CBPF-NF-056/97

YANG-MILLS-SU(2) via FORM

J.L. Boldo, L. Machado de Moraes, P. Duarte Peres & P. Macedo Jorge**

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF
Departamento de Teoria de Campos e Partículas - DCP
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290-180 – Rio de Janeiro, RJ – Brasil

*Ciência da Computação
Universidade Católica de Petrópolis (UCP)

e

PIBIC–CBPF

Resumo

Adotando-se os recursos do software FORM, são realizados cálculos formais no contexto de uma teoria de Yang-Mills, com grupo SU(2).

Palavras-chave: Yang-Mills; Grupos unitários; FORM.

1 Introdução

A identificação e o estudo de simetrias de sistemas físicos mostra-se parte fundamental na etapa de resolução da dinâmica dos mesmos. Especialmente no caso em que a interação que governa tais sistemas não é conhecida a nível fundamental, argumentos de simetrias permitem obter um grande número de informações, com base em regras de seleção, por exemplo.

A Física de Altas Energias e Partículas que se faz atualmente é sedimentada sobre a idéia de simetrias. As teorias propostas para a descrição das interações fundamentais, bem como para a unificação destas em um esquema geral (Teorias de Grande Unificação), são todas formuladas em termos das chamadas simetrias locais de gauge.

As interações eletromagnéticas constituem-se numa teoria de gauge Abeliana, com grupo de simetria $U(1)$. A física das interações nucleares fracas (decaimento-beta) é construída com base na simetria não-Abeliana $SU(2)$ (grupo das matrizes unitárias especiais), cuja álgebra é dada pelas relações de comutação

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\,i\,\epsilon_{i\,j\,k}\,\sigma_k$$

onde os σ_i's denotam as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

As interações nucleares fortes, responsáveis pela coesão entre prótons e nêutrons no interior dos núcleos atômicos, são descritas por uma simetria de gauge não-abeliana do grupo $SU(3)$, onde os constituintes fundamentais são os quarks, entidades confinadas ao interior dos prótons e nêutros e dos demais hádrons.

Neste trabalho, o propósito será usar recursos do software FORM a fim de se obter uma série de resultados formais no âmbito de uma teoria de gauge não-abeliana, com grupo $SU(2)$. São estudadas transformações dos campos, invariância da densidade de Lagrangeano, equações de campo, distribuição de energia e reparametrização da teoria em termos de campos associados a partículas passíveis de detecção em aceleradores.

2 Campos e suas Transformações

Sejam φ_1 e φ_2 dois campos escalares complexos, agrupados em um dublete de $SU(2)$,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in \underline{2}$$

e sujeito à seguinte lei de transformação:

$$\Phi' = M\Phi\,, \qquad M = e^{\frac{i}{2}\,\vec{\omega}\,(\vec{x}).\vec{\sigma}\,(\vec{x})}$$

onde a matriz de transformação M é unitária e possui determinante igual a unidade:

$$M^\dagger M = \mathbb{1}, \qquad \det M = 1$$

de forma que:

$$M^\dagger \Phi' = \Phi\ \cdot$$

O conjunto de matrizes unitárias e especiais (det = 1), sob a operação de produto matricial têm a estrutura de grupo, e a este nos referimos como grupo $SU(2)$. A simetria $SU(2)$ desempenha papel fundamental na teoria das interações nucleares fracas.

Além disso, acrescentemos uma família de escalares, $\sum$, como dublete na representação $\underline{2}^*$ (representação complexo-conjugada $\underline{2}$) de $SU(2)$, onde os geradores são dados por

$$G_a = -\frac{1}{2}\,\sigma_a^t,$$

isto é, Σ está sujeito a transformação de gauge

$$\Sigma' = M^*\Sigma$$

onde

$$M^* = e^{-i\vec{\omega}.\frac{\vec{\sigma}^*}{2}} = e^{i\vec{\omega}.\left(\frac{-\vec{\sigma}^t}{2}\right)} \equiv e^{i\vec{\omega}.\vec{G}}$$

Esta representação, $\underline{2}^*$, é equivalente unitária a representação $\underline{2}$. Isto significa que existe uma matriz unitária,

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

para o qual

$$M = UM^{*}U^{-1}$$

ou

$$\sigma_i = -U\,\sigma_i^t U^{-1}$$

Com isso, pode-se definir uma nova família de campos

$$\widetilde{\Sigma} = U\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_2 \\ -\Sigma_1 \end{pmatrix}$$

que transforma-se como um dublete de $\underline{2}$, ou seja,

$$\begin{aligned} U\Sigma' &= UM^{*}\Sigma = UM^{*}U^{-1}U\,\Sigma \\ (U\Sigma)' &= M\,(U\,\Sigma)\ \in \underline{2} \end{aligned}$$

logo

$$\tilde{\Sigma}' = M\,\tilde{\Sigma}\ \ \in \underline{2}$$

Consideremos, agora, o triplete de campos escalares $S_a\,(a = 1, 2, 3)$, parametrizado matricialmente como:

$$S\,(x) \equiv S_a\,(x)\,\frac{\sigma_a}{2}.$$

Vemos que, o número de componentes de $S\,(x)$ é igual ao número de geradores do grupo, logo, este triplete é dito estar na representação adjunta do grupo de gauge. Sob transformação de gauge

$$S' = M\,SM^{\dagger}$$

Finalmente, acrescentemos, como exemplo, o quadruplete de campos fermiônicos

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \in \underline{4}$$

que pertence a representação 4-dimensional de $SU(2)$. ψ está sujeito a transformação de gauge

$$\Psi' = N\,\Psi$$

onde,

$$N = e^{\frac{i}{2}\omega_i\,J_i}$$

sendo os ω_i parâmetros independentes das transformações e os J_i geradores da representação $\underline{4}$, dadas por

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},\; J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i\sqrt{3} & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & & \underline{0} \\ 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 \\ \underline{0} & & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

