ISSN 0029-3865

Notas de Física

CBPF-NF-001/25
February 2025

As transformações de Galileu a partir das leis de Newton

Francisco Caruso e Vitor Oguri

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

As transformações de Galileu a partir das leis de Newton

Francisco Caruso;[1] *Vitor Oguri*[2]

[1] Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Coordenação de Física de Altas Energias, 22290-180, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.

[2] Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares, 20550-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Resumo

Mostra-se que as expressões matemáticas das transformações lineares de Galileu podem ser deduzidas a partir do pressuposto que tal transformação exista e da imposição do princípio da invariância de Galileu às leis de Newton, sem necessariamente considerar as hipóteses de homogeneidade e isotropia do espaço, e da homogeneidade do tempo.

Palavras-chave: 2ª lei de Newton; Mecânica; Transformações de Galileu.

Abstract

It is shown that the mathematical expressions of Galileo's linear transformations can be deduced based on the assumption that such a transformation exists and the imposition of Galileo's principle of invariance to Newton's laws, without necessarily considering the hypotheses of homogeneity and isotropy of space, and of the homogeneity of time.

Keywords: Newtons' second law; Mechanics; Galileo transformations.

Recentemente, foi publicado um artigo [1], no qual se mostra que a equação de d'Alembert é covariante tanto sob as transformações de Galileu (no caso dos fenômenos acústicos) quanto sob as de Lorentz (para os fenômenos eletromagnéticos no vácuo). Não há contradição nisso. Os fenômenos descritos por ondas mecânicas em uma ou três dimensões espaciais são descritos por essa equação, sem a necessidade de abandonar a hipótese de que o tempo é absoluto na Mecânica Clássica. Isto, no entanto, como foi mostrado, só é verdade se a velocidade de fase do som depender da velocidade do observador.

Por outro lado, mostra-se também que a mesma equação de d'Alembert é covariante sob as transformações de Lorentz se a velocidade de fase da luz (no vácuo) não depender do observador. Esse é um exemplo didático que evidencia o quanto, dada uma equação básica da Física, pode-se aprender sobre as particularidades das transformações que mantêm a sua forma invariante.

Nos dois casos aqui citados, tanto as transformações de coordenadas de Galileu quanto de Lorentz são lineares e formam grupos matemáticos. O que as difere entre si é a estrutura básica do espaço-tempo, com reflexos nas relações entre as coordenadas para dois referenciais inerciais observando o mesmo fenômeno. No caso clássico, admite-se um espaço euclideano e um tempo absolutos, *à la* Newton; no caso relativístico, Einstein introduziu a relatividade entre o espaço e o tempo, que passam a não ser independentes, integrando, então, um espaço-tempo quadridimensional.

É claro que ao se considerar uma descrição dinâmica a partir de uma equação diferencial (ou um conjunto delas) como ponto de partida de qualquer análise sobre sua estrutura, se está desconsiderando a história de sua construção. Entretanto, por construção, se ela descreve corretamente os fenômenos físicos aos quais se aplica, tal equação básica deve ser compatível com os conceitos de espaço e tempo vigentes à época. Isso é particularmente verdade para o conjunto das leis de Newton, que pressupõem que tanto o espaço quanto o tempo sejam absolutos. Mas isso, em um primeiro momento, não é verdadeiro para o sistema de equações de Maxwell. Por exemplo, refletindo sobre o significado da teoria de Maxwell, Heinrich Hertz afirma que: *A teoria de Maxwell é o sistema de equações de Maxwell.* Isso quer dizer que esse sistema de equações diferenciais para os campos elétricos e magnéticos, estabelecidas a partir de uma visão mecanicista de cunho newtoniano, constitui a base da explicação causal dos fenômenos eletromagnéticos, independentemente de como foram obtidas. Esses campos adquirem um novo significado físico, não obstante o fato de as suas equações terem sido determinadas com base em uma visão mecanicista do Eletromagnetismo, que se demonstrou ser incorreta. Mas foi exatamente esta incongruência que levou Einstein a reconsiderar a estrutura do Eletromagnetismo à luz dos conceitos clássicos de espaço e tempo.

