramente diferentes. A tabela 2.2 contém um resumo das propriedades gerais da DFT.

• Deslocamento circular de uma seqüência

Esta propriedade é análoga a propriedade de deslocamento no tempo da DTFT, mas com uma diferença sutil. Vamos considerar seqüências de comprimento N para $0 \leq n \leq N-1$. Estas

seqüências possuem amostras de valor zero para $n < 0$ e $n \geq N$. Se $x[n]$ é uma seqüência dessas então, para qualquer n_0 , a seqüência deslocada $x_1[n] = x[n - n_0]$ não é mais definida pela faixa $0 \leq n \leq N - 1$. Desta forma, precisamos definir outro tipo de deslocamento que irá sempre manter a seqüência deslocada na faixa $0 \leq n \leq N - 1$. Isto é conseguido pelo deslocamento circular

$$x_c[n] = x[\langle n - n_0 \rangle_N] \quad (28)$$

- **Convolução circular**

Esta propriedade é análoga a convolução linear, com uma diferença sutil. Para desenvolver um tipo de convolução em que a seqüência resultante obtivesse o mesmo tamanho da entrada, precisamos definir uma reversão circular e depois aplicar o deslocamento circular. A operação resultante é chamada de convolução circular e possui é descrita por

$$y_c[n] = \sum_{m=0}^{N-1} g[m]h[\langle n - m \rangle_N] \quad (29)$$

Convolução linear utilizando DFT: é a operação chave na maioria das aplicações de processamento de sinais. Como uma DFT de N pontos pode ser implementada de maneira bastante eficiente utilizando aproximadamente $N(\log_2(N))$ operações aritméticas, é interessante investigar métodos de implementação da convolução linear utilizando DFTs. Basicamente duas formas de utilização são aplicadas, que são:

- Convolução linear de duas seqüências de comprimento finito
- Convolução linear entre uma seqüência de comprimento finito e outra de comprimento infinito

Para a segunda forma de aplicação dois métodos podem ser utilizados. Estes são chamados de **método de superposição e soma** (overlap-add method) e **método de superposição e armazenamento** (overlap-save method).

2.3 A transformada Z

A transformada de Fourier fornece uma representação no domínio da freqüência de sinais discretos no tempo e sistemas LTI. No entanto, devido a condição de convergência, em muitos casos, a transformada de Fourier de uma seqüência pode não existir e, como resultado, não é possível fazer o uso de sua caracterização no domínio da freqüência. A generalização da transformada de Fourier definida pela equação 13 nos conduz a transformada Z, a qual pode existir para muitas seqüências nas quais a transformada de Fourier não existe. Além disso, a técnica de transformada Z possui manipulações algébricas simples. Conseqüentemente, a transformada Z se tornou uma ferramenta importante para a análise e projeto de filtros digitais.

Para uma dada seqüência $g[n]$, sua transformada Z $G(z)$ é definida por

$$G(z) = Z\{g[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]z^{-n}, \quad (30)$$

onde z é uma variável complexa. Se $z = re^{j\omega}$, então podemos reescrever o lado direito da equação

acima como

$$G(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]r^{-n}e^{-j\omega n}, \quad (31)$$

que pode ser interpretada como a transformada de Fourier da seqüência $\{g[n]r^{-n}\}$. Para $r = 1$ (i.e., $|z| = 1$), a transformada Z de $g[n]$ se reduz a sua transformada de Fourier. O contorno de $|z| = 1$ é um círculo no plano Z de raio 1, chamado de círculo unitário.

Como na transformada de Fourier, existem condições de convergência para as infinitas séries da equação 30. Para uma dada seqüência, o conjunto \mathcal{R} de valores de z para o qual sua transformada Z converge é chamado de *região de convergência* (ROC). Assim como na transformada de Fourier, as séries da equação 31 converge se $g[n]r^{-n}$ for absolutamente somável, i.e.,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |g[n]r^{-n}| < \infty \quad (32)$$

Em geral a região de convergência \mathcal{R} da transformada Z de uma seqüência $g[n]$ é uma região anular no plano Z :

$$R_{g-} < |z| < R_{g+} \quad (33)$$

onde $0 \leq R_{g-} < R_{g+} \leq \infty$. Isso implica que a transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ da seqüência $x[n]$ converge uniformemente se e somente se a ROC da transformada Z $X(z)$ da seqüência incluir o círculo unitário.