3 Lagrangeano e sua Invariância global

Após termos definido todos os multipletes de campos de matéria com as respectivas transformações sob simetria de gauge, passemos a etapa de escrever o Lagrangeano completo para os mesmos.

$$\begin{aligned} \Phi &\in \underline{2}, \\ \Sigma &\in \underline{2}^*, \\ \widetilde{\Sigma} &\in \underline{2}, \\ S &\in \underline{3}, \\ \Psi &\in \underline{4}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m_1^2 \Phi^\dagger \Phi + \partial_\mu \Sigma^\dagger \partial^\mu \Sigma - m_2^2 \Sigma^\dagger \Sigma + \overline{\Psi}\, i\, \gamma^\mu\, \partial_\mu \Psi - m_3 \overline{\Psi}\, \Psi +$$

$$+\, tr\left(\partial_\mu S^\dagger \partial^\mu S - m_4^2 S^\dagger S\right) - h_1 \left(\Phi^\dagger \Phi\right)^2 - h_2 \left(\Sigma^\dagger \Sigma\right)^2 - h_3 \left[tr\left(S^\dagger S\right)\right]^2 +$$

$$-\, h_4 \left(\Phi^\dagger \Phi\right)\left(\Sigma^\dagger \Sigma\right) - h_5 \left(\Phi^\dagger \widetilde{\Sigma}\right)^2 - h_6 \left(\Phi^\dagger \widetilde{\Sigma}\right)\left(\Sigma^\dagger \Sigma\right) - h_7 \left(\Phi^\dagger \Phi\right)\left(\overline{\Psi}\, \Psi\right) +$$

$$-h_8 \left(\Phi^\dagger \widetilde{\Sigma}\right)\left(\overline{\Psi}\, \Psi\right) - h_9 \left(\Sigma^\dagger \Sigma\right)\left(\overline{\Psi}\, \Psi\right) - h_{10} \Phi^\dagger S \Phi - h_{11} \Sigma^\dagger S\, \Sigma - h_{12} \Phi^\dagger S\, \widetilde{\Sigma} +$$

$$-h_{13} \Phi^\dagger \Phi\, tr\left(S^\dagger S\right) - h_{14} \Sigma^\dagger \Sigma\, tr\left(S^\dagger S\right) - h_{15} \Phi^\dagger \widetilde{\Sigma}\, tr\left(S^\dagger S\right) +$$

$$-h_{16} \overline{\Psi}\, \Psi\, tr\left(S^\dagger S\right) - h_{17} \overline{\Psi} S \Psi.$$

onde o campo S no termo h_{17} está parametrizado com os geradores da representação $\underline{4}$ (os J_a) e os m 's e h 's designam, respectivamente, parâmetros de massa e constantes de acoplamento da matéria em auto interação. Convém ressaltar que, no caso onde os campos S_a do triplete são reais, devido a hermiticidade das matrizes σ_a, tem-se

$$S^\dagger = S$$

Entretanto, manteremos os $S^\dagger$'s a fim de levarmos em conta, automaticamente,o caso de S_a's complexos.

Pode-se verificar que esta densidade de Lagrangeano é invariante face às transformações dos campos, isto é,

$$\mathcal{L}' \left(\Phi', \Sigma', \widetilde{\Sigma}', S', \Psi'\right) = \mathcal{L}\left(\Phi', \Sigma', \widetilde{\Sigma}', S', \Psi'\right) = \mathcal{L}\left(\Phi, \Sigma, \widetilde{\Sigma}, S, \Psi\right)$$

Foi utilizado o seguinte programa FORM para verificar esta invariância:

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

  Nfunctions P, [Phi], Phi, H, M;
  Symbols m, lambda;
  indices mu;
  local Lag = P(mu)*H([Phi])*P(mu)*[Phi] - m^2*H([Phi])*[Phi] -
              lambda/4*(H([Phi])*[Phi])^2;
  id [Phi] = M*Phi;
```

```
argument;
        id [Phi] = M*Phi;
endargument;
id H(M*Phi) = H(Phi)*H(M);
id P(mu)*M*Phi = M*P(mu)*Phi;
id H(M)*M = 1;
print;
.end
```

```
Lag =
   P(mu)*H(Phi)*P(mu)*Phi - H(Phi)*Phi*m^2 - 1/4*H(Phi)*Phi*H(Phi)*Phi*
   lambda;
```

4 Tensor de energia-Momento

Consideremos a contribuição de campos escalares ao tensor de energia momento "improved", idêntico ao tensor de energia momento canônico (pois um campo escalar possui spin nulo)

$$\theta_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{sc}}{\partial\left(\partial^{\mu}\Phi\right)}\,\partial_{\nu}\Phi + \partial_{\nu}\Phi^{\dagger}\frac{\partial \mathcal{L}_{sc}}{\partial\left(\partial^{\mu}\Phi^{\dagger}\right)} - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}_{sc}$$

onde $\mathcal{L}_{sc}$ é a parte do Lagrangeano restrita aos campos escalares e Φ representa um escalar genérico.

O programa FORM que realiza o cálculo explícito de $\theta_{\mu\nu}$ é dado abaixo:

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

   Nfunctions LAG, L, dd, P, Phi, H;
   Symbols m, lambda;
   Indices mu, nu, ro;
   Local T = dd(P(mu)*Phi)*LAG*P(nu)*Phi +
             P(nu)*H(Phi)*dd(P(mu)*H(Phi))*LAG -
             d_(mu,nu)*L;
   id LAG = P(ro)*H(Phi)*P(ro)*Phi - m^2*H(Phi)*Phi -
            lambda/4*(H(Phi)*Phi)^2;
   id dd(P(mu)*Phi)*P(ro)*H(Phi) = P(ro)*H(Phi)*dd(P(mu)*Phi);
```

```
id dd(P(mu)*Phi)*P(ro)*Phi = d_(mu,ro);
id dd(P(mu)*H(Phi))*P(ro)*H(Phi) = d_(mu,ro);
id dd(?) = 0;
print;
.end
```

```
T =
     - L*d_(mu,nu) + P(mu)*H(Phi)*P(nu)*Phi + P(nu)*H(Phi)*P(mu)*Phi;
```

