ISSN 0029-3865

CBPF-NF-066/84

ACOPLAMENTO VARIACIONAL ENTRE DINÂMICAS q-NUMBER E DINÂMICAS c-NUMBER*

por

C. Márcio do Amaral[1] e S. Joffily

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CNPq/CBPF
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

[1]Instituto de Física
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Cidade Universitária
21944 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

*Pesquisa subvencionada parcialmente pelo CNPq.

ACOPLAMENTO VARIACIONAL ENTRE DINÂMICAS q-NUMBER E DINÂMICAS c-NUMBER*

C. Márcio do Amaral[1] e S. Joffily

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CNPq/CBPF
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

[1]Instituto de Física
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Cidade Universitária
21944 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

* Pesquisa subvencionada parcialmente pelo CNPq.

RESUMO

Generaliza-se o princípio variacional quântico, dependente do tempo, para o caso de operadores Hamiltonianos contendo parâmetros reais e suas derivadas temporais. O sistema variacional obtido é constituído de uma equação de Schrödinger acoplada a um sistema de equações de Lagrange, onde a Lagrangeana é o valor médio do operador Hamiltoniano parametrizado. A dinâmica consequente do princípio variacional, descreve a interação entre uma subdinâmica q-number com uma subdinâmica c-number. Na aproximação W.K.B. de ordem $(\hbar)^0$, o sistema variacional reduz-se a uma equação do tipo Hamilton-Jacobi, acoplada a uma família de equações de Lagrange. As características formais do sistema variacional obtido são apropriadas para a descrição de interações q-number - c-number, adiabáticas e não adiabáticas, dependentes do tempo.

Palavras-chave: Mecânica quântica; Formalismo.

1 INTRODUÇÃO

O problema de dinâmicas envolvendo variáveis do tipo "c-number", juntamente com variáveis do tipo "q-number", é de grande relevância para o entendimento do mecanismo de transição de uma descrição puramente quântica, a uma descrição a nível puramente clássica. Este tipo de dinâmica, híbrida, "semi-clássica", tem sido arena recente de interessantes trabalhos[1,2,3]. Sudarshan[1] e Gordov[2] consideram, de início, um modelo dinâmico totalmente quântico, reduzido posteriormente a uma descrição "semi-classica". Para isso Sudarshan, em particular, impõe regras de superseleção a seu modelo, enquanto Gordov recorre a um espaço de Hilbert estendido, gerado por um processo de produto exterior. Por outro lado, Greiner[4], como outros pesquisadores da área nuclear[5,7] interessados em processos não adiabáticos nucleares, admite em seu modelo, desde o início, a presença de uma dinâmica coletiva, clássica, descrita por parâmetros reais dependentes do tempo, juntamente com uma dinâmica não coletiva, dotada de caráter quântico. Em nenhum desses tratamentos há a indicação da existência de um princípio variacional, capaz de gerar um sistema de equações dinâmicas acopladas, representativas da interação entre os aspectos "q-number" com os aspectos "c-number" da mesma dinâmica global. O objetivo do presente trabalho é a obtenção, a partir de um princípio variacional, de equações representativas do acoplamento entre o aspecto quântico e o aspecto paramétrico, "c-number", constituintes de uma dinâmica "semi-clássica", global. A aproximação W.K.B. é avaliada e mostra-se coincidente, na ordem $(\hbar)^0$, com as equações variacionais clássicas provenientes de Hamiltonianas clássicas parametrizadas, do tipo Routh[6].

2 A AÇÃO CLÁSSICA PARA HAMILTONIANAS PARAMETRIZADAS

Consideremos a Hamiltoniana parametrizada

$$H(x^j, p_j; x^J, \dot{x}^J) = \sum_{j=1}^{n} \dot{x}^j p_j - L(x^j, \dot{x}^j; x^J, \dot{x}^J) \quad ; \qquad (2\text{-}1)$$

onde os (x^j, p_j), $j=1,\ldots,n$; são n pares de variáveis canonicamente associadas e $(x^J, \dot{x}^J)$ $J=1,\ldots,R$; são R pares de parâmetros reais e suas respectivas derivadas temporais. As n coordenadas $\{x^j\}$, são, sem perda de generalidade, cartesianas ortogonais. Analogamente, os R parâmetros $\{x^J\}$ são supostas coordenadas cartesianas ortogonais de um espaço configuracional, V_R, associado a um sistema dinâmico externo em interação com o sistema canônico $\{x^j, p_j\}$, considerado como sistema interno. A dinâmica interna é representada na Hamiltoniana (2-1), mas a presença dos parâmetros permitirá, em um princípio variacional, a descrição da interação entre as dinâmicas interna e a paramétrica, esta considerada externa. O caso mais simples, frequentemente admitido na literatura, é o da ação da dinâmica paramétrica (externa) sem a consequente reação, o que corresponde aos $x^J(t)$ serem prescritos[7].