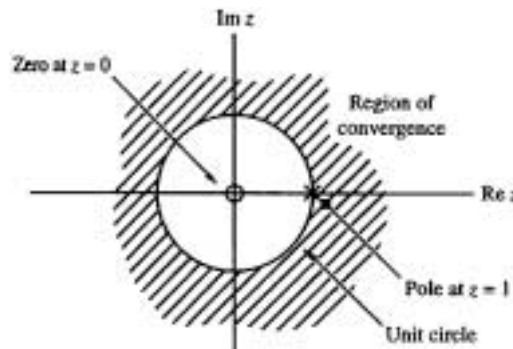
Região de convergência da Transformada Z racional

A ROC da transformada Z é importante por várias razões. Como veremos a seguir, sem o conhecimento da ROC não há como especificar uma relação única entre a seqüência a sua transformada Z . Desta forma, a transformada Z deve ser sempre especificada com sua ROC. Além disso, se a ROC da transformada Z incluir o círculo unitário, a transformada de Fourier da seqüência é obtida pela simples apreciação da transformada Z no círculo unitário.

A ROC da transformada Z racional é limitada pela localização de seus pólos. Para entendermos melhor a relação existente entre os pólos e a ROC, é instrutivo examinarmos o gráfico de pólos e zeros da transformada Z . A figura 2.3 apresenta o gráfico de pólos e zeros da função

$$\mu(z) = \frac{z}{z-1} \text{ para } |z| > 1, \quad (34)$$

onde a localização do pólo é indicada por uma cruz “ \times ” e a localização do zero é indicada por um círculo “ \circ ”.



Na figura a ROC é ilustrada de forma hachurada na região do plano Z exterior ao círculo centrado na origem e indo até o pólo $z = 1$, e se estendendo ao infinito.

Para uma seqüência racional da transformada Z, a ROC da transformada Z não pode conter nenhum pólo e é limitada por ele. De forma a mostrar que ela é limitada pelos pólos, assumamos que a transformada Z $X(z)$ possui pólos simples em α e β , com $|\alpha| < |\beta|$. Se assumirmos também que a seqüência é lateral direita (*right-sided*), então ela possui a forma

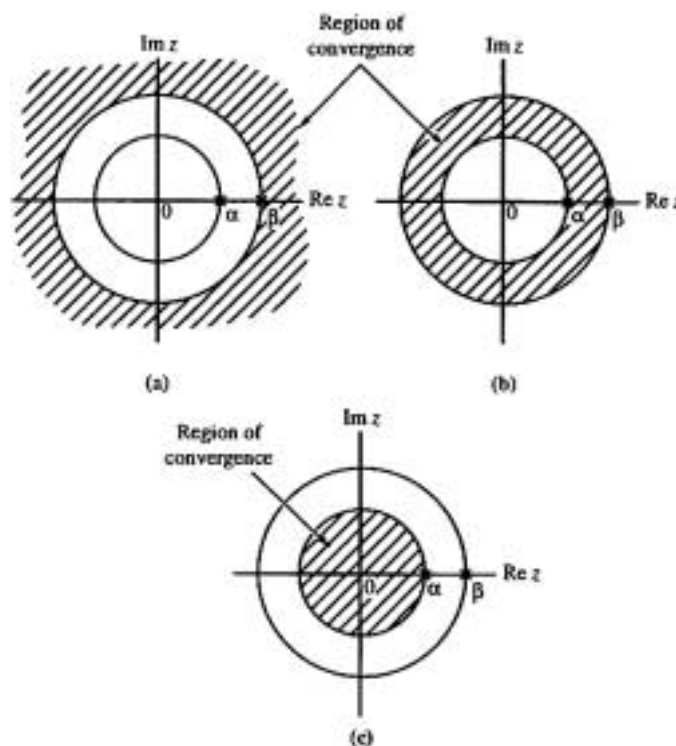
$$x[n] = (r_1(\alpha)^n + r_2(\beta)^n)\mu[n - N_0] \quad (35)$$

onde N_0 é um inteiro positivo ou negativo. A transformada Z de seqüências laterais direitas existe se

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |(\gamma)^n z^{-n}| < \infty \quad (36)$$

para algum z . Podemos verificar que a condição é satisfeita quando $|z| > |\gamma|$, mas não para $|z| \leq |\gamma|$. A seqüência lateral direita e portanto sua ROC é definida por $|\beta| < |z| \leq \infty$. Um desenvolvimento similar mostra que se $X(z)$ é a transformada Z de uma seqüência lateral esquerda, com $\mu[n - N_0]$ substituído por $\mu[-n - N_0]$ então sua ROC é definida por $0 \leq |z| \leq |\alpha|$. Finalmente, para uma seqüência de duas laterais (*two-sided*), alguns pólos contribuem com termos para $n < 0$ e outros com termos para $n \geq 0$. A ROC é portanto limitada exteriormente pelo pólo com menor magnitude que contribui com $n < 0$ e internamente com o pólo com maior magnitude que contribui para $n \geq 0$.

A figura abaixo apresenta as três ROC possíveis para transformadas Z racionais com pólos em $z = \alpha$ e $z = \beta$ e com cada ROC associada a uma seqüência única.