Identificamos, no resultado, a expressão para $\theta_{\mu\nu}$ como sendo

$$\theta_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial_\nu \Phi + \partial_\nu \Phi^\dagger \partial_\mu \Phi + \partial_\mu \Sigma^\dagger \partial_\nu \Sigma + \partial_\nu \Sigma^\dagger \partial_\mu \Sigma + tr\left(\partial_\mu S^\dagger \partial_\nu S + \partial_\nu S^\dagger \partial_\mu S\right) - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}_{sc}$$

As componentes relevantes no cômputo da energia e do momento total do sistema são θ^{00} e θ^{0i}, identificados respectivamente com a densidade de energia e de momento. Estas expressam-se, utilizando o programa FORM para calcular, como:

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

    Ntensor P, [phi], phi, LAG;
    symbols m, lambda;
    indices mu,nu,ro, I, i;
    local T = P(mu)*[phi](I)*P(nu)*phi(I) + P(nu)*[phi](I)*P(mu)*phi(I) -
              d_(mu,nu)*LAG;
    id LAG  = P(ro)*[phi](I)*P(ro)*phi(I) - m^2*[phi](I)*phi(I) -
              lambda/4*([phi](I)*phi(I))^2;
    local T00 = d_(mu,0)*d_(nu,0)*T;
    local T0i = d_(mu,0)*d_(nu,i)*T;
    id d_(0,i) = 0;
    sum ro 0,1;
    id once P(1) = P(i);
    id once P(1) = - P(i);
    print T00, T0i;
```

```
.end


T00 =
   P(0)*[phi](I)*P(0)*phi(I) + P(i)*[phi](I)*P(i)*phi(I) +
   [phi](I)*phi(I)*m^2 + 1/4*[phi](I)*phi(I)*[phi](I)*phi(I)*lambda;

