

CBPF – Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Nota Técnica

Técnica de segmentação de imagens por entropia relativa não extensiva

Márcio Portes de Albuquerque¹, Marcelo Portes de Albuquerque¹,
Dário Oliveira¹, Maysa Macedo¹ e Israel A. Esquef².

1- Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)

2 - Universidade Estadual Norte Fluminense (UENF).

Abstract

Image analysis usually refers to processing of images with the goal of finding objects in the image. Image segmentation is one of the most critical tasks in automatic image analysis. The non-extensive entropy is a recent development in statistical mechanics and has been considered as a useful measure in describing termostatistical properties of physical systems. In this formalism a real quantity q was introduced as parameter for physical systems that presents long range interactions, long time memories and fractal-type structures. In image processing, one of the most efficient techniques for image segmentation is entropy-based thresholding. This approach uses relative entropy from the information theory considering the gray level image histogram and a theoretical one as probabilities distributions. In this work, we applied non-extensive entropy as formalism for information theory. It was proposed an image thresholding method using relative entropy basis. Some typical results using this method are presented and illustrate the influence of the q in the thresholding process.

Palavra-chave:

Segmentação de imagens, entropia não-extensiva e entropia relativa generalizada.

ÍNDICE

I. Introdução.....	4
II. Entropia Tsallis e Entropia Relativa não extensiva.....	5
III. Segmentação por entropia relativa não extensiva.....	7
IV. Aplicações do Método e Discussão de Resultados	11
A. Resultados na Imagem	12
V. Conclusões	15
VI. Agradecimentos.....	16
VII. Referências	16

I. INTRODUÇÃO

Segmentar uma imagem significa separar suas partes constituintes que se diferenciam entre si. Diversas técnicas de segmentação de imagens que utilizam um ponto de corte global (*threshold*) têm sido propostas na literatura, com aplicações variadas que vão desde a separação da informação relevante a problemas de reconhecimento e classificação de formas [1, 2, 3, 4 e 5]. A principal consideração no uso de um único nível de decisão capaz de classificar as regiões da imagem está baseada na condição que as regiões “objeto” e “fundo da imagem” podem ser distinguidas usando apenas a informação dos níveis de cinza da imagem.

Os desenvolvimentos recentes da física estatística, por meio da proposta da entropia não extensiva por Tsallis [6], se intensificaram devido as possíveis extensões desta entropia na Teoria da Informação. A entropia não extensiva é uma tentativa de generalizar a entropia tradicional de Boltzmann/Gibbs para sistemas físicos. Nesta teoria, um parâmetro de não extensividade q está associado ao grau de não extensividade do sistema e é dependente do sistema estudado.

Neste trabalho propomos uma técnica de segmentação utilizando a entropia relativa generalizada (i.e. entropia não extensiva). Diversos sistemas físicos em que o formalismo proposto por Tsallis foi aplicado com sucesso apresentam características de não extensividade, como, por exemplo, interações de longo alcance, memória de longo tempo e estrutura fractal. Tal formalismo tem se mostrado mais adequado na medida da entropia destes sistemas, demonstrando se ajustar de forma mais coerente com os modelos teóricos. De um modo geral, os resultados obtidos para $q \neq 1$ apresentam um diferencial qualitativo, se comparados com aos resultados obtidos pela teoria tradicional, onde $q = 1$.

A utilização deste novo conceito de entropia generalizada, que surgiu na Física Estatística, tem se estendido para outras áreas da ciência, dentre elas a Teoria da Informação [7 e 8]. Neste contexto, surge a hipótese de que imagens complexas podem apresentar características não extensivas. A formação da imagem digital é um processo físico em que a incidência de fótons em uma matriz CCD (ou em um outro dispositivo de aquisição) determina a intensidade da luminância em cada célula do sensor ou do pixel da imagem, depois que estas quantidades analógicas são devidamente digitalizadas. De forma análoga, a formação da imagem pode ainda se dar por processos não óticos, como em microscópios eletrônicos, magnéticos, de força

atômica etc. Nestes casos, a interação de forças entre o material analisado e uma ponta de prova produz sinais elétricos que vão equivaler a valores de luminância para os pixels da imagem. A formação de objetos em uma imagem é, portanto um processo complexo, que sugere a existência de correlações espaciais e correlações de luminância entre os pixels que os formam.