2.4 A Transformada Z inversa

Expressão geral: De acordo com a relação de transformada inversa de Fourier temos

$$g[n]r^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(re^{j\omega})e^{j\omega}d\omega \quad (37)$$

Substituindo $z = re^{j\omega}$ e após algumas manipulações numéricas, podemos reescrever a equação acima como

$$g[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} G(z)z^{n-1}dz \quad (38)$$

onde C' é o contorno no sentido anti-horário da integração definida por $|z| = r$.

A expressão acima pode ser calculada de várias maneiras, como por exemplo:

- Transformada inversa por expansão em frações parciais
- Transformada inversa por divisão longa

2.5 Propriedades da transformada Z

As propriedades da transformada Z são:

- Conjugação
- Reversão no tempo
- Linearidade
- Deslocamento no tempo
- Multiplicação por uma seqüência exponencial
- Diferenciação de $G(z)$
- Convolução
- Modulação

A compreensão destas propriedades faz com que a aplicação das técnicas de transformada Z na análise e projeto de filtros digitais se torne mais simples.

3 Representação de Sistemas LTI no domínio da transformada

Sistemas discretos, lineares e invariantes no tempo (LTI) são caracterizados completamente no domínio do tempo pela sua seqüência de resposta ao impulso $h[n]$. Como resultado, a representação no domínio da transformada de um sinal discreto no tempo pode ser igualmente aplicada a representação da transformada de um sistema LTI discreto no tempo. Tal representação no domínio da transformada fornece uma visão adicional na característica de tais sistemas e também torna mais fácil seu projeto e implementação em aplicações específicas.

3.1 A resposta em frequência

A maioria dos sinais discretos no tempo, encontrados na prática, podem ser representados como uma combinação linear de um grande número, talvez infinito, de sinais senoidais discretos e com diferentes frequências angulares. Portanto, sabendo a resposta de um sistema LTI de um único sinal senoidal, podemos determinar sua resposta a sinais mais complicados, fazendo o uso da propriedade de superposição de sistemas. Como um sinal senoidal pode ser expresso em termos de sinais exponenciais, a resposta do sistema LTI a uma entrada exponencial é de interesse prático. Isso nos leva ao conceito de resposta em frequência, uma representação de sistemas LTI discretos no tempo no domínio da transformada.

Definição

A relação entrada-saída de um sistema LTI discreto no tempo com resposta ao impulso $h[n]$ é dada pela soma de convolução

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (39)$$

onde $y[n]$ e $x[n]$ são, respectivamente, a saída e entrada do sistema. Se a entrada $x[n]$ for uma exponencial da forma

$$x[n] = e^{j\omega n} \quad -\infty < n < \infty \quad (40)$$

que pode ser reescrita como

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \quad (41)$$

onde temos a notação

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \quad (42)$$

A quantidade $H(e^{j\omega})$ definida acima é chamada *resposta em frequência* de um sistema LTI discreto e isso fornece uma descrição no domínio de frequência do sistema. Note pela equação 42 que $H(e^{j\omega})$ é exatamente a transformada de Fourier discreta no tempo (DTFT) da resposta ao impulso $h[n]$ do sistema.

A equação 41 mostra que para uma seqüência senoidal de entrada $x[n]$ com frequência angular ω como na equação 40, a saída $y[n]$ também é uma seqüência senoidal complexa da mesma frequência angular mas ponderada pela amplitude complexa $H(e^{j\omega})$ que é uma função da frequência de entrada ω e dos coeficientes $h[n]$ da resposta ao impulso do sistema.

Assim como na transformada em tempo discreto de Fourier, em geral, $H(e^{j\omega})$ é também uma função complexa de ω com período 2π e pode ser expressa em termos de sua parte real e imaginária ou sua magnitude e fase. A quantidade $|H(e^{j\omega})|$ é chamada resposta em magnitude e a quantidade $\theta(\omega)$ é chamada resposta em fase de um sistema LTI discreto no tempo. A especificação de projetos de sistemas em tempo discreto, em muitas aplicações, são dados os termos da resposta em magnitude ou resposta em fase ou ambas.

Outro parâmetro comumente utilizado na caracterização de um filtro digital no domínio da frequência é a função de atraso em grupo, que fornece a medida de linearidade da função fase. Se nós indicarmos a função $\theta_c(\omega)$, então o atraso de grupo é definido como:

$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta_c(\omega)}{d\omega}. \quad (43)$$

Se a função fase for em radianos o atraso de grupo é em segundos.

Resposta em estado estacionário

Note que a resposta em frequência também determina a resposta em estado estacionário de um sistema LTI discreto no tempo de uma entrada senoidal.

