



Notas Técnicas

CBPF-NT-001/26

setembro 2026

Análise Espectral: Estudo de Ruído Branco, Ruído Colorido e Sinais Senoidais Imersos em Ruído

Marcelo Portes de Albuquerque, Paulo José Russano e Pedro Miguel Russano



Análise Espectral: Estudo de Ruído Branco, Ruído Colorido e Sinais Senoidais Imersos em Ruído

Spectral Analysis: A Study of White Noise, Colored Noise, and Sinusoidal Signals Embedded in Noise

Marcelo Portes de Albuquerque¹, Paulo José Russano² e Pedro Miguel Russano³

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

Rua Dr. Xavier Sigaud, 150,

22290-180 - Urca, Rio de Janeiro, Brasil

¹marcelo@cbpf.br, ²pjrussano@cbpf.br, ³pmiguel@cbpf.br

Submetido: 21/08/2026

Aceito: 27/08/2026

Resumo: Esta Nota Técnica apresenta uma metodologia unificada para a estimação espectral de sinais estocásticos e determinísticos, com foco em aplicações experimentais no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF). São analisados métodos clássicos de espectro: Transformada Discreta de Fourier, correlograma, periodograma médio (Welch) e modelagem autorregressiva (AR). Avaliam-se viés, variância, resolução espectral e estabilidade estatística dos estimadores, considerando ruído branco, ruído colorido e sinais senoidais com diferentes razões sinal ruído. Os resultados são discutidos à luz da teoria clássica de processamento de sinais (Oppenheim; Schafer, 2012; Kay, 1988; Oppenheim; Willsky, 2010; Stoica; Moses, 2005).

Palavras chave: Análise espectral; DSP; correlograma; Welch; modelagem AR; ruído branco; ruído colorido.

Abstract: This Technical Note presents a unified methodology for the spectral estimation of stochastic and deterministic signals, with a focus on experimental applications at the Brazilian Center for Research in Physics (CBPF). Classical spectral estimation methods are analyzed: the Discrete Fourier Transform, the correlogram, the averaged periodogram (Welch's method), and autoregressive (AR) modeling. The bias, variance, spectral resolution, and statistical stability of the estimators are evaluated for white noise, colored noise, and sinusoidal signals at different signal-to-noise ratios. The results are discussed in light of classical signal processing theory (Oppenheim; Schafer, 2012; Kay, 1988; Oppenheim; Willsky, 2010; Stoica; Moses, 2005).

Keywords: Spectral analysis; PSD; correlogram; Welch's method; AR modeling; white noise; colored noise.

OBJETIVO DA NOTA TÉCNICA

Estabelecer uma metodologia padronizada para a análise espectral de sinais experimentais no CBPF, garantindo reprodutibilidade, consistência e rigor científico em estudos envolvendo ruído, filtragem, modelagem e caracterização espectral.

- análise de estabilidade temporal em experimentos físicos;
- modelagem de sistemas dinâmicos;
- filtragem e reconstrução de sinais experimentais.

A padronização metodológica permite que diferentes grupos utilizem procedimentos equivalentes, facilitando comparações e validações cruzadas.

CONTEXTO E APLICAÇÕES NO CBPF

A análise espectral é empregada em diversas linhas de pesquisa do CBPF, incluindo:

- instrumentação eletrônica e aquisição de dados;
- caracterização de ruído em detectores;

INTRODUÇÃO

A análise espectral desempenha papel central na caracterização de sinais físicos, permitindo identificar componentes

determinísticas, quantificar níveis de ruído e compreender a distribuição de energia ao longo da frequência. Conforme estabelecido na literatura clássica de processamento de sinais (Oppenheim; Schafer, 2012; Oppenheim; Willsky, 2010; Stoica; Moses, 2005; Kay, 1988) diferentes estimadores espectrais apresentam compromissos distintos entre resolução, variância e viés, tornando essencial a escolha adequada da metodologia para cada tipo de sinal. Esta Nota Técnica tem como objetivo investigar técnicas clássicas – tanto não paramétricas quanto paramétricas – com foco na interpretação prática de seus resultados e na avaliação de suas limitações.

O estudo é organizado em três etapas complementares:

- Ruído branco: utilizado como referência teórica para avaliar variância, viés e comportamento estatístico dos estimadores;
- Ruído colorido: empregado para analisar efeitos de filtragem, correlação temporal e alterações estruturais no espectro;
- Senoide imersa em ruído branco: caso que evidencia o desempenho dos estimadores na detecção de componentes determinísticas sob diferentes razões sinal ruído.

Ao longo do documento, são discutidos aspectos como ergodicidade, estimadores de autocorrelação, periodograma, método de Welch e modelagem autorregressiva (AR), destacando suas propriedades estatísticas e condições de uso.

METODOLOGIA

Geração dos sinais

Foi sintetizado um processo estocástico composto por 2048 amostras de ruído branco. A evolução temporal desse sinal, apresentada na Figura 1, corresponde a uma única realização do processo. Sob a hipótese de ergodicidade — válida quando a janela de observação é suficientemente longa — essa realização torna-se representativa das propriedades estatísticas do ruído. Assim, a forma temporal exibida pode ser interpretada como uma aproximação experimental da dinâmica típica do processo gerador (Oppenheim; Schafer, 2012).

Foi produzida uma sequência de 2048 amostras de ruído colorido, obtida pela filtragem de um ruído branco por meio de um filtro ressonante de segunda ordem. O filtro apresenta frequência de ressonância $f_0 = 0,2$ e largura de banda de -3 dB igual a $0,01$ (Oppenheim; Schafer, 2012).

Também foi construído um sinal de 2048 amostras composto pela soma de um ruído branco gaussiano e uma senoide de frequência $f_0 = 0,2$. O nível de ruído foi ajustado de modo que o sinal apresentasse razão sinal-ruído (RSB) igual a 0 dB, condição em que a potência da senoide é igual à potência do ruído (Oppenheim; Schafer, 2012). Adicionalmente, foi sintetizado um sinal de 2048 amostras formado pela soma de um ruído branco gaussiano e uma senoide de frequência $f_0 = 0,2$, agora com razão sinal-ruído (RSB)

igual a -20 dB. Nesse regime, a potência do ruído é significativamente superior à da componente senoidal, caracterizando um cenário de detecção em condições severas de ruído.

ESTIMATIVA POR TRANSFORMADA DE FOURIER

O ruído foi analisado por meio da Transformada de Fourier em 2048 pontos, utilizando uma janela retangular (Figura 3) (Oppenheim; Schafer, 2012).

Correlograma

Foi produzida uma sequência de ruído branco e realizado o cálculo de sua função de autocorrelação estimada sem ponderação temporal. A partir dessa estimativa, obteve-se a densidade espectral de potência (DSP) por meio da Transformada Discreta de Fourier da função de autocorrelação, utilizando 128 pontos. O valor da DSP foi então avaliado na frequência $f = 0,2$ (Figura 8) (Kay, 1988; Oppenheim; Schafer, 2012).

Em seguida, foi aplicada uma ponderação por janela de Hamming à função de autocorrelação estimada, caracterizando o método do correlograma janelado. A DSP foi novamente estimada, desta vez também com 128 pontos na Transformada Discreta de Fourier da autocorrelação ponderada (Figura 9).

Realizou-se o procedimento descrito anteriormente para 10 realizações independentes de ruído branco. Para cada realização, estimou-se a densidade espectral de potência (DSP) na frequência $f = 0,2$ pelo método do correlograma, a partir da função de autocorrelação estimada.

Foram consideradas três situações: (i) sem ponderação temporal, utilizando 128 pontos na Transformada Discreta de Fourier; (ii) com ponderação por janela de Hamming, também com 128 pontos; e (iii) com ponderação por janela de Hamming utilizando 1024 pontos na transformada.

A densidade espectral de potência (DSP) foi estimada a partir da função de autocorrelação não ponderada, utilizando 128, 256, 512 e 1024 pontos.

Define-se o tempo efetivo de integração T_i como a duração equivalente do registro que efetivamente contribui para a estimativa após o janelamento, sendo proporcional ao número de amostras independentes disponíveis. Janelas que atenuam as extremidades do registro, como a de Hamming, reduzem T_i em relação à janela retangular, o que eleva a variância do estimador espectral (Kay, 1988).

Para o ruído colorido, a função de autocorrelação foi estimada em toda a sua extensão, sem janelamento. A envoltória da região central foi modelada por um decaimento exponencial, e o tempo característico de decaimento τ_m foi obtido por ajuste de uma reta a essa envoltória (em escala logarítmica). Adotou-se como tempo de correlação a definição integral $T_c = 2\tau_m$. Como a variância do estimador da autocorrelação cresce com o atraso — em razão do menor número de pares de amostras disponíveis —, a estimativa perde confiabilidade para atrasos superiores a T_c (Kay, 1988; Oppenheim;

Willsky, 2010).

Para o sinal senoidal imerso em ruído, a DSP foi também estimada a partir de trechos da função de autocorrelação — inclusive considerando apenas os atrasos positivos ($k > 0$) —, e a detectabilidade da componente senoidal foi quantificada pela razão entre a amplitude do pico em f_0 e o maior valor espectral fora dessa frequência. O procedimento foi repetido para intervalos sucessivos (tranches) da autocorrelação, progressivamente afastados da origem (Kay, 1988; Stoica; Moses, 2005).

ESTATÍSTICAS AMOSTRAIS

Os cálculos da média e da variância amostral foram realizados conforme descrito a seguir (Kay, 1988).

Média amostral:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \quad (\text{B.2})$$

Variância amostral (estimador não viesado):

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{B.3})$$

PERIODOGRAMA MÉDIO (MÉTODO DE WELCH)

A densidade espectral de potência (DSP) foi estimada pelo método do periodograma médio, também conhecido como método de Welch. Esse método consiste em dividir o sinal em L segmentos, calcular o periodograma (quadrado do módulo da TFD normalizado) de cada segmento e, em seguida, realizar a média desses periodogramas. O objetivo desse procedimento é reduzir a variância da estimativa espectral, uma vez que, para segmentos aproximadamente independentes, a variância do estimador diminui aproximadamente de forma inversamente proporcional a L (Kay, 1988; Stoica; Moses, 2005).

Em contrapartida, ao dividir o sinal em segmentos menores, reduz-se a resolução espectral, estabelecendo-se o conhecido compromisso entre resolução em frequência e variância da estimativa (Kay, 1988; Stoica; Moses, 2005).

