

CBPF-NF-042/81

PROCESSOS DISSIPATIVOS E APLICAÇÕES  
À FÍSICA NUCLEAR\*

por

L. C. Gomes

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF/CNPq  
Av. Wenceslau Braz, 71, fundos  
22290 - Rio de Janeiro - R.J.  
BRASIL

\*Palestra apresentada no IV Encontro de Física Nuclear. Cambuquira, Set.1981

PROCESSOS DISSIPATIVOS E APLICAÇÕES  
À FÍSICA NUCLEAR\*

*L.C. Gomes*

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

\* Palestra proferida no IV Encontro de Física Nuclear, Cambuquira, 1981.

1. Introdução

Durante os últimos anos, devido à grande melhoria nas técnicas de acelerar íons para uso em reações nucleares, uma nova fronteira em física nuclear foi aberta. Refiro-me aqui ao campo das reações com íons pesados e seus resultados surpreendentes com a fusão nuclear e as colisões muito inelásticas.

Antigamente, isto é, lá pela década dos 60, estávamos limitados ao estudo de colisões com íons leves: essencialmente prótons, neutrons, deutérios e hélios e, decorrentemente, a ênfase da pesquisa estava na espectroscopia nuclear dos primeiros 10 ou 15 MeV de excitações. Muita coisa se aprendeu desses estudos, notadamente o estabelecimento do modelo de camadas como base teórica para a compreensão da espectroscopia e a existência de estados coletivos: rotacionais e vibracionais.

Consideremos agora a reação  $^{40}\text{A}$  com  $^{232}\text{Th}$  (1) a 388 MeV no Laboratório. Não obstante a energia disponível no canal de entrada ser apreciável (331 MeV), os nucleons do  $^{40}\text{A}$  es-

tão se movendo coletivamente, cada um com cerca de 10 MeV. A colisão é tipicamente não-relativista. A função de onda do canal de entrada tem comprimentos de onda da ordem de  $0,03 \times 10^{-13}$  cm, ou seja, cerca de 130 vezes menor que o raio nuclear do  $^{40}\text{A}$ . Assim, a descrição do canal de entrada é tipicamente clássica. Devido à grande quantidade de energia disponível para a reação, o número de canais de reação abertos é muito grande. É interessante observar que paralelamente ao desenvolvimento das técnicas de aceleração de íons pesados também foram desenvolvidos os detetores multiparamétricos para melhor caracterizar os canais de saída. Esses detetores estão ainda muito longe da situação ideal de fornecer uma caracterização completa do canal de saída dessas reações e assim o físico teórico tem (felizmente) de analisar dados inclusive onde um grande número de canais são observados indiscriminadamente.

Neste momento eu gostaria de levantar a questão sobre como se procuraria entender o mecanismo da colisão do  $^{40}\text{A}$  com o  $^{232}\text{Th}$ : o  $^{40}\text{A}$  se comportaria como um enxame de neutrons e prótons movendo-se em média com a energia de 10 MeV ou como uma partícula de massa 40 vezes a massa de um nucleon movendo-se a 388 MeV? Na primeira hipótese estaríamos enfatizando os aspectos quânticos da reação e na segunda a descrição clássica do  $^{40}\text{A}$ . Surpreendente é a segunda hipótese que parece corresponder aos resultados experimentais. Nas colisões muito inelásticas a cinemática da reação fica essencialmente igual à cinemática de dois corpos não obstante a forte inelasticidade do mecanismo. Assim os íons colidentes mantêm praticamente as suas identidades originais (ocorre uma pequena troca de carga e

nucleons) durante a colisão sugerindo um quadro clássico de duas gotas massivas de matéria nuclear em colisão.

Na fig. 1 vemos os dados experimentais típicos da reação muito inelástica de  $^{40}\text{A}$  e  $^{232}\text{Th}$ . A partícula observada como resultado da reação e o K e sua seção de choque como função da energia e ângulo é mostrada pelas curvas de níveis do diagrama de Wilczynski (1). A energia é a mencionada anteriormente de 388 MeV no laboratório. Esse diagrama pode ser visto como resultado da superposição da metade esquerda sobre a metade direita do diagrama da fig. 2. Na fig. 2 ficam claros os resultados de maior destaque das reações muito inelásticas. Em cada canal inelástico a reação se dá preferencialmente a um determinado ângulo e a dispersão da reação em torno desse ângulo cresce com a energia perdida do íon incidente. A fig. 3 dá a explicação clássica qualitativa para esse tipo de fenômeno. Quanto menor o parâmetro de impacto menor o ângulo de deflexão e maior o tempo de contacto entre os dois íons e assim maior a perda de energia cinética do íon incidente. Assim, qualitativamente, podemos explicar a linha dos máximos nos canais inelásticos. Eventualmente, para parâmetros de impacto suficientemente pequenos os íons não têm mais energia cinética suficiente para se separarem e aí ocorre o fenômeno da fusão nuclear que o Alex falará na próxima palestra.

Embora uma hipótese simples como essa possa explicar a linha dos máximos no diagrama de Wilczynski, a forma desses picos, isto é, o alargamento em torno dos máximos, as pequenas transferências de cargas, nucleons, de momento angular e outros parâmetros que venham a ser medidos exigem uma sofis-

ticação do mecanismo da reação que não está contida na explicação singela que acabamos de esboçar. Ingredientes novos no estudo das colisões de íons pesados são os conceitos encontrados nas teorias de transporte como viscosidade, flutuações estatísticas, não-equilíbrio termodinâmico, etc...

Conceitos estatísticos são usados para explicar a deintegração do núcleo composto onde se assume que o processo sendo extremamente lento o núcleo composto alcança um estado de equilíbrio termodinâmico e subseqüentemente sofre um processo de evaporação. Nas colisões muito inelásticas, acredita-se que o tempo de colisão é suficientemente pequeno para que o sistema composto venha a entrar em equilíbrio termodinâmico. Assim, são os processos dissipativos, longe do equilíbrio termodinâmico que parece ter importância nas interações de íons pesados. Serão sobre esses processos, bastante estudados em física dos plasmas que será o tema dessa palestra e, nesse contexto, eles são ingredientes novos no estudo dos mecanismos das reações nucleares.

Gostaria de lembrar aqui alguns resultados antigos(2) sobre a matéria nuclear que nos permitirá entender porque a teoria cinética tem papel importante nas colisões muito inelásticas.

Do ponto de vista das correlações entre nucleons podemos dizer que as forças nucleares são bastante fracas. A parte atrativa de longo alcance quasi só contribue para o campo médio ficando o princípio de Pauli responsável por inibir as correlações que ela por ventura poderia produzir. A parte repulsiva das forças nucleares por ser de muito curto alcance

( $\sim 0.4\text{fm}$ ) geram correlações só a distâncias inferiores à distância entre nucleons ( $\sim 1.9\text{fm}$ ). Elas são entretanto fundamentais para o estabelecimento da saturação da matéria nuclear.

É consequência natural da saturação nuclear a formação da superfície do núcleo, o que nos dá a idéia do núcleo ser uma gota líquida. Entretanto esse líquido é peculiar pois num líquido usual os átomos estão quase se tocando sem grande espaço para mover-se livremente. Na matéria nuclear a distância entre nucleons é cerca de cinco vezes maior do que o alcance das forças repulsivas, o que dá à matéria nuclear uma característica de gas. Assim, mantendo-se a mesma razão entre distância relativa e alcance da força, podemos ver que a matéria nuclear é como um gas monoatômico (digamos argônio) a 10 atmosferas de pressão. As reações muito inelásticas enfatizam as propriedades gasosas da matéria nuclear e é esse gas que temos em vista quando aplicamos a teoria cinética dos íons pesados.

## 2. Equação de Fokker-Planck

Num processo estocástico, a posição da partícula no instante subsequente não é completamente determinado pela posição anterior. Assim, os processos estocásticos introduzem na mecânica o indeterminismo clássico como veremos a seguir. Os objetos matemáticos de interesse nos processos estocásticos são probabilidades tais como

$$\omega(\vec{x}_1 t_1; \vec{x}_2 t_2; \dots; \vec{x}_n t_n)$$

que nos informa da probabilidade da partícula ser observada na posição  $\vec{x}_1$  do espaço de fase no instante  $t_1$ , se ela se encontra na posição  $\vec{x}_2$  no instante  $t_2$  e etc..., e na posição  $\vec{x}_n$  no instante  $t_n$ . Assim, em última análise, podemos falar da probabilidade de uma partícula seguir uma particular trajetória. O objetivo da dinâmica clássica indeterminística é então estudar as correlações causais entre as posições sucessivas da partícula no tempo.

O processo estocástico mais simples, chamado puramente aleatório, é aquele em que a probabilidade de se achar a partícula no instante  $t_1$  em  $\vec{x}_1$  independe das posições anteriores por onde tenha passado a partícula e matematicamente escrevemos

$$\omega(\vec{x}_1, t_1; \dots; \vec{x}_n, t_n) \equiv W(\vec{x}_1, t_1) \quad , \quad (1)$$

e  $W(\vec{x}_1, t_1)$  é simplesmente a probabilidade da partícula ser observada no ponto  $\vec{x}_1$  no instante  $t_1$ .

Tal processo não guarda nenhuma relação causal sendo assim desprovido de qualquer dinâmica e seu interesse para a física é muito pequeno.

Em ordem de complexidade crescente, temos os processos markovianos para os quais é válida a relação seguinte:

$$\omega(\vec{x}_1, t_1; \dots; \vec{x}_n, t_n) \equiv \omega(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_2, t_2) \quad t_1 > t_2 > \dots > t_n \quad , \quad (2)$$

isto é, a probabilidade da partícula ser observada em  $\vec{x}_1$  no instante  $t_1$  guarda uma relação causal com o fato da partícula ter sido observada em  $\vec{x}_2$  no instante  $t_2$  anterior porém independente das situações anteriores a  $t_2$ . Introduzindo a probabilidade conjunta  $W$  pela equação seguinte

$$W(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_2 t_2) \equiv \omega(\vec{x}_1 t_1; \vec{x}_2 t_2) W(\vec{x}_2 t_2)$$

e observando que

$$W(\vec{x}_1 t_1) = \int d\vec{x}_2 W(\vec{x}_1 t_1; \vec{x}_2 t_2)$$

temos

$$W(\vec{x}_1 t_1) = \int d\vec{x}_2 \omega(\vec{x}_1 t_1; \vec{x}_2 t_2) W(\vec{x}_2 t_2) \quad (3)$$

que lembra a equação de Schroedinger na sua forma integral ,  $\omega(\vec{x}_1 t_1; \vec{x}_2 t_2)$  tomando o papel de propagador e  $W(\vec{x}_1 t_1)$  o de função de onda. Pela eq. (3) observamos que  $\omega(\vec{x}_1 t_1; \vec{x}_2 t_2)$  contém toda a informação da dinâmica do processo pois, do seu conhecimento podemos determinar como  $W(\vec{x}_1 t_2)$  evolue no tempo.

Da propriedade markoviana dada pela eq. (2) obtém-se a equação de Chapman-Kolmogorov que governa esta classe de processos estocásticos:

$$\omega(\vec{x}_1 t_1; \vec{x}_2 t_2) = \int d\vec{x}_3 \omega(\vec{x}_1 t_1; \vec{x}_3 t_3) \omega(\vec{x}_3 t_3; \vec{x}_2 t_2) \quad t_1 > t_3 > t_2 \quad (4)$$

A eq. (4) também guarda semelhança formal à equação dos propagadores da mecânica quântica. Entretanto existem diferenças conceituais fundamentais entre a mecânica quântica e os processos estocásticos markovianos. Observe que  $W(\vec{x}_1 t_1)$  é uma função real não negativa satisfazendo condições de normalização linear:



$$\int W(\vec{x}_1, t_1) d\vec{x}_1 = 1 \quad .$$

Na mecânica quântica a função de onda é complexa e satisfaz condições de normalização quadrática. O mais importante ainda é o propagador quântico ter inverso temporal, sendo elemento do grupo contínuo gerado pelo operador hamiltoniano. Nos processos estocásticos  $\omega(\vec{x}_1 t_1; \vec{x}_2 t_2)$  é tão somente o elemento de um semi-grupo, não tem inverso temporal o que dá aos processos estocásticos seu caracter de irreversibilidade temporal.

A fim de fazermos a ligação entre processos markovianos e a mecânica clássica, precisamos impor propriedades adicionais a  $\omega(\vec{x}_1 t_1; \vec{x}_2 t_2)$ . Essas dizem respeito ao comportamento de  $\omega(\vec{x}_1 t_1; \vec{x}_2 t_2)$ , fora da diagonal principal ( $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ ) e para pequenos intervalos  $\Delta t = t_1 - t_2$  dos instantes de observação. Vamos supor então que

$$\int d\vec{x}_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \omega(\vec{x}_1 t_1; \vec{x}_2, t_1 - \Delta t) = \vec{A}(\vec{x}_1 t_1) \Delta t + O(\Delta t^2)$$

e

$$\int d\vec{x}_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)_i (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)_j \omega(\vec{x}_1 t_1; \vec{x}_2, t_1 - \Delta t) = B_{ij}(\vec{x}_1 t_1) \Delta t + O(\Delta t^2)$$

e que todos os outros momentos transversos à diagonal principal são de ordem igual ou superior a  $\Delta t^2$ . Com essas propriedades pode-se deduzir uma equação diferencial para  $W(\vec{x}_1 t_1)$  a partir das equações (3) e (4) e temos:

$$\frac{\partial W(\vec{x}, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ A_i(\vec{x}, t) W(\vec{x}, t) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[ B_{ij}(\vec{x}, t) W(\vec{x}, t) \right] \quad (5)$$

que é a célebre equação de Fokker-Planck.

Consideremos agora o sistema mecânico descrito pelas equações:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= v_i \\ \dot{v}_i &= a_i(q, v, t) \end{aligned} \quad (6)$$

movendo-se no espaço de fase  $(q, v)$ . O sistema não precisa ser necessariamente hamiltoniano. A esse sistema adicionamos duas novas forças: uma viscosa  $(-\zeta v_i)$ , proporcional à velocidade e outra aleatória  $\alpha_i(t)$ . Assim o sistema transforma-se em

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= v_i \\ \dot{v}_i &= a_i - \zeta v_i + \alpha_i(t) \end{aligned} .$$

Dizer que uma força é aleatória é dizer que seu valor, a cada instante é dado probabilisticamente. Podemos imaginar a força  $\alpha_i(t)$  produzindo impulsos aleatórios na partícula tais que, nos pequenos intervalos  $\Delta t$  de tempo, esses impulsos provocam uma mudança  $\Delta v_i$  na velocidade. Suporemos ainda que a natureza da força é tal que  $\Delta v_i$  tem distribuição gaussiana com os seguintes parâmetros

$$\langle \Delta v_i \rangle = 0$$

$$\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle = 2K \delta_{ij} \Delta t$$

onde  $K$  é uma medida da intensidade da força aleatória. Desta maneira é fácil mostrar que os únicos momentos fora da diagonal principal da probabilidade de transição são

$$\langle \Delta q_i \rangle = v_i \Delta t$$

$$\langle \Delta v_i \rangle = (a_i - \zeta v_i) \Delta t$$

e

$$\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle = 2K \delta_{ij} \Delta t .$$

Da natureza markoviana de movimento mecânico e das considerações anteriores, podemos escrever a equação de Fokker-Planck para a evolução da distribuição de probabilidade  $f(q,v,t)$  no espaço de fase do sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_i} (v_i f) + \frac{\partial}{\partial v_i} (a_i f) = \frac{\partial}{\partial v_i} \left[ \zeta v_i f + \frac{\partial}{\partial v_i} K f \right] \quad (7)$$

Procuraremos agora entender o conteúdo físico dessa equação. Primeiramente façamos  $\zeta = K = 0$ . A eq. (7) reduz-se ao seu primeiro membro:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_i} (v_i f) + \frac{\partial}{\partial v_i} (a_i f) = 0 \quad (8)$$

Consideremos agora a distribuição deltoforme

$$f(q,v,t) = \prod_i \delta \left[ q_i - x_i(t) \right] \delta \left[ v_i - u_i(t) \right] \quad (9)$$

onde  $\{x_i(t), u_i(t)\}$  é uma solução do sistema (5). É fácil veri-

ficarmos que a função dada pela eq. (9) é solução da eq. (8). A função acima é uma delta de Dirac que acompanha o movimento de terminístico da partícula. A eq. (8) descreve um "flow" determinístico no espaço de fase da partícula. Em cada ponto do espaço de fase passa uma única trajetória e, escrevendo

$$x_i \equiv x_i(x_0, v_0, t)$$

$$u_i \equiv u_i(x_0, v_0, t)$$

podemos identificar a função acima como a probabilidade de transição que falávamos anteriormente

$$\omega(q, v, t; x_0, v_0, 0) = \prod_i \delta \left\{ q_i - x_i(x_0, v_0, t) \right\} \delta \left\{ v_i - u_i(x_0, v_0, t) \right\}$$

temos aqui situação extrema de um processo markoviano determinístico. Se o sistema inicialmente se encontrava na distribuição  $f(\vec{x}_0, \vec{v}_0)$  então, a solução geral da eq. (8) é

$$f(\vec{q}, \vec{v}, t) = \int d\vec{x}_0 d\vec{v}_0 f(\vec{x}_0, \vec{v}_0) \prod_i \delta \left\{ q_i - X_i(\vec{x}_0, \vec{v}_0, t) \right\} \delta \left\{ v_i - u_i(\vec{x}_0, \vec{v}_0, t) \right\}$$

e, o que a equação (8) descreve são distribuições que evoluem pelo movimento independente de cada ponto do espaço de fase, movimento determinado pelo sistema inicial dado pelas eqs. (5). O efeito do segundo membro é duplo. O termo oriundo da força viscosa, proporcional a  $\zeta$ , produz um arrastamento no espaço de fase que procura reduzir a energia cinética da partícula. O termo proporcional a  $K$  tem o papel oposto de bombear energia

cinética no sistema e, assim o sistema evolue ao estado de equilíbrio em que a energia cinética média é constante. Podemos ilustrar isso facilmente considerando o caso da partícula livre ( $a_i = 0$ ). Nesse caso, qualquer função de  $\vec{v}^2$ , independente de  $t$ , anula o primeiro membro da equação de Fokker-Planck, eq. (6), mas somente a função

$$f = \text{const} \exp\left(-\frac{\zeta}{2K} v^2\right)$$

anula também o segundo membro da dita equação. Essa é a solução de equilíbrio do sistema que, quando comparado com o resultado da mecânica estatística, obtém-se

$$\frac{kT}{m} = \frac{K}{\zeta}$$

onde  $k$  é a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura do banho térmico da partícula. Ainda no caso da partícula livre, se fizermos  $K = 0$ , distribuições no espaço de fase evoluem colapsando sobre o espaço das configurações e qualquer distribuição da forma

$$f = n(\vec{q}) \delta(\vec{v})$$

é uma distribuição de equilíbrio. Se, por outro lado, fizermos  $\zeta = 0$  e tomarmos inicialmente a distribuição uniforme sobre o espaço das configurações de energia nula, isto é,

$$f_0 = \text{const} \delta(\vec{v}) \quad ,$$

esta distribuição, de acordo com a equação de Fokker-Planck ,  
evolue segundo a lei

$$f(q,v,t) = \frac{\text{const}}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{v^2}{4Kt}\right)$$

o que mostra que a energia cinética média cresce indefinidamente, linearmente no tempo e o sistema nunca alcança o equilíbrio. Vemos assim que o equilíbrio térmico da partícula é alcançado pelo balanço dinâmico de duas tendências opostas: uma determinística, causada pela viscosidade que puxa o sistema para  $T = 0$  e a outra causada pela força aleatória que empurra o sistema para  $T = \infty$ . Os dois mecanismos são essenciais para a existência do equilíbrio térmico.

Voltemos ao problema das colisões muito inelásticas. Podemos ver a equação de Fokker-Planck como uma receita para aleatorizar uma dinâmica clássica dada. Basta para tanto escolher duas funções não negativas  $\zeta(q,v,t)$  e  $K(q,v,t)$  para exercer respectivamente os papéis de coeficiente de viscosidade e intensidade de força aleatória (na verdade essas funções poderiam ser tensores simétricos de forma quadrática correspondente positiva definida). Essa escolha depende da dinâmica subjacente. Por exemplo, a proposta mais simples é a de assumir que a dinâmica subjacente descreve essencialmente a colisão elástica dos dois íons. Neste caso a inelasticidade observada seria inteiramente devida à viscosidade e as flutuações à força aleatória. Medidas do momento angular transferido dos íons e de seu componente perpendicular ao plano da

reação mostram que a dinâmica subjacente é mais rica do que o modelo ingênuo recém descrito. Podemos sofisticar a dinâmica, ainda sem apelar para a mecânica quântica, acoplando o movimento relativo dos íons a movimentos internos clássicos das duas gotas de matéria nuclear que funcionariam como estados portais ("doorways") para a reação inelástica. Esses movimentos internos seriam os responsáveis pela inelasticidade sem ser necessário lançar mão da viscosidade. Restaria ainda as flutuações provenientes de forças estocásticas no acoplamento dos canais inelásticos com os movimentos internos dos íons. Como podemos observar, a dinâmica subjacente e a equação de Fokker-Planck permite uma enorme gama de modelos para explicar as reações muito inelásticas. Para a elucidação do mecanismo correto da reação devemos proceder de duas maneiras complementares: do lado experimental procurar mais informações correlacionadas com os canais inelásticos e do lado teórico procurar a determinação microscópica da viscosidade e intensidade da força aleatória. Meu objetivo nessa palestra é avançar nos conceitos teóricos e desde já chamo a atenção para a ausência de uma teoria confiável do mecanismo microscópico das reações muito inelásticas. Num trabalho recente Carolina e Piza (3) desenvolvem um formalismo quântico que parece promissor porém fora do espírito dessa palestra. Procederei daqui por diante mostrando como a teoria microscópica dos processos irreversíveis aplicada a plasmas pode elucidar a maneira de como proceder.

### 3. Microscopia

A idéia das teorias microscópicas dos processos irreversíveis é a de explicar a dinâmica subjacente e o segundo membro da equação de Fokker-Planck em termos das interações elementares entre pares de partículas. Se chamarmos de  $V(\vec{q}_1 - \vec{q}_2)$  o potencial efetivo de interação entre pares, a dinâmica de uma partícula fica dada pelo potencial médio

$$V(\vec{q}, t) = \int V(\vec{q}_1 - \vec{q}_2) f(\vec{q}_2, \vec{v}_2, t) d\vec{q}_2 d\vec{v}_2$$

que atua sobre ela. Assim, sua aceleração é dada por

$$a_i = - \frac{1}{m} \nabla_i V(\vec{q}, t)$$

e a eq. (8) é a equivalente clássica da equação da aproximação dependente de tempo de Hartree-Fock (TDHF). A idéia central das teorias cinéticas está em considerar as colisões como responsáveis pela introdução (ganho) ou retirada (perda) de partículas da região vizinha do ponto  $(\vec{q}, \vec{v})$  do espaço de fase e escrevemos, de forma geral:

$$\partial_t f + \nabla_i (v_i f) + \partial_i (a_i f) = G - L \quad (10)$$

onde

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial v_i}$$

e G é o ganho e L a perda de partículas por unidade de tempo



por unidade de volume do espaço de fase. Boltzmann foi o primeiro a propor, no final do século passado, uma equação para  $f$  baseada nessas idéias. Se chamarmos de  $\sigma$  a seção de choque diferencial elástica para um par de partículas do meio e  $\vec{g}$  a velocidade relativa do par, então

$$\omega(\vec{v}'_1, \vec{v}'_2; \vec{v}_1, \vec{v}_2) = g\sigma \quad (11)$$

é a probabilidade de transição do par de partícula de velocidades iniciais  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  adquirirem pela colisão as velocidades finais  $\vec{v}'_1$  e  $\vec{v}'_2$ . A cinemática da colisão, baseada na conservação da energia e quantidade de movimento, nos fornece as relações

$$\vec{v}'_1 = \frac{1}{2} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + g\vec{\epsilon})$$

$$\vec{v}'_2 = \frac{1}{2} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - g\vec{\epsilon})$$

onde  $g = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$  é o módulo da velocidade relativa, conservada na colisão, e  $\vec{\epsilon}$  é um vetor unitário na nova direção do movimento relativo do par.

Assim,  $\omega$  dado pela eq. (11), é uma função tão somente de  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  e  $\Omega$ , o ângulo sólido da colisão dado por  $\vec{\epsilon}$ .

Dentro dessa perspectiva torna-se fácil calcular  $G$  e  $L$  e temos:

$$G = \int d\Omega d\vec{v}_2 g \sigma f(\vec{q}_1, \vec{v}'_1, t) f(\vec{q}_1, \vec{v}'_2, t)$$

e

$$L = \int d\Omega d\vec{v}_2 g \sigma f(\vec{q}_1, \vec{v}_1, t) f(\vec{q}_1, \vec{v}_2, t)$$

e obtemos assim a célebre equação de Boltzmann

$$\begin{aligned} \partial_t f(1) + \nabla_i \left[ v_i f(1) \right] + \partial_i \left[ a_i f(1) \right] \\ = \int d\Omega d\vec{v}_2 g\sigma \left[ f(\vec{q}_1, \vec{v}'_1, t) f(\vec{q}_1, \vec{v}'_2, t) - f(\vec{q}_1, \vec{v}_1, t) f(\vec{q}_1, \vec{v}_2, t) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

Convém lembrar que certas aproximações estão envolvidas na obtenção da equação de Boltzmann. Assim, o fato das coordenadas de posição e tempo serem as mesmas nos argumentos das  $f$  na integral do segundo membro decorre da suposição de que a colisão é instantânea e se processa numa região pequena do espaço das configurações quando comparada ao volume médio ocupado pelas partículas. Essa hipótese normalmente é satisfeita quando a equação é aplicada a gases de baixas densidades. Outra aproximação é a de supor que a probabilidade de se encontrar um par de partículas juntas é o produto das  $f$ 's. Essa é a famosa "stosszahlansatz". Não obstante essas aproximações, a equação de Boltzmann é a mais bem estudada pelas equações da teoria cinética.

A conexão entre a equação de Boltzmann e a equação de Fokker-Planck se faz por intermédio da equação de Landau. Para tanto admitimos que a interação entre pares é tal que os impulsos transferidos às partículas na colisão são pequenos ou seja, definindo  $\vec{\Delta}$  pela equação

$$\vec{\Delta} = \frac{1}{2} (\vec{g} - g\vec{\epsilon})$$

temos

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \vec{\Delta}$$

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \vec{\Delta}$$

e vamos admitir  $\Delta \ll v_1$  e  $v_2$  .

Escrevendo

$$g\sigma \equiv \omega(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{\Delta})$$

observamos que a invariância por reversão temporal nos garante que

$$\omega(\vec{v}_1, \vec{v}_1, \vec{\Delta}) = \omega(\vec{v}_1, \vec{v}_1, -\vec{\Delta}) \quad (13)$$

ou seja,  $\omega$  é uma função par de  $\vec{\Delta}$  .

A equação de Landau é obtida expandindo  $f(\vec{q}, \vec{v}', t)$  e  $f(\vec{q}_1, \vec{v}'_2, t)$  da equação de Boltzmann em potenciais de  $\vec{\Delta}$  e conservando o termo de mais baixa ordem em  $\Delta$  .

Observemos que termos de ordem ímpar não contribuem pela propriedade expressa pela eq. (13) e o termo de segunda ordem nos dá, após algumas manipulações algébricas:

$$\partial_t f + \nabla_i v_i f + \partial'_i (a_i f) = \int d\vec{v}_2 \partial_j^1 G^{jk} (\partial_k^1 - \partial_k^2) f(1) f(2) \quad (14)$$

onde

$$G^{jk} = \frac{1}{2} \int d\Omega \omega(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{\Delta}) \Delta^j \Delta^k$$

e usamos a notação

$$\partial_i^1 = \frac{\partial}{\partial v_1^i} \quad ; \quad \partial_i^2 = \frac{\partial}{\partial v_2^i} \quad .$$

A eq. (14) pode facilmente ser posta em forma da equação de Fokker-Planck e temos

$$\partial_t f + \nabla_i (v_i f) + \partial_i (a_i f) = \partial_i (-A^i + \frac{1}{2} \partial_j B^{ij}) f$$

onde

$$A^i = \int d\vec{v}_2 \left\{ G^{ji} \partial_j^2 f(2) + f(2) \partial_j^2 G^{ij} \right\}$$

e

$$B^{ij} = 2 \int d\vec{v}_2 G^{ij} f(2) \quad .$$

Observamos que os dois coeficientes estocásticos  $A^i$  e  $B^{ij}$  da equação de Fokker-Planck têm origem no mesmo coeficiente  $G^{ij}$  da equação de Landau. Ambos dependem autoconsistentemente da própria distribuição  $f$  que se procura determinar. Além do mais, a força viscosa não é necessariamente proporcional à velocidade. O que é importante observar é que a interação entre pares fixa os coeficientes  $A^i$  e  $B^{ij}$  da equação de Fokker-Planck e assim eles não são meros parâmetros fenomenológicos.

Voltemos ao problema das reações muito inelásticas. Como observamos anteriormente, a equação de Landau vai além dos objetivos do TDHF mas peca por ser uma equação clássica. Ao nível microscópico os efeitos quânticos são certamente importantes. Primeiramente eles são responsáveis pela estabilidade dos íons que dependem fortemente das correlações introduzidas pelo princípio de Pauli. O ponto de partida então deveria ser a ver-

são quântica da equação de Boltzmann ou da de Landau. Quem primeiro obteve a versão quântica da equação de Boltzmann foram Uehling e Uhlenbeck (4) mas esse assunto foge do objetivo dessa palestra. Basta aqui observar que a equação de Uehling-Uhlenbeck é mais não-linear (terceiro grau) que a de Landau (segundo grau) e foi obtida somente para meios homogêneos, o que reduz seu uso à matéria nuclear. Como as inhomogeneidades em plasma são apreciáveis só a distâncias macroscópicas não é de se admirar que uma teoria cinética quântica para meios inhomogêneos não tenha sido muito estudada no campo dos plasmas. Esse é um ponto em que o desenvolvimento dessas teorias aplicadas à colisão de íons pesados se faz necessária pois os íons, por serem gotículas, são meios fortemente inhomogêneos. Aqui surge um amplo campo para desenvolvimento teórico.

#### 4. Macroscopia

Uma vez obtida a equação para  $f(\vec{q}, \vec{v}, t)$ , fechada, do ponto de vista microscópico, podemos perguