

# FUNÇÕES DE GREEN PARA UMA PARTÍCULA NEUTRA DE SPIN 1/2 NUM CAMPO MAGNÉTICO

(Green's function for a neutral particle of spin 1/2 in a magnetic field)

Rafael de Lima Rodrigues<sup>(a)\*</sup>

<sup>(a)</sup> Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)

Rua Dr. Xavier Sigaud, 150, CEP 22290-180, Rio de Janeiro-RJ, Brazil

e

Arvind Narayan Vaidya<sup>b</sup>

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, RJ – 21.945-970 – Brasil

Usando o teorema espectral no contexto das funções de Green, no espaço dos momentos, deduzimos as autofunções e o espectro de energia dos estados ligados de um neutron no campo magnético de um condutor linear com corrente. Mostramos também que este sistema apresenta um novo cenário de funções de Green em mecânica quântica não relativística.

**Abstract.** Using the spectral theorem in context of Green's function in momentum space of neutrons in the magnetic field of a linear conductor with current the bound state energy spectrum and eigenfunctions are deduced. It's also pointed out that this problem present a new scenary of Green's function in non-relativistic quantum mechanics.

**Key-words:** Funções de Green; Campo magnético e neutron.

## I. INTRODUÇÃO

Um neutron, num campo magnético externo bidimensional, é um dos poucos sistema físicodescrito por função de onda de duas componenstesem mecânica quântica não-relativística que pode ser resolvido exatamente. Nada obstante, o neutron ser uma partícula neutra, o momento magnético do seu spin pode interagir com o campo magnético de um condutor linear com corrente. Os estados quânticos ligados desse sistema, o qual denominamos de neutron Ligado Magneticamente (NLM), foram investigados pela primeira vez, há cerca de vinte e quatro anos, por Pron'ko e Stroganov [1]. Eles resolveram a equação de Schrödinger independente do tempo no espaço de momentos e encontraram um espectro de energia degenerado, semelhante aos níveis de energia do átomo de hidrogênio em duas dimensões. Na Ref. [1] foi mostrado também que a degenerescência acidental do NLM está associada ao grupo de simetria dinâmica  $O(3)$ , enquanto que, como é bem conhecido, Fock [2] mostrou que a degenerescência acidental dos estados ligados do átomo de hidrogênio tridimensional pode ser descrita pelo grupo de simetria dinâmica  $O(4)$ . O problema espectral do NLM em mecânica quântica não-relativística foi também resolvido recentemente através de três métodos. O primeiro método foi baseado na supersimetria em mecânica quântica proposta por Witten [3], o qual tem sido bastante usado como técnica de resolução espectral [4]. Especificamente, na representação de momento, Voronin [5] mostrou que o sistema do NLM torna-se um caso particular do potencial supersimétrico de Pöschl-Teller e construiu os estados ligados via o método surpersimétrico de Gendenshtein, baseado no conceito de potenciais invariante de forma [4]. O segundo método foi aplicado por R. Blümel e K. Dietrich [6], convertendo a equação de Schrödinger do NLM no espaço de configurações em uma equação de quarta ordem de Hamburger, a qual foi resolvida exatamente. O terceiro método foi baseado em um superpotencial matricial  $2 \times 2$  deduzido por Rafael, Valdir e Vaidya [8].

Neste trabalho, construímos os estados ligados magneticamente via o teorema espectral, no contexto das funções de Green e recentemente deduzimos uma representação integral para as respectivas funções de Green [7].

## A. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA: UMA PARTÍCULA NEUTRA NÃO-RELATIVÍSTICA DE SPIN 1/2 NUM CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO

O nosso problema basicamente será a construção das funções de Green, no espaço de momentos bidimensional, para a equação de Schrödinger com o potencial de interação entre o momento magnético do spin de um neutron com massa  $M$  e o campo magnético  $\vec{B}$  de um condutor linear com corrente. Admitindo que tal condutor seja um fio muito fino e de tamanho infinito com corrente  $I$ , iniciamos com a função de Green para o operador de Schrödinger no espaço de configuração bidimensional, com o potencial de interação definido no plano perpendicular ao fio. Por todo esse trabalho, usamos o sistema de unidades em que a constante ( $h$ ) de Planck é igual a  $2\pi$  e a velocidade ( $c$ ) da luz no vácuo é igual a unidade, isto é,  $\hbar = h/2\pi = c = 1$ , o qual é denominado de sistema de unidades natural.