O conceito de filtragem

Uma aplicação de um sistema LTI discreto no tempo é passar certas componentes de frequência da seqüência de entrada sem que haja distorção (se possível) e bloquear outras componentes de frequência. Tais sistemas são chamados *filtros digitais*. A chave para o processo de filtragem é a transformada inversa de Fourier em tempo discreto que representa uma seqüência arbitrária de entrada como uma soma linear ponderada de um número infinito de seqüências exponenciais, ou equivalentemente, como uma soma linear ponderada de seqüências senoidais. Como resultado, escolhendo apropriadamente os valores da função de magnitude de um filtro digital LTI nas frequências correspondentes as frequências correspondentes as componentes senoidais de entrada, algumas dessas seqüências senoidais podem ser bastante atenuadas ou filtradas com relação as outras.

Caracterização da resposta no domínio da frequência de sistemas em tempo discreto LTI

Se $Y(e^{j\omega})$ e $X(e^{j\omega})$ representam as DTFTs as seqüências de entrada e saída $x[n]$ e $y[n]$, respectivamente, então a resposta em frequência de um sistema LTI é

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \quad (44)$$

3.2 A função de transferência

A generalização da função de resposta em frequência $H(e^{j\omega})$ nos leva ao conceito de função de transferência. Como vimos anteriormente, a função de resposta em frequência fornece informação da característica de um filtro digital LTI no domínio da frequência. No entanto, o fato de ser uma função complexa da variável de frequência ω , sua manipulação é difícil para a realização do filtro digital. Por outro lado, a transformada Z da resposta ao impulso de um sistema LTI, chamada função de transferência, é um polinômio em z^{-1} , e para um sistema com resposta ao impulso real, ela é um polinômio com coeficientes reais. Na maioria dos casos práticos, o filtro digital LTI de interesse é caracterizado pela equação a diferenças linear com coeficientes constantes e reais. A função de transferência de tal filtro é uma função racional real da variável z^{-1} , i.e., a razão entre dois polinômios em z^{-1} com coeficientes reais, e portanto mais simples para síntese.

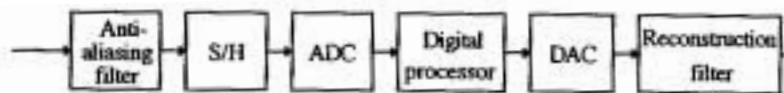
Condição de estabilidade

Antes de um filtro digital se implementado temos que ter certeza que a função de transferência irá proporcionar uma estrutura estável. A condição para que um filtro digital seja estável é que sua seqüência de resposta ao impulso seja absolutamente somável. Um filtro digital FIR com coeficientes da resposta ao impulso limitados é sempre estável. Por outro lado, um filtro IIR pode ser instável se não projetado corretamente.

4 Processamento digital de sinais no tempo contínuo

Muitos sinais encontrados na natureza são analógicos como, por exemplo, sinais de música, voz e imagens. Os algoritmos de processamento digital de sinais, discreto no tempo, estão sendo empregados de forma crescente em sistemas digitais ou analógicos em tempo discreto. Para o processamento digital de sistemas, os sinais em tempo discreto são representados sob a forma digital na qual cada amostra em tempo discreto é uma palavra binária. Desta forma, necessitamos de circuitos de interface analógico-digital e digital-analógico para convertermos sinais contínuos no tempo em sinais digitais discretos no tempo, e vice-versa. Como resultado, é necessário desenvolver relações no domínio do tempo e no da frequência entre sinais contínuos no tempo e seus equivalentes discretos no tempo.

O circuito de interface que realiza a conversão de sinais contínuos no tempo em sua forma digital é chamado **conversor analógico-digital (A/D)**. Da mesma forma, a operação inversa de conversão de um sinal digital em sinais contínuos no tempo é implementada pela interface de circuito chamada **conversor digital-analógico (D/A)**. Em complementação a estes dois circuitos são necessários outros adicionais. Uma vez que a conversão analógico-digital normalmente leva um tempo finito de execução, é necessário assegurarmos que o sinal analógico na entrada do conversor A/D permaneça constante em amplitude até que a conversão seja completa minimizando, desta forma, o erro de sua representação. Isso é conseguido por um dispositivo chamado “*sample-and-hold*”, que possui duplo propósito. Ele não somente amostra a entrada analógica com intervalos periódicos, como também segura o valor a ser digitalizado num tempo suficiente para o conversor A/D realizar a conversão. Em adição, a saída do conversor D/A é uma forma de onda tipo escada. É portanto necessário suavizar a saída do conversor D/A pela utilização do **filtro analógico de reconstrução**. E finalmente, na maioria das aplicações, o sinal contínuo no tempo a ser processado normalmente possui uma largura de banda maior que a largura de banda dos processadores discretos no tempo disponíveis. De forma a prevenir o efeito nocivo chamado “*aliasing*”, filtros analógicos de “*anti-aliasing*” são normalmente posicionados antes do circuito “*sample-and-hold*” (S/H). O diagrama completo apresentado na figura abaixo ilustra o processamento de sinais contínuos no tempo.