Por outro lado, costuma-se dizer que a Teoria da Relatividade de Einstein, embora tendo sido elaborada tendo a covariância do Eletromagnetismo como paradigma, acabou se transformando em uma teoria para o espaço-tempo. Em especial, Max Born [2], cita o seguinte trecho de uma carta de Einstein:

> *A nova característica [da teoria da relatividade de 1905] foi a compreensão do facto de que as transformações de Lorentz transcendem suas conexões com as equações de Maxwell e, em geral, dizem respeito à natureza do espaço e do tempo. Um novo resultado é que a "invariância de Lorentz" é uma condição geral para qualquer teoria física. Isso foi para mim de particular importância porque eu já tinha descoberto anteriormente que a teoria de Maxwell não levava em conta a microestrutura da radiação e, portanto, não poderia ter validade geral.*

Nas palavras de Arthur I. Miller [3],

> *Enquanto Lorentz e Poincaré consideraram as transformações de Lorentz como um postulado separado necessário para derivar a covariância da teoria eletromagnética,* [...] *Einstein deduziu estas transformações a partir de dois axiomas que diziam respeito à "natureza do espaço e do tempo em geral".*

Dito isso, apenas o caso da Mecânica, associado às transformações de Galileu, será tratado aqui. Em contrapartida ao que foi dito anteriormente, pode-se inverter o enfoque, admitindo válidas as leis de Newton e o Princípio da Relatividade (contido na 1ª lei) e as expressões matemáticas dessas transformações desconhecidas; a partir daí, buscam-se restrições sobre essas. Assim, nesta nota didática, mostra-se que os resultados conhecidos sobre as transformações de Galileu, baseados no requerimento que as transformações entre as coordenadas cartesianas associadas a dois referenciais inerciais têm a estrutura de grupo, e na hipótese de homogeneidade espaço-temporal, estão implícitos na própria estrutura matemática da segunda lei de Newton e podem ser reveladas de uma maneira simples e intuitiva. Para isso, a equação dinâmica da Mecânica newtoniana é admitida como verdadeira e se indaga o que sua estrutura matemática pode dizer sobre as transformações de Galileu. Seriam elas únicas, por exemplo? Que expressões matemáticas podem assumir?

Em particular, o objetivo aqui é mostrar que, formalmente, as expressões matemáticas das transformações lineares de Galileu podem ser deduzidas a partir da imposição do princípio da invariância de Galileu às leis de Newton, sem necessariamente considerar as hipóteses de homogeneidade e isotropia do espaço, e da homogeneidade do tempo. A própria linearidade das transformações, é bom insistir, é deduzida a partir das leis de Newton.

Sem perda de generalidade, o texto limita-se à análise em uma dimensão espacial, e para transformações homogêneas, uma vez que qualquer transformação entre sistemas de coordenadas em referenciais inerciais sempre pode ser reduzida a uma transformação homogênea entre sistemas cartesianos de coordenadas, por meio de uma adequada translação espaço-temporal, juntamente com rotações apropriadas dos eixos espaciais, tal que a velocidade relativa dos referenciais seja ao longo de um dos eixos de coordenadas espaciais.

Considere, para tal, as seguintes transformações gerais entre as coordenadas de um ponto em um sistema cartesiano de referência $S(x,t)$ e outro $S'(x',t')$, de eixos paralelos cujas origens coincidem em $t'=t=0$, e S' se desloca em movimento de translação uniforme com relação a S, com velocidade V, na direção e sentido positivo do eixo x (Figura 1),

$$\begin{cases} x \quad \rightarrow \quad x' = f(x,t) \\ \\ t \quad \rightarrow \quad t' = g(x,t) \end{cases}$$

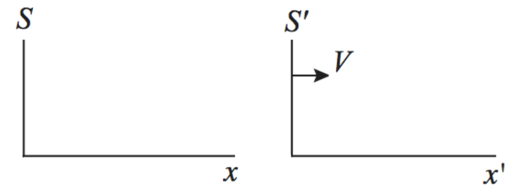

Figure 1: Sistemas de coordenadas S e S', de eixos paralelos, em dois referenciais distintos.