$$\left\{ -\frac{1}{2M} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{2\mu I}{x^2 + y^2} (\sigma_1 y - \sigma_2 x) - E \right\} G_E(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (1)$$

onde  $\sigma_i (i = 1, 2)$  são as matrizes de Pauli. Considerando o plano desta página descrito pelas coordenadas  $x$  e  $y$ , a corrente  $I$  estará na direção perpendicular e saindo da página. O campo magnético externo  $\vec{B}$ , o operador de momento magnético do spin do neutron  $\vec{\mu}$  e o potencial

de interação  $V(\vec{r})$ , respectivamente, são dados por

$$\vec{B} = 2I(-y, x, 0)/(x^2 + y^2), \quad \vec{\mu} = \mu\vec{\sigma}, \quad V(\vec{r}) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (2)$$

A equação (1) descreve a mecânica quântica não-relativística de qualquer partícula neutra de spin  $1/2$ , interagindo com um campo externo  $\vec{B}$ . No caso do nêutron, além do spin ser  $1/2$  ele possui momento magnético negativo, cujo valor é dado por  $\mu = -1.95$ , nas unidades do magneton nuclear. Em vez de considerarmos uma transformada de Fourier para se construir o potencial de interação correspondente no espaço de momentos, como foi usada no caso Coulombiano, usamos um artifício baseado na função delta de Dirac  $\delta(\vec{p} - \vec{p}')$ , que satisfaz as seguintes propriedades:

$$G(\vec{p}, \vec{p}') = \int G(\vec{p}'', \vec{p}') \delta(\vec{p}'' - \vec{p}) d^2 p'', \quad \nabla_p^2 \ln(|\vec{p} - \vec{p}'|) = 2\pi \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (3)$$

Logo, na representação de momento com a posição realizada pelo operador diferencial  $\vec{r} \rightarrow i\nabla_p$ ,  $\vec{r}^2 = x^2 + y^2 \rightarrow -\nabla_p^2$ , e, assim, no espaço de momentos, temos:

$$\frac{\vec{r}}{x^2 + y^2} G_E(\vec{r}, \vec{r}') \rightarrow \frac{i\nabla_p}{-i\nabla_p^2} G_E(\vec{p} - \vec{p}') = -\frac{i}{2\pi} \int G_E(\vec{p}'' - \vec{p}') \frac{(\vec{p} - \vec{p}'')}{|\vec{p} - \vec{p}''|^2} d^2 p'', \quad (4)$$

de modo que a função de Green no espaço de momentos  $2D$ ,  $G(\vec{p}, \vec{p}') \equiv G_E(\vec{p} - \vec{p}') = \langle \vec{p} | \hat{G}_E | \vec{p}' \rangle$ , satisfaz a seguinte equação integral

$$(p_0^2 + \vec{p}^2) G(\vec{p}, \vec{p}') - \frac{i\gamma}{\pi} \int d^2 p'' \frac{R(\vec{p}, \vec{p}'')}{|\vec{p} - \vec{p}''|^2} G(\vec{p}'', \vec{p}') = 2M\delta(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (5)$$

onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são as bem conhecidas matrizes de Pauli,  $p_0^2 \equiv \sqrt{-2ME}$ , e  $\gamma = -2\mu IM$ .

$$R(\vec{p}, \vec{p}') = \sigma_2(\vec{p} - \vec{p}')_1 - \sigma_1(\vec{p} - \vec{p}')_2. \quad (6)$$

## II. ESTADOS LIGADOS: FUNÇÕES DE GREEN, AUTOFUNÇÕES E O ESPECTRO DE ENERGIA

Para resolvermos a equação integral (5), introduzimos coordenada  $p_0$ , em termos da energia, o que possibilita a construção de um espaço de momentos como uma projeção estereográfica de uma esfera tridimensional, cujas variáveis são denominadas de coordenadas de Fock-Schwinger (CFS) [2]. Nesse sentido, assumimos que a coordenada  $p_0$  seja positiva,  $p_0 \equiv \sqrt{-2ME} > 0$ , onde o autovalor de energia "E" é real e negativo para os estados ligados. As CFS serão representadas pelo vetor unitário tridimensional  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_0)$ , o qual é definido em termos do momento linear bidimensional  $\vec{p} = (p_1, p_2)$  e de  $p_0$ ,