Nos casos da segmentação por similaridade, um objeto é definido por um agrupamento de pixels que possuem valores de luminância correlacionados, tanto aqueles que compõem sua estrutura quanto aqueles que delimitam suas fronteiras. É razoável considerar, portanto, que em algumas classes de imagens, estas correlações espaciais e de luminância podem ser caracterizados como de longo alcance e conseqüentemente de sistemas não extensivos.

Esta nota técnica é uma continuação do trabalho publicado pelos autores em [9], que teve como objetivo a aplicação do conceito de entropia generalizada de Tsallis em segmentação de imagens. Este primeiro trabalho introduziu uma metodologia de avaliação baseado em quatro casos de estudos (Posição do pico, Largura do pico, Altura do pico e Picos muito próximos - objeto imerso no ruído) a fim de caracterizar diferentes tipos de imagens, através de seus histogramas. Os quatro casos seriam mais representativos da atuação do algoritmo ao invés da sua aplicação em algumas poucas imagens escolhidas como exemplo.

Esta Nota Técnica está organizada da seguinte maneira. Na seção 2 apresentamos alguns fundamentos sobre a entropia Tsallis (entropia não extensiva ou generalizada) e a entropia relativa generalizada. Na seção 3 apresentamos os aspectos matemáticos que descrevem a técnica de segmentação baseada na entropia relativa generalizada. Na seção 4 discutimos a aplicação do método e a influencia do parâmetro de não extensividade para o caso de imagens que não apresentam uma distribuição estatística específica. Na seção 5 são apresentadas as conclusões e discussões sobre o método e propostas de expansão.

II. ENTROPIA TSALLIS E ENTROPIA RELATIVA NÃO EXTENSIVA

Do ponto de vista da física a entropia está associada à quantidade de desordem em um sistema físico. Shannon redefiniu o conceito de entropia como uma medida de incerteza em um sistema de informação. Para isso ele definiu uma expressão matemática para medir quantitativamente a quantidade de informação produzida em um processo. A entropia de uma fonte discreta é obtida a partir de sua distribuição de probabilidades, onde $p = p_i$ é a probabilidade de encontrar o sistema em cada um de

seus possíveis estados i . Desta forma, $0 \leq p_i \leq 1$ e $\sum_{i=1}^k p_i = 1$, sendo k o número de estados possíveis do sistema. A entropia de Shannon é descrita pela seguinte expressão: $S = -\sum_{i=1}^k p_i \ln p_i$

Este formalismo é o mais apropriado dentro do domínio de validade da estatística de Boltzmann-Gibbs-Shannon (BGS). Esta estatística aparentemente descreve melhor os fenômenos com interações de curto alcance, chamados geralmente de sistemas extensivos. Entretanto para algumas classes de sistemas físicos que apresentam comportamento fractais e memórias de longo alcance é necessária uma extensão deste formalismo.

Esta foi a proposta de Tsallis para generalização da estatística BGS. A estatística proposta por Tsallis é hoje útil para descrever propriedades de sistemas não extensivos e está baseada na seguinte expressão matemática para a Entropia:

$$S_q = \frac{\sum_{i=1}^k (p_i)^q}{q-1} \quad (1)$$

onde k se refere ao número total de possibilidades do Sistema e um número real q é o índice entrópico que define o grau de não extensividade do sistema. Esta expressão reencontra a expressão de BGS para o caso limite em que $q \rightarrow 1$.