Neste caso, tem-se

$$\begin{cases} \mathrm{d}x' = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)\mathrm{d}t = \left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial f}{\partial t}\right]\mathrm{d}t \\ \\ \mathrm{d}t' = \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\dfrac{\partial g}{\partial t}\right)\mathrm{d}t = \left[\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial g}{\partial t}\right]\mathrm{d}t \end{cases} \tag{1}$$

Se essas são as coordenadas de uma partícula em movimento, a relação entre as velocidades em S e S' é dada por

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial f}{\partial t}}{\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial g}{\partial t}} = \frac{u}{\omega} \tag{2}$$

A relação entre a acelerações pode ser determinada por

$$\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t'^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{u}{\omega}\right) \tag{3}$$

Segundo a equação (1), $\mathrm{d}t' = \omega\,\mathrm{d}t$, então pode-se escrever equação (3) como

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{u}{\omega}\right) &= \frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega^3}\left[\omega\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) - u\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\omega^2}\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \frac{u}{\omega}\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)\right] \end{aligned}$$

Levando em conta que

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial t}\right] = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

resulta que, coletando os termos similares na equação (3),

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t'^2} \;&=\; \frac{1}{\omega^2}\left\{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{u}{\omega}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\right]+2\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}\right)-\frac{u}{\omega}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial x}\right)\right]+\right.\\ &+\;\left.\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)-\frac{u}{\omega}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)\right]+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\frac{u}{\omega}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{4}$$

Como, de acordo com a 1ª lei de Newton e o princípio da invariância, para uma partícula livre a aceleração deve ser nula em qualquer referencial inercial, a condição

$$\text{partícula livre} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t'^2}=0$$

implica que os três últimos termos da equação (4) devam ser nulos e, portanto, que as funções $f(x,t)$ e $g(x,t)$ sejam lineares em x e t, ou seja, suas respectivas derivadas parciais de segunda ordem sejam nulas, e as derivadas parciais de primeira ordem sejam constantes,

$$\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\partial f}{\partial x}=A & \qquad\dfrac{\partial f}{\partial t}=B\\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial x}=C & \qquad\dfrac{\partial g}{\partial t}=D\end{array}\right.$$

Assim, as relações entre as coordenadas podem ser escritas como

$$\left\{\begin{array}{l} f(x,t)=x'=A\,x+B\,t\\[2ex] g(x,t)=t'=C\,x+D\,t\end{array}\right.$$

em que A, B, C e D são constantes a determinar.

A relação entre as velocidades é dada por

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}=\frac{u}{\omega}=\frac{1}{\omega}\left(A\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+B\right) \tag{5}$$

e, entre a acelerações, por

$$\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t'^2}=\frac{1}{\omega^2}\left(A-\frac{u}{\omega}C\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \tag{6}$$

A imposição do princípio da invariância à 2ª lei de Newton, implica que a equação de movimento para uma partícula deve ser covariante com relação as transformações de coordenadas entre referenciais inerciais,

$$F\left(x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},t\right)=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t} \qquad\Longleftrightarrow\qquad F'\left(x',\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'},t'\right)=m'\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t'} \tag{7}$$

sendo F a força sobre a partícula segundo o referencial S, e F' a força sobre a partícula, segundo o referencial S'.

Ao se escrever a equação (7), admitiu-se, por um momento, que mesmo a massa (m) da partícula sendo constante durante o movimento percebido por um observador em S, em princípio, ela poderia parecer ter outro valor (m'), ainda constante, para um observador em S'. Ou seja, supôs-se que a massa pudesse não ser um invariante de Galileu, com o objetivo de verificar se essa hipótese lógica é compatível ou não com o princípio da invariância de Galileu.

No entanto, a Mecânica de Newton impõe um outro vínculo às forças de interação sobre uma partícula. Mesmo que a dependência funcional de uma força dependa do referencial ou do sistema de coordenadas, sua magnitude é a mesma para qualquer referencial inercial, ou seja, no sentido newtoniano, a magnitude da força é um invariante com relação às mudanças de referenciais inerciais. Nessas condições pode-se escrever:

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = m'\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t'^2} = F' \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{m'}{m}\right)\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t'^2} \tag{8}$$

Uma maneira de compatibilizar as equações (6) e (8) são as hipóteses

$$\begin{cases} m = m' \\ C = 0 \\ \omega = C\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + D = 1 \quad \Rightarrow \quad D = 1 \\ A = 1 \end{cases}$$

ou seja, que a massa e a aceleração são invariantes em mudanças de referenciais.