No presente estudo, foi produzida uma sequência de ruído branco e estimou-se a DSP sem aplicação de janela no domínio temporal (janela retangular implícita). Inicialmente, a estimativa foi obtida a partir da média de $L = 4, 7, 13$ e 17 Transformadas Discretas de Fourier (TFDs) de 512 pontos. Para cada caso, mediu-se o valor estimado da DSP na frequência $f = 0,2$ (Kay, 1988; Stoica; Moses, 2005).

Em seguida, mantendo-se o procedimento sem ponderação temporal, a DSP foi estimada a partir da média de 17 TFDs de 256 pontos e, posteriormente, de 17 TFDs de 128 pontos. Também nesses casos foi registrado o valor estimado da DSP na frequência $f = 0,2$ (Kay, 1988; Stoica; Moses, 2005).

MODELAGEM AUTORREGRESSIVA

A densidade espectral de potência (DSP) do sinal foi estimada por meio de modelagem autorregressiva (AR), utilizando uma janela temporal retangular, para ordens 2, 4 e 6. Na Tabela 7 são apresentados, para cada modelo, a frequência e a amplitude de ressonância, bem como a amplitude em baixa frequência (componente contínua) e a largura de banda a -6 dB (Kay, 1988; Oppenheim; Willsky, 2010). Em seguida, foram gerados sinais com comprimentos de 128 (Figura 22) e 64 amostras (Figura 23), sob as mesmas condições. A DSP foi estimada, sem ponderação temporal, utilizando um modelo AR de ordem 4. Verifica-se que, para o caso de 64 amostras, o modelo apresenta desempenho significativamente degradado.

RESULTADOS E DISCUSSÕES ESTUDO DE UM RUÍDO

BRANCO

Geração do ruído

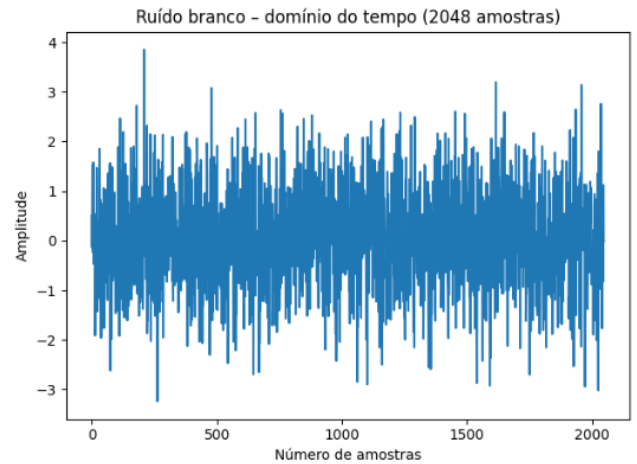


Figura 1: Evolução temporal de um ruído branco com 2048 amostras. A visualização corresponde a uma realização do processo estocástico.

A partir do histograma da distribuição temporal das amplitudes do sinal, constatamos que o sinal é um ruído gaussiano. O histograma é apresentado na Figura 2 e constitui uma aproximação da função densidade de probabilidade.

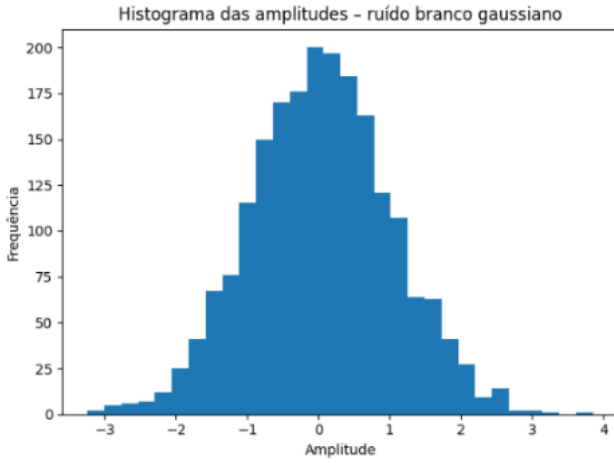


Figura 2: Histograma da distribuição temporal das amplitudes do sinal. Ruído gaussiano.

ANÁLISE DO RUÍDO PELA TRANSFORMADA DE FOURIER

No espectro obtido, não há evidências suficientes que permitam concluir que o sinal analisado seja um ruído branco. O quadrado do módulo da Transformada de Fourier (periodograma) constitui uma estimativa bastante inadequada da densidade espectral de potência (DSP), que, no caso de um ruído branco, deveria apresentar comportamento plano. O desvio padrão dessa estimativa é da mesma ordem de grandeza do próprio valor estimado, o que inviabiliza conclusões confiáveis a partir dessa única realização. Técnicas de suavização para reduzir essa variância serão implementadas nas etapas seguintes, por meio do cálculo do periodograma médio (Kay, 1988; Stoica; Moses, 2005).

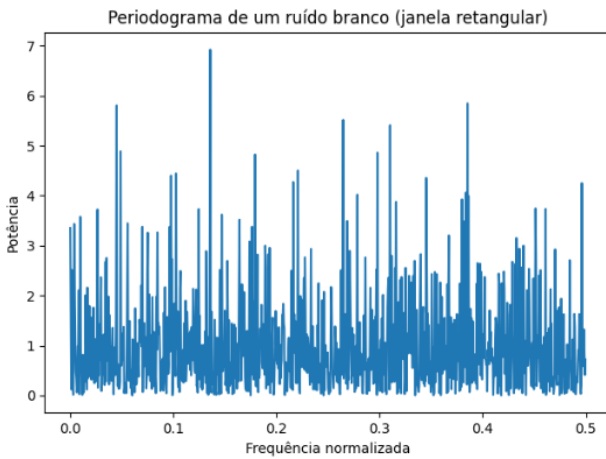


Figura 3: Transformada de Fourier de um ruído branco com uma janela retangular. Não há indícios onde se proponha que o sinal gerado seja um ruído branco.

ANÁLISE DO RUÍDO PELO CORRELOGRAMA

- a) Estimativa da função de autocorrelação
 1. Estimador não ponderado

A Figura 4 apresenta a estimativa da função de autocorrelação (FAC) do ruído branco, obtida por meio do estimador não ponderado. Para um processo de ruído branco ideal, a função de autocorrelação teórica é proporcional a um delta de Dirac, isto é, $R_{xx}[k] = \sigma^2 \delta[k]$. A estimativa obtida aproxima-se desse comportamento, exibindo um pico pronunciado em $k = 0$ e valores próximos de zero para $k \neq 0$. Observa-se ainda que a FAC estimada apresenta simetria par, como esperado para processos estacionários no sentido amplo (WSS — Wide-Sense Stationary) (Oppenheim; Willsky, 2010).

Na prática, devido ao comprimento finito do registro (2048 amostras), o estimador apresenta flutuações estatísticas para $k \neq 0$, resultando em valores residuais não nulos. A estimativa da potência média do processo é dada por $\hat{R}_{xx}[0] = B_{rect}(0) = 1,008$, que corresponde à variância estimada do sinal (Oppenheim; Willsky, 2010).

A Figura 5 mostra um detalhe da FAC em torno de $k = 100$. Observa-se o caráter essencialmente aleatório das amostras da autocorrelação fora do atraso zero, coerente com a hipótese de decorrelação temporal do ruído branco. O valor estimado $B_{rect}(100) = 0,01575$ encontra-se próximo de zero, conforme previsto teoricamente (Oppenheim; Willsky, 2010).

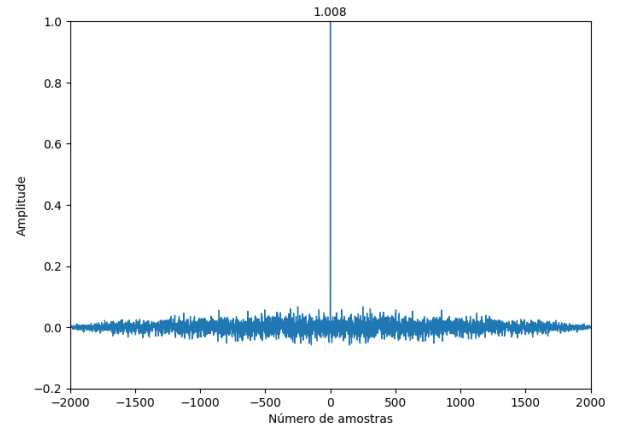


Figura 4: Função de autocorrelação estimada de um ruído branco, sem ponderação temporal. Observa-se o comportamento de um delta de Dirac. $\gamma_{B_{rect}}(0) = 1,008$.

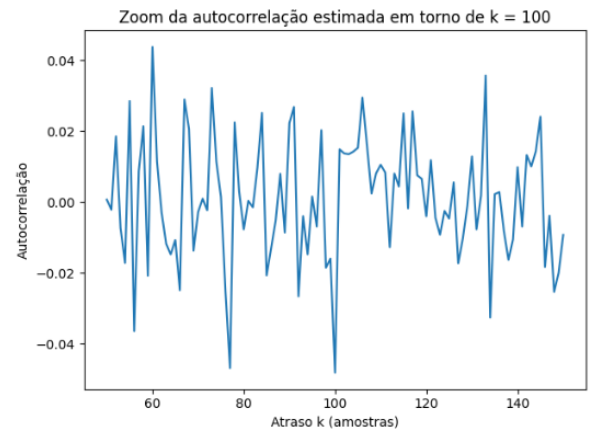


Figura 5: Ampliação da função de autocorrelação estimada em torno do valor $k=100$. Observa-se o caráter aleatório. $\gamma_{B_{rect}}(100) = 0,01575$.

2. Com ponderação temporal — janela de Hamming

A Figura 6 apresenta a estimativa da função de autocorrelação (FAC) quando o sinal de ruído branco é previamente submetido a ponderação temporal por uma janela de Hamming. A estimativa da potência média (variância) do processo resultante é $B_{Hamming}(0) = 0,9675$ (Oppenheim; Schaffer, 2012).

A aplicação da janela de Hamming introduz um efeito de *tapering* no domínio temporal, reduzindo descontinuidades nas extremidades do registro finito. Essa ponderação modifica o estimador da autocorrelação, uma vez que o processo analisado deixa de ser estritamente branco após a multiplicação pela janela. Como consequência, observa-se na FAC uma atenuação progressiva para atrasos maiores, refletindo a convolução implícita com a autocorrelação da própria janela (Oppenheim; Schaffer, 2012).