T0i =
   P(0)*[phi](I)*P(i)*phi(I) + P(i)*[phi](I)*P(0)*phi(I);
```

$$
\begin{aligned}
\theta^{00} = & \dot{\varphi}^{*}\, \dot{\varphi}_i + (\nabla\varphi_i^*)\,.\,(\nabla\varphi_i) + m_1^2\varphi_i^*\varphi_i + \dot{\Sigma}_i^{*}\dot{\Sigma}_i + (\nabla\Sigma_i^*)\,.\,(\nabla\Sigma_i) + m_2^2\Sigma_i^*\Sigma_i + \\
& + \tfrac{1}{2}\ \dot{S}_a\dot{S}_a + \tfrac{1}{2}\ (\nabla S_a)\,.\,(\nabla S_a) + \tfrac{1}{2}\, m_4\, S_a S_a + h_1\,(\varphi_i^*\varphi_i)^2 + h_2\,(\Sigma_i^*\Sigma_i)^2 + \\
& + \tfrac{h_3}{4}\ (S_a S_a)^2 + h_4\,(\varphi_i^*\varphi_i)\left(\Sigma_j^*\Sigma_j\right) + h_5\left(\varphi_i^*\,\tilde{\Sigma}_i\right)^2 + h_6\left(\varphi_i^*\,\tilde{\Sigma}_i\right)\left(\Sigma_j^*\Sigma_j\right) + \\
& + \tfrac{h_{10}}{2}\ S_a\varphi_i^*\ (\sigma_a)_{ij}\ \varphi_j + \tfrac{h_{11}}{2}\, S_a\Sigma_i^*\,(\sigma_a)_{ij} + \tfrac{h_{12}}{2}\, S_a\varphi_i^*\,(\sigma_a)_{ij}\,\widetilde{\Sigma}_j + \tfrac{h_{13}}{2}\,\varphi_i^*\varphi_i\, S_a\, S_a + \\
& + \tfrac{h_{15}}{2}\varphi_i^*\widetilde{\Sigma}_i\, S_a\, S_a .
\end{aligned}
$$

e

$$\vec{\mathcal{P}} \equiv \theta^{0i}\ \ \vec{e}_i$$

$$\vec{\mathcal{P}} = -\ \dot{\varphi}_i{}^{*}\ \nabla\varphi_i - \dot{\varphi}_i\ \nabla\varphi_i^* - \dot{\Sigma}_i^{*}\ \nabla\ \dot{\Sigma}_i - \dot{\Sigma}_i\ \nabla\Sigma_i^* - \dot{S}_2\ \nabla S_a$$

5 Gauging da Simetria SU(2)

De acordo com a prescrição de gauge via covariantização das derivadas dos campos, o Lagrangeano da seção anterior passará a apresentar a simetria $SU(2)$ local,

$$
\begin{aligned}
\Phi' &= M\,\Phi, \\
\Sigma' &= M^*\,\Sigma, \\
\widetilde{\Sigma}' &= M\,\widetilde{\Sigma}, \\
S' &= M\,S\,M^\dagger, \\
\Psi' &= N\,\Psi,
\end{aligned}
$$

onde

$$M = e^{\frac{i}{2}\,\omega_a\,(x)\sigma_a}$$

e

$$N = e^{\frac{i}{2}\,\omega_a\,(x)\,J_a}$$

se as derivadas espaço-temporais forem substituidas pelas derivadas $SU(2)$ covariante

$$\partial_\mu\Phi \to D_\mu\Phi \equiv \left(\partial_\mu + ig\,A_{\mu a}\,\tfrac{\sigma_a}{2}\right)\Phi$$

$$\partial_\mu\,\Sigma \to D_\mu\,\Sigma \equiv \left(\partial_\mu - ig\,A_{\mu a}\,\tfrac{\sigma_a^t}{2}\right)\Sigma$$

$$\partial_\mu\,\widetilde{\Sigma} \to D_\mu\widetilde{\Sigma} \equiv \left(\partial_\mu + ig\,A_{\mu a}\,\tfrac{\sigma_a}{2}\right)\widetilde{\Sigma}$$

$$\partial_\mu S \to D_\mu S \equiv \partial_\mu S + ig\,A_{\mu a}\left[\tfrac{\sigma_a}{2}, S\right]$$

$$\partial_\mu\Psi \to D_\mu\Psi \equiv \left(\partial_\mu + ig\,A_{\mu a}\,\tfrac{J_a}{2}\right)\Psi$$

cujas leis de transformação são fixadas como:
(i)para Φ, $\widetilde{\Sigma}$ e S, $D_\mu' = M\,D_\mu\,M^\dagger$
(ii)para Σ, $D_\mu' = M^*D_\mu\,M^t$
(iii)para Ψ, $D_\mu' = ND_\mu N^\dagger$

Convém ressaltar que, muito comumente, o campo de gauge, A_μ^a, é parametrizado em forma Lie-algebra valued, o que consiste em contraí-lo com os geradores de representação de campo cuja derivada covariante é considerada. Assim:

(i)para Φ e $\widetilde{\Sigma}$, $\quad D_\mu \equiv \partial_\mu + ig\,A_\mu,$

sendo $A_\mu \equiv A_{\mu a} \frac{\sigma_a}{2}$;

(ii)para Σ $D_\mu \equiv \partial_\mu + ig\, A_\mu$,

sendo $A_\mu \equiv A_{\mu a} \left(\frac{-\sigma_a^t}{2}\right)$;

(iii)para S, $D_\mu \equiv \partial_\mu + ig\,[\,A_\mu, .]$

sendo A_μ o mesmo que para $\underline{2}$;

(iv)para Ψ, $D_\mu \equiv \partial_\mu + ig\, A_\mu$,

sendo $A_\mu \equiv A^a_\mu \frac{J_a}{2}$.

Da imposição de covariância das derivadas dos campos, chega-se às leis de transformação:

(i)para Φ e $\widetilde{\Sigma}$ e S

$A'_\mu = M\, A_\mu M^\dagger + \frac{i}{g}\, M\, \partial_\mu M^\dagger$;

(ii)para Σ

$A'_\mu = M^* A_\mu M^t + \frac{i}{g}\, M\, ^*\partial_\mu M^t$;

(iii)para Ψ

$A'_\mu = N\, A_\mu N^\dagger + \frac{i}{g} N\, \partial_\mu N^\dagger$;

De qualquer destas transformações, decorre que, no caso infinitesimal ($\omega^2 \to 0$), tem-se

$$A'_{\mu\, i} = A_{\mu\, i} + \epsilon_{ijk}\, A_{\mu\, j}\, \omega_k - \frac{1}{g} \partial_\mu\, \omega_i$$

O field-strenght para os campos de gauge $A_{\mu\, i}$ é definido, em analogia ao caso de simetria $U(1)$ de Maxwell, como

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\, \nu\, i} \frac{\sigma_i}{2} \equiv \frac{1}{ig}\, [D_\mu, D_\nu]$$

do que obtem-se que

$$F_{\mu\, \nu\, i} = \partial_\mu A_{\nu\, i} - \partial_\nu A_{\mu\, i} - g\epsilon_{i\, j\, k}\, A_{\mu\, j}\, A_{\nu\, k}$$

