A0048/77
NOV,1977

O PROBLEMA DO BATE-ESTACA VIA PONTO FIXO

MAURÍCIO VIEIRA KRITZ

1. IBGE
Av. Beira-Mar 436 - 13º andar

2. Laboratório de Cálculo/CBPF
Av. Wenceslau Braz, 71-fundos
Rio de Janeiro, RJ, Brasil

ABSTRACT

In this paper we study the existence of solutions of a variational inequality modelling the dynamics of a pile penetrating into the ground through the action of a pile hammer, via fixed point and subdifferential arguments. This line of reasoning reduces the variational inequality to a nonlinear evolution equation involving a monotone operator.

1. INTRODUÇÃO

Num trabalho recente [2], M.A. Raupp, R.A. Feijóo e C.A. de Moura, propuseram um modelo para um problema de mecânica dos solos, qual seja o do comportamento dinâmico de uma estaca de fundação penetrando no solo sob a ação de um bate-estaca. Devido ao efeito do atrito, a forma matemática do modelo resultou numa inequação variacional envolvendo um funcional não diferenciável. No trabalho acima citado, foi provada a existência e unicidade de soluções dessa inequação variacional por regularização do termo não-diferenciável. Em dois outros trabalhos, os mesmos autores apresentaram resultados numéricos usando regularização, Galerkin e predictor-corrector [3] e uma discretização da equação baseada num algoritmo de otimização [4].

O objetivo deste trabalho é apresentar uma demonstração da existência de soluções da inequação variacional acima referida que, usando argumentos de ponto fixo e subdiferencial, reduz este problema ao da existência de soluções fracas de uma equação de evolução monótona.

Antes de apresentarmos a inequação, vamos definir alguma notação para lhe dar um significado preciso. Seja $\Omega = (0,L)$ um intervalo da reta e $V = H^1(\Omega)$ o espaço de Sobolev de ordem um sobre Ω. Para $1 \leq p \leq \infty$, D um espaço de Banach, e T um número real positivo fixado, representaremos por $L^p(D)$ o espaço de Banach de todas as funções mensuráveis

$$u : [0,T] \to D$$

tais que $\|u(t)\|_D \in L^p[0,T]$. Sua norma é dada por

$$\|u\|^p_{L^p(D)} = \int_0^T \|u(t)\|^p_D \, dt ,$$

se $1 \leq p < \infty$, e

$$\|u\|_{L^\infty(D)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_D.$$

Se f e g são funções de $H = L^2(\Omega)$ então

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

é o produto interno usual nesse espaço e

$$|f|_2^2 = (f,f),$$

é a norma de f em H, resultante de $(\cdot,\cdot)$. Se $v \varepsilon V$ e $f \varepsilon V'$, dual de V, então

$$<f,v> = f(v)$$

visto como uma forma bilinear de $V' \times V$ em $\mathbb{R}$ é o par de dualidade de (V,V').

Além disso, se ℓ é uma função de $L^\infty(\Omega)$, K, F e γ são constantes reais positivas e u e v são funções de H, definimos

$$(1.1) \qquad J(u,v) = K\gamma F \int_\Omega \ell(x)H(x+u-L)(x+u-L)|v|dx ,$$

sendo H a função de Heaviside, isto é,

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Usaremos, também, para a derivação no tempo, a notação comum em Física:

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}$$

e

$$\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}.$$

Para todo funcional $f \in V'$ e toda função $\alpha \in C^1(\overline{\Omega})$, espaço das funções continuamente diferenciáveis em Ω, definiremos o funcional $\alpha f \in V'$ da seguinte forma

$$<\alpha f, v> = <f, \alpha v> \ , \ \forall \ v \in V,$$

dado que $\alpha v \in V$ se $\alpha \in C^1(\overline{\Omega})$.