4.1 Amostragem de sinais no tempo contínuo

Existe, em geral, uma infinidade de sinais contínuos no tempo que, quando amostrados, apresentam o mesmo sinal discreto no tempo. No entanto, sob algumas condições, é possível obtermos um sinal original contínuo no tempo singular para uma determinada seqüência no tempo discreto, e é possível recuperarmos o sinal original contínuo no tempo através dos valores amostrados. Nós desenvolvemos esta correspondência e as condições associadas em seguida através da relação entre o espectro do sinal original no tempo contínuo e o espectro do sinal discreto no tempo.

Efeitos da amostragem no domínio da frequência

Seja $g_a(t)$ um sinal limitado em banda com $G_a(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| > \Omega_m$. Desta forma $g_a(t)$ é unicamente determinado por suas amostras $g_a(nT) = 0, 1, 2, 3, \dots$, se

$$\Omega_T \geq 2\Omega_m, \tag{45}$$

onde

$$\Omega_T = 2\pi/T. \tag{46}$$

Dado $\{g_a(nT)\}$, podemos recuperar exatamente $g_a(t)$ gerando um trem de impulsos $g_p(t)$

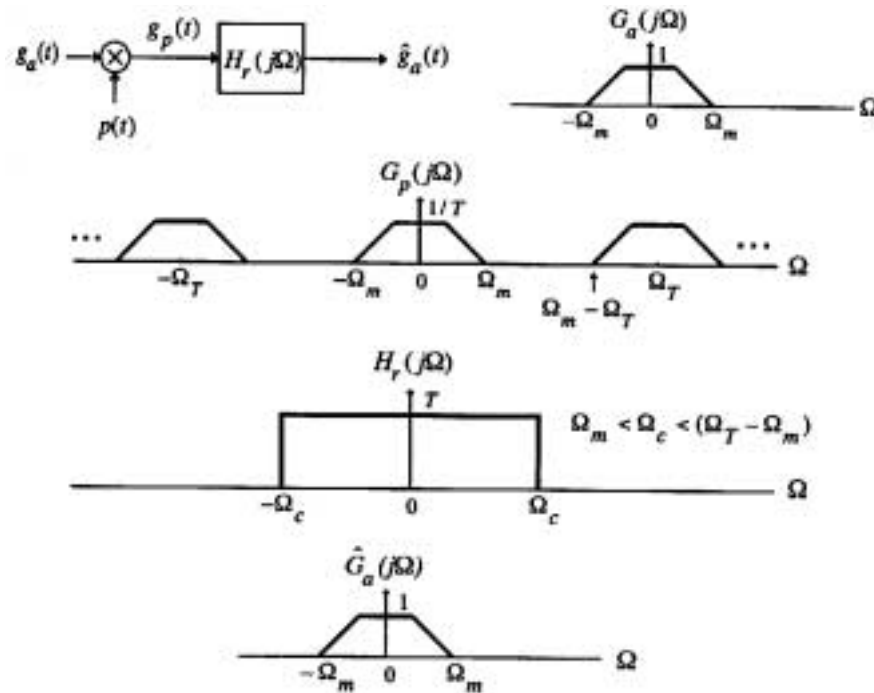
$$g_p(t) = g_a(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_a(nT)\delta(t - nT) \tag{47}$$

e depois passando $g_p(t)$ por um filtro ideal passa baixa $H_r(j\Omega)$ com ganho T e frequência de corte Ω_c maior que Ω_m e menor que $\Omega_T - \Omega_m$, i.e.,

$$\Omega_m < \Omega_c < (\Omega_T - \Omega_m) \tag{48}$$

A maior frequência Ω_m contida em $g_a(t)$ é normalmente chamada de **freqüência de Nyquist** uma vez que este determina a menor frequência de amostragem $\Omega_T = 2\Omega_m$ que deve ser utilizada para recuperar completamente o sinal $g_a(t)$ a partir da sua versão amostrada. A frequência $2\Omega_m$ é chamada **taxa de Nyquist**.

Se a taxa de amostragem for maior que a taxa de Nyquist, chamamos de **sobre-amostragem** (“oversampling”). Por outro lado, se a taxa de amostragem for menor que a taxa de Nyquist, chamamos de **desubamostragem** (“undersampling”). Finalmente, se a taxa de amostragem for exatamente igual a taxa de Nyquist, chamamos de amostragem crítica.



Recuperação de um sinal analógico

A recuperação do sinal original ocorre através da utilização de um filtro digital passa-baixa no sinal $g_p(t)$. O sinal reconstruído $\hat{g}_a(t)$ é obtido pela convolução entre a resposta ao impulso do filtro de reconstrução $h_r(t)$ e o sinal $g_p(t)$. Devemos ressaltar que um filtro passa baixas ideal é não causal e, portanto não realizável. Um filtro analógico passa baixas é também necessário para limitar o sinal contínuo em banda antes deste ser amostrado, assegurando que as condições de amostragem serão satisfeitas. A resposta em magnitude dos filtros anti-aliasing e de reconstrução devem ser modificadas para torná-los realizáveis.

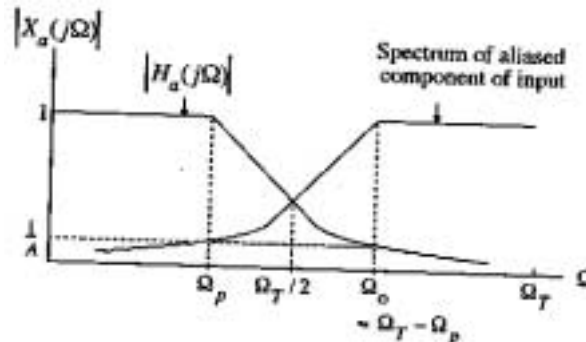
4.2 Projeto de filtros “*anti-aliasing*”

De acordo com o teorema da amostragem, um sinal contínuo no tempo e limitado em banda pode ser totalmente recuperado desde que a frequência de amostragem seja no mínimo duas vezes maior que a maior frequência contida no sinal. Caso esta condição não seja satisfeita o sinal recuperado possuirá distorções chamadas “*aliasing*”. Na prática o sinal de entrada $g_a(t)$ passa por um filtro analógico de “*anti-aliasing*” antes de ser amostrado. Este filtro analógico é o primeiro circuito da interface entre os domínios contínuo e discreto no tempo.

Idealmente o filtro de “*anti-aliasing*” $H_a(s)$ deve ser um filtro passa baixa

$$H_a(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_T/2, \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_T/2 \end{cases} \quad (49)$$

No entanto, este tipo de filtro analógico não pode ser implementado na prática e, desta forma, são feitas aproximações. Na prática um filtro de “*anti-aliasing*” deve ter resposta em magnitude aproximadamente unitária na banda de passagem, a resposta em magnitude da banda de rejeição deve ter exceder um mínimo de nível de atenuação, e uma banda de transição aceitável separando a banda de passagem e a banda de rejeição, como ilustra a figura abaixo.



Onde Ω_p é o limite da frequência de passa banda, Ω_s é a frequência limite da rejeição de banda e Ω_T é a frequência de amostragem que deve satisfazer a condição

$$\Omega_p < \Omega_s \leq \frac{\Omega_T}{2} \quad (50)$$

A frequência de passa banda Ω_p é determinada pela maior frequência do sinal contínuo no tempo $g_a(t)$ que deve ser totalmente preservada na versão amostrada. Como frequências do sinal maiores que a frequência de amostragem $\Omega_T/2$ aparecerão como frequências menores que $\Omega_T/2$ devido ao “*aliasing*”, o nível de atenuação do filtro de “*anti-aliasing*” em frequências superiores a $\Omega_T/2$ é determinado pela

quantidade de “*aliasing*” que pode ser tolerada pelo filtro passa banda. A distorção máxima de “*aliasing*” são originadas pelas componentes do sinal na região do espectro de entrada adjacente a banda passante. Pela figura acima vemos que a frequência $\Omega_0 = \Omega_T - \Omega_p$ é distorcida na frequência Ω_p , e isto é aceitável se a quantidade do espectro sobreposto em Ω_p for $a + p = -20 \log_{10}(1/A)$ então o mínimo de atenuação do filtro de “*anti-aliasing*” em Ω_0 deve ser também a_p .

Na prática a frequência de amostragem escolhida é dependente da aplicação. Em aplicações que requerem um mínimo de “*aliasing*”, a taxa de amostragem é tipicamente escolhida para ser de 3 a 4 vezes o limite de passa-banda Ω_p do filtro de “*anti-aliasing*” analógico. Em aplicações menos críticas, a taxa de amostragem é duas vezes o limite do passa-banda Ω_p .

4.3 Conversor analógico digital

Em processamento digital de sinais a saída de um conversor analógico-digital é um código binário. A saída do conversor é uma seqüência de palavras onde cada uma representa uma amostra da seqüência de entrada. O tamanho da palavra de um conversor A/D é dado em número de bits, o que limita a faixa dinâmica e a precisão do conversor em representar uma amostra de sua entrada. A precisão do conversor em um conversor A/D ideal é expressa em termos de resolução, que é determinada pelo número de níveis discreto que podem ser assumidos na saída do conversor A/D. Para uma saída binária de comprimento de palavra igual a N -bits, o número de níveis discretos disponíveis é de 2^N e, como resultado, a resolução ou precisão é de 1 parte sobre 2^N ou $100/2^N$ %.