De posse destes resultados, propõem-se a seguinte densidade de Lagrangeano invariante sob simetria local $SU(2)$:

$$= -\frac{1}{2}\,tr\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)+\left(D_\mu\Phi\right)^\dagger\left(D^\mu\Phi\right)-m_1^2\Phi^\dagger\Phi+\left(D_\mu\Sigma\right)^\dagger D^\mu\Sigma-\,m_2^2\Sigma^\dagger\Sigma+$$

$$+\overline{\Psi}\,i\gamma^\mu D_\mu\Psi-m_3\overline{\Psi}\Psi+tr\left[\left(D_\mu S\right)^\dagger D^\mu S-m_4^2S^\dagger S\right]-h_1\left(\Phi^\dagger\Phi\right)^2-h_2\left(\Sigma^\dagger\Sigma\right)^2+$$

$$-h_3\left[tr\left(S^\dagger S\right)\right]^2-h_4\left(\Phi^\dagger\Phi\right)\left(\Sigma^\dagger\Sigma\right)-h_5\left(\Phi^\dagger\widetilde{\Sigma}\right)^2-h_6\left(\Phi^\dagger\widetilde{\Sigma}\right)\left(\Sigma^\dagger\Sigma\right)+$$

$$-h_7\left(\Phi^\dagger\Phi\right)\left(\overline{\Psi}\,\Psi\right)-h_8\left(\Phi^\dagger\widetilde{\Sigma}\right)\left(\overline{\Psi}\,\Psi\right)-h_9\left(\Sigma^\dagger\Sigma\right)\left(\overline{\Psi}\,\Psi\right)-h_{10}\Phi^\dagger S\Phi+$$

$$-h_{11}\Sigma^\dagger S\;\Sigma-h_{12}\Phi^\dagger S\;\widetilde{\Sigma}\;-h_{13}\Phi^\dagger\Phi\,tr\left(S^\dagger S\right)-h_{14}\Sigma^\dagger\Sigma\,tr\left(S^\dagger S\right)+$$

$$-h_{15}\Phi^\dagger\widetilde{\Sigma}\,tr\left(S^\dagger S\right)-h_{16}\overline{\psi}\psi\,tr\left(S^\dagger S\right)-h_{17}\overline{\Psi}S\Psi$$

$$\mathcal{L}=\tfrac{1}{4}\,F_{\mu\nu i}\,F_i^{\mu\nu}+\partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi-m_1^2\Phi^\dagger\Phi+\partial_\mu\Sigma^\dagger\partial^\mu\Sigma^\dagger+$$

$$-m_2^2\Sigma^\dagger\Sigma+\overline{\Psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi-m_3\overline{\Psi}\,\Psi+tr\left(\partial_\mu\,S^\dagger\partial^\mu S-m_4^2S^\dagger S\right)$$

$$+\tfrac{ig}{2}\,A_{\mu a}\left(\left(\partial^\mu\Phi^\dagger\right)\sigma_a\Phi-\Phi^\dagger\sigma_a\,\partial^\mu\Phi\right)+\tfrac{g^2}{4}\,A_{\mu a}\,A_a^\mu\Phi^\dagger\Phi+$$

$$-\tfrac{ig}{2}\,A_{\mu a}\left(\left(\partial^\mu\Sigma^\dagger\right)\sigma_a^t\Sigma-\Sigma^\dagger\sigma_a^t\,\partial^\mu\Sigma\right)+\tfrac{g^2}{4}A_{\mu a}\,A_a^\mu\Sigma^\dagger\Sigma+$$

$$-\tfrac{g}{2}\,A_{\mu a}\overline{\Psi}\gamma^\mu J_a\Psi-g\varepsilon_{abc}\,A_\mu^a\,S_b\partial_\mu\,S_c\,-\tfrac{g^2}{2}\left(A_{\mu a}\,A_a^\mu\,S_bS_b-A_{\mu a}\,A_b^\mu\,S_a\,S_b\right)+$$

$$-\,h_1\left(\Phi^\dagger\Phi\right)^2-h_2\left(\Sigma^\dagger\Sigma\right)^2-h_3\left[tr\left(S^\dagger S\right)\right]^2-h_4\left(\Phi^\dagger\Phi\right)\left(\Sigma^\dagger\Sigma\right)+$$

$$-h_5\left(\Phi^\dagger\widetilde{\Sigma}\right)^2-h_6\left(\Phi^\dagger\widetilde{\Sigma}\right)\left(\Sigma^\dagger\Sigma\right)-h_7\left(\Phi^\dagger\Phi\right)\left(\overline{\Psi}\,\Psi\right)-h_8\left(\Phi^\dagger\widetilde{\Sigma}\right)\left(\overline{\Psi}\,\Psi\right)+$$

$$-h_9\left(\Sigma^\dagger\Sigma\right)\left(\overline{\Psi}\,\Psi\right)-h_{10}\Phi^\dagger S\Phi-h_{11}\Sigma^\dagger S\;\Sigma-h_{12}\Phi^\dagger S\widetilde{\Sigma}\;-h_{13}\Phi^\dagger\Phi\,tr\left(S^\dagger S\right)+$$

$$-h_{14}\Sigma^\dagger\Sigma\,tr\left(S^\dagger S\right)-h_{15}\Phi^\dagger\widetilde{\Sigma}\,tr\left(S^\dagger S\right)-h_{16}\overline{\Psi}\Psi\,tr\left(S^\dagger S\right)-h_{17}\overline{\Psi}S\Psi.$$

Este é o Lagrangeano que descreve a propagação e a auto-interação dos campos Yang-Mills, $A_{\mu i}$, bem como a propagação, a auto-interação e as interações de gauge dos multipletes de matéria $\Phi, \Sigma, \widetilde{\Sigma}, S$ e Ψ. Aplicando-se o princípio variacional obtém-se as seguintes equações de movimento para os campos.

$$D_\mu F^{\mu\nu} = \frac{ig}{4}\left(\Phi^\dagger \sigma_i D^\nu \Phi - (D^\nu \Phi)^\dagger \sigma_i \Phi - \Sigma^\dagger \sigma_i^t D^\nu \Sigma + (D^\nu \Sigma)^\dagger \sigma_i^t \Sigma\right)\sigma_i + \frac{g}{4}\overline{\Psi}\gamma^\nu \sigma_i \Psi \sigma_i +$$

$$+\frac{g}{2}\epsilon_{ijk}\sigma_i S_j \partial^\nu S_k + \frac{g^2}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{emk}\sigma_i S_j A_e^\nu S_m \equiv J^\nu$$

ou

$$\partial_\mu F_i^{\mu\nu} = g\varepsilon_{ijk} F_j^{\mu\nu} A_{\mu k} + \frac{ig}{2}\left(\Phi^\dagger \sigma_i (\partial^\nu \Phi) - \left(\partial^\nu \Phi^\dagger\right)\sigma_i \Phi\right) +$$

$$-\frac{g^2}{2} A_i^\nu \Phi^\dagger \Phi - \frac{ig}{2}\left(\Sigma^\dagger \sigma_i^t (\partial^\nu \Sigma) - \left(\partial^\nu \Sigma^\dagger\right)\sigma_i^t \Sigma\right) +$$

$$-\frac{g^2}{2} A_i^\nu \Sigma^\dagger \Sigma + \frac{g}{2}\overline{\Psi}\gamma^\nu \sigma_i \Psi + g\varepsilon_{ijk} S_j \partial^\nu S_k + g^2\left(A_i^\nu S_j S_j - S_i A_j^\nu S_j\right).$$

$$(\Box + m_1^2)\Phi = \frac{1}{4}g^2 A_{\mu i} A_i^\mu \Phi - \frac{i}{2}g\partial_\mu\left(A_i^\mu \sigma_i \Phi\right) - \frac{i}{2}A_{\mu i}\sigma_i \partial^\mu \Phi - h_1 \Phi\left(\Phi^\dagger \Phi\right) - h_4 \Phi\left(\Sigma^\dagger \Sigma\right) +$$

$$-h_5 \widetilde{\Sigma}\left(\Phi^\dagger \widetilde{\Sigma}\right) - h_6 \widetilde{\Sigma}\left(\Sigma^\dagger \Sigma\right) - h_7 \Phi\left(\overline{\Psi}\Psi\right) - h_8 \widetilde{\Sigma}\left(\overline{\Psi}\Psi\right) - h_{10} S\Phi +$$

$$-h_{12} S\widetilde{\Sigma} - h_{13}\Phi\, tr\left(S^\dagger S\right) - h_{15}\widetilde{\Sigma}\, tr\left(S^\dagger S\right)$$

$$(\Box + m_2^2)\Sigma = \frac{1}{4}g^2 A_{\mu i} A_i^\mu \Sigma - \frac{i}{2}g\,\partial_\mu\left(A_i^\mu \sigma_i \Sigma\right) + \frac{i}{2}A_{\mu i}\sigma_i \partial^\mu \Sigma - h_2 \Sigma\left(\Sigma^\dagger \Sigma\right) +$$

$$-h_4 \Sigma\left(\Phi^\dagger \Phi\right) - h_6\left(\Phi^\dagger \widetilde{\Sigma}\right) - h_9 \Sigma\left(\overline{\Psi}\Psi\right) - h_{11} S\,\Sigma - h_{14}\Sigma\, tr\left(S^\dagger S\right)$$

$$\left[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{ig}{2}A_{\mu i}J_i\right) - m_3\right]\Psi = h_7 \Psi\left(\Phi^\dagger \Phi\right) + h_8 \Psi\left(\Phi^\dagger \widetilde{\Sigma}\right) + h_9 \Phi\left(\Sigma^\dagger \Sigma\right)$$
$$+h_{16}\Psi tr\left(S^\dagger S\right) + h_{17} S\,\Psi.$$

Das equações de movimento para os campos de Yang-Mills são colocados em evidência a corrente de gauge estritamente conservada, j_i^ν, e a chamada corrente covariantemente conservada, J^ν:

$$\partial_\nu j_i^\nu = 0$$

e

$$D_\nu J^\nu = 0$$

6 Identidade de Bianchi

A identidade de Bianchi para a simetria $SU(2)$ pode ser obtida da identidade matemática:

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$$

quando A,B e C são:

$$\begin{aligned}
A &= \partial_\mu + \frac{i}{2}gA_{\mu i}\sigma_i = \partial_\mu + igA_\mu \\
B &= \partial_\nu + \frac{i}{2}gA_{\nu i}\sigma_i = \partial_\nu + igA_\nu \\
C &= \partial_\rho + \frac{i}{2}gA_{\rho i}\sigma_i = \partial_\rho + igA_\rho
\end{aligned}$$

Podemos escrever um programa FORM para aplicar estas substituições e realizar as simplificações necessárias à obtenção da identidade de Bianchi:

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

    nfunctions A, B, C, P, D, F, sigma, phi;
    symbols M, N, g;
    indices mu, nu, ro, i, j, k, l, m, n;
    local zero = C(A,C(B,C)*phi)*phi + C(B,C(C,A)*phi)*phi +
                 C(C,C(A,B)*phi)*phi;
    argument;
      id C(M?,N?) = M*N - N*M;
      id A = P(mu) + 1/2*i_*g*A(mu,i)*sigma(i);
      id B = P(nu) + 1/2*i_*g*A(nu,j)*sigma(j);
```

```
id C = P(ro) + 1/2*i_*g*A(ro,k)*sigma(k);
id disorder P(?)*P(??) = P(..)*P(.);
id sigma(?)*A(??) = A(..)*sigma(.);
id disorder A(?)*A(??) = A(..)*A(.);
id P(?)*A(??)*sigma(i?)*phi = phi*P(.)*A(..)*sigma(i) +
        A(..)*sigma(i)*P(.)*phi;
id disorder sigma(i?)*sigma(j?) = sigma(j)*sigma(i) +
        2*i_*e_(i,j,l)*sigma(l);
id disorder P(mu)*A(nu,i?)*sigma(i?) = 2*F(mu,nu) +
        P(nu)*A(mu,i)*sigma(i) +
        g*e_(i,m,n)*A(mu,m)*A(nu,n)*sigma(i);
id disorder P(nu)*A(ro,i?)*sigma(i?) = 2*F(nu,ro) +
        P(ro)*A(nu,i)*sigma(i)+
        g*e_(i,m,n)*A(nu,m)*A(ro,n)*sigma(i);
id disorder P(ro)*A(mu,i?)*sigma(i?) = 2*F(ro,mu) +
        P(mu)*A(ro,i)*sigma(i)
        + g*e_(i,m,n)*A(mu,n)*A(ro,m)*sigma(i);
sum i, j, k, l, m, n;
id phi = 1;
endargument;
id C(M?,N?) = M*N - N*M;
id P(?)*F(??)*phi = phi*P(.)*F(..) + F(..)*P(.)*phi;
id P(mu)*F(nu,ro) = D(mu)*F(nu,ro) -
        1/2*i_*g*A(mu,i)*sigma(i)*F(nu,ro)
        + 1/2*i_*g*F(nu,ro)*A(mu,i)*sigma(i);
id P(nu)*F(ro,mu) = D(nu)*F(ro,mu) -
        1/2*i_*g*A(nu,i)*sigma(i)*F(ro,mu)
        + 1/2*i_*g*F(ro,mu)*A(nu,i)*sigma(i);
id P(ro)*F(mu,nu) = D(ro)*F(mu,nu) -
        1/2*i_*g*A(ro,i)*sigma(i)*F(mu,nu)
        + 1/2*i_*g*F(mu,nu)*A(ro,i)*sigma(i);
sum i;
id phi = 1;
print;
.end

zero =
   D(mu)*F(nu,ro)*i_*g + D(nu)*F(ro,mu)*i_*g + D(ro)*F(mu,nu)*i_*g;
```

Identificamos ao final dos cálculos o resultado:

$$D_\mu F_{\nu\rho} + D_\nu F_{\rho\mu} + D_\rho F_{\mu\nu} = 0$$

onde o tensor intensidade-de-campo $F_{\mu\nu}$ foi definido como:

$$F_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\partial_\nu A_{\rho\,i}\sigma_i - \frac{1}{2}\partial_\rho A_{\nu\,i}\sigma_i - \frac{1}{2}g\epsilon_{i\,j\,k}A_{\nu\,i}A_{\rho\,j}\sigma_k$$

e a sua derivada covariante foi definida como:

$$D_\mu F_{\nu\rho} = \partial_\mu F_{\nu\rho} + \frac{1}{2}ig\left[A_{\mu i}\sigma_i, F_{\nu\rho}\right] = \partial_\mu F_{u\rho} + ig\left[A_\mu, F_{\nu\rho}\right]$$

7 Introdução dos campos $W_\mu^{(\pm)}$ e Z_μ

A idéia da presente seção é reescrever o Lagrangeano e as leis de transformação de gauge para novos campos vetoriais, $W_\mu^{(\pm)}$ e Z_μ, definidos a partir dos potenciais de Yang-Mills através das relações:

$$W_\mu^{(\pm)} \equiv \frac{A_{\mu 1} \pm \ iA_{\mu 2}}{\sqrt{2}}, Z_\mu \equiv A_{\mu 3}$$

O propósito de tal redefinição de campos é evidenciar a presença de 2 bósons vetoriais carregados e um neutro que, do ponto-de-vista da fenomenologia, correspondem aos mediadores das interações nucleares fracas. Entretanto, em nosso modelo, devido à simetria $SU(2)$ permanecer exata, e não ser quebrada espontaneamente, os 3 bósons vetoriais são não-massivos (experimentalmente, sabe-se que $m_W = 82\,GeV$ e $m_Z = 93GeV$)

Reconduzindo-se ao Lagrangeano da seção anterior, depois de uma certa álgebra, obtém-se através do FORM

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

   Nw Stat;
   ntensors A,Phi,[Phi],P,sigma,Psi,[Psi],gamma,[W+],[W-],Z,J,S,[Sig],
            Sig,sigmat;
   cfunctions sqrt;
   symbols g;
   dimension 3;
```

```
indices mu,a,b,c;
Local LAG = i_*(g/2)*A(mu,a)*((P(mu)*[Phi])*sigma(a)*Phi-
            [Phi]*sigma(a)*P(mu)*Phi) +
            (g^2/4)*A(mu,a)*A(mu,a)*[Phi]*Phi-
            i_*(g/2)*A(mu,a)*((P(mu)*[Sig])*sigmat(a)*Sig-
            [Sig]*sigmat(a)*P(mu)*Sig)+
            (g^2/4)*A(mu,a)*A(mu,a)*[Sig]*Sig-
            (g/2)*A(mu,a)*[Psi]*gamma(mu)*J(a)*Psi-
            g*e_(a,b,c)*A(mu,a)*S(b)*P(mu)*S(c)+
            (g^2/2)*(A(mu,a)*A(mu,a)*S(b)*S(b)-
            A(mu,a)*A(mu,b)*S(a)*S(b));

sum a,1,2,3;
id e_(1,2,3)=1;
id A(mu?,1)=sqrt(2)/2*([W+](mu)+[W-](mu));
id A(mu?,2)=sqrt(2)/2*i_*([W-](mu)-[W+](mu));
id A(mu?,3)=Z(mu);
print+s;
.end
```

[1]

que:

[1] O resultado do programa não é mostrado por ser demasiadamente grande

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = {} & \tfrac{1}{4}\, F_{\mu\nu i}\, F_i^{\mu\nu} + \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m_1^2 \Phi^\dagger \Phi + \partial_\mu \textstyle\sum^\dagger \partial^\mu \sum + \\
& -m_2^2 \Sigma^\dagger \Sigma + \overline{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m_3 \overline{\Psi}\, \Psi + tr\left(\partial_\mu\, S^\dagger \partial^\mu S - m_4^2 S^\dagger S \right) \\
& -\tfrac{\sqrt{2}}{4}\, g^2 \left[W_\mu^{(+)} + W_\mu^{(-)} \right]\, A_b^\mu\, S_1 S_6 \,+ \tfrac{i\sqrt{2}}{4}\, g^2 \left[W_\mu^{(+)} - W_\mu^{(-)} \right]\, A_b^\mu\, S_2 S_6 + \\
& -\tfrac{i\sqrt{2}}{4}\, g \left[W_\mu^{(+)} + W_\mu^{(-)} \right]\, \varphi^\dagger \sigma_1 \partial^\mu \varphi - \tfrac{\sqrt{2}}{4}\, g \left[W_\mu^{(+)} - W_\mu^{(-)} \right]\, \varphi^\dagger \sigma_2\, \partial^\mu \varphi + \\
& +\tfrac{i\sqrt{2}}{4}\, g \left[W_\mu^{(+)} + W_\mu^{(-)} \right] \partial^\mu\, \varphi^\dagger \sigma_1 \varphi + \tfrac{\sqrt{2}}{4}\, g \left[W_\mu^{(+)} - W_\mu^{(-)} \right] \partial^\mu\, \varphi^\dagger \sigma_2 \varphi + \\
& -\tfrac{i\sqrt{2}}{4}\, g \left[W_\mu^{(+)} + W_\mu^{(-)} \right] \partial^\mu\, \Sigma^\dagger \sigma_1^t \Sigma - \tfrac{\sqrt{2}}{4}\, g \left[W_\mu^{(+)} - W_\mu^{(-)} \right] \partial^\mu\, \Sigma^\dagger \sigma_2^t\, \Sigma + \\
& -\tfrac{\sqrt{2}}{4}\, g \left[W_\mu^{(+)} + W_\mu^{(-)} \right] \overline{\psi}\, \gamma^\mu J_1 \psi + \tfrac{i\sqrt{2}}{4}\, g\, \left[W_\mu^{(+)} - W_\mu^{(-)} \right] \overline{\Psi}\, \gamma^\mu J_2 \Psi \quad + \\
& -\tfrac{\sqrt{2}}{4}\, g\, \varepsilon_{1bc} \left[W_\mu^{(+)} + W_\mu^{(-)} \right] S_b \partial^\mu\, S_c + \tfrac{i\sqrt{2}}{4}\, g \varepsilon_{2bc} \left[W_\mu^{(+)} - W_\mu^{(-)} \right] S_b \partial^\mu S_c + \\
& +\tfrac{i\sqrt{2}}{4}\, g \left[W_\mu^{(+)} + W_\mu^{(-)} \right]\, \Sigma^\dagger \sigma_1^t\, \partial^\mu \Sigma + \tfrac{\sqrt{2}}{4}\, g \left[W_\mu^{(+)} - W_\mu^{(-)} \right]\, \Sigma^\dagger \sigma_2^t\, \partial^\mu \Sigma \, + \\
& +\tfrac{1}{4}\, g^2 \left[W_\mu^{(+)} W_\mu^{(-)\mu} + W_\mu^{(-)} W_\mu^{(+)\mu} \right]\, \varphi^\dagger \varphi + \, \tfrac{1}{2}\, g^2 \left[W_\mu^{(+)} W_\mu^{(-)\mu} + W_\mu^{(-)} W_\mu^{(+)\mu} \right]\, S_b\, S_b + \\
& +\tfrac{1}{4}\, g^2 \left[W_\mu^{(+)} W_\mu^{(-)\mu} + W_\mu^{(-)} W_\mu^{(+)\mu} \right]\, \Sigma^\dagger \Sigma - \tfrac{i}{2} g^2\, Z_\mu\, A_b^\mu\, S_3 S_b + \\
& - \tfrac{i}{2} g\, Z_\mu\, \left(\varphi^\dagger \sigma_3 \partial^\mu \varphi - \partial^\mu {\varphi}^\dagger \sigma_3 \varphi \right) - \tfrac{1}{2}\, g\, Z_\mu \left(\partial^\mu \Sigma^\dagger \sigma_3^t\, \Sigma - \Sigma^\dagger \sigma_3^t\, \partial^\mu\, \Sigma \right) \, + \\
& -\tfrac{g}{2}\, Z_\mu\, \overline{\Psi}\, \gamma^\mu\, J_3 \Psi + \tfrac{g^2}{4}\, Z_\mu\, Z^\mu \left(\varphi^\dagger \varphi + \Sigma^\dagger \Sigma + 2\, S_b\, S_b \right) - g \varepsilon_{3bc}\, Z_\mu\, S_b \partial^\mu\, S_c \\
& - h_1 \left(\Phi^\dagger \Phi \right)^2 - h_2 \left(\Sigma^\dagger \Sigma \right)^2 - h_3 \left[tr\left(S^\dagger S \right) \right]^2 - h_4 \left(\Phi^\dagger \Phi \right) \left(\Sigma^\dagger \Sigma \right) + \\
& -h_5 \left(\Phi^\dagger \widetilde{\Sigma} \right)^2 - h_6 \left(\Phi^\dagger \widetilde{\Sigma} \right) \left(\Sigma^\dagger \Sigma \right) - h_7 \left(\Phi^\dagger \Phi \right) \left(\overline{\Psi}\, \Psi \right) - h_8 \left(\Phi^\dagger \widetilde{\Sigma} \right) \left(\overline{\Psi}\, \Psi \right) + \\
& -h_9 \left(\Sigma^\dagger \Sigma \right) \left(\overline{\Psi}\, \Psi \right) - h_{10} \Phi^\dagger S \Phi - h_{11} \Sigma^\dagger S\, \Sigma - h_{12} \Phi^\dagger S \widetilde{\Sigma} \, - h_{13} \Phi^\dagger \Phi\, tr\left(S^\dagger S \right) + \\
& -h_{14} \Sigma^\dagger \Sigma\, tr\left(S^\dagger S \right) - h_{15} \Phi^\dagger \widetilde{\Sigma}\, tr\left(S^\dagger S \right) - h_{16} \overline{\Psi} \Psi\, tr\left(S^\dagger S \right) - h_{17} \overline{\Psi} S \Psi .
\end{aligned}
$$

Das transformações infinitesimais para os campos de gauge $A_{\mu i}$ obtemos as transformações dos $W_\mu^{(\pm)}$ e Z_μ :

$$W_\mu^{(\pm)} = \left(1 \pm \frac{\omega_3}{i}\right) W_\mu^{(\pm)} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\omega_2 \pm \frac{\omega_1}{i}\right) Z_\mu - \frac{\sqrt{2}}{2g}\left(\partial_\mu \omega_1 \pm \partial_\mu \omega_2\right)$$

e

$$Z'_\mu = Z_\mu + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\omega_2 + i\omega_1\right) W_\mu^{(\pm)} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\omega_2 - i\omega_1\right) W_\mu^{(-)} - \frac{1}{g}\partial_\mu \omega_3$$

8 Conclusão

Procurou-se demonstrar aqui a eficiência da linguagem FORM no estudo de uma teoria de gauge não-abeliana com grupo de simetria $SU(2)$. De fato, a verificação de invariâncias e obtenção de grandezas relevantes para a física do problema são rápida e claramente realizadas com este software. Como sugestão para aprofundamemto do estudo apresentado neste trabalho, fica a incorporação das interações quarks-léptons, discussão e cálculos sobre um ingrediente essencial, ainda que discutível, da teoria das interações fracas: a quebra espontânea da simetria efetuada pelos escalares de Higgs. As longas manipulações algébricas, que podem advir caso o setor de Higgs envolva vários escalares, prestam-se a uma aplicação eficaz do FORM.

9 Agradecimentos

Os autores agradecem ao Prof. J. A. Helayel-Neto pelas aulas, sugestões e pelo auxílio no texto. Também, expressam seu reconhecimento ao C.N.Pq.e à CAPES pelas bolsas concedidas.