A Figura 7 apresenta um detalhe da função de autocorrelação em torno de $k = 100$ para o ruído ponderado por uma janela de Hamming. O valor estimado é $B_{Hamming}(100) = 0,00491$, magnitude compatível com as flutuações estatísticas esperadas para atrasos diferentes de zero (Oppenheim; Schaffer, 2012).

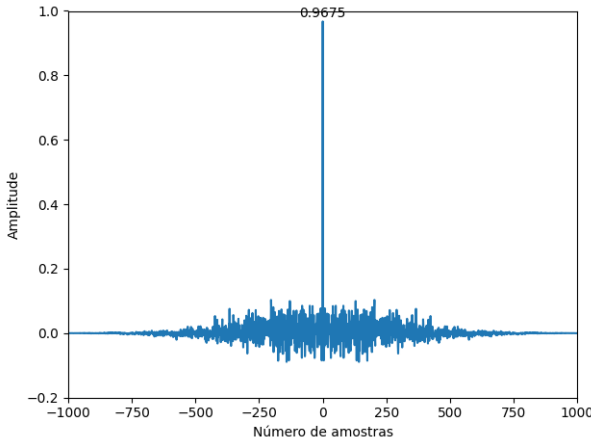


Figura 6: Função de autocorrelação estimada de um ruído branco. O ruído foi ponderado por uma janela de Hamming. $\gamma_{Hamming}(0) = 0,9675$.

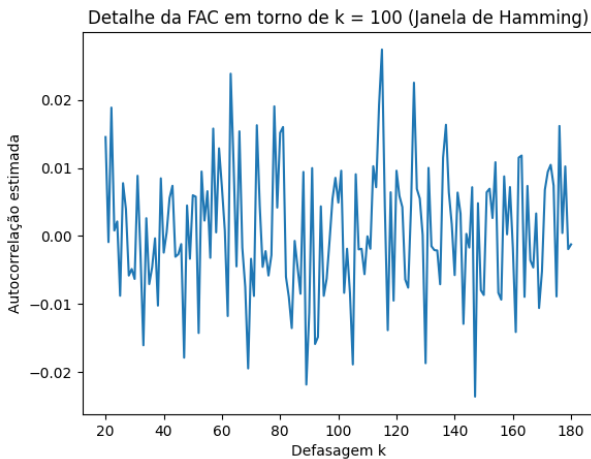


Figura 7: Detalhe da função de autocorrelação estimada em torno de $k = 100$, para o ruído branco ponderado por uma janela de Hamming. $\gamma_{Hamming}(100) = 0,00491$.

Ao comparar as duas estimativas, observa-se que o desvio da potência média estimada em relação ao valor teórico é maior quando se utiliza a janela de Hamming do que quando se emprega a janela retangular.

Esse comportamento está de acordo com a teoria de estimação espectral. A aplicação da janela de Hamming reduz o tempo efetivo de integração T_i (ou, de forma equivalente, diminui a largura temporal efetiva do registro), o que implica redução no número efetivo de amostras independentes contribuindo para a estimativa. Como consequência, a variância do estimador aumenta em comparação ao caso da janela retangular, que maximiza o tempo de integração para um mesmo comprimento de registro (Kay, 1988; Stoica; Moses, 2005).

$$T_i^{Hamming} < T_i^{Retangular}$$

No entanto, a estimativa da potência média é uma variável aleatória e, portanto, é possível ocorrer a situação inversa, isto é, uma estimativa com maior desvio quando se utiliza a janela retangular. Com apenas uma realização do processo, é arriscado tirar conclusões definitivas.

Por esse motivo, apresentam-se a seguir (Tabela 1) estimativas da potência média obtidas a partir de diferentes realizações independentes do ruído branco. Em seguida, calcula-se a média amostral e a variância dessas estimativas, a fim de verificar os resultados previstos teoricamente.

A Tabela 1 apresenta, para dez realizações distintas de ruído branco, os valores $B_{Hamming}(0)$, $B_{Hamming}(100)$, $B_{rect}(0)$ e $B_{rect}(100)$ da função de autocorrelação estimada, inicialmente sem ponderação temporal (janela retangular implícita) e, posteriormente, com a aplicação da janela de Hamming.

	Retangular	Retangular	Hamming	Hamming
Realização	$k = 0$	$k = 100$	$k = 0$	$k = 100$
1	1,0470	-0,01917	1,0730	-0,02423
2	0,9373	-0,00589	0,9000	-0,02866
3	1,0080	0,01575	0,9675	-0,01248
4	0,9980	-0,01050	1,0320	0,00530
5	1,0420	-0,03362	1,0680	-0,05919
6	1,0800	-0,02494	1,0790	-0,03974
7	1,0300	-0,02039	1,0340	-0,02900
8	0,9945	-0,00166	0,9856	-0,04429
9	1,0440	0,02591	1,0430	0,03209
10	0,9629	0,01761	0,9980	0,02583

Tabela 1: Dez valores de diferentes realizações das funções de autocorrelação do ruído branco, inicialmente sem ponderação e, em seguida, ponderado com uma janela de Hamming: $\gamma_{Hamming}(0)$, $\gamma_{Hamming}(100)$, $\gamma_{rect}(0)$ e $\gamma_{rect}(100)$.

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 2.

	Retangular	Retangular	Hamming	Hamming
	$k = 0$	$k = 100$	$k = 0$	$k = 100$
Média	1,01446	-0,00719	1,01801	-0,01744
Variância	0,00187	0,00408	0,00314	0,00090

Tabela 2: Médias e variâncias amostrais das estimativas da função de autocorrelação para $k = 0$ e $k = 100$, inicialmente sem ponderação temporal (janela retangular implícita) e, em seguida, com aplicação da janela de Hamming.

Constatou-se que a redução do tempo efetivo de integração T_i tende a aumentar a variância dos estimadores. Esse comportamento foi verificado para $k = 0$, onde a variância as-

sociada à janela de Hamming foi 0,00314, superior à obtida com a janela retangular (0,00187), em concordância com a previsão teórica. Para $k = 100$, entretanto, observou-se o comportamento oposto: a variância com janela retangular foi 0,00408, enquanto com janela de Hamming foi 0,00090. Esse resultado não confirma a tendência teórica esperada.

Como os valores foram obtidos a partir de apenas 10 realizações independentes do ruído branco, essa discrepância pode ser atribuída à variabilidade estatística inerente ao experimento. Portanto, seria necessário aumentar o número de realizações para que a avaliação da variância dos estimadores se tornasse estatisticamente mais robusta.

Observou-se ainda que, dependendo da realização, o erro pode ser menor com a janela de Hamming do que com a janela retangular, refletindo a natureza aleatória das estimativas.

A média amostral das estimativas apresentou-se próxima do valor teórico, compatível com um estimador não viesado.

Ressalta-se que a própria média e a variância calculadas a partir de 10 realizações são estimativas sujeitas à incerteza. No caso gaussiano, para $n = 10$ medições independentes, tem-se: (Kay, 1988)

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\text{var}(\bar{x})} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{10}} \quad (\text{B.4})$$

$$\sqrt{\text{var}(s^2)} = \sigma_x^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \approx 0,47 \sigma_x^2 \quad (\text{B.5})$$

Portanto, como a variância foi estimada com apenas 10 realizações independentes, o valor obtido ainda está sujeito a flutuações estatísticas relevantes. Para reduzir essa incerteza e obter uma estimativa mais estável e representativa do comportamento real do estimador, é recomendável aumentar o número de realizações consideradas na análise.

b) Estimativa da Densidade Espectral de Potência (DSP)

Observa-se que a DSP obtida a partir da função de autocorrelação ponderada por janela de Hamming apresenta menor flutuação em torno do valor teórico unitário, quando comparada ao caso sem ponderação. Esse comportamento está associado à redução da variância do estimador espectral promovida pelo janelamento no domínio do atraso, ao custo de uma possível redução na resolução espectral (Kay, 1988)

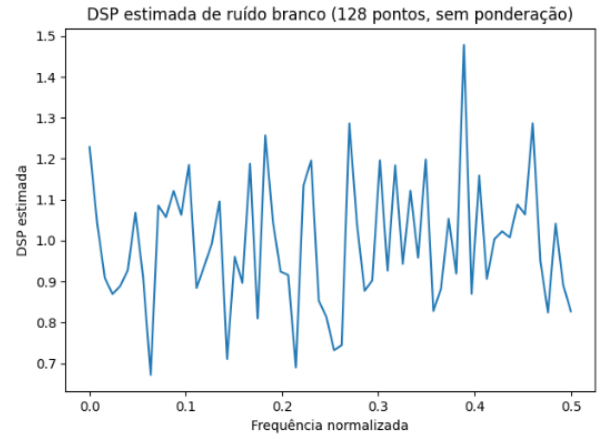


Figura 8: Estimativa da DSP de um ruído branco (128 pontos). Essa estimativa foi calculada a partir da função de autocorrelação do ruído, sem qualquer ponderação prévia.

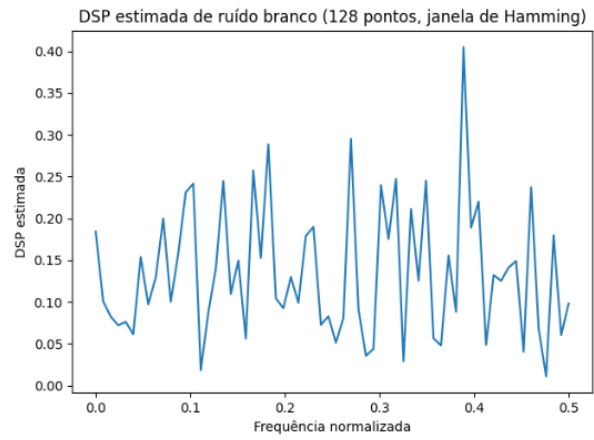


Figura 9: Estimativa da DSP de um ruído branco (128 pontos), calculada a partir de sua função de autocorrelação ponderada por uma janela de Hamming. Observa-se que o desvio em relação ao ganho unitário é menor do que na Figura 8.

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 3. Observa-se que as estimativas apresentam variações em torno do valor teórico unitário esperado para a DSP de um ruído branco. A ponderação por janela de Hamming tende a reduzir as flutuações quando comparada ao caso sem ponderação. O aumento do número de pontos na transformada melhora a resolução em frequência, mas não implica, necessariamente, redução da variância estatística da estimativa.

	Sem ponderação (128 pontos)	Hamming (128 pontos)	Hamming (1024 pontos)
Realização			
1	1,151	1,131	1,470
2	1,030	0,986	1,262
3	0,681	0,801	0,748
4	1,202	1,196	2,010
5	0,719	0,867	0,393
6	1,086	1,156	1,080
7	0,995	0,973	1,189
8	1,053	1,100	0,676
9	0,894	0,875	0,538
10	0,929	1,002	1,839

Tabela 3: Valores estimados da densidade espectral de potência na frequência $f = 0,2$.

Calculou-se, para cada um dos casos anteriores, a média e a variância das 10 estimativas da DSP na frequência $f = 0, 2$, conforme apresentado na Tabela 4.

	Retangular (128 pontos)	Hamming (128 pontos)	Hamming (1024 pontos)
Média	0,9740	1,0087	1.1204
Variância	0,0294	0,0181	0,2957

Tabela 4: Médias e variâncias das estimativas da DSP na frequência $f = 0, 2$, obtidas a partir de 10 realizações independentes.

Observa-se que, para 128 pontos, a variância da estimativa com janela de Hamming (0,0181) é menor do que aquela obtida com janela retangular (0,0294), em concordância com a teoria. De fato, para um mesmo número de pontos da função de autocorrelação, tem-se (Kay, 1988; Stoica; Moses, 2005):

$$\text{Var}\{\hat{S}_x(f)\}_{\text{Hamming}} < \text{Var}\{\hat{S}_x(f)\}_{\text{Retangular}} \quad (\text{B.6})$$

Esse comportamento está associado ao efeito de suavização introduzido pela janela de Hamming no domínio do atraso, que reduz a variância do estimador espectral ao custo de uma possível redução na resolução em frequência (Kay, 1988). Ao comparar as estimativas com janela de Hamming de 128 e 1024 pontos, observa-se que a variância aumenta significativamente no caso de 1024 pontos (0,2957). Esse aumento não decorre da simples melhoria de resolução espectral, mas indica que a estimativa tornou-se mais sensível às flutuações da função de autocorrelação em atrasos maiores. Assim, a maior extensão da autocorrelação utilizada no cálculo contribui para o aumento da variabilidade da estimativa em uma frequência específica.

Quanto ao viés, a utilização de uma janela de apodização pode introduzir viés na estimativa espectral. Entretanto, no caso do ruído branco ideal, cuja função de autocorrelação teórica é um delta de Dirac, esse viés não é significativo, pois a energia está concentrada no atraso zero. Como consequência, a apodização da autocorrelação não altera de forma relevante o valor médio da estimativa, apenas sua variância (Kay, 1988; Stoica; Moses, 2005).

ANÁLISE DO SINAL PELO PERIODOGRAMA MÉDIO

Os resultados obtidos para 10 realizações independentes do ruído branco são apresentados na Tabela 5.

	512 pts	512 pts	512 pts	512 pts	256 pts	128 pts
Realização	$L = 4$	$L = 7$	$L = 13$	$L = 17$	$L = 17$	$L = 17$
1	1,6410	0,2648	0,4487	0,5266	1,0860	0,9099
2	0,5788	0,9863	1,2300	1,2020	1,3750	1,0340
3	0,4367	1,4550	0,7670	1,4990	0,8393	1,0590
4	1,5230	1,1930	1,2640	1,0840	1,0890	0,9620
5	0,5934	0,6784	1,5810	1,6040	1,1070	1,2220
6	1,1120	1,1610	1,0030	1,1170	1,2370	1,1130
7	0,8918	1,1090	1,3330	1,2990	1,4130	1,0360
8	0,5087	0,4656	0,4512	0,4663	0,6127	0,7642
9	1,1990	1,2780	1,3360	1,3610	1,6170	1,0300
10	1,7280	1,4660	1,4370	1,2330	1,1200	0,8304
Recob.	0	0,5	0,75	0,8125	0,5825	0,0625

Tabela 5: Valores estimados da DSP em $f = 0, 2$.

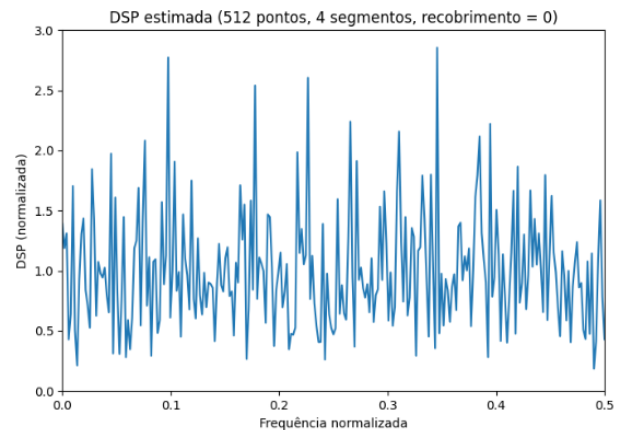


Figura 10: DSP estimada de um ruído branco (2048 pontos). A TFD foi calculada em 512 pontos distribuídos em 4 segmentos. A taxa de recobrimento é igual a zero. Esta figura corresponde à medição 1 da Tabela 5.

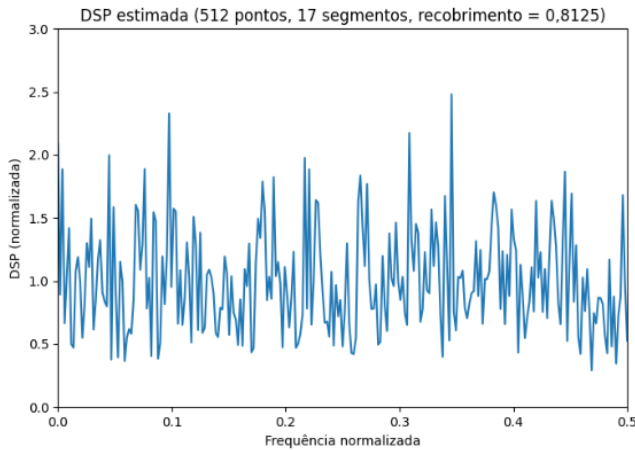


Figura 11: DSP estimada de um ruído branco (2048 pontos). A TFD foi calculada em 512 pontos distribuídos em 17 segmentos. A taxa de recobrimento é igual a 0,8125. Observa-se uma variância menor em relação à Figura 10. Esta figura corresponde à medição 1 com $L = 17$ da Tabela 5.

Calculamos, para cada um dos casos anteriores, as médias e as variâncias das 10 estimativas da DSP na frequência $f = 0,2$, conforme apresentado na Tabela 6.

	512 pts	512 pts	512 pts	512 pts	256 pts	128 pts
	$L = 4$	$L = 7$	$L = 13$	$L = 17$	$L = 17$	$L = 17$
Média	1,0212	1,0057	1,0851	1,1392	1,1496	0,9961
Variância	0,2417	0,1673	0,1624	0,1405	0,0824	0,0181
Recobrimento	0	0,5	0,75	0,8125	0,5825	0,0625

Tabela 6: Médias e variâncias das estimativas da densidade espectral de potência de um ruído branco na frequência $f = 0,2$, avaliando a dependência do viés e da variância em função do número de segmentos L , do comprimento dos segmentos N e da taxa de recobrimento.

Para $N = 512$ constante, observa-se que a variância diminui à medida que aumenta o número de segmentos L (de 4 para 17). Esse comportamento está de acordo com a teoria do método de Welch, segundo a qual a variância do estimador espectral decresce aproximadamente de forma inversamente proporcional ao número de médias realizadas (Kay, 1988; Stoica; Moses, 2005).

O viés, em princípio, não deveria variar significativamente nesse caso, pois depende principalmente do comprimento do segmento (que permanece constante) e da janela aplicada. As variações observadas nas médias (entre 1,0212 e 1,1392) podem ser atribuídas à variabilidade estatística decorrente do número limitado de realizações (10 amostras).

Para $L = 17$ constante e variando o comprimento dos segmentos (512, 256 e 128 pontos), observa-se redução significativa da variância à medida que N diminui. Esse resultado ocorre porque, ao

reduzir N , aumenta-se o número efetivo de médias independentes ao longo da sequência total de 2048 pontos, reduzindo assim a variância da estimativa. Contudo, essa redução de variância ocorre ao custo de menor resolução espectral e potencial aumento do viés.

Quanto ao recobrimento, o aumento da taxa de recobrimento permite utilizar maior número de segmentos, contribuindo para a redução da variância. Entretanto, a redução não é ilimitada, pois segmentos muito sobrepostos tornam-se altamente correlacionados, diminuindo o ganho estatístico efetivo. Assim, o aumento excessivo do recobrimento implica maior custo computacional e de armazenamento, com ganhos marginais na redução da variância (Kay, 1988; Stoica; Moses, 2005).

Por fim, ressalta-se que o número de realizações consideradas (10) pode não ser suficiente para estimar com precisão o viés e a variância reais do estimador, sendo recomendável ampliar o número de medições para análises estatísticas mais robustas.

ESTUDO DE UM RUÍDO COLORIDO

A resposta em frequência (módulo do ganho) desse filtro é apresentada na Figura 12. A Figura 13 mostra a forma temporal do ruído colorido gerado.

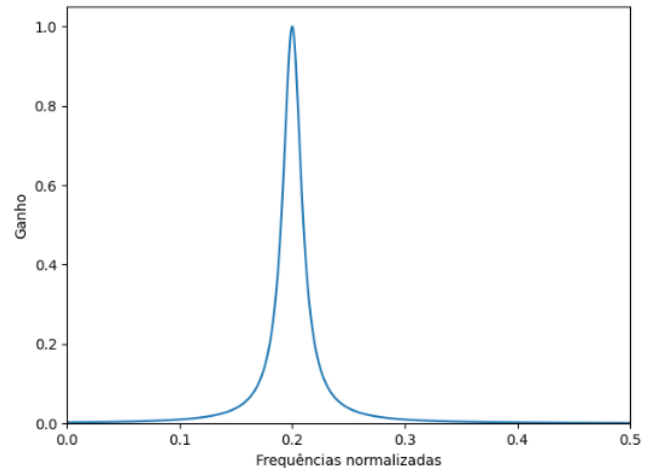


Figura 12: Ganho em frequência de um filtro ressonante de segunda ordem. Frequência de ressonância igual a 0,2 e largura de banda a -3 dB igual a 0,01.

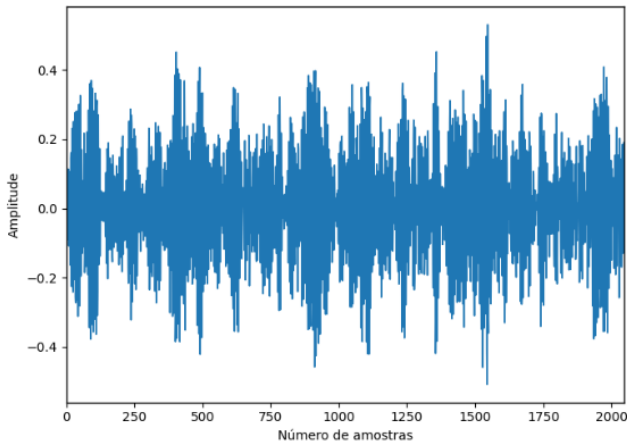


Figura 13: Ruído (2048 amostras) obtido pela filtragem de um ruído branco pelo filtro apresentado na Figura 12.

A Figura 14 apresenta o histograma da distribuição temporal das amplitudes do ruído colorido.

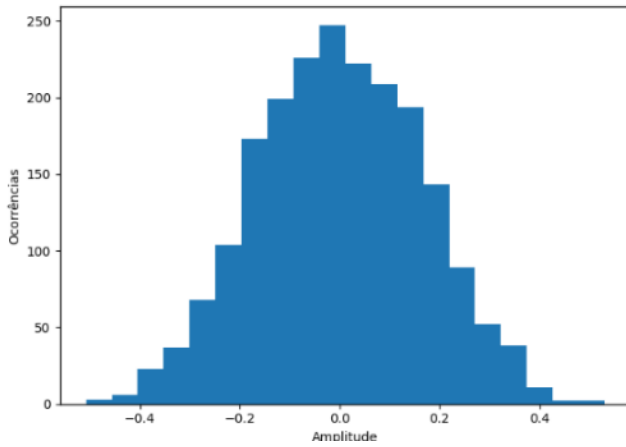


Figura 14: Ruído gaussiano. O ruído gaussiano filtrado continua sendo um ruído gaussiano. Observa-se que a variância do ruído é menor do que a do ruído branco.

Pode-se observar que o sinal gerado apresenta distribuição gaussiana. Ressalta-se que a filtragem linear de um ruído gaussiano resulta, necessariamente, em um ruído gaussiano, pois combinações lineares de variáveis gaussianas permanecem gaussianas (Oppenheim; Willsky, 2010).

Na Figura 13, observa-se que a variância do ruído colorido é menor do que a do ruído branco de entrada. Isso ocorre porque o filtro ressonante não possui ganho unitário em toda a faixa de frequências, atenuando parte do conteúdo espectral do sinal. Como consequência, a energia na saída do filtro é inferior à energia do sinal na entrada (Oppenheim; Willsky, 2010).

ANÁLISE DO RUÍDO PELO CORRELOGRAMA

a) Estimativa da função de autocorrelação

A Figura 15 apresenta a função de autocorrelação estimada de um ruído colorido, sem ponderação temporal. A Figura 16 mostra um detalhe dessa função no intervalo de atrasos entre -50 e $+50$.

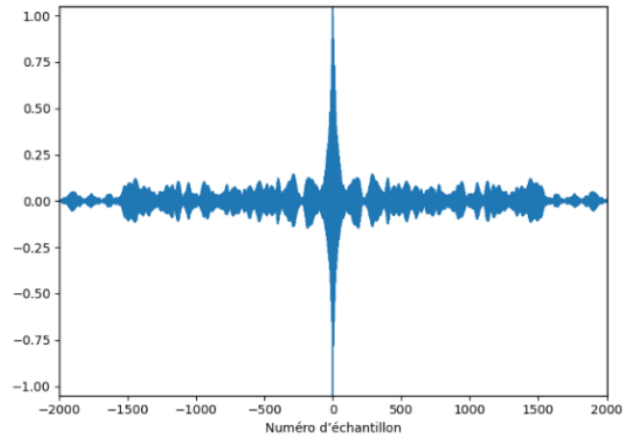


Figura 15: Função de autocorrelação estimada de um ruído colorido sem ponderação temporal.

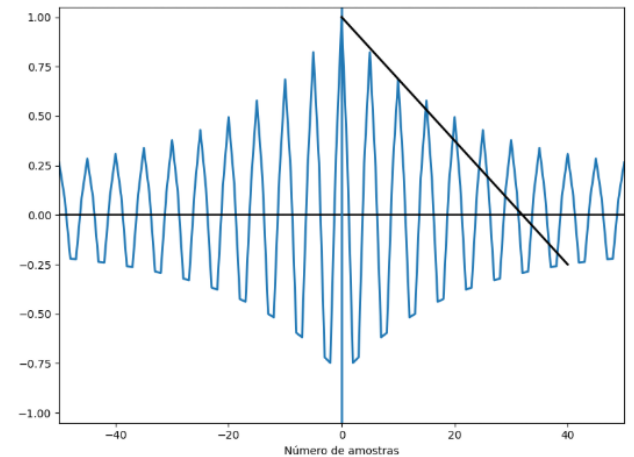


Figura 16: Detalhe da função de autocorrelação estimada de um ruído colorido para atrasos entre -50 e $+50$. A reta é utilizada para estimar τ_m .

Na região central da função de autocorrelação, observa-se uma oscilação com frequência $f = 0,2$, associada a um decaimento exponencial caracterizado por $\tau_m = 35$. Teoricamente, o tempo de correlação é dado por T_c , sendo neste caso $T_c = 2\tau_m = 70$.

Para atrasos superiores a T_c , a estimativa da autocorrelação apresenta erro significativo, devido ao número finito de amostras. A Figura 17 mostra que, para esses atrasos, a função deixa de seguir o comportamento exponencial esperado, embora as oscilações na frequência $f = 0,2$ ainda sejam preservadas.

A potência do ruído colorido (0,027) é inferior à do ruído branco (Figura 1). Isso ocorre porque a potência do sinal na saída do filtro é igual à potência do ruído branco de entrada multiplicada pela área da função de transferência ao quadrado do filtro ressonante, a qual é menor que 1 (Oppenheim; Willsky, 2010).

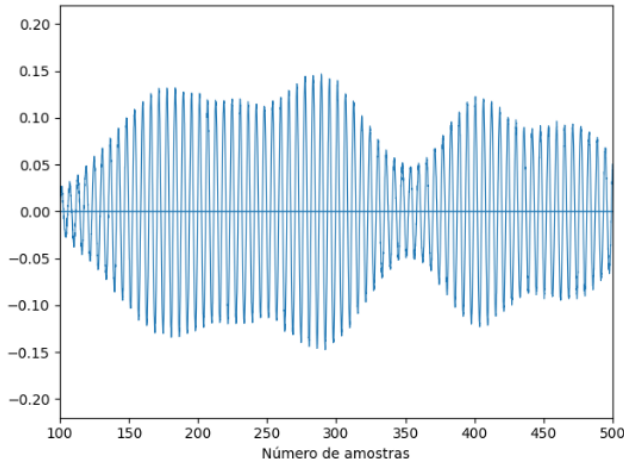


Figura 17: Detalhe da função de autocorrelação estimada de um ruído colorido para atrasos superiores a 100. Observa-se que o comportamento deixa de ser exponencial, embora as oscilações na frequência $f = 0,2$ sejam mantidas.

b) Estimativa da DSP

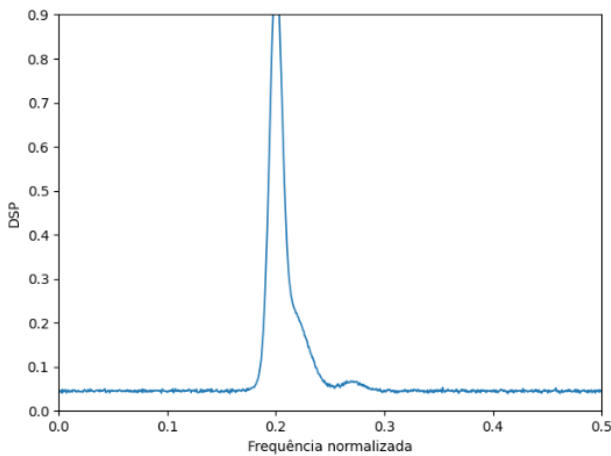


Figura 18: DSP estimada de um ruído colorido a partir de 128 pontos da função de autocorrelação não ponderada.

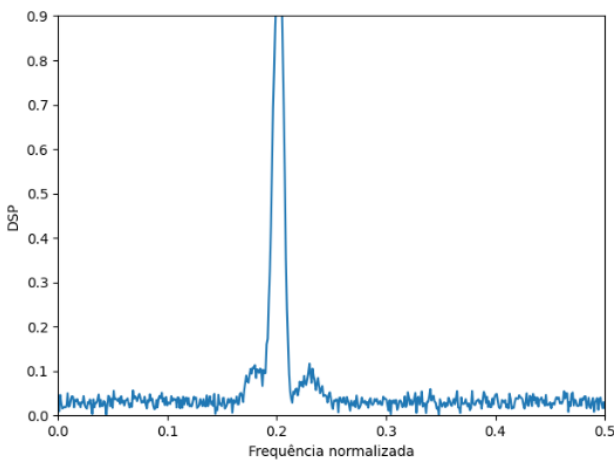


Figura 19: DSP estimada de um ruído colorido a partir de 256 pontos da função de autocorrelação não ponderada.

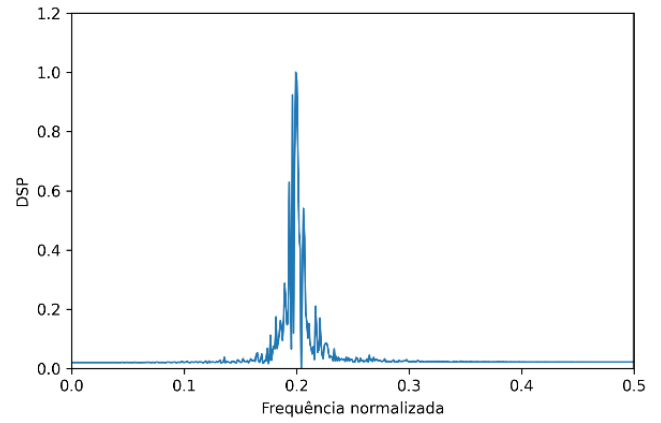


Figura 20: DSP estimada de um ruído colorido a partir de 512 pontos da função de autocorrelação não ponderada.

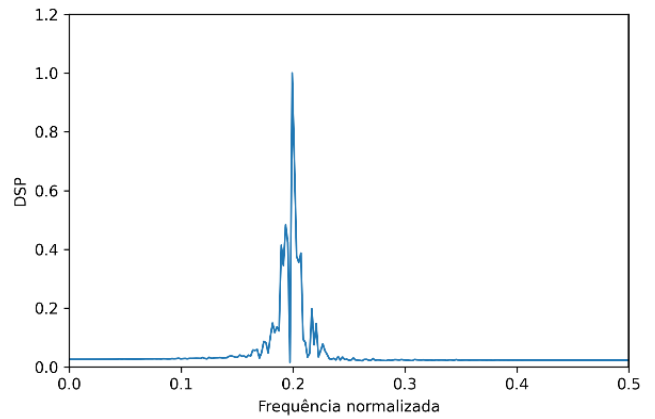


Figura 21: DSP estimada de um ruído colorido a partir de 1024 pontos da função de autocorrelação não ponderada.

A aplicação de uma função de apodização tem como efeito a redução da variância da estimativa espectral, resultando em um alisamento (suavização) da DSP estimada. Entretanto, esse processo introduz viés na estimativa. Esse alisamento pode ser interpretado como uma redução da resolução em frequência do estimador.

ANÁLISE DO RUÍDO POR MODELAGEM AUTORREGRESSIVA

Ordem	2	4	6	Filtro
Frequência de ressonância	0,2021	0,19780	0,2026	0,200
Amplitude na ressonância	0,6857	0,59980	0,6077	1,000
Amplitude em contínuo	0,0195	0,01335	0,0102	—
Banda passante -6 dB	0,0110	0,0200	0,0240	0,017

Tabela 7: Modelagem autorregressiva da DSP de um ruído colorido com janela temporal retangular. São apresentados os parâmetros estimados para modelos AR de ordem 2, 4 e 6, bem como os valores correspondentes ao filtro original.

Observa-se que o modelo AR de ordem 4 apresenta o melhor

compromisso entre complexidade e capacidade de ajuste, pois seus parâmetros estimados estão mais próximos daqueles do filtro ressonante de referência, cuja frequência de ressonância é $f_0 = 0,2$.

Esse comportamento está diretamente relacionado aos efeitos de borda na estimação AR. O modelo AR assume implicitamente que o processo é estacionário e que a predição pode ser realizada com base em amostras passadas infinitas. No entanto, na prática, trabalha-se com registros finitos:

- No início da janela de análise, não há amostras passadas suficientes, sendo necessário assumir condições iniciais (tipicamente valores nulos ou extrapolações), o que introduz erro na estimação.
- No final da janela, o modelo utiliza apenas as amostras disponíveis, limitando a qualidade da predição e afetando a consistência estatística.

Esses efeitos tornam-se mais pronunciados quando o número de amostras é pequeno, como no caso de 64 pontos, resultando em estimativas espectrais com maior erro e distorção.

Além disso, a estimação dos coeficientes AR (por métodos como Yule-Walker ou Burg) torna-se menos robusta com poucas amostras, aumentando a sensibilidade a ruído e a erros de modelagem (Kay, 1988; Stoica; Moses, 2005).

Nessas condições, a utilização de janelas de ponderação temporal pode reduzir os efeitos de borda, ao atenuar a contribuição das amostras nas extremidades do sinal, melhorando a estabilidade da estimação.

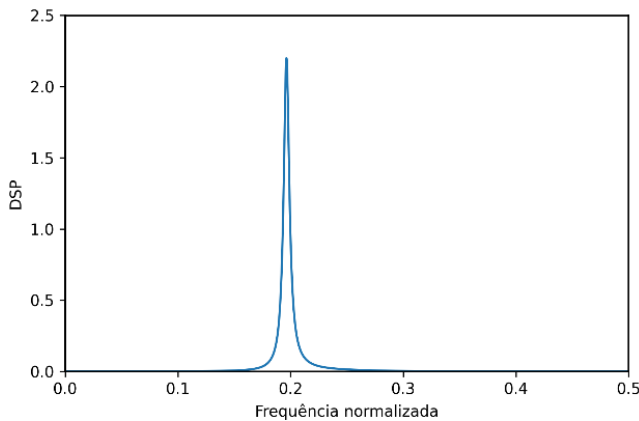


Figura 22: DSP de um sinal de 128 pontos, estimada sem ponderação temporal, utilizando um modelo AR de ordem 4.

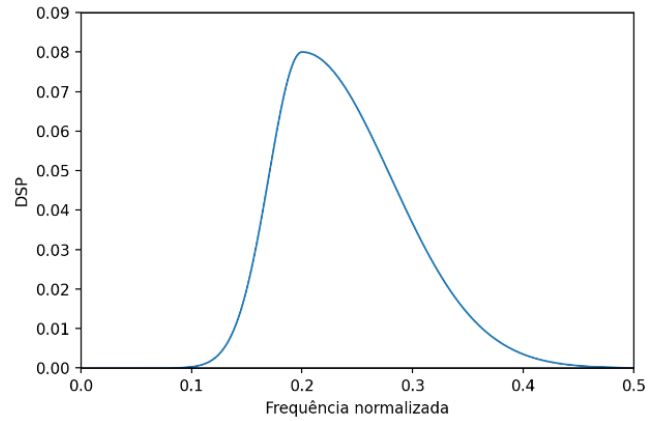


Figura 23: DSP de um sinal de 64 pontos, estimada por um modelo AR de ordem 4. O modelo apresenta desempenho insatisfatório devido aos efeitos de borda associados ao tamanho reduzido da janela de análise.

ESTUDO DE UMA SENOIDE IMERSA EM RUÍDO BRANCO

SINAL COM RSB = 0 DB

A Figura 24 apresenta a realização temporal desse sinal. Observa-se que, apesar do nível de ruído ser elevado, ainda é possível identificar visualmente a presença da componente senoidal, embora parcialmente mascarada pelas flutuações aleatórias do ruído.

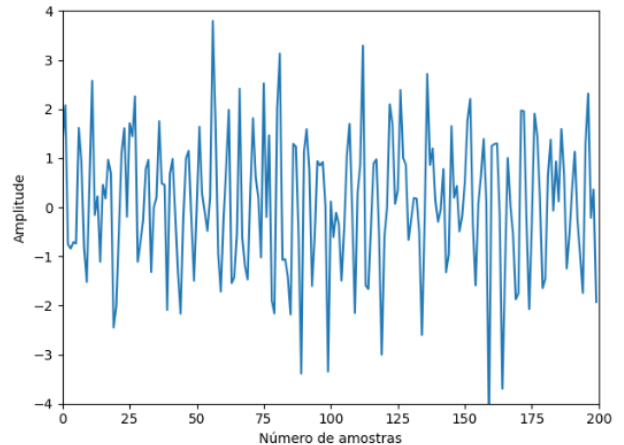


Figura 24: Sinal composto por ruído branco e uma senoide de frequência $f_0 = 0,2$, com RSB = 0 dB, para 2048 amostras. A potência do ruído é igual à potência do sinal senoidal.

ANÁLISE PELA TRANSFORMADA DE FOURIER

A Figura 25 apresenta o espectro do sinal obtido por meio da Transformada Discreta de Fourier, calculada via FFT.

No domínio da frequência, observa-se claramente um pico espectral na frequência $f_0 = 0,2$, correspondente à componente senoidal. Por outro lado, o ruído branco, que possui densidade espectral aproximadamente constante (espectro plano), não se destaca visualmente no espectro, aparecendo como um nível de fundo distribuído ao longo de todas as frequências.

Esse resultado evidencia uma propriedade importante da análise espectral: mesmo na presença de ruído com potência igual à do sinal (RSB = 0 dB), componentes determinísticas periódicas podem ser identificadas no domínio da frequência devido à sua concentração de energia em frequências específicas (Kay, 1988; Stoica; Moses, 2005).

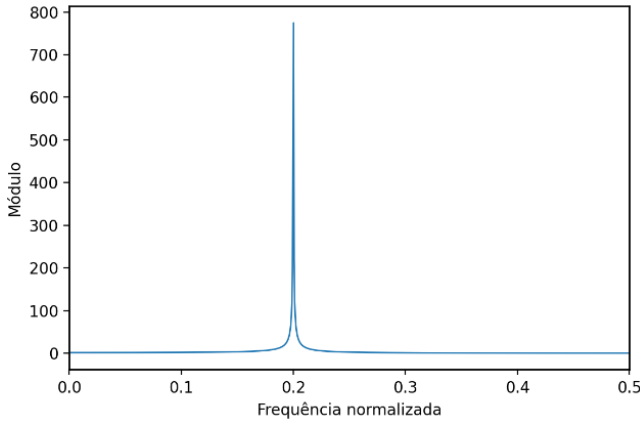


Figura 25: Espectro do sinal (FFT) composto por ruído branco e uma senoide. Observa-se um pico em $f_0 = 0,2$, correspondente à senoide, enquanto o ruído se manifesta como um nível de fundo aproximadamente uniforme ao longo do espectro. Devido à concentração de energia da senoide em uma frequência específica, sua presença se destaca, enquanto o ruído não apresenta estrutura espectral visível.

ANÁLISE PELO CORRELOGRAMA

A função de autocorrelação foi estimada em toda a sua extensão, sem ponderação temporal, conforme apresentado na Figura 26. Nessa representação, é possível distinguir claramente a contribuição de duas componentes no sinal: um pico centrado em $k = 0$, associado ao ruído branco (comportamento tipo delta de Dirac), e uma estrutura em forma triangular, correspondente à autocorrelação da senoide observada através de uma janela retangular.

A Figura 27 apresenta um zoom em torno de $k = 0$, evidenciando o pico central e uma série de picos laterais associados à componente senoidal. Esses picos apresentam periodicidade igual a $T = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{0,2} = 5$ amostras. Observa-se ainda que a envoltória desses picos possui forma triangular, resultado da autocorrelação da janela retangular aplicada ao sinal (Oppenheim; Willsky, 2010).

A Figura 28 mostra a densidade espectral de potência (DSP) estimada a partir da função de autocorrelação. Observa-se claramente a presença da componente senoidal, manifestada como um pico espectral bem definido, enquanto o ruído não é distinguível visualmente, aparecendo como um nível de fundo aproximadamente uniforme.

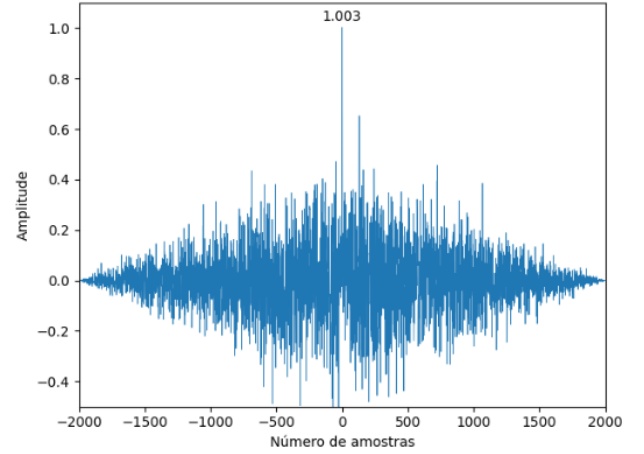


Figura 26: Função de autocorrelação de um sinal composto por uma senoide de frequência $f_0 = 0,2$ somada a ruído branco, sem ponderação temporal. Observa-se um pico em $k=0$ associado ao ruído e uma envoltória triangular correspondente à autocorrelação da senoide sob janela retangular.

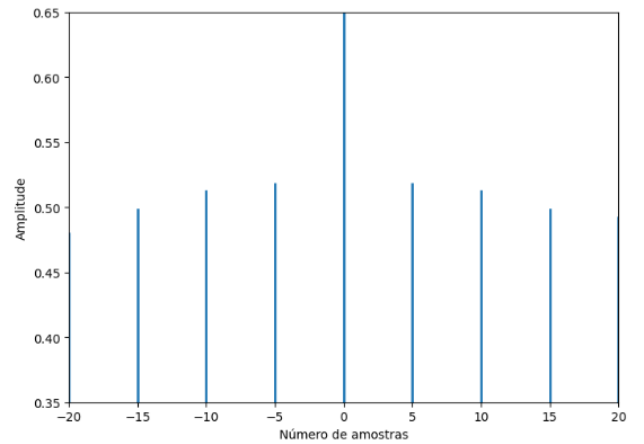


Figura 27: Ampliação da função de autocorrelação em torno de $k = 0$. Observam-se picos periódicos associados à senoide, com período $T = 5$, e envoltória triangular decorrente do efeito da janela retangular.

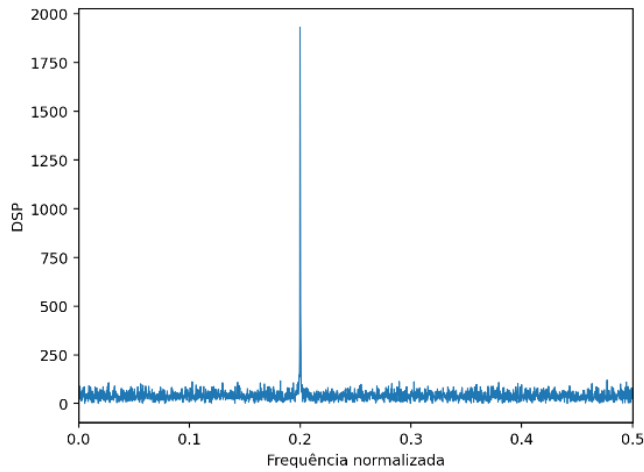


Figura 28: DSP estimada de um sinal composto por senoide de frequência $f_0 = 0,2$ somada a ruído branco, utilizando 2048 pontos. A componente senoidal é claramente identificável, enquanto o ruído aparece como um fundo espectral aproximadamente uniforme.

SINAL COM $RSB = -20$ DB

Análise pelo periodograma médio

A densidade espectral de potência (DSP) desse sinal foi inicialmente estimada utilizando uma única janela de 2048 pontos, sem ponderação temporal (janela retangular). Como mostrado na Figura 29, a estimativa bruta da DSP não permite identificar a presença da componente senoidal, devido à elevada variância do estimador e ao baixo nível do sinal em relação ao ruído.

Em seguida, aplicou-se o método do periodograma médio (método de Welch), utilizando três segmentos de 512 pontos. Nesse caso, já é possível observar um pico espectral na frequência $f_0 = 0,2$, com amplitude aproximada de 5,6 (Figura 30).

Ao aumentar o número de segmentos para 15 (também com 512 pontos), a detecção da senoide torna-se mais clara, embora com redução da amplitude estimada do pico para aproximadamente 3,8 (Figura 31). Essa redução decorre do efeito de suavização introduzido pela média dos periodogramas.

O efeito principal do periodograma médio é a redução da variância da estimativa espectral associada à componente aleatória do sinal, permitindo a detecção de componentes determinísticas mesmo em condições de baixa RSB.

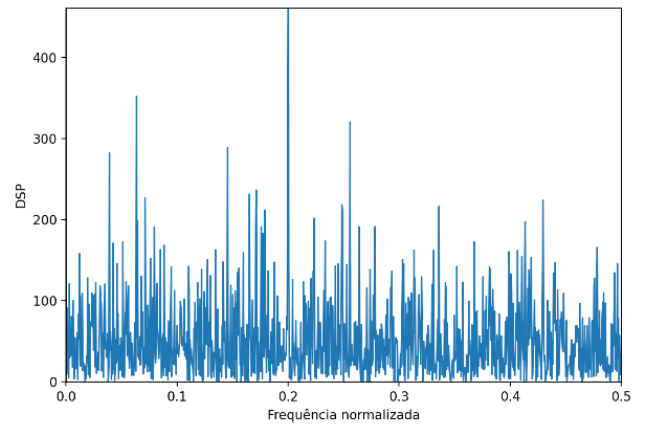


Figura 29: Estimativa da DSP de um sinal com $RSB = -20$ dB, utilizando uma única janela de 2048 pontos sem ponderação temporal. A presença da senoide não é detectável devido à elevada variância do estimador.

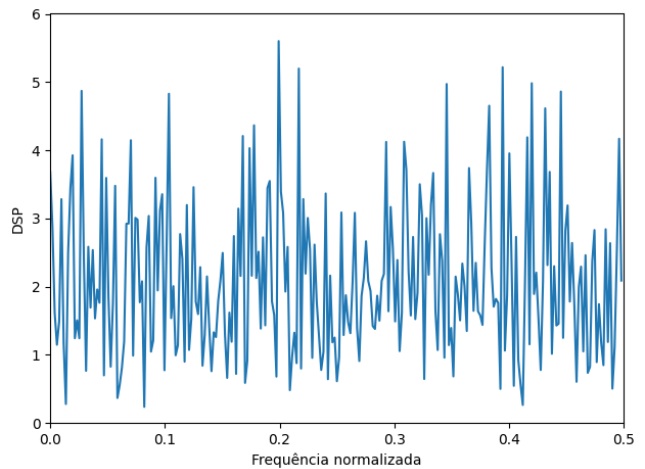


Figura 30: Estimativa da DSP de um sinal com $RSB = -20$ dB, utilizando três segmentos de 512 pontos sem ponderação temporal. Observa-se o surgimento de um pico espectral em $f_0 = 0,2$, com amplitude aproximada de 5,6.

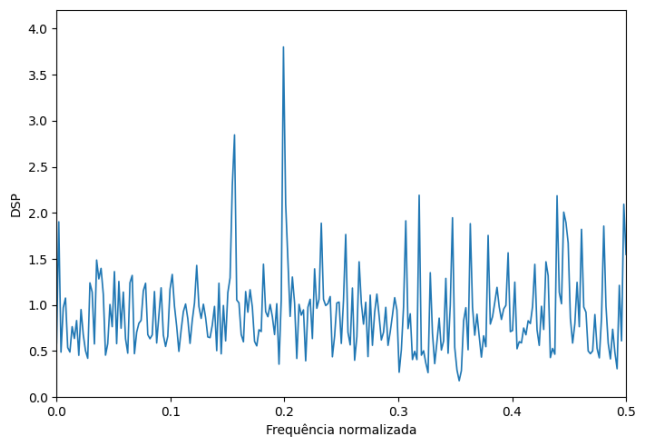


Figura 31: Estimativa da DSP de um sinal com $RSB = -20$ dB, utilizando 15 segmentos de 512 pontos sem ponderação temporal. A senoide é claramente detectada, com amplitude espectral aproximada de 3,8, evidenciando a redução da variância da estimativa.

ANÁLISE PELO CORRELOGRAMA

Estimou-se a função de autocorrelação do sinal, em toda a sua extensão e sem ponderação temporal, conforme apresentado na Figura 32. Observa-se similaridade com o caso anterior (Figura 26), porém com maior contribuição do ruído em relação à componente senoidal. Nessa condição, a estrutura triangular associada à autocorrelação da senoide não é claramente identificável.

Na ampliação mostrada na Figura 33, não se observam de forma clara as oscilações da autocorrelação associadas à senoide, devido à predominância do ruído ($RSB = -20 \text{ dB}$).

A densidade espectral de potência (DSP) foi estimada a partir de 256 pontos da função de autocorrelação não ponderada (Figura 34). Observa-se um pico na frequência $f = 0,2$, com amplitude espectral de aproximadamente 2,5. O valor do quociente entre esse pico e o maior valor fora dessa frequência é 1,13, o que não permite distinguir de forma confiável a presença de uma única componente espectral dominante.

Em seguida, a DSP foi estimada a partir de aproximadamente 256 pontos da função de autocorrelação, considerando apenas atrasos positivos ($k > 0$) (Figura 35). Nesse caso, observa-se um pico na frequência $f = 0,2$ com amplitude aproximada de 1,2. O quociente entre esse pico e o maior valor fora dessa frequência é igual a 2, permitindo melhor discriminação da componente senoidal.

O procedimento foi repetido para três intervalos distintos da função de autocorrelação, e os resultados são apresentados na Tabela 8.

Segmento (Tranche)	Pico 1	Pico 2	Razão
1	1,2	0,6	2,00
2	0,9	0,8	1,12
3	0,8	0,5	1,60

Tabela 8: Valores estimados da DSP na frequência $f = 0,2$, obtidos a partir de aproximadamente 256 pontos da função de autocorrelação para atrasos positivos, considerando diferentes intervalos (tranches). O sinal possui $RSB = -20 \text{ dB}$.

Observa-se que a amplitude dos picos associados à frequência $f = 0,2$ diminui à medida que se consideram intervalos mais distantes da origem ($k = 0$). Esse comportamento decorre da redução da amplitude da função de autocorrelação com o aumento do atraso, o que compromete a qualidade da estimativa espectral.

Como a autocorrelação de uma senoide é periódica, a frequência pode ser estimada a partir de diferentes intervalos da função de autocorrelação. Entretanto, ao utilizar intervalos afastados da origem,

a estimativa torna-se menos precisa devido à menor relação sinal-ruído nessas regiões. Por outro lado, intervalos próximos da origem apresentam maior influência do ruído branco, associado ao pico em $k = 0$ (Kay, 1988; Oppenheim; Willsky, 2010).

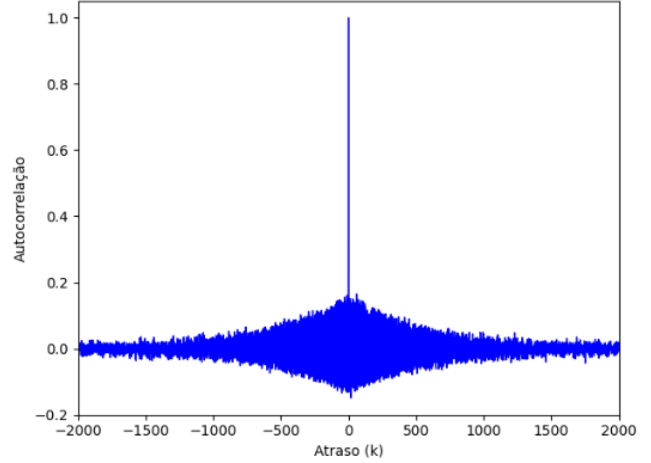


Figura 32: Estimativa da função de autocorrelação de um sinal composto por senoide e ruído branco ($RSB = -20 \text{ dB}$), sem ponderação temporal. Observa-se semelhança com o caso de maior RSB, porém com maior contribuição do ruído. A estrutura triangular associada à senoide não é claramente identificável.

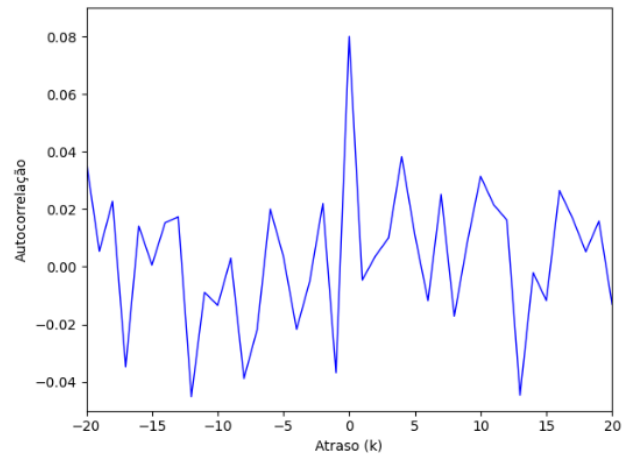


Figura 33: Detalhe da função de autocorrelação em torno de $k = 0$ para um sinal com $RSB = -20 \text{ dB}$. Não se observam claramente as oscilações associadas à senoide. O pico em $k = 0$ corresponde à contribuição do ruído branco.

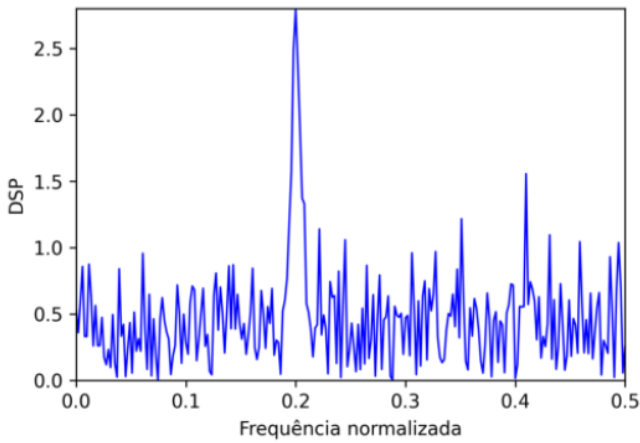


Figura 34: Estimativa da DSP a partir de 256 pontos da função de autocorrelação sem ponderação temporal. Observa-se um pico na frequência $f_0 = 0,2$, com amplitude espectral aproximada de 2,5. O quociente entre esse pico e o maior valor fora dessa frequência é 1,13, o que limita a distinção da componente senoidal.

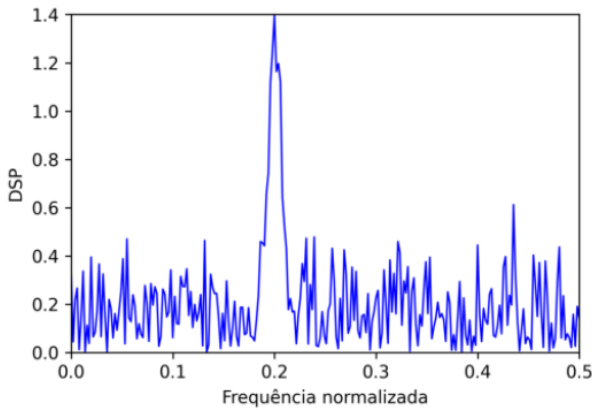


Figura 35: Estimativa da DSP a partir de aproximadamente 256 pontos da função de autocorrelação para atrasos positivos ($k > 0$). Observa-se um pico em $f_0 = 0,2$, com amplitude espectral aproximada de 1,2. O quociente entre esse pico e o maior valor fora dessa frequência é 2, permitindo melhor discriminação da componente senoidal.

CONCLUSÃO

Neste trabalho foram analisadas diferentes técnicas clássicas de estimação espectral aplicadas a sinais estocásticos e determinísticos imersos em ruído, incluindo o correlograma, o periodograma médio (método de Welch) e a modelagem autorregressiva.

No estudo do ruído branco, verificou-se que o periodograma simples apresenta elevada variância, tornando inadequada a inferência direta da densidade espectral de potência (DSP) a partir de uma

única realização. A utilização de técnicas de suavização, como o janelamento no domínio da autocorrelação e o periodograma médio, mostrou-se eficaz na redução da variância do estimador. Observou-se experimentalmente o compromisso fundamental entre variância e resolução espectral: a redução da variância ocorre ao custo de perda de resolução em frequência ou introdução de viés.

A análise da função de autocorrelação confirmou o comportamento teórico do ruído branco, com concentração de energia no atraso nulo. A aplicação de janelas temporais, como a de Hanning, reduziu o tempo efetivo de integração (T_i), resultando em aumento da variância dos estimadores, conforme previsto teoricamente, ainda que efeitos de amostragem finita tenham introduzido discrepâncias em algumas medições.

No estudo do ruído colorido, gerado por filtragem linear de ruído branco, verificou-se a preservação da gaussianidade e a modificação da estrutura de correlação temporal. A função de autocorrelação apresentou comportamento oscilatório com decaimento exponencial, refletindo as propriedades do filtro ressonante. A DSP estimada evidenciou claramente a concentração espectral em torno da frequência de ressonância. A modelagem autorregressiva demonstrou capacidade de estimar parâmetros espectrais com boa precisão para ordens adequadas, sendo observado que modelos de ordem intermediária (AR-4) apresentaram melhor ajuste. Também foi evidenciado o impacto do tamanho da amostra na robustez da estimação, especialmente devido a efeitos de borda.

No caso de uma senoide imersa em ruído branco, verificou-se que a Transformada de Fourier permite a identificação de componentes determinísticas mesmo em condições de $RSB = 0 \text{ dB}$, devido à concentração espectral da senoide. Para $RSB = -20 \text{ dB}$, a detecção direta via FFT torna-se inviável, sendo necessário recorrer a técnicas de redução de variância, como o método de Welch. O aumento do número de segmentos permitiu reduzir a variância da estimativa e tornar detectável a componente senoidal.

A análise via correlograma mostrou-se complementar, permitindo identificar a periodicidade da senoide mesmo em condições adversas de ruído, embora com limitações associadas à variância da estimativa e à degradação da autocorrelação para atrasos elevados. A utilização de subconjuntos da autocorrelação (k positivos) demonstrou melhora na discriminação espectral, evidenciando a importância da seleção adequada da região de análise.

De forma geral, os resultados confirmam os princípios fundamentais da análise espectral:

- I: a variância dos estimadores é fortemente dependente do número de amostras efetivas e do número de médias realizadas;

- II:** há um compromisso intrínseco entre resolução espectral, viés e variância;
- III:** o desempenho das técnicas depende criticamente das condições de relação sinal-ruído e do comprimento do sinal disponível.

Por fim, destaca-se que o número limitado de realizações utilizadas no estudo ($N = 10$) impõe restrições à robustez estatística dos resultados, sendo recomendável a utilização de um número maior de amostras para validação quantitativa mais precisa dos estimadores analisados.

-
- [1] KAY, Steven M. **Modern spectral estimation: theory and application**. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall, 1988.
- [2] OPPENHEIM, Alan V.; SCHAFER, Ronald W. **Processamento em tempo discreto de sinais**. 3. ed. São Paulo: Pearson

- Education do Brasil, 2012.
- [3] OPPENHEIM, Alan V.; WILLSKY, Alan S. **Sinais e sistemas**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- [4] STOICA, Petre; MOSES, Randolph L. **Spectral analysis of signals**. Upper Saddle River, NJ: Pearson, Prentice Hall, 2005.

Notas Técnicas é uma publicação de trabalhos técnicos relevantes, das diferentes áreas da física e afins, e áreas interdisciplinares tais como: Química, Computação, Matemática Aplicada, Biblioteconomia, Eletrônica e Mecânica entre outras.

Cópias desta publicação podem ser obtidas diretamente na página web <http://revistas.cbpf.br/index.php/nt> ou por correspondência ao:

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Área de Publicações
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150 – 4^o andar
22290-180 – Rio de Janeiro, RJ
Brasil
E-mail: alinecd@cbpf.br/valeria@cbpf.br
<http://portal.cbpf.br/publicacoes-do-cbpf>

Notas Técnicas is a publication of relevant technical papers, from different areas of physics and related fields, and interdisciplinary areas such as Chemistry, Computer Science, Applied Mathematics, Library Science, Electronics and Mechanical Engineering among others.

Copies of these reports can be downloaded directly from the website <http://notastecnicas.cbpf.br> or requested by regular mail to:

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Área de Publicações
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150 – 4^o andar
22290-180 – Rio de Janeiro, RJ
Brazil
E-mail: alinecd@cbpf.br/valeria@cbpf.br
<http://portal.cbpf.br/publicacoes-do-cbpf>