Assim, sendo ainda A e $\rho \in C^1(\overline{\Omega})$ e a, b, k_1, e k_2 constantes reais positivas, a inequação variacional a que nos referimos acima tem a seguinte forma:

$$(1.2) \quad <\rho A\ddot{u}(t), v-\dot{u}(t)> + a(Au_x(t), v_x-\dot{u}_x(t)) + b(A\dot{u}_x(t), v_x-\dot{u}_x(t)) +$$

$$<(k_1 u(1,t)+k_2\dot{u}(1,t))\delta_1, v-\dot{u}(t)> + J(u(t),v)-J(u(t),\dot{u}(t)) \geq$$

$$<Af(t) + F(t)\delta_0, v-\dot{u}(t)> \ , \ \forall \ v \in V, \text{ q.t. } t \in [0,T],$$

onde são dados $f: [0,T] \to V'$ e $F: [0,T] \to \mathbb{R}$, e δ_1 δ_0 $\in V'$ são tais que

$$<\delta_1; v> = v(1) \ ,$$

e

$$<\delta_0, v> = v(0) \ ,$$

qualquer que seja $v \in V$.

Precisamos assim, mostrar que existe u, de forma que $u(t)$ e $\dot{u}(t)$ tenham valores em V, satisfazendo (1.2) e as condições iniciais $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = u_1$. De agora em diante, tomaremos $A = \rho = \ell \equiv 1$ e $K = \gamma = F = k_1 = k_2 = a = b = L = 1$, o que de forma alguma afetará o argumento no caso geral.

Em seguida, seja a forma bilinear

$$a : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(u,v) \to a(u,v) = (u_x, v_x) + \delta_1(u)\delta_1(v).$$

Esta forma bilinear é contínua e é tal que existe uma constante real positiva C_a com a propriedade abaixo:

(1.3) $$a(v,v) \geq C_a \|v\| , \quad \forall\, v \in V ,$$

onde $\| \cdot \|$ é a norma de V (ver [2,sec.3]). Podemos assim, resumir nosso problema da seguinte forma:

Mostrar que existe $u \in L^\infty(V)$ tal que $\dot{u} \in L^\infty(V)$ satisfazendo

(1.4) $$\langle \ddot{u}(t), v-\dot{u}(t)\rangle + a(\dot{u}(t), v-\dot{u}(t)) + a(\dot{u}(t), v-\dot{u}(t)) + J(u(t),v) - J(u(t),\dot{u}(t)) \geq \langle F(t), v-\dot{u}(t)\rangle,$$
$$\forall\, v \in V, \text{ q.t. } t \in [0,T],$$

(1.5) $$u(0) = u_0 ,$$

(1.6) $$u(0) = u_1 .$$

E agora, $\mathcal{F}(t) = f(t) + F(t)\delta_0$ e

(1.7) $$J(u,v) = \int_0^1 H(x+u-1)(x+u-1)|v|dx.$$

Na Seção 2, demonstraremos o seguinte resultado:

<u>Teorema 1.1.</u> - Dados $u_0 \in V$, $u_1 \in H$ e $\mathcal{F} \in L^2(V')$, ou seja, $f \in L^2(V')$ e $F \in L^2[0,T]$, existe uma única função u em $\Omega\times[0,T]$, satisfazendo:

i) $u \in C(V)$,

ii) $\dot{u} \in C(H) \cap L^2(V)$,

iii) a inequação (1.4), e

iv) as condições iniciais (1.5) e (1.6),

onde $C(E)$ é o conjunto das funções de $L^\infty(E)$ contínuas em t.

2. *DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.1.*

De [2] sabemos que a solução de (1.4) é única. Subdividiremos a demonstração da existência em duas partes:

i) usando um esquema funcional adequado e o teorema do ponto fixo de Schauder, reduziremos o problema de existência de soluções de (1.4) a um problema mais simples, no qual a primeira variável do funcional $J(\cdot,\cdot)$ é vista como um parâmetro (problema desacoplado);

ii) usando técnicas de subdiferencial, mostraremos que as soluções fracas de uma equação de evolução monótona, são também soluções do problema desacoplado. Por fim, usando regularização e um resultado de [5], mostramos a existência de soluções desta equação.

Parte (i) - Dado $w \in L^{\infty}(H)$, consideremos o problema abaixo, o qual chamaremos de inequação variacional desacoplada:

Mostrar que existe uma função $u \in L^{\infty}(V)$ tal que que $\dot{u} \in L^{\infty}(V)$ satisfazendo:

$$(2.1) \qquad <\ddot{u}(t), v-\dot{u}(t)> + a(u(t), v-\dot{u}(t)) + a(\dot{u}(t), v-\dot{u}(t)) +$$
$$+ J(w(t), v) - J(w(t), \dot{u}(t)) \geq < \mathcal{F}(t), v-\dot{u}(t)> ,$$
$$\forall\, v \in V, \text{ q.t. } t \in [0,T],$$

onde J é como em (1.7), e as condições iniciais (1.5) e (1.6). Na parte (ii), mostraremos que a inequação variacional acima tem solução única qualquer que seja $w \in L^{\infty}(H)$, para dados tais que $u_0 \in V$, $u_1 \in H$ e $\mathcal{F} \in L^2(V')$. Chamemos de u_w esta solução, enfatizando sua dependência em w.

Temos então que, para todo w, u_w e $\dot{u}_w$ pertencem a $L^{\infty}(V)$. Além do mais, tomando v=0 em (2.1), concluímos que

$$(2.2) \qquad - <\ddot{u}_w(t), \dot{u}_w(t)> - a(u_w(t), \dot{u}_w(t)) - a(\dot{u}_w(t), \dot{u}_w(t))$$
$$- J(w(t), \dot{u}_w(t)) \geq - <\mathcal{F}(t), \dot{u}_w(t)> , \text{ q.t. } t \in [0,T],$$

e posto que $H(x+w-1)(x+w-1) \geq 0$ qualquer que seja $x \in [0,1]$ segue que

$$J(w(t),\dot{u}_w(t)) \geq 0, \text{ q.t. } t\varepsilon[0,T],$$

para todo w, e consequentemente

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u_w(t)|_2^2 + a(u_w(t),u_w(t)) - a(\dot{u}_w(t),\dot{u}_w(t)) \geq$$

$$- <F(t),\dot{u}_w(t)> ,$$

em quase todo t. Integrando a desigualdade acima de 0 a t, multiplicada por -1, e usando a desigualdade (1.3), temos que u_w satisfaz

$$|\dot{u}_w(t)|_2^2 + \|u_w(t)\|^2 + \int_0^t \|u_w(\tau)\|^2 d\tau \leq K|u_1|_2^2 + K\, a(u_0,u_0) +$$
$$+ K\int_0^t |<F(\tau),\dot{u}_w(\tau)>|d\tau,$$

onde $K = \max\{2, 2/C_a, 1/C_a\}$, ou seja,

$$|\dot{u}_w(t)|_2^2 + \|u_w(t)\|^2 + \int_0^t \|\dot{u}_w(\tau)\|^2 d\tau \leq K|u_1|_2^2 + K\, a(u_0, u_0) +$$
$$+ \frac{K}{4\varepsilon}\int_0^t \|F(\tau)\|_{V'}^2 d\tau + \varepsilon K\int_0^t \|\dot{u}_w(\tau)\|^2 d\tau.$$

Donde, para ε suficientemente pequeno, temos que

(2.3) $$|\dot{u}_w(t)|_2^2 + \|u_w(t)\|^2 + (1-\varepsilon K)\int_0^T \|\dot{u}_w(\tau)\|^2 d\tau \leq$$
$$K(|u_1|_2^2 + a(u_0,u_0)) + \frac{K}{4\varepsilon}\int_0^T \|F(\tau)\|_{V'}^2 d\tau = K_0.$$

Em particular, se W é o subconjunto convexo, fechado e limitado de $L^\infty(H)$, definido como sendo o fecho em $L^\infty(H)$ de

$$W_0 = \{u \in L^\infty(H) \mid u \in L^\infty(V) \text{ e } \|u\|^2_{L^\infty(V)} \leq K_0\},$$

então, dada a função

$$\begin{aligned} g : L^\infty(H) &\to L^\infty(H) \\ w &\to g(w) = u_w, \end{aligned}$$

a desigualdade (2.3) nos diz que $g(L^\infty(H)) \subset W_0 \subset W$.

Uma outra informação que extraímos da desigualdade (2.3) é que $\dot{u}_w$ pertence a um subconjunto limitado de $L^\infty(H)$ e então, pelo critério de compacidade de Lions-Aubin [5, sec. 1.5, Teor.2], sabemos que $g(W)$ é uma parte relativamente compacta de $L^\infty(H)$.

Em seguida, vejamos que g é uma função contínua de W em $L^\infty(H)$, para podermos usar o teorema do ponto fixo. Com este fim, consideremos $(w_n)_n$ uma sequência em W tal que

$$w_n \to w \in W$$

em $L^\infty(H)$ e seja $u_n = g(w_n)$ e $u = g(w)$. Estas funções são tais que

$$\begin{aligned} (2.4) \qquad &\langle \ddot{u}_n, v-\dot{u}_n\rangle + a(u_n, v-\dot{u}_n) + a(\dot{u}_n, v-\dot{u}_n) + J(w_n, v) \\ &- J(w_n, \dot{u}_n) \geq \langle F, v-\dot{u}_n\rangle, \ \forall\, v \in V. \end{aligned}$$

e

$$(2.5)\qquad \langle \ddot{u}, v-\dot{u}\rangle + a(u,v-\dot{u}) + a(\dot{u},v-\dot{u}) + J(w,v) - J(w,\dot{u}) \geq \langle F, v-\dot{u}\rangle, \quad \forall\, v \in V$$

para quase todo t.

Tomando, a cada instante t, $v = \dot{u}(t)$ em (2.4) e $v = \dot{u}_n(t)$ em (2.5) e somando, obtemos

$$- \langle \ddot{u}-\ddot{u}_n, \dot{u}-\dot{u}_n\rangle - a(u-u_n, \dot{u}-\dot{u}_n) - a(\dot{u}-\dot{u}_n, \dot{u}-\dot{u}_n) \geq J(w,\dot{u}) + J(w_n,\dot{u}_n) - J(w_n,\dot{u}) - J(w,\dot{u}_n)$$

e isto implica que

$$(2.6)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}(|\dot{u}-\dot{u}_n|_2^2 + a(u-u_n,u-u_n)) + a(\dot{u}-\dot{u}_n,\dot{u}-\dot{u}_n) \leq J(w_n,\dot{u}) - J(w,\dot{u})| + |J(w_n,\dot{u}_n) - J(w\,,\,\dot{u}_n)|\,.$$

Porém, como

$$J(w_n,\dot{u}) - J(w,\dot{u}) = \int_0^1 [H(x+w_n-1)(x+w_n-1)-H(x-w-1)(x-w-1)]\,|\dot{u}|dx$$

temos que

$$|J(w_n,\dot{u}) - J(w,\dot{u})| \leq \int_0^1 |w_n-w|\,|\dot{u}|\,dx \leq |w_n-w|_2^2\,|\dot{u}|_2^2.$$

E analogamente,

$$|J(w_n,\dot{u}_n) - J(w,\dot{u}_n)| \leq |w_n-w|_2^2\,|\dot{u}_n|_2^2$$

Assim, integrando (2.6) de 0 a t, observando que os dados iniciais u_0 e u_1 não dependem de n, que $|\dot{u}(t)|_2^2 \leq K_0$ e $|\dot{u}_n(t)|_2^2 \leq K_0$ para todo n, e usando (1.3), segue que

$$|\dot{u}(t) - \dot{u}_n(t)|_2^2 + C_a\|u(t)-u_n(t)\|^2 \leq 2K_0 \int_0^T |w(t)-w_n(t)|_2^2 dt.$$

Consequentemente, como $w_n \to w$ em $L^\infty(H)$ temos que $u_n \to u$ em $L^\infty(V)$, donde em $L^\infty(H)$, mostrando assim a continuidade de g.

Resumindo, g é uma função contínua que leva o conjunto convexo e fechado W em uma parte relativamente compacta de $L^\infty(H)$, contida em $W_0 \subset W$. Portanto, o teorema do ponto fixo de Schauder nos garante a existência de um ponto $u \in W \subset L^\infty(H)$ tal que $g(u)=u$. Esta u é assim uma solução de (1.4) e, como ressaltamos previamente, é a única [2,sec.3]. Chamamos ainda a atenção para o fato de que $u \in g(W) \subset W$ e dessa forma possui as características das soluções de (2.1), as mais relevantes das quais fazem parte do enunciado do teorema 1.1.

Parte (ii) - Vamos agora mostrar que o problema desacoplado tem solução única. Primeiramente, vejamos que dado $w \in L^\infty(H)$, u_w solução de (2.1) é única. Sejam portanto, u_1 e u_2 duas soluções de (2.1) associadas a uma mesma função w. Estas funções satisfazem

$$\text{(2.7)} \qquad \langle \ddot{u}_1, v-\dot{u}_1\rangle + a(u_1, v-\dot{u}_1) + a(\dot{u}_1, v-\dot{u}_1) + J(w,v) - J(w,\dot{u}_1) \geq \langle F, v-\dot{u}_1\rangle, \quad \forall\, v \in V,$$

e

$$(2.8)\qquad \langle \ddot{u}_2, v-\dot{u}_2\rangle + a(u_2, v-\dot{u}_2) + a(\dot{u}\ , v-\dot{u}_2) + J(w,v) - J(w,\dot{u}_2) \geq \langle F, v-\dot{u}_2\rangle\ ,\ \forall\ v \in V\ ,$$

para quase todo t, sendo $u_1(0) = u_2(0)$ e $\dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0)$.

Assim, se no instante t escolhermos $v=u_2(t)$ em (2.7) e $v=u_1(t)$ em (2.8) e somarmos, obtemos que $u = u_1-u_2$ satisfaz a desigualdade

$$- \langle \ddot{u}(t), \dot{u}(t)\rangle - a(u(t), \dot{u}(t)) - a(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) \geq 0\ ,$$

para quase todo t, sendo $u(0) = \dot{u}(0) = 0$. Esta desigualdade implica que

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,(|\dot{u}(t)|_2^2 + a(u(t),u(t))) + a(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) \leq 0$$

para quase todo t.

Integrando de 0 a t, temos que

$$|\dot{u}(t)|_2^2 + a(u(t),u(t)) + \int_0^t a(\dot{u}(\tau), \dot{u}(\tau))d\tau \leq |\dot{u}(0)|_2^2 + a(u(0),u(0)) = 0\ ,$$

e como todos os termos do primeiro membro da desigualdade acima são não negativos, a fortiori

$$C_a \| u(t) \|^2 \leq a(u(t),u(t)) = 0$$

para quase todo t, ou seja, u=0 como função de $L^\infty(V)$.

Tendo estabelecido a unicidade de u_w, observemos que $J(y,.)$ é uma função contínua, convexa própria de H em $\mathbb{R}$, para todo $y \in H$. E como consequência imediata deste fato, temos que $J(y,.)$ tem subdiferencial não vazio [1, cap. 1], qualquer que seja y, em todos os pontos de H.

Seja agora $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases},$$

e $\Phi(y,v_0)$ o funcional linear em H tal que

$$(\Phi(y,v_0),v) = \int_0^1 g(x,y(x))\ G(v_0(x))v(x)dx \ ,$$

onde $g(x,y) = H(x+y-1)(x+y-1)$ e y, $v_0 \in H$. Este funcional possui as seguintes propriedades:

i) $(\Phi(y,v_0),v_0) = J(y,v_0)$,

ii) $J(y,v) \geq (\Phi(y,v_0),v)$, pois $|v| \geq |G(v_0)v|$,

iii) $\Phi(y,v_0)$ é contínuo quaisquer que sejam y e v_0 em H pois

$$|(\Phi(y,v_0),v)| \leq |g(.,y(.))G(v_0(.))|_2^2 \, |v|_2^2 \leq |y|_2^2 \ |v|_2^2 .$$

Notemos que (ii) é equivalente a

$$J(y,v) - J(y,v_0) \geq (\Phi(y,v_0),v-v_0) \ ,$$

e assim sendo, $\Phi(y,v_0)$ é um subgradiente de $J(y,.)$ no ponto v_0 [1, cap.1] . Consequentemente, como $\Phi(y,v_0)$ é também um funcional linear contínuo em V, pois V está continuamente imerso em H, decorre que se $u \in L^\infty(V)$ e $w \in L^\infty(H)$,

$$J(w(t),v) - J(w(t),u(t)) \geq \langle \Phi(w(t),u(t)),v-u(t) \rangle$$

para todo $v \in V$ e quase todo $t \in [0,T]$.

Concluindo, se $u \in L^{\infty}(V)$ é uma função tal que $\dot{u} \in L^{\infty}(V)$ e que satisfaça

$$(2.9) \qquad \langle \ddot{u}(t),v-\dot{u}(t)\rangle + a(\dot{u}(t),v-\dot{u}(t)) + a(\dot{u}(t),v-\dot{u}(t))$$

$$+ \langle \Phi(w(t),\dot{u}(t)),v-\dot{u}(t)\rangle \geq \langle F(t),v-\dot{u}(t)\rangle ,$$

$$\forall\ v \in V, \text{ q.t. } t \in [0,T] ,$$

sendo $u(0) = u_0$ e $\dot{u}(0) = u_1$, então necessariamente u é também solução de (2.1).

Notamos que a escolha do subgradiente $\Phi(y,.)$, que aparece em (2.9) é arbitrária, pois a função G poderia assumir qualquer valor entre 0 e 1 no ponto 0 e ainda assim Φ conservaria as propriedades (i), (ii) e (iii). Assim, mesmo substituindo o subgradiente $\Phi(y,.)$ escolhido por um outro, uma função que satisfaça (2.9) satisfaz também (2.1). Consequentemente, vemos que, devido à unicidade da solução de (2.1), a solução de (2.9) independe do subgradiente que aparece nessa inequação.

Devido a isso, nosso problema se resume em mostrar a existência de soluções de (2.9). Mas observemos que em (2.9) podemos tomar, a cada instante t, $v = \pm z-\dot{u}(t)$, $z \in V$, e assim a inequação (2.9) é equivalente à equação variacional

$$(2.10) \qquad \langle \ddot{u}(t),z\rangle + a(\dot{u}(t),z) + a(u(t),z) + \langle \Phi(w(t),\dot{u}(t)),z\rangle$$

$$= \langle F(t),z\rangle \quad , \forall\ z \in V, \text{ q.t. } t \in [0,T] ,$$

com as condições iniciais (1.5), (1.6).

Porém, a forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ define um operador $A : V \to V'$ tal que para todo $y \in V$, $A(y) = a(y,\cdot)$. Assim se de firnirmos, para cada $w \in L^\infty(H)$, o operador

$$B(y) = A(y) + \Phi(w,y) ,$$

onde $y \in V$ resulta que (2.10) é uma forma fraca da equação

$$(2.11) \qquad \begin{cases} \ddot{u}(t) + A(u(t)) + \mathcal{B}(\dot{u}(t)) = \mathcal{F}(t) , \\ u(0) = u_0 , \\ \dot{u}(0) = u_1 , \end{cases}$$

que é uma equação de evolução não-linear monótona. Em [5, sec. 3.6], Strauss demonstrou que: se $\mathcal{A}$ é um operador linear, coercivo, simétrico e contínuo de V em V' e $\mathcal{B}$ um operador de $L^2(V)$ em $L^2(V')$ com as seguintes propriedades:

i) $\mathcal{B}$ é limitado e demicontínuo,

ii) para algum λ real, $e^{-\lambda t}(\lambda/2 + \mathcal{B})$ é coercivo em $L^2(V)$,

iii) $e^{-\lambda t}(\lambda/2 + \mathcal{B})$ é semimonótono em conjuntos limitados de um subespaço de $L^2(V)$;

então, para todo $u_0 \in V$, $u_1 \in H$ e $\mathcal{F} \in L^2(V')$, existe uma função u, tal que $u \in C(V)$ e $\dot{u} \in C(H) \cap L^2(V)$, solução de

$$(2.12) \qquad \langle\ddot{u}(t),v\rangle + \langle\mathcal{A}(u(t)),v\rangle + \langle\mathcal{B}(\dot{u}(t)),v\rangle = \langle\mathcal{F}(t),v\rangle ,$$

$$\forall\, v \in V , \text{ q.t. } t \in [0,T] .$$

e satisfazendo as condições iniciais (1.5) e (1.6).

Usaremos agora este resultado para mostrar que (2.10) tem solução. Seja então $\varepsilon > 0$ e

$$G_\varepsilon(s) = \begin{cases} 1 & s > \varepsilon \\ \frac{s}{\varepsilon} & |s| < \varepsilon \\ -1 & s < -\varepsilon , \end{cases}$$

e consideremos o operador $B_\varepsilon : L^2(V) \to L^2(V')$ definido por

$$(2.13) \qquad B_\varepsilon(v_0) = A(v_0) + \Phi_\varepsilon(w,v_0) ,$$

onde $w \in L^\infty(H)$ e

$$(2.14) \qquad <\Phi_\varepsilon(w,v_0),v> = \int_0^1 g(x,w(x))\; G_\varepsilon(v_0(x))v(x)dx.$$

O operador A, devido à forma como foi definido, é um operador linear simétrico, coercivo e contínuo de V em V',e assim possui as mesmas características que o operador A de (2.12). Além disso, temos que A, se visto como um operador de $L^2(V)$ em $L^2(V')$, também é linear, coercivo e contínuo.

Vejamos agora que B_ε possui propriedades que implicam as condições (i), (ii) e (iii),a serem satisfeitas pelo operador B da demonstração de Strauss. Com efeito, de (2.14) segue que qualquer que seja $v_0 \in L^2(V)$,

$$|\Phi_\varepsilon(w,v_0)|_{L^2(V')} \leq C\; |w|_{L^\infty(H)} ,$$

e como

$$|\Phi_\varepsilon(w,v_0) - \Phi_\varepsilon(w,v_n)|_{L^2(V')} \leq K|w|_{L^\infty(H)} \int_0^T |G_\varepsilon(v_0)-G_\varepsilon(v_n)|_\infty^2 \, dt,$$

sendo $|\cdot|_\infty$ a norma de $L^\infty(\Omega)$, temos que $\Phi_\varepsilon(w,\cdot)$ é um operador contínuo e limitado de $L^2(V)$ em $L^2(V')$. Desta forma, vemos que B_ε definido em (2.13) satisfaz a condição (i) para todo $\varepsilon > 0$.

Em seguida, notemos que

$$G_\varepsilon(s)s = |s|_\varepsilon = \begin{cases} |s| \;, & |s| \geq \varepsilon \\ \dfrac{|s|^2}{\varepsilon} \;, & |s| \leq \varepsilon \;, \end{cases}$$

e portanto,

$$<\Phi_\varepsilon(w,v),v> = \int_0^1 g(x,w(x)) \; |v(x)|_\varepsilon \, dx \geq 0.$$

Donde concluímos que B_ε é coercivo, pois

$$\int_0^T <B_\varepsilon(v(t)),v(t)>dt \geq \int_0^T <A(v(t)),v(t)>dt = \int_0^T a(v(t),v(t))dt \geq$$

$$C_a \int_0^T ||v(t)||^2 \, dt,$$

qualquer que seja $v \in L^2(V)$. Finalmente, para todo $y \in H$ e $v \in V$, $\Phi_\varepsilon(y,v)$ é um subgradiente do funcional convexo

$$\int_0^1 g(x,w(x)) \; |v(x)|_\varepsilon dx \;,$$

e portanto B_ε , como soma de um operador linear coercivo e um subgradiente, é monótono. Porisso, B_ε também satisfaz as condições (ii) e (iii) para todo $\varepsilon > 0$.

Assim, podemos concluir que, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe uma função $u^\varepsilon \in C(V)$ tal que $\dot{u}^\varepsilon \in C(H) \cap L^2(V)$, satisfazendo as condições iniciais (1.5) e (1.6) e à seguinte regularização da equação (2.10):

$$(2.15) \qquad <\ddot{u}^\varepsilon(t),v> + <A(u^\varepsilon(t)),v> + <B_\varepsilon(\dot{u}^\varepsilon(t)),v> = <F(t),v>,$$

$$\forall\, v \in V, \text{ q.t. } t \in [0,T].$$

Tomando em (2.15) $v = \dot{u}^\varepsilon(t)$, obtemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|\dot{u}^\varepsilon(t)|_2^2 + a(u^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t))\right) + a(\dot{u}^\varepsilon(t),\dot{u}^\varepsilon(t)) = <F(t),\dot{u}^\varepsilon(t)>,$$

e seguindo o mesmo raciocínio de (2.3), esta equação implica que

$$(2.16) \qquad |u^\varepsilon(t)|_2^2 + \|u^\varepsilon(t)\|^2 + (1-\alpha K)\int_0 \|u^\varepsilon(t)\|^2\, dt \leq K_0,$$

posto que as condições iniciais e F não dependem de ε. Por outro lado, como $A(u^\varepsilon)$ e $B_\varepsilon(\dot{u}^\varepsilon)$ pertencem a $L^2(V')$ para todo ε, temos que $\ddot{u}^\varepsilon \in L^2(V')$ e

$$|\ddot{u}^\varepsilon|_{L^2(V')} \leq |A(u^\varepsilon)|_{L^2(V')} + |B_\varepsilon(\dot{u}^\varepsilon)|_{L^2(V')} + |F|_{L^2(V')}.$$

Porém, dado que

$$(2.17) \qquad |A(u^\varepsilon)|_{L^2(V')} \leq C|u^\varepsilon|_{L^2(V)} \leq K_1,$$

(2.18) $$|A(\dot{u}^{\varepsilon})|_{L^2(V')} \leq C|\dot{u}^{\varepsilon}|_{L^2(V)} \leq K_2 ,$$

e

$$|B_{\varepsilon}(\dot{u}^{\varepsilon})|_{L^2(V')} \leq K_1 + C|w|_{L^{\infty}(H)} \leq K_3 ,$$

decorre que

(2.19) $$|\ddot{u}^{\varepsilon}|_{L^2(V')} \leq K .$$

Como consequência das limitações (2.16)— (2.19) e da compaticidade fraca e fraca estrela dos conjuntos limitados dos respectivos espaços, podemos, extraindo sucessivas subsequências e u^{ε} , obter uma subsequência, ainda chamada u^{ε}, tal que:

i) $u^{\varepsilon} \to u$ fraco estrela em $C(V)$,
ii) $\dot{u}^{\varepsilon} \to \dot{u}$ fraco estrela em $C(H) \cap L^2(V)$,
iii) $\ddot{u}^{\varepsilon} \to \dot{u}$ fraco em $L^2(V')$,
iv) $A(u^{\varepsilon}) \to \psi$ fraco em $L^2(V')$,
v) $A(\dot{u}^{\varepsilon}) \to \phi$ fraco em $L^2(V')$.

Usando o critério de compaticidade de Lions-Aubin, [5,sec.1.5, Teor.2] , podemos ainda escolher a subsequência u^{ε} de forma que $\dot{u}^{\varepsilon} \to \dot{u}$ forte em $L^2(Q)$, $Q = [0,1] \times [0,T]$, e também quase toda parte em Q, o que implica que

$$\Phi_{\varepsilon}(w,\dot{u}^{\varepsilon}) \to \Phi(w,u) \quad \text{em } L^2(V').$$

Além disso, é fácil ver que $\psi = A(u)$ e $\phi = A(\dot{u})$ devido às convergências (i), (ii) e à simetria do operador A.

Portanto, concluimos que existe $u \in C(V)$ tal que $\dot{u} \in C(H) \cap L^2(V)$ satisfazendo

$$\int_0^T \langle \ddot{u}(t), v(t) \rangle dt + \int_0^T \langle A(u(t)), v(t) \rangle dt +$$

$$\int_0^T \langle B(\dot{u}(t)), v(t) \rangle dt = \int_0^T \langle F(t), v(t) \rangle dt,$$

para todo $v \in L^2(V)$. Esta igualdade, por sua vez, implica que u é solução de (2.10). Finalizando, ressaltamos que um cálculo usual mostra que u satisfaz (1.5) e (1.6).

REFERÊNCIAS

[1] Ekeland, I., Teman , R., Analyse Convexe et Problèmes Variationnels. Etudes Mathématiques, Dunod, Paris, (1974).

[2] Raupp, M.A., Feijóo, R.A., e Moura, C.A. de, A Nonlinear Problem in Dynamic Visco-Elasticity with Friction. Relatório A0023/77, Lab.Calculo, CBPF, 1977. A ser publicado no Bol. Soc. Bras. Mat.

[3] ————, Soluciones Numéricas de um Problema Dinámico Viscoelástico No Lineal. Anais do IV Congresso Bras.Eng. Mecânica, Florianópolis, (1977).

[4] ————, An Optimization Algorithm for the Pile Driver Problem. A ser publicado nos Relatórios Série A, Lab. de Cálculo, CBPF, (1977).

[5] Strauss, W.A., The Energy Method in Nonlinear Partial Differential Equations. Notas de Matemática Nº 47, IMPA, Rio de Janeiro, (1969).