Existem vários conversores A/D que são utilizados em aplicações de processamento de sinais. Nestes conversores, o comparador analógico é um componente importante do circuito pois possui a função de comparar duas voltagens analógicas em sua entrada e desenvolver uma saída binária indicando qual nível de entrada é o mais alto.

Os tipos mais comuns de conversores A/D são:

- Conversores A/D flash
- Conversores A/D serial-paralelo
- Conversores A/D por aproximações sucessivas
- Conversores A/D contadores
- Conversores A/D sobreamostragem (“*oversampling*”)

Características práticas de um conversor A/D

O erro introduzido por um conversor A/D ideal é simplesmente a diferença entre o valor da entrada analógica e seu valor equivalente na representação digital, chamado de *erro de quantização*, ilustrado na figura abaixo

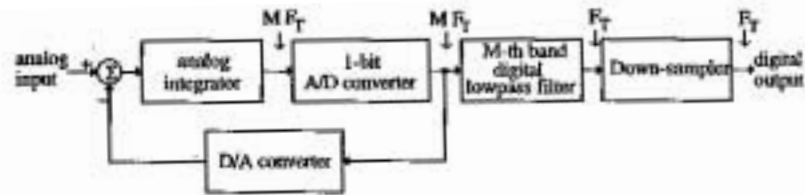
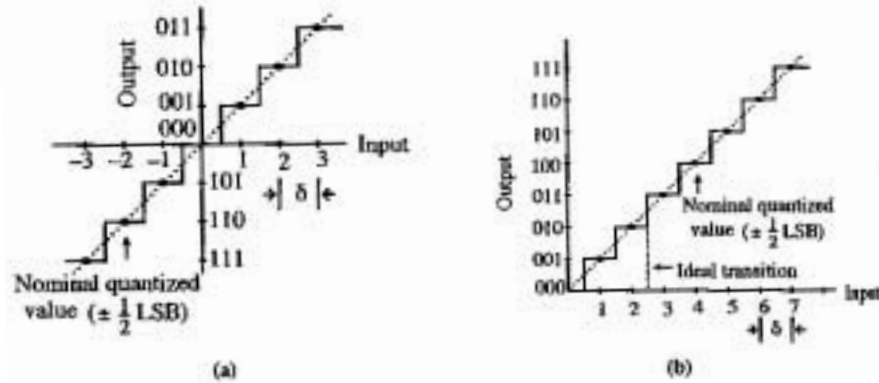
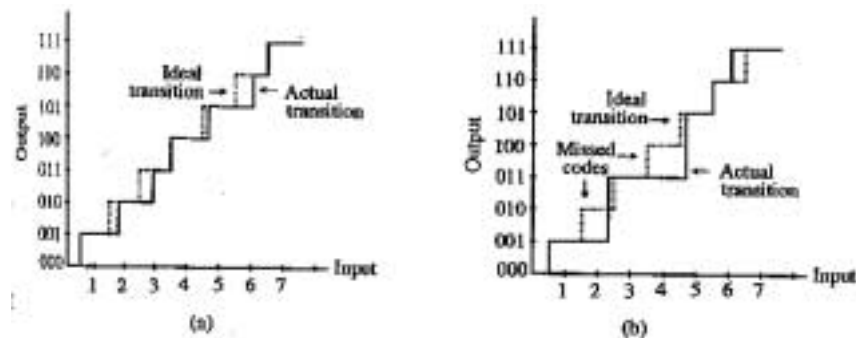


Figure 5.34 Block diagram representation of an oversampling A/D converter.



Pela figura podemos notar que δ é precisamente o valor do bit menos significativo (LSB).

Na prática os conversores A/D possuem erros de linearidades se a diferença entre dois valores de transições consecutivas na entrada não forem iguais a faixa completa de entradas, como ilustra a figura abaixo.

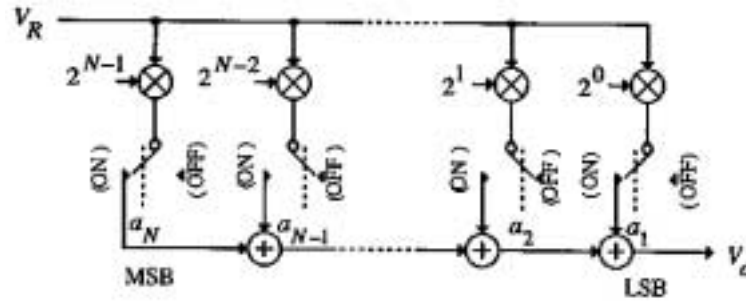


O valor máximo desta diferença em relação a toda faixa de escala é chamado *erro diferencial de não-linearidades* (DNL). Note na figura acima, que em alguns casos a não-linearidades na relação entrada-saída podem resultar na falta de código na saída.

Outros tipos de erro que podem ocorrer em conversores A/D são: erros de fator de escala ou ganho, erros de offset e o erro de *overflow*.

4.4 Conversor digital analógico

O último passo do processamento digital de sinais analógicos é a conversão digital-analógica da saída do filtro digital na forma analógica. Este passo é executado pelo conversor digital-analógico (D/A) e pelo filtro analógico de reconstrução. A idéia básica dos conversores D/A mais comuns podem ser exemplificadas pelo diagrama de blocos apresentado na figura abaixo,



onde assumimos que a amostra digital é positiva e representada por um código binário. Se o l -ésimo switch S_l estiver na posição LIGADO o l -ésimo bit $a_l = 1$, caso contrário $a_l = 0$. A saída V_0 do conversor D/A é dada por:

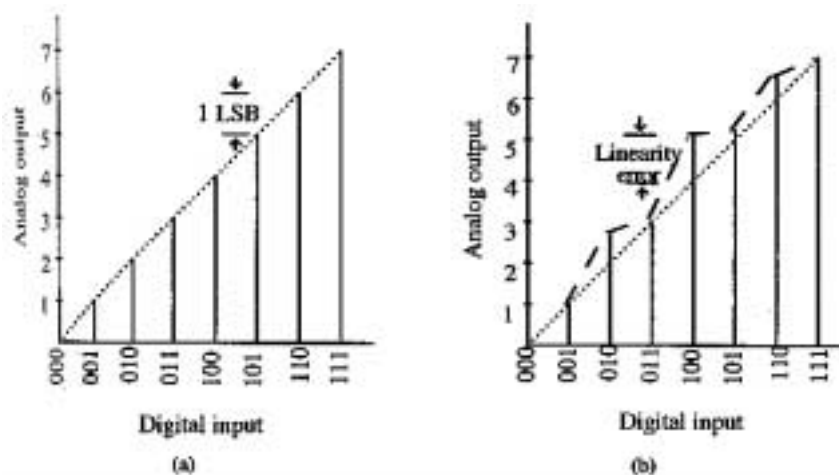
$$V_0 = \sum_{l=1}^N 2^{l-1} a_l V_R \quad (51)$$

Existe uma variedade de conversores D/A, os mais comuns são:

- Conversores D/A ponderação de resistores (“*weighted-resistor*”)
- Conversores D/A escada de resistores (“*resistor-ladder*”)
- Conversores D/A sobre-amostragem sigma-delta (“*oversampling Sigma-Delta*”)

Características práticas de conversores D/A

Na prática os conversores D/A são caracterizados por um número de parâmetros. Os efeitos desses parâmetros na performance do conversor D/A são melhores compreendidos examinando a relação entrada-saída de um dispositivo ideal. A figura abaixo apresenta a relação entrada-saída de um conversor D/A unipolar de 3-bits. As possíveis saídas analógicas para as entradas digitais são representadas por barras verticais.



A resolução de um conversor D/A é definida de maneira idêntica ao a conversão A/D. Para um conversor D/A de N -bits com a entrada digital codificada de forma binária natural, a resolução é 1 parte em 2^{N-1} . Num conversor D/A ideal as saídas analógicas são funções dos níveis discretos de entrada e, portanto, é uma linha reta com origem em 0 e com diferença entre duas amostras consecutivas sendo igual a 1 LSB.

Na prática, os conversores D/A possuem alguns erros, que são: erro de integração linear (INL), erro de offset e erro de ganho.

4.5 Projeto de filtros para reconstrução do sinal

A saída da conversão D/A é finalmente passada pelo filtro de reconstrução ou filtro de suavização, responsável por eliminar todas as réplicas do espectro que estão fora da banda base. Se a frequência de corte do filtro de reconstrução $\Omega_c = \Omega_T/2$, onde Ω_T é a frequência angular de amostragem, a resposta do filtro é dada por:

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| \leq \Omega_T/2, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_T/2 \end{cases} \quad (52)$$

As especificações gerais do filtro de reconstrução $H_r(j\Omega)$ podem ser determinadas se os efeitos de queda forem negligenciados. Se Ω_c representa a máxima frequência do sinal de entrada $y_p(t)$ que deve ser preservado na saída do filtro de reconstrução, então a menor componente de frequência presente na saída deve ser $\Omega_0 = \Omega_T - \Omega_c$.

Referências

- [1] Mitra S., "Digital Signal Processing, a Computer Based Approach", Editora Mc Graw Hill, Capítulo 2, 1998.
- [2] Oppenheim A., "Discrete-time signal processing", Editora Pearson Higher Education, Capítulo 2, 1989.
- [3] Haykin S., "Sinais e Sistemas", Editora John Wiley and Sons Ltd, Capítulo 2.
- [4] Manolakis D., "Digital Signal Processing", Editora MacMillan Coll Div, 2a. Edição, pag 143, 1992.