Para uma partícula em repouso em S', sua velocidade segundo S é igual a velocidade de S' em relação a S, ou seja,

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V \quad \Rightarrow \quad B = -V$$

Assim, obtém-se as chamadas transformações de Galileu

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ t' = t \end{cases} \tag{9}$$

Tal denominação foi cunhada pelo físico austríaco Philipp Frank, em 1908, para diferenciá-las das transformações de Lorentz [4].

Desse modo, a linearidade das transformações de Galileu tem a ver, em última análise, com a homogeneidade e isotropia do espaço.

Se a 2ª lei é interpretada como uma definição de força, a invariância da aceleração e da massa implica a invariância da força e, portanto, da própria equação de movimento que expressa esta lei.

No entanto, se a 2ª lei não é considerada meramente uma prescrição para se determinar a força sobre uma partícula, com base na observação de seu movimento, a invariância da força deve ser estabelecida de modo independente; pela análise de seu comportamento quando as grandezas envolvidas em sua definição variam em mudanças de referenciais. De fato, se a força depende de combinações invariantes da posição ou da velocidade da partícula, ou de intervalos temporais também invariantes, como é o caso de todas as forças conhecidas à época de Newton que satisfazem à 3ª lei de Newton[1] a invariância da 2ª lei está assegurada, assim como sua covariância segundo as transformações de Galileu.

Referências bibliográficas

[1] F. Caruso; V. Oguri, Sobre a covariância da equação de d'Alembert: os casos do som e da luz. *Revista Brasileira de Ensino de Física* **46**, e20240200 (2024).

[2] M. Born, *Physics in my generation* (Springer-Verlag, New York, 1969).

[3] A.I. Miller, *Albert Einstein's Special Theory of Relativity: Emergence (1905) and Early Interpretation (1905-1911)* (Addison-Wesley, Reading, 1981).

[4] P. Franck. Das Relativitätsprinzip der Mechanik und die Gleichungen für die elektromagnetischen Vorgange in bewegten Körpern (O princípio da Relatividade em Mecânica e as equações dos processos eletromagnéticos em corpos em movimento.) *Annalen der Physik* **332** (14), p. 897-902.

[1] Note-se que a maioria dessas forças não eram sequer conhecidas à época de Galileu. De fato, a lei de Hooke, a qual estabelece que, dentro de alguns limites, a distensão da mola é proporcional à força atuante sobre ela, foi descoberta pelo físico inglês Robert Hooke, em 1678, e relaciona-se com as forças harmônicas. As fórmulas sobre o atrito seco foram conhecidas a partir dos trabalhos do inventor e físico francês Guillaume Amontons, em 1699, do engenheiro francês Bernard Forest de Bélidor, em 1737, de Euler, em 1750, e de Coulomb, em 1785. Já o efeito da fricção e da viscosidade na diminuição da velocidade de objetos se deslocando na água foi notado por Newton, em seus *Principia*, em 1687. Neste mesmo ano e na mesma obra, Newton define a força da gravitação universal.

NOTAS DE FÍSICA é uma pré-publicação de trabalho original em Física.
Pedidos de cópias desta publicação devem ser enviados aos autores ou ao:

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Área de Publicações
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150 – 4º andar
22290-180 – Rio de Janeiro, RJ
Brasil
E-mail: alinecd@cbpf.br/valeria@cbpf.br
http://portal.cbpf.br/publicacoes-do-cbpf

NOTAS DE FÍSICA is a preprint of original unpublished works in Physics.
Requests for copies of these reports should be addressed to:

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Área de Publicações
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150 – 4º andar
22290-180 – Rio de Janeiro, RJ
Brazil
E-mail: alinecd@cbpf.br/valeria@cbpf.br
http://portal.cbpf.br/publicacoes-do-cbpf