Por conveniência, vamos postular a validade das transformações de Legendre, i.e., vamos admitir a condição de regularidade determinantal:

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^j \, \partial \dot{x}^k} \right| \neq 0 \quad , \quad j,k = 1,\ldots,n \; . \qquad (2\text{-}2)$$

Seja, então, a ação:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \{ \sum_{j=1}^{n} \dot{x}^j p_j - H(x^j, p_j; x^J, \dot{x}^J) \} dt \ . \tag{2-3}$$

Considerando-se variações primeiras, $\delta_{|}$ e $\delta_{||}$ de (2-3) nulas, a extremos fixos, com $\delta_{|} x^j$ e $\delta_{|} p_j$ independentes e arbitrárias, mas $\delta_{|} x^J = 0$; e, posteriormente fazendo-se $\delta_{||} x^j = \delta_{||} p_j = 0$, com $\delta_{||} x^J$ arbitrárias, obtêm-se as equações variacionais seguintes:

$$\dot{x}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad ; \quad \dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial x^j} \quad ; \tag{2-4}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (-H)}{\partial \dot{x}^J} - \frac{\partial (-H)}{\partial x^J} = 0 \tag{2-4'}$$

O sistema de equações (2-4), (2-4'), especifica uma dinâmica Hamiltoniana (interna) em interação com uma dinâmica lagrangeana (externa), paramétrica.

Consideremos agora, variações Δ, dos extremos da (2-3), da forma $\Delta = \delta + \Delta t \frac{d}{dt}$, onde liberam-se os Δx^j, mas impõe-se a condição

$$\Delta x^J = 0 \quad , \quad \text{para } J = 1, \ldots, R \ . \tag{2-5}$$

como as equações (2-4) e (2-4') são válidas entre os extremos, têm-se:

$$\Delta A(\Delta x^J = 0) = (\delta + \Delta t \frac{d}{dt}) \int_{t_1}^{t_2} \{ \dot{x}^j p_j - H \} dt =$$

$$= [p_j \delta x^j + \Delta t \, \dot{x}^j p_j - \Delta t H]_{t_1}^{t_2} = [p_j \Delta x^j - H \Delta t]_{t_1}^{t_2} \tag{2-6}$$

Agora, desenvolvendo-se o primeiro membro de (2-6), em Δx^j, Δt, arbitrários e independentes, obtêm-se em lugar dos (2-4) e (2-4'), o sistema variacional:

$$\frac{\partial A}{\partial x^j} = p_j \quad ; \quad \frac{\partial A}{\partial t} = -H \quad ; \tag{2-7}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}^J}\right) - \frac{\partial H}{\partial x^J} = 0 \quad . \tag{2-4'}$$

$$\Delta x^J = 0 \tag{2-5}$$

onde $$A = A(x^j; x^J, \dot{x}^J, t)$$

$$H = H\left(x^j, \frac{\partial A}{\partial x^j}; x^J, \dot{x}^J\right) \; .$$

O sistema (2-4), (2-4'), que é um sistema híbrido, Lagrangeano--Hamiltoniano, é equivalente às formulações usuais da mecânica a nalítica, pois é transformável, por transformações de Legendre em um sistema puramente Lagrangeano ou puramente Hamiltoniano. O mesmo já não ocorre com a descrição dinâmica contida no sistema (2-7), (2-4'), pois este está sujeito à condição de contorno (2-5). Esta condição assimetriza a dinâmica, pois ao permitir variações arbitrárias apenas nas coordenadas internas, Δx^j, caracteriza a dinâmica Lagrangeana como uma dinâmica de contorno, no qual está imerso o sistema interno, agora descrito ondulatoriamente pelas equações (2-7), que são do tipo Hamiltoniano-Jacobi. É interessante observar que a descrição dada pelas (2-7),(2-4'), tem características Lagrangeanas, pois é descrita em um espaço de configuração global, produto cartesiano dos subespaços configuracionais interno e externo. A matriz Jacobiana global, das transformações admissíveis, é a soma direta das submatrizes Jacobianas correspondentes aos subespaços respectivos.