Considerando I_i uma medida de quantidade de informação própria de cada evento, $I_i = -\log(p_i)$, e tomando p_i e p'_i como probabilidades para dois conjuntos de eventos distintos, podemos afirmar que a diferença de informação obtida através destas duas medidas é

$$\Delta I_i = -(\log p'_i - \log p_i) \quad (2)$$

A taxa média da informação modificada pode ser obtida através da expressão a seguir

$$D(p : p') = \sum_i p_i \cdot \Delta I_i = \sum_i p_i \cdot \log \frac{p_i}{p'_i} \quad (3)$$

Esta é a equação (3) do ganho de informação Kullback-Leibler, também conhecido como entropia relativa. Borland e colaboradores, em [8], generalizaram o ganho de informação Kullback-Leibler para a estatística não extensiva. Uma medida Kullback-

Leibler generalizada se deriva naturalmente da aplicação do formalismo da entropia Tsallis no lugar da entropia convencional de Shannon. A partir da equação (1) é possível definir a informação própria não extensiva de cada evento, ou seja,

$$I_i^q = \frac{-(p_i^{1-q} - 1)}{1 - q}$$

Considerando ainda p_i e p_i' como as probabilidades para dois conjuntos de eventos medidos, a diferença de informação entre as medidas é

$$\Delta I_i^q = \left[\frac{1}{(1-q)} \right] - (1 - p_i'^{1-q}) - (1 - p_i^{1-q})$$

A taxa média da informação modificada pode ser obtida através da expressão a seguir

$$D_{KLq}(p : p') = \sum_i \frac{p_i^q}{1-q} \cdot (p_i^{1-q} - p_i'^{1-q})$$

que representa a entropia relativa generalizada. Esta expressão pode ser escrita de outra forma, considerando a função q-logarítmica, $\log_q(p) = (p^{(1-q)} - 1)/(1-q)$, resultando em

$$D_{KLq}(p : p') = \sum_i p_i \cdot \log_q \frac{p_i}{p_i'}$$

e é válido ressaltar que $\log_1(p)$ retorna à expressão convencional $\log(p)$.

III. SEGMENTAÇÃO POR ENTROPIA RELATIVA NÃO EXTENSIVA

O método apresentado em [9] não resolve satisfatoriamente o processo de binarização para uma série de classes de imagens. A principal dificuldade vem do fato de que, ao buscarmos maximizar a soma das entropias para as duas regiões da imagem segmentada, estamos procurando por histogramas planos e que na prática representam regiões ruidosas ou dispersas na imagem, com entropia máxima.

O método apresentado neste trabalho irá trabalhar com o conceito de entropia relativa tentando aproximar um jogo de probabilidade teórico àquele encontrado na própria imagem para objeto e fundo. Neste trabalho é utilizado uma distribuição gaussiana para aproximar os dois jogos de probabilidades (objeto e fundo), onde os

parâmetros da função obtidos no próprio histograma da imagem, utilizando como função de aproximação a entropia relativa generalizada.

A Entropia Relativa ou Divergência Direta é utilizada em métodos de segmentação de imagem que envolve a medida de distância entre duas distribuições estatísticas. Em geral, uma função critério é definida para a obtenção do ponto ótimo de segmentação, através da comparação entre a imagem original e a imagem segmentada. As distribuições estatísticas são freqüentemente obtidas através do histograma de luminância da imagem original e do histograma da imagem segmentada ou de modelos teóricos para histogramas sintetizados.

O método proposto é baseado na binarização de imagens utilizando a Entropia Relativa Generalizada (ERG) através da Distância Kullback-Leibler Generalizada entre dois jogos de probabilidade p e p' , apresentado na seção anterior.

A versão simétrica da divergência Kullback-Leibler pode ser escrita da seguinte forma:

$$D_q(p:p') = \sum_i p_i \cdot \log_q \frac{p_i}{p'_i} + \sum_i p'_i \cdot \log_q \frac{p'_i}{p_i}$$

Esta versão simétrica será utilizada para o cálculo da distância estatística entre os dois jogos de probabilidades.

Neste método, o jogo de probabilidades p é obtido através do histograma de luminância da imagem original. O segundo jogo de probabilidades p' será obtido através de um modelo gaussiano obtido no histograma, que será definido levando se em consideração alguma informação a priori sobre a imagem.

Como o objetivo deste método é segmentar a imagem em duas regiões (objeto e fundo), consideramos um valor t de luminância que teoricamente separa os pixels da imagem nestas duas regiões. Deste modo, podemos considerar que os pixels do intervalo $[0, t]$ pertencem ao objeto e os pixels do intervalo $[(t+1), k]$ pertencem ao fundo da imagem. O jogo de probabilidades p fica dividido em dois jogos de probabilidades, sendo p_A para o objeto e p_B para o fundo, definidos como $p_A = \{p_1^A, p_2^A, p_3^A, \dots, p_t^A\}$ o jogo de probabilidades dos pixels pertencentes ao objeto e $p_B = \{p_{t+1}^B, p_{t+2}^B, p_{t+3}^B, \dots, p_k^B\}$ o jogo de probabilidades dos pixels pertencentes ao fundo da imagem, e considerando que:

$$p_i^A = \frac{h_i}{P_t}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, t \quad P_t = \sum_i^t h_i$$

$$p_i^B = \frac{h_i}{1 - P_t}, \quad i = t + 1, t + 2, \dots, k$$

em que k é o número máximo de níveis de cinza da imagem e h é o histograma de ocorrências de níveis de cinza. A normalização por P_t é importante porque torna p_i^A e p_i^B jogos de probabilidades fechados, i.e.:

$$\sum_i^t p_i^A = \sum_{i=t+1}^k p_i^B = 1$$

Um segundo ponto importante nesta técnica, é a definição do jogo de probabilidades p' . Este jogo de probabilidades é normalmente baseado em algum modelo teórico (ou alguma informação a priori que se possa ter da imagem). Pal [3] propõe que o jogo de probabilidades que melhor aproxima o histograma de uma imagem está baseado em uma distribuição de Poisson. Ele assume que os níveis de cinza de uma região da imagem seguem uma distribuição de Poisson como parâmetros λ_A e λ_B , equivalente aos valores médios das regiões segmentadas para objeto e fundo. Neste método, assumimos o jogo de probabilidade:

$$p'_A = \{p'_1, p'_2, p'_3, \dots, p'_t\}$$

como a distribuição de probabilidades modelo para o objeto e $p'_B = \{p'_{t+1}, p'_{t+2}, p'_{t+3}, \dots, p'_k\}$ para o fundo da imagem.

A especificação da função modelo para o jogo de probabilidades do objeto e do fundo, p'_A e p'_B será baseada em nas seguintes distribuições gaussianas:

$$p_i'^A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_a} \exp^{-\frac{(x-x_a)^2}{2\sigma_a^2}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, t$$

$$p_i'^B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} \exp^{-\frac{(x-x_b)^2}{2\sigma_b^2}}, \quad i = t + 1, t + 2, \dots, k$$

x_a e x_b são obtidos pela posição onde se encontram os valores máximos A_a e A_b de cada lado do histograma e σ_a e σ_b correspondem ao valor a meia largura a meia altura (HWHH). A função de densidade de probabilidade normal tem seu valor máximo em

$0.3989/\sigma$ e sua meia largura a meia altura a $0.242/\sigma$. O valor estimado σ_τ é obtido pela razão entre esses dois valores: $\sigma_\tau = 0.606604$ obtidos varrendo o próprio histograma de luminância da região (esquerda e direita), definido pelas seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} x_a &= \arg \max (h_i) & i &= 1, 2, 3, \dots, t; \\ x_b &= \arg \max (h_i) & i &= t+1, t+2, \dots, k; \\ \sigma_a &= \arg(p_i'^A = \hat{\sigma}) \text{ e} \\ \sigma_b &= \arg(p_i'^B = \hat{\sigma}) \end{aligned}$$

onde $\sigma_\tau \approx 0.606$.

O limiar de definição dos dois jogos será definido no ponto t onde é encontrada a menor distância estatística entre os dois jogos de probabilidades, definida pela seguinte soma:

$$D_q(t) = D_{KL_q}(p_A : p'_A) + D_{KL_q}(p_B : p'_B)$$

Ao encontrar os jogos de probabilidade p'_A e p'_B , que estão mais próximos dos jogos de probabilidades do objeto e do fundo (p_A e p_B), temos na realidade uma representação estatística do conjunto de pixels que compõem as duas regiões. Podemos assumir como ponto de corte ótimo τ , o ponto onde as gaussianas p'_A e p'_B se encontram, Figura 1. Isto pode ser feito igualando-se as equações $p_i'^A$ e $p_i'^B$. Duas soluções são encontradas e dadas pela seguinte equação¹:

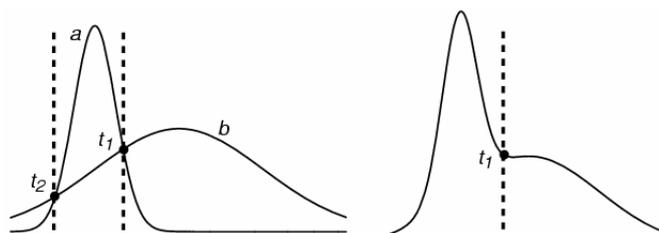


Figura 1 - Ponto de segmentação ótimo é definido no ponto de encontro entre as duas gaussianas, a e b .

$$\tau_{1,2} = \frac{x_b \sigma_a^2 - x_a \sigma_b^2 \mp \sigma_a \sigma_b \sqrt{(x_a - x_b)^2 - 2 \log(A_a/A_b)(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)}}{(\sigma_a^2 - \sigma_b^2)}$$

¹- Outras soluções também existem quando as gaussianas tendem a zero, porém são desprezadas neste caso.

Como duas gaussianas são sempre estimadas pelo algoritmo, aquela mais à direita será sempre a gaussiana b e a mais à esquerda a gaussiana a . Dessa forma, a solução que nos interessa é sempre τ_1 , pois esta raiz terá sempre seu valor entre as duas gaussianas.

Desta forma, a aproximação dos jogos de probabilidade é feita através da técnica da entropia relativa generalizada e o ponto de corte é definido na junção das duas gaussianas.

IV. APLICAÇÕES DO MÉTODO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Realizamos os estudos apresentados em [9] para os casos: Posição do pico (1), Largura do pico (2), Altura do pico (3) e Picos muito próximos - objeto imerso no ruído seção anterior (4). Todos os casos não apresentam variações do ponto de corte em função do parâmetro de não extensividade q . Os resultados da trajetória de τ são apresentados na figura 2. Para todos os casos o processo de encontro do ponto de corte é achado diretamente através das gaussianas resultantes da menor distância estatística entre os dois jogos de probabilidade. O processo entrópico neste caso foi utilizado para fins de comparação entre os dois jogos. Durante todo o processo, o parâmetro q não irá influenciar diretamente na escolha do ponto de corte τ , pois o objetivo é escolher dois jogos de probabilidades que melhor se aproximem dos jogos de probabilidade que representem o objeto e o fundo. No processo de busca da melhor distribuição gaussiana, modifica-se a todo instante sua posição, largura e altura para que esta se aproxime ao máximo da região do histograma que está sendo segmentada. No entanto, o parâmetro q irá influenciar diretamente no processo de comparação das distribuições. No limite, a eficiência do método será dependente desta comparação.

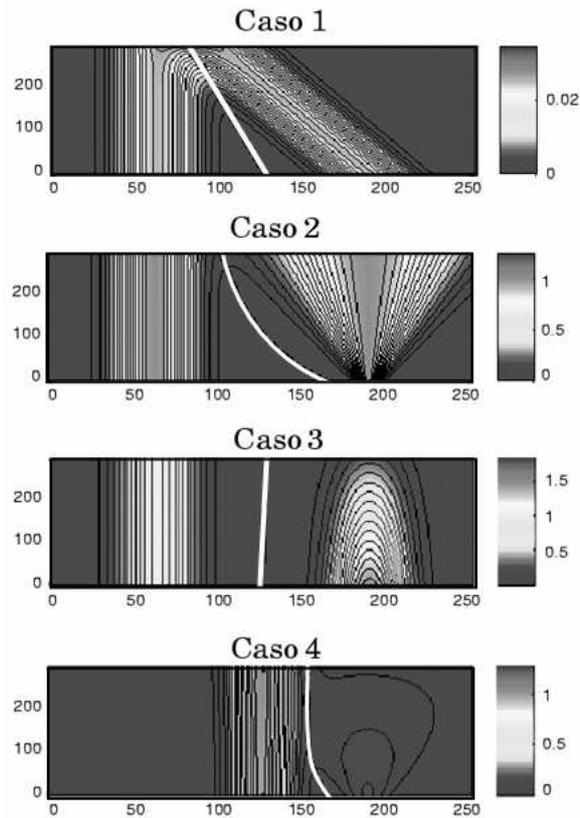


Figura 2 - Resultado da segmentação por entropia relativa para os casos 1, 2, 3 e 4 definidos em M.P. de Albuquerque et al [9].

A. Resultados na Imagem

O processo de cálculo da distância estatística será fundamental para a determinação do ponto de corte τ . Em situações em que a formação da imagem pode ser modelizada por distribuições gaussianas (ou de Poisson) o processo encontrará sempre um jogo de probabilidade que melhor satisfaça o critério de aproximação e encontrará as duas gaussianas em $D_q(t)$ mínimo e, conseqüentemente, o ponto de *threshold* na interseção entre elas. Porém, quando a imagem tiver uma distribuição que não possa ser aproximada por uma distribuição gaussiana o ponto de corte poderá oscilar em função de uma melhor sintonia no parâmetro de não extensividade.

Na prática é muito difícil encontrar imagens com distribuições estatísticas específicas. Porém, podemos encontrar algumas imagens em que o histograma não segue, a priori, nenhuma distribuição específica e avaliar o comportamento deste método nesta situação. A imagem apresentada na figura 3 corresponde a uma paisagem onde a presença de uma região de brilho intenso altera sensivelmente seu

histograma. Neste caso existirá uma região onde o parâmetro de não extensividade irá alterar a distância mínima e irá permitir uma segmentação melhor da imagem.

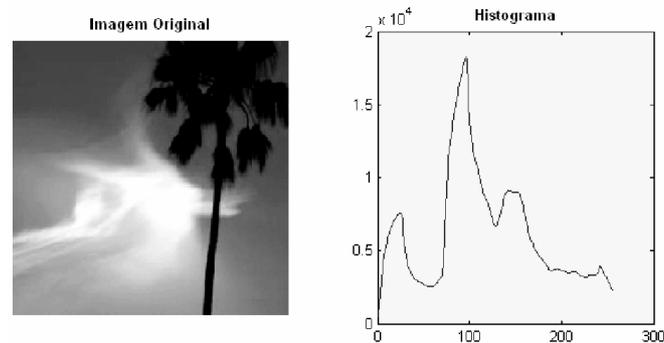


Figura 3 - Imagem de uma paisagem. O histograma não segue a priori nenhuma distribuição específica. Neste caso, o parâmetro de não extensividade q irá alterar a distância estatística de Kullback-Leibler e modificará o ponto τ .

Nesta imagem, a presença de vários picos no histograma irá certamente complicar o encontro do ponto ótimo de corte pelo método da aproximação estatística. O fato de $q \rightarrow 1$ (ou mesmo $q > 1$) faz com que a distância Kullback-Leibler generalizada, $D_q(t)$ seja amplificada. Esta característica é importante em todo o processo, porém estamos caminhando em uma região de grande sensibilidade no cálculo. Na prática, durante a implementação dos algoritmos, precisamos ter um controle detalhado do cálculo numérico quando q assume valores maiores que 1, pois a equação se torna instável devido a regiões de zeros no histograma. Na imagem da figura 4 o nível de segmentação definido pelo método foi $\tau = 132$ para $q < 1$. Ao levarmos q para a região acima de 1 ($q=1.1$), conseguimos ajustar o ponto de escolha das gaussianas p'_A e p'_B , para uma outra região de mínimo na curva $D_q(t)$, permitindo a escolha de outro ponto de corte $\tau = 34$, figura 4. Esta amplificação diferenciada para os dois vales se deve às diferenças encontradas nas suas redondezas, pois estes irão definir as gaussianas representativas de suas regiões.

A figura 5 apresenta em detalhes este comportamento, através de uma simulação do cálculo de $D_q(t)$ para duas gaussianas conhecidas. O gráfico apresenta a evolução da distância estatística para vários tipos de gaussianas, para diferentes valores de q . A medida que q aumenta, o ponto de mínimo da curva tende a ser uma curva pontual, com os jogos de probabilidades tendo sempre distância zero exceto para o único caso em que as distribuições são efetivamente iguais. Cabe ressaltar então que a escolha do parâmetro de não extensividade q significa definir um valor de q tal que as variações

de distância sejam interessantes para fazer variar o ponto de corte. No entanto, podemos supor que adotar valores de q próximos a 0.9 ou 1.0 deve ser a escolha mais apropriada, pois seria esta a região com o melhor compromisso entre proximidade e distância entre os jogos de probabilidade, ao comparamos jogos de probabilidade p e p' . Na imagem da figura 4, existe uma competição clara para decidir entre dois vales. A ampliação da distância para os dois casos será diferente fazendo com que o primeiro caso seja menor que o segundo, a partir de um determinado valor de q .

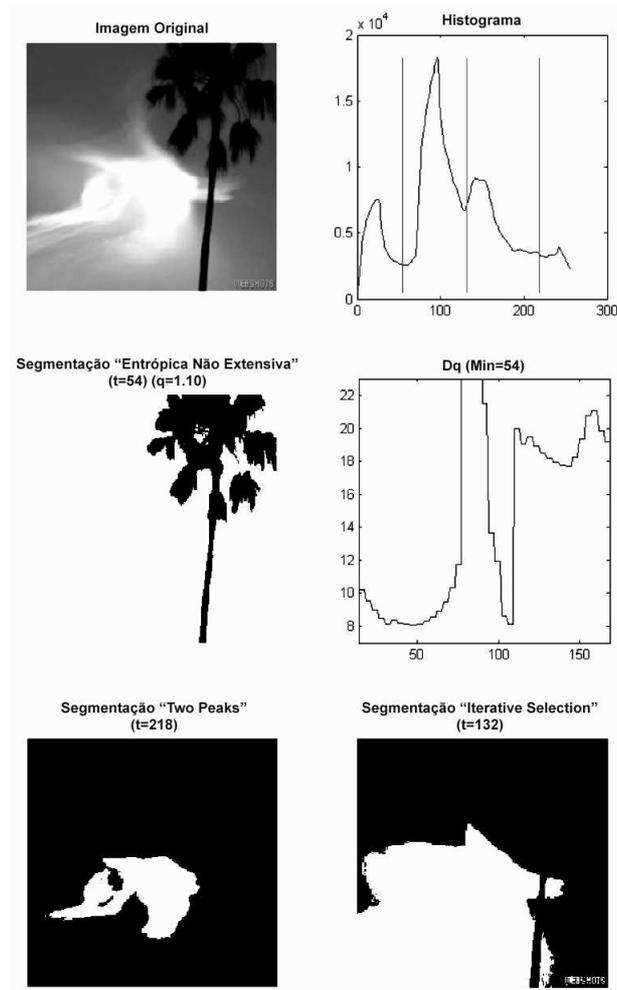


Figura 4 - Resultado da segmentação para a imagem com uma distribuição desconhecida. O parâmetro q permite um ajuste fino da posição de corte ($q=1.1$).

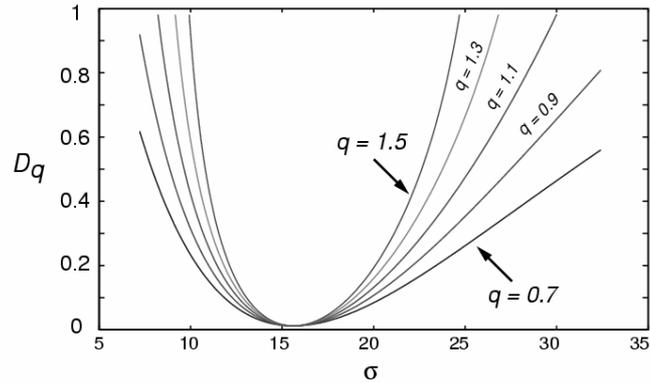


Figura 5 - Gráfico do comportamento da distância Kullback-Leibler generalizada entre gaussianas, para vários valores de q .

V. CONCLUSÕES

O funcionamento ideal de um sistema de segmentação é agir precisamente para qualquer tipo de imagem e em perfeita harmonia com os processos de tratamento da informação posteriores. Na prática, a idealização de tal sistema é ainda uma tarefa muito distante para a maior parte dos sistemas de segmentação disponíveis na literatura. No entanto, podemos dizer que o processo de segmentação entrópica, baseado no modelo apresentado nesta seção, é robusto e pode funcionar para uma variedade muito grande de imagens com ótimo resultado final.

A robustez do método é devido principalmente ao fato de podermos aproximar a distribuição gaussiana, para os histogramas obtidos em diversos tipos de imagens. Porém, não existe para estes casos uma dependência direta do parâmetro de não extensividade. O parâmetro q irá influenciar principalmente, no processo de escolha da proximidade entre os jogos envolvidos no cálculo da distância estatística. Nas situações onde o histograma das imagens não possam ser modelizados por uma distribuição gaussiana, o parâmetro q poderá ser um importante ponto de sintonia do processo, permitindo ajustes finos de onde se quer realizar o corte nas imagens. No entanto, uma precaução adicional deve ser tomada, pois nestes casos estaremos trabalhando em regiões instáveis da equação de distância Kullback-Leibler generalizada.

Uma proposta de ampliação deste método é de utilizarmos o conjunto $p' = p'_A + p'_B$ ao invés de utilizarmos as distâncias separadamente, para assim compará-lo

diretamente com p (o histograma original da imagem). Este método poderia trazer mais novidades no cálculo de $D_{\text{mínimo}}$. É também interessante notar que este método nos fornece os dois jogos de probabilidade que melhor representam a região correspondente ao objeto e ao fundo da imagem. Isto nos permite estimar o erro de classificação das duas regiões. Nas situações em que as gaussianas estão superpostas, é praticamente inevitável classificar erroneamente as regiões da imagem (i.e. pixels correspondentes aos objetos são classificados como de fundo e pixels correspondentes ao fundo são classificados como de objetos). Este erro poderia ser um interessante ponto de apoio para as etapas posteriores ao processamento da informação.

VI. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Professor C. Tsallis e F. Baldovin pelas discussões sobre o tema, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Ministério da Ciência e Tecnologia do Brasil, e a FAPERJ, Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro.

VII. REFERÊNCIAS

- [1] Kapur, J. N. and Sahoo, P. K and Wong, A. K. C., "A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram.", *Computer Vision Graph. Image Processing*; 1985, 29, 273-285.
- [2] Sahoo, P. and Wilkins, C. and Yeager, J., "Threshold Selection using Renyi's Entropy", *Pattern Recognition*, 1997, 30, 1, 71-84.
- [3] Pal, N. R.; "On minimum cross-entropy thresholding", *Pattern Recognition*; 1996, 29, number 4, 575-580.
- [4] Li, C. H. and Tam, P. K. S., "An Iterative Algorithm for Minimum Cross Entropy Thresholding." *Pattern Recognition Letters*, 1998, 19, 771-776.
- [5] Rosin, P. L.; "Unimodal thresholding", *Pattern Recognition*, 2001, 34, 2083-2096.
- [6] Tsallis, C., "Possible generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics.", *J. Stat. Phys.*, 1988, 52, 479-487.
- [7] Yamano, T., "A possible Extension of Shannon's Information Theory", *Entropy* 2001 – electronic version in (www.mdpi.org/entropy/), 2001, 3, 280-292.
- [8] Borland, L. and Plastino, A. R. and Tsallis, C., "Information Gain within Nonextensive Thermostatistics.", *J. Math. Phys.*, 1998, 39, 12.
- [9] Portes de Albuquerque, M.; P. de Albuquerque, Marcelo; A. G. Mello; Israel A. Esquef *Pattern Recognition Letters*, 2004, 25, 1059–1065.