$$n_0 = \frac{p_0^2 - \vec{p}^2}{p_0^2 + \vec{p}^2}, \quad n_i = \frac{2p_0 p_i}{p_0^2 + \vec{p}^2}, \quad (i = 1, 2), \quad \vec{n}^2 = n_0^2 + n_1^2 + n_2^2 = 1 \quad (7)$$

que caracteriza a projeção dos pontos do plano  $(p_1, p_2)$  sobre a superfície de uma esfera  $3D$ , ou seja, o espaço transformado continua efetivamente sendo bidimensional. As coordenadas estereográficas em (7) foram usadas pela

primeira vez, no problema do nêutron ligado magneticamente, por Pron'ko e Stroganov [1]. Eles usaram estas coordenadas para resolverem uma equação integral associada as funções de onda. A esfera  $3D$  de raio  $p_0$  é varrida por  $\Theta$  e  $\phi$ , de modo que  $tg(\phi) = \frac{p_2}{p_1}$ ,  $|\vec{p}| = p_0 tg(\Theta/2)$ . Nesta representação geométrica da projeção estereográfica, podemos fazer uma correspondência de cada ponto do plano sobre a superfície da esfera  $3D$ , com exceção apenas do ponto de singularidade.

O elemento de área ( $d\Omega$ ) no espaço 2-dimensional definido em termos das CFS, nos permite escolher convenientemente uma relação assimétrica entre as respectivas funções delta de Dirac, a saber:

$$d\Omega \equiv \frac{d^2n}{n_0} = \frac{4p_0^2}{(p_0^2 + \vec{p}^2)^2} d^2p, \quad \delta(\vec{p} - \vec{p}') = \left( \frac{2p_0}{p_0^2 + \vec{p}^2} \right)^2 \delta(\Omega - \Omega'). \quad (8)$$

Esta relação nos levará para uma equação integral, cujo Kernel se tornará invariante sob as rotações 3D, representada por  $O(3)$ . Agora, implementaremos uma transformação unitária  $U(\vec{n})$  sobre a equação integral para colocarmos o Kernel numa forma adequada. O kernel transformado  $K(\vec{n}, \vec{n}')$ ,  $\vec{L}^2 = (\vec{\sigma} \cdot \vec{L})(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \vec{1})$ ,  $\vec{J}^2 e \vec{1} + \vec{\sigma} \cdot \vec{L}$  são diagonalizados simultaneamente numa mesma base. Aqui,  $\vec{L}$  é o operador de momento angular orbital,  $\vec{S}$  o operador de spin e  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  o operador de momento angular total. Definindo uma nova função de Green,

$$\Gamma(\vec{n}, \vec{n}') \equiv \frac{p_0^2}{M[(1+n_0)(1+n'_0)]_{3/2}} U^{-1}(\vec{n}) G(\vec{p}, \vec{p}') U(\vec{n}') = \Gamma^\dagger(\vec{n}', \vec{n}), \quad (9)$$

tal que a transformação unitária satisfaça a seguinte condição

$$U^\dagger(\vec{n}) R(\vec{p}, \vec{p}') U(\vec{n}') = -\frac{i}{2} \left\{ 1 - \frac{2i\vec{\sigma} \cdot (\vec{n} \wedge \vec{n}')}{|\vec{n} - \vec{n}'|} \right\} p_0 \frac{|\vec{n} - \vec{n}'|^2}{(1+n_0)(1+n'_0)}^{1/2} \quad (10)$$

e

$$|\vec{p} - \vec{p}'|^2 = \frac{(p_0 + \vec{p}^2)(p_0 + \vec{p}'^2)}{4p_0^2} |\vec{n} - \vec{n}'|^2, \quad (11)$$

a equação integral (5) torna-se:

$$\delta(\Omega - \Omega') - \Gamma(\Omega, \Omega') = \frac{\gamma}{2p_0} \int d\Omega'' \left\{ \frac{1}{4\pi} - \frac{i\vec{\sigma} \cdot (\vec{n} \wedge \vec{n}')}{2\pi |\vec{n} - \vec{n}'|^2} \right\} \Gamma(\Omega'', \Omega'). \quad (12)$$

Assim, obtemos um Kernel  $K(\vec{n}, \vec{n}')$  manifestamente invariante  $O(3)$  e comutante,

$$[K(\vec{n}, \vec{n}'), \vec{L}^2]_- = [K(\vec{n}, \vec{n}'), \vec{J}^2]_- = [K(\vec{n}, \vec{n}'), J_z]_- = [K(\vec{n}, \vec{n}'), \vec{1} + \vec{\sigma} \cdot \vec{L}]_- = 0, \quad (13)$$

onde  $J_z$  é a componente do momento angular na direção  $z$  e

$$K(\vec{n}, \vec{n}') = \frac{1}{4\pi} - \frac{i\vec{\sigma} \cdot (\vec{n} \wedge \vec{n}')}{2\pi |\vec{n} - \vec{n}'|^2}. \quad (14)$$

Obviamente vemos que este fato nos assegura a diagonalização simultânea desses operadores e, portanto, podemos expandir o novo Kernel  $K(\vec{n}, \vec{n}')$  numa base cujos elementos são os espinores harmônicos esféricos-spin

$$\Psi_{\ell m}^{(i)}(\vec{n}) = \left\{ \begin{array}{c} y_{+(\theta, \phi)}^{(i)} \\ y_{-(\theta, \phi)}^{(i)} \end{array} \right\}, \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

$$y_{\pm}^{(1)}(\Theta, \phi) = \left( \frac{\ell \pm m + 1/2}{2\ell + 1} \right)_{\lambda \ell, m \pm 1/2}^{1/2}, \quad y_{\pm}^{(2)}(\Theta, \phi) = \mp \left( \frac{\ell \mp m + 1/2}{2\ell + 1} \right)_{\lambda \ell, m \pm 1/2}^{1/2}, \quad (16)$$

onde  $\ell$  é o momento angular orbital e  $m \equiv m_j = m_\ell \pm 1/2$  é o número quântico magnético total, de modo que  $m_\ell = -\ell, \dots, \ell$ . As equações de autovalor para o operador comutante  $(\vec{1} + \vec{\sigma} \cdot \vec{L})$  são dadas por:

$$\begin{aligned} (1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{L})\Psi_{jm}^{(1)} &= (j + 1/2)\Psi_{jm}^{(1)}, \quad j = \ell + 1/2 \\ (1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{L})\Psi_{jm}^{(2)} &= -(j + 1/2)\Psi_{jm}^{(2)}, \quad j = (\ell + 1) - 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Com estas equações de autovalor encontraremos a expansão de  $K(\vec{n}, \vec{n}')$  em termos dos espinores  $\Psi_{jm}^{(i)}$ , e demonstraremos que o novo Kernel resolve a seguinte equação matricial:

$$(1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{L})K(\vec{n}, \vec{n}') = \delta(\vec{n} - \vec{n}'), \quad (18)$$

onde a relação de completeza para a função delta de Dirac é representada em termos dos dois espinores  $\Psi_{jm}^{(1)}$  e  $\Psi_{jm}^{(2)}$ ,

$$\delta(\Omega - \Omega') = \sum_{j,m} \left( \Psi_{jm}^{(1)}(\Omega)\Psi_{jm}^{(1)\dagger}(\Omega') + \Psi_{jm}^{(2)}(\Omega)\Psi_{jm}^{(2)\dagger}(\Omega') \right). \quad (19)$$

Pois, a base formada somente por espinores do tipo  $\Psi_{jm}^{(1)}$  ou  $\Psi_{jm}^{(2)}$  não gera um

espaço completo. Substituindo esta representação para a função delta de Dirac em (18) e usando as equações de autovalor (7), obtemos a expansão desejada:

$$K(\vec{n}, \vec{n}') = \sum_{j,m} \frac{1}{(j + 1/2)} \left( \Psi_{jm}^{(1)}(\vec{n})\Psi_{jm}^{(1)\dagger}(\vec{n}') - \Psi_{jm}^{(2)}(\vec{n})\Psi_{jm}^{(2)\dagger}(\vec{n}') \right). \quad (20)$$

Para completar a nossa demonstração, o próximo passo será mostrar que a função de Green dada por (20) é exatamente o novo Kernel definido em (14), ou seja, devemos provar que (14) também resolve (18). Ora, como o Kernel transformado é uma matriz 2x2, então uma solução possível mais geral para  $K(\vec{n}, \vec{n}')$  de (18) pode ser escrita, expandindo-o na base  $1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , ou seja:

$$K(\vec{n}, \vec{n}') = K_0 1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{K}_1(\vec{n}, \vec{n}'), \quad (21)$$

onde  $K_0$  é uma constante e  $\vec{K}_1(\vec{n}, \vec{n}')$  é um vetor 3D. Inserindo (21) em (18), encontramos:

$$\vec{L} \cdot \vec{K}_1 = -K_0 1 + \delta(\vec{n} - \vec{n}'). \quad (22)$$

Expandindo  $\vec{K}_1(\vec{n}, \vec{n}')$  na base

$$\vec{n}, \quad \vec{n}', \quad \vec{n} \wedge \vec{n}', \quad \vec{K}_1(\vec{n}, \vec{n}') = i\vec{n} \wedge \vec{n}' K_1^\perp$$

omitindo os termos proporcionais a  $\{\vec{n}, \vec{n}'\}$ , que contribuem somente para as soluções da equação homogênea, e lembrando-se que  $\vec{L} \cdot \vec{n} = \vec{L} \cdot \vec{n}' = 0$ , obtemos:

$$\vec{K}_1(\vec{n}, \vec{n}') = i\vec{n} \wedge (\vec{n} - \vec{n}') K_1^\perp = -i\vec{n} \wedge \vec{\nabla}_n K_1^\perp \quad (23)$$

onde  $K_1^\perp$  é uma função que depende somente do módulo  $|\vec{n} - \vec{n}'|$ ,  $K_1^\perp = \Upsilon(|\vec{n} - \vec{n}'|)$ .

De (23) em (22), vemos que

$$L^2 \Upsilon(|\vec{n} - \vec{n}'|) = -K_0 + \delta(\vec{n} - \vec{n}'). \quad (24)$$

Os vetores unitários  $3D$ ,  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_0)$ , que representam as coordenadas estereográficas de Fock e Schwinger [2], podem ser escritos em termos das coordenadas polares,  $\vec{n} = (\text{sen}\Theta \cos\phi, \text{sen}\Theta \text{sen}\phi, \cos\Theta)$ , assim, a equação (24) nos fornece:

$$\Upsilon(|\vec{n} - \vec{n}'|) = -k_0 \ln(1 - \cos\vartheta) \quad (25)$$

$$\cos(\vartheta) = \cos(\Theta) \cos(\Theta') + \text{sen}(\Theta) \text{sen}(\Theta') \cos(\phi - \phi'), \quad k_0 = \frac{1}{4\pi}.$$

Usando  $|\vec{n} + \vec{n}'| |\vec{n} - \vec{n}'| \phi^* = -(\vec{n} \wedge \vec{n}')$ , onde  $\phi^* = -\text{sen}(\phi)e_1 + \cos(\phi)e_2$  é o vetor unitário na direção de  $\phi$ , assim obtemos a seguinte identidade:

$$\frac{1}{4\pi} - \frac{i\vec{\sigma} \cdot (\vec{n} \wedge \vec{n}')}{2\pi |\vec{n} - \vec{n}'|^2} = \sum_{j,m} \frac{1}{(j+1/2)} (\Psi_{jm}^{(1)}(\vec{n}) \Psi_{jm}^{(1)\dagger}(\vec{n}') - \Psi_{jm}^{(2)}(\vec{n}) \Psi_{jm}^{(2)\dagger}(\vec{n}')). \quad (26)$$

Esta identidade foi usada pela primeira vez por Pron'ko e Stroganov, no cálculo das autofunções e o espectro de energia [1]. Agora, podemos resolver a equação integral (14) fazendo uma expansão da matriz  $\Gamma(\vec{n}, \vec{n}')$  em termos dos espinores  $\Psi_{jm}^{(i)}$

$$\Gamma(\vec{n}, \vec{n}') = \sum_{i,j,m} a_{jm}^{(i)} \Psi_{jm}^{(i)}(\vec{n}) \Psi_{jm}^{(i)\dagger}(\vec{n}'). \quad (27)$$

Substituindo (29) em (14), obtemos:

$$1 = a_{jm}^{(1)} \left(1 - \frac{\gamma}{2(j+1/2)p_0}\right) e^{-1} = a_{jm}^{(2)} \left(1 + \frac{\gamma}{2(j+1/2)p_0}\right), \quad (28)$$

e, por sua vez, a função de Green transformada  $\Gamma(\vec{n}, \vec{n}')$  torna-se

$$\Gamma(\vec{n}, \vec{n}') = \sum_{jm} \left( \frac{\psi_{jm}^{(1)}(\vec{n})\psi_{jm}^{(1)\dagger}(\vec{n}')}{(1 - \frac{v}{j+1/2})} + \frac{\psi_{jm}^{(2)}(\vec{n})\psi_{jm}^{(2)\dagger}(\vec{n}')}{1 + \frac{v}{j+1/2}} \right), \quad \nu \equiv -\frac{\gamma}{2p_0}. \quad (29)$$

Como as constantes  $\gamma > 0$  e  $p_0 > 0$ , logo é óbvio que a constante  $\nu$  é menor do que zero. Neste caso, vemos que a função de Green deduzida acima têm pólos quando

$$\nu = j + 1/2, \quad j = 1/2, 3/2, \dots \quad (30)$$

Portanto, obtemos os seguintes autovalores de energia para os estados ligados:

$$E_j = -\frac{p_0^2}{2M} = -\frac{I^2\mu^2}{2(j + \frac{1}{2})^2}M. \quad (31)$$

De acordo com o teorema espectral no contexto das funções de Green, as autofunções de energia dos estados ligados são exatamente os resíduos nos pólos. Por conseguinte, é fácil ver que  $\Psi_{jm}^{(1)} = \frac{1}{(1+n_0)^{3/2}}\hat{U}^{-1}Y_{jm}^+(\theta, \phi)$  é o auto-espinor associado ao autovalor  $E_j$ . Vale a pena salientar que se a corrente  $I$  percorresse o condutor em sentido contrário o auto-espinor seria  $\Psi_{jm}^{(2)}$ , mas os autovalores de energia não mudariam, pois ambos hamiltoniano estão relacionados pela transformação unitária  $\sigma_3$ .

### III. CONCLUSÃO

Em nossa abordagem puramente teórica, a partir da equação integral das funções de Green para o Nêutron Ligado Magneticamente (NLM) no espaço de momentos  $2D$ , introduzimos as coordenadas de Fock-Schwinger (CFS) [2] e uma transformação unitária que possibilitaram uma solução exata da equação integral transformada. Com as CFS o espaço de momentos  $2D$  é entendido como sendo uma projeção estereográfica de uma esfera num espaço tridimensional. Neste espaço, construímos as autofunções e o espectro de energia dos estados quânticos do NLM, via o teorema espectral no contexto das funções de Green para energia negativa. Um trabalho mais detalhado e contendo a forma explícita da transformação unitária e uma representação integral das funções de Green deduzidas acima está na Ref. [7].

Finalizando gostaríamos de enfatizar que, em geral, a função de Green de sistemas quânticos é representada com os autovalores de energia sendo os pólos e sem parte regular. Entretanto, neste trabalho, vimos que a função de Green para o nêutron ligado



magneticamente proporciona um novo cenário em mecânica quântica não relativística. Ela tem uma parte regular e outra parte com pólos.

### AGRADECIMENTOS

RLR agradece ao CNPq pelo bolsa de estudo na modalidade de pós-doutorado e agradece também ao Departamento de Ciências Exatas e da Natureza da UFPB e ao Prof. José Abdala Helayel Neto pelos incentivos e a excelente hospitalidade no CBPF.

## REFERENCES

<sup>a</sup> E-mail: rafael@cfp.ufpb.br

<sup>b</sup> E-mail: vaidya@if.ufrj.br

- [1] G. P. Pron'ko Yu G. Stroganov, Sov. Phys. JETP 45, 1075 (1977).
- [2] V. A. Fock, Z. Phys. 98, 145 (1935); J. Schwinger, J. Math. Phys. , 5,1607 (1964).
- [3] E. Witten, Nucl. B185, 513 (1981), A. A. Adrianov, N. V. Borisov e M. V. Ioffe, Phys. Lett. A105, 19 (1985).
- [4] L. Gendenshtein, JETP Lett. 38, 356 (1983); L. E. Gendenshtein e I. V. Krive, Sov. Phys. Usp 28, 645 (1985); A. Lahiri, P. K. Roy e B. Bagchi, Int. J. Mod. Phys. A5, 1383 (1990)
- [5] A. I. Voronin, Phys. Rev. A43, 29 (1991).
- [6] R. Blümel and K. Dietrich, Phys. Rev. A43, 22 (1991).
- [7] R. de Lima Rodrigues e A. N. Vaidya, J. Phys. A: Math. Gen. 32, 2653, (1999).
- [8] R. de Lima Rodrigues, V. B. Bezerra and A. N. Vaidya, "An application of supersymmetric quantum mechanics to a planar physical system", Phys. Lett 287A, 45 (2001).