3. A AÇÃO QUÂNTICA PARA DINÂMICAS PARAMETRIZADAS

Como é bem sabido[8,9], a equação fundamental da dinâmica quântica não relativista, pode ser extraída de um princípio de ação quântica dependente do tempo:

$$\delta A = 0 \; ; \tag{3-1}$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(\psi,\bar{\psi})\,dt \; ; \tag{3-2}$$

com

$$L(\psi,\bar{\psi}) = \langle\psi(t)|\,i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\,|\psi(t)\rangle \; . \tag{3-3}$$

O parêntesis $\langle\,|\,|\,\rangle$, de Dirac, indica uma integração no espaço configuracional $\{x^j\}$, do sistema quântico considerado.

Neste trabalho, vamos estender o princípio variacional quântico, (3-1), (3-2), (3-3) para o caso em que o operador Hamiltoniano $\hat{H}$ tenha dependência paramétrica:

$$\hat{H} = \hat{H}^{+} = \hat{H}(\hat{x}^j, \hat{p}_j; x^J, \dot{x}^J) \; . \tag{3-3'}$$

As equações de Euler-Lagrange oriundas do princípio variacional (3-1), onde a Lagrangeana é a (3-3), correspondem ao modelo de um sistema quântico Hamiltoniano, imerso em um meio $\{x^J,\dot{x}^J\}$, Lagrangeano e com o qual interage. Este meio comporta-se como um fluido, no qual está imerso o sistema quântico, admitido puntiforme na escala de variações de primeira ordem, Δx^J.

De (3-3') e (3-3), levadas a (3-2), obtem-se

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \underline{d^3x^j}\ \bar{\psi}(x^j;x^J,\dot{x}^J,t)\,[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}(\hat{x}^j,\hat{p}_j;x^J,\dot{x}^J)]\psi \ ; \qquad (3\text{-}4)$$

onde

$$\hat{p}_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^j} \ ; \qquad (3\text{-}4')$$

com $\bar{\psi}$ indicando a adjunta da ψ e onde $\underline{d^3x^j}$ é o elemento de volume no espaço configuracional $\{x^j\}$.

Vamos considerar diferentes tipos de variação para (3-4):

a) $\delta_a\psi=0$; $\delta_a x^J=0$; $\delta_a t=0$; $\delta_a x^j=0$; $\delta_a\bar{\psi}\neq 0$, $\delta_a\hat{H}=0$.

Impondo $\delta_a A=0$, obtem-se a equação variacional:

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}(x^j,ih\frac{\partial}{\partial x^j};\ x^J,\dot{x}^J)\psi(x^j,x^J,\dot{x}^J,t) = 0 \ . \qquad (3\text{-}5)$$

A equação para a adjunta, $\bar{\psi}$, é obtida sem dificuldades.

b) $\delta_b\bar{\psi}=0=\delta_b\psi$; $\delta_b x^j=0$, $\delta_b t=0$; $\delta_b x^J\neq 0$, mas $\delta_b x^J(t_1)=\delta_b x^J(t_2)=0$. Consideremos, entretanto, $\delta_b\hat{H}\neq 0$.

Com as condições variacionais supra, $\delta_b A=0$, gera a equação variacional:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\ \underline{d^3x^j}\ \bar{\psi}\ (\delta_b\hat{H})\psi = 0 \ . \qquad (3\text{-}6)$$

Como

$$\delta_b \hat{H} = \sum_J \frac{\partial \hat{H}}{\partial x^J} \delta_b x^J + \sum_J \frac{\partial \hat{H}}{\partial \dot{x}^J} \delta_b \dot{x}^J \quad , \qquad (3\text{-}7)$$

vem:

$$D = \int_{t_1}^{t_2} dt \ \underline{d^3x^j} \ \overline{\psi} \ [\sum_J \{\frac{\partial \hat{H}}{\partial x^J} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial \hat{H}}{\partial \dot{x}^J})\}]\psi . \delta_b x^J +$$

$$+ [\sum_J \delta_b x^J \int \underline{d^3x^j} \ \overline{\psi} \ (\frac{\partial \hat{H}}{\partial \dot{x}^J})\psi]_{t_1}^{t_2} \quad . \qquad (3\text{-}8)$$

Levando-se em conta as condições de contorno $\delta_b x^J(t_1) = \delta_b x^J(t_2) = 0$, a segunda parcela de (3-8) é nula. Por outro lado, como a variação do tipo δ_b é caracterizada pelas condições $\delta_b \psi = \delta_b \overline{\psi} = \delta_b x^j = 0$, a (3-8) pode ser reescrita na forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_J \delta_b x^J [\frac{\partial}{\partial x^J} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^J})] \int \overline{\psi} \ (\hat{H})\psi \ \underline{d^3x^j} = 0 \ . \qquad (3\text{-}9)$$

Como $\delta_b x^J$ é arbitrária no intervalo aberto (t_2, t_1), teremos

$$[\frac{\partial}{\partial x^J} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^J})] \langle\psi| \ \hat{H} \ |\psi\rangle = 0 \quad , \qquad (3\text{-}10)$$

onde

$$\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = \int \underline{d^3x^j} \ \overline{\psi} \ \hat{H} \ \psi \ . \qquad (3\text{-}11)$$

As equações variacionais extraidas da ação quântica (3-4) e obtidas com auxílio de variações dos tipos δ_a e δ_b, independentes e arbitrárias, são:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi \quad ;$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^J} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^J}\right)\right]<\psi|\hat{H}|\psi> = 0 \quad ; \qquad (3\text{-}12)$$

com
$$\hat{H} = \hat{H}(\hat{x}^j, \hat{p}_j ; x^J, \dot{x}^J) \quad ,$$

$$\psi = \psi(x^j ; x^J, \dot{x}^j ; t) \quad .$$

É importante observar, que o termo de contorno em (3-8) pode, face às propriedades das variações do tipo δ_b, ser escrito na forma:

$$\left[\sum_J \delta_b x^J <\psi|\frac{\partial \hat{H}}{\partial \dot{x}^J}|\psi>\right]_{t_1}^{t_2} = \left[\sum_J \delta_b x^J \frac{\partial}{\partial \dot{x}^J} <\psi|\hat{H}|\psi>\right]_{t_1}^{t_2} \quad ; \qquad (3\text{-}13)$$

o que permite a definição do momentum canônicamente associado ao parâmetro x^J:

$$p_J = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^J} <\psi|\hat{H}|\psi> \quad . \qquad (3\text{-}14)$$

É interessante notar, que as equações (3-10) são equações de Lagrange, onde $<\psi|\hat{H}|\psi>$ tem o papel de uma Lagrangeana clássica. As equações (3-10) completam o sistema variacional híbrido, (3-12), acoplando-se à equação de Schrödinger (3-5).

Liran[4], ao empregar o modêlo do Cranking não adiabático[10], ao estudo da dinâmica nuclear coletiva, postula, arbitrariamente, uma equação adicional de Lagrange com o objetivo de obter o acoplamento entre a dinâmica coletiva, considerada "clássica", à dinâmica interna admitida "quântica". Entretanto, Liran situa a $<\psi|\hat{H}|\psi>$ como a Hamiltoniana "clássica", com a qual constrói, do modo usual, a Lagrangeana a ser utilizada na sua postulada equação de Lagrange.

4 A HAMILTONIANA "c-NUMBER"

Se multiplicarmos (3-10) por $\dot{x}^J$ e somarmos em J, podemos transformá-la em:

$$\sum_J \{\ddot{x}^J \frac{\partial}{\partial \dot{x}^J} <\psi|\hat{H}|\psi> + \dot{x}^J \frac{\partial}{\partial x^J} <\psi|\hat{H}|\psi> - \frac{d}{dt} (\dot{x}^J \frac{\partial}{\partial \dot{x}^J} <\psi|\hat{H}|\psi>)\} = 0 \; ; \qquad (4\text{-}1)$$

mas

$$\frac{d}{dt} <\psi|\hat{H}|\psi> = \sum_J \{\ddot{x}^J \frac{\partial}{\partial \dot{x}^J} <\psi|\hat{H}|\psi> + \dot{x}^J \frac{\partial}{\partial x^J} <\psi|\hat{H}|\psi>\} \, . \qquad (4\text{-}2)$$

Logo, de (4-1) e (4-2), temos:

$$\frac{d}{dt} \{ \sum_J \dot{x}^J \frac{\partial}{\partial \dot{x}^J} <\psi|\hat{H}|\psi> - <\psi|\hat{H}|\psi>\} = 0 = \frac{d}{dt} \{\sum_J \dot{x}^J p_J - <\psi|\hat{H}|\psi>\} \quad . \qquad (4\text{-}3)$$

A (3-3), juntamente com o caráter Lagrangeano da $<\psi|\hat{H}|\psi>$, induz de modo natural, a Hamiltoniana "c-number"

$$\mathcal{H} = \sum_J \dot{x}^J p_J - <\psi|\hat{H}|\psi> \quad . \qquad (4\text{-}4)$$

A constância de movimento do $\mathcal{H}$ é pura decorrência da não dependência explícita temporal da $<\psi|\hat{H}|\psi>$.

A hipótese da existência de vínculos no espaço paramétrico e da definição $p_J = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^J} <\psi|\hat{H}|\psi>$, permite que se represente $\mathcal{H}$ na forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x^J, p_J)$. Daqui, a obtenção das correspondentes equações de Hamilton, paramétricas, é tarefa trivial:

$$\dot{p}_J = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^J}$$
$$\dot{x}^J = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_J} \qquad (4\text{-}5)$$

5 A APROXIMAÇÃO CLÁSSICA DO SISTEMA (3-12)

Consideremos a ψ de (3-4), representada na forma:

$$\psi(x^j; x^J, \dot{x}^J, t) = e^{\frac{i}{\hbar} S} = e^{\frac{i}{\hbar}(S_0 + \frac{\hbar}{i} S_1 + \frac{\hbar^2}{i^2} S_2 + \ldots)} \qquad (5\text{-}1)$$

com $$S = S(x^j; x^J, \dot{x}^J, t) \quad .$$

Estamos supondo S_0 real, escalar por transformações de coordenadas, x^j regulares. Generalizando Pauli[11] e Stachel[12], reescrevemos (5-1) na forma:

$$\psi(x^j; x^J, \dot{x}^J, t) = e^{\frac{i}{\hbar} S_0} [R_0 + \frac{\hbar}{i} R_1 + \frac{\hbar^2}{i^2} R_2 + \ldots] \ , \qquad (5\text{-}2)$$

onde R_0 não é necessariamente real. Levemos (5-1) à ação (3-4), mas na aproximação em que R é substituida por R_0:

$$A(R{=}R_0) = A_0 = \int_{t_1}^{t_2} \underline{d^3x^j}\ e^{-\frac{i}{\hbar} S_0} R_0^* [i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}] R\, e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \quad . \qquad (5\text{-}3)$$

Considerando variações $\delta_1 A_0 = 0$, condicionadas a: $\delta_1 R_0^*$ arbitrário; $\delta_1 R_0 = \delta_1 S_0 = \delta_1 x^J = S_1 \hat{H} = \delta_1 x^j = 0$; $\delta_1 t = 0$, obtemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{d^3x^j}\; dt\;\; \delta_{|} R_0^* \; e^{-\frac{i}{\hbar} S_0} \; [\frac{\partial S_0}{\partial t} - \hat{H}] R_0 e^{\frac{i}{\hbar} S_0} = 0 \qquad (5\text{-}4)$$

O termo em $ih \frac{\partial R_0}{\partial t}$ foi omitido em (5-4), por ser de primeira ordem em $\hbar$.

Admitindo-se $\hat{H}$ como uma série ordenada, normal, de potenciação de $-ih \frac{\partial}{\partial x^j}$, teremos na ordem zero:

$$\hat{H}(\dot{x}^j, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^j}; x^J, \dot{x}^J) R_0 e^{\frac{i}{\hbar} S_0} = e^{\frac{i}{\hbar} S_0} H(x^j, \frac{\partial S_0}{\partial x^j}; x^J, \dot{x}^J) R_0 \;. \qquad (5\text{-}5)$$

Levando (5-5) a (5-4), tem-se

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{d^3x^j}\, dt \;\; \delta_{|} R_0^* [\frac{\partial S_0}{\partial t} + H(x^j, \frac{\partial S_0}{\partial x^j}, x^J, \dot{x}^J)] R_0 = 0 \qquad (5\text{-}6)$$

Com $R_0 \neq 0$ e $\delta_{|} R_0^*$ arbitrário, teremos a equação variacional, na ordem $(\hbar)^0$:

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + H(x^j; \frac{\partial S_0}{\partial x^j}; x^J, \dot{x}^J) = 0 \qquad (5\text{-}7)$$

A equação (5-7) é uma equação do tipo Hamilton-Jacobi para sistemas parametrizados com x^J, $\dot{x}^J$ e dotados de uma ação $A=S_0$.

Admitamos agora, variações do tipo $\delta_{||} A_0 = 0$ restritas pelas condições:

$\delta_{||} R_0^* = \delta_{||} R_0 = \delta_{||} S_0 = \delta_{||} t = 0$; $\delta_{||} x^J$ arbitrários, exceto $\delta_{||} x^J(t_1) = \delta_{||} x^J(t_2) = 0$.

Teremos, então, com $\delta_{||} \hat{H} \neq 0$:

$$\delta_{||} A_0 = 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \underline{d^3x^j} \;\; R_0^* \; e^{-\frac{i}{\hbar} S_0} \; [-\delta_{||} \hat{H}] R_0 e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \qquad (5\text{-}8)$$

Levando-se em conta, que variações do tipo $\delta_{||}$ comutam com R_0, R_0^*, S_0, x^j, poderemos escrever compactamente:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_J \delta_{||} x^J \{ \frac{\partial}{\partial x^J} <\psi|\hat{H}|\psi> - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^J} <\psi|\hat{H}|\psi> \} +$$

$$+ [\sum_J \delta_{||} x^J \frac{\partial}{\partial \dot{x}^J} <\psi|\hat{H}|\psi>]_{t_1}^{t_2} \quad ; \qquad (5\text{-}9)$$

onde $$|\psi> = R_0 \, e^{\frac{i}{\hbar} S_0} .$$

O termo de contorno é nulo, mas permite inferir a definição do momentum p_J. A arbitrariedade dos $\delta_{||} x^J$ em (5-9), gera as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial x^J} <\psi|\hat{H}|\psi> - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^J} <\psi|\hat{H}|\psi> = 0 . \qquad (5\text{-}10)$$

As (5-10), juntamente com a (5-7), evidenciam que na aproximação $(\hbar)^0$, o sistema de equações (3-12) equivale àquele obtido de um princípio de ação clássica, onde a ação seja a S_0 e a Lagrangeana seja a $<\psi|\hat{H}|\psi>$, com $|\psi>=R_0 \, e^{\frac{i}{\hbar} S_0}$. Com esta correspondência, as equações (5-10) e (5-7) são, as próprias (2-4') e (2-7), respectivamente.

6 CONCLUSÕES

Dinâmicas geradas por operadores Hamiltonianos envolvendo parâmetros c-number, dependentes do tempo, contêm, necessariamente, subdinâmicas c-number em interação com subdinâmicas q-num ber. A estrutura das equações (3-12) é óbvia neste sentido e isto as torna um sistema variacional candidato a representar este tipo de interação. Em particular, o problema do acoplamento não adiabático entre processos coletivos, c-number, com processos microscópicos, q-number, deve ter uma dinâmica global regida por um sistema equacional do tipo (3-12). O próprio problema da medida em mecânica quântica, sendo essencialmente um processo de interação entre um sistema observador, macroscópico - o apparatus (caracterizável por propriedades clássicas antes da ocorrência da medida), com o sistema observado, microscópico, do tipo q-number, é enquadrável dentro da estrutura das equações (3-12). Uma extensão importante a ser feita é a do problema da interação q-number-c-number, para o caso em que as condições de informação quânticas sejam incompletas, o que levará, naturalmente, ao emprego de um formalismo do tipo matriz estatística. Nestas condições, deve aflorar um sistema de equações que caracterize o acoplamento entre uma dinâmica c-number e uma dinâmica q-number, estatística.

Desenvolvimentos destes temas estão em andamento.

REFERENCIAS

1. T.N. Sherry and C.G. Sudarshan, Phys. Rev. D, 20, 857 (1979).
2. E.P. Gordov and S.D. Tovorogov, Physica 119A, 339 (1983).
3. J.R. Klauder, Conference on Quantum Theory and the Structure of Time and Space IV, Tutzing, West Germany, 1980.
4. S. Liran, H. Scheefer, W. Scheid, W. Greiner, Nucl. Phys. A248, 191 (1975).
5. G. Schütte and L. Wilets, Nucl. Phys. A252, 21 (1975).
6. F. Gantmacher, Lectures in Analytical Mechanics, Mir, Moskow (1970).
7. J.J. Griffin and K.K. Kan, Physics and Chemistry of Fission, vol. I. Proceeding of a Symposium. Rochester, N. York (1973).
8. P.A.M. Dirac, Proc. Camb. Phil. Soc., 26, 376 (1930).
9. A.K. Kerman and S.E. Koonin, Annals of Physics 100, 332 (1976).
10. D.R. Inglis, Phys. Rev. 96, 1059 (1954).
11. W. Pauli, Helv. Phys. Acta 5, 179 (1932).
12. J. Stachel, J. Plebanski, J. Math. Phys. 18, 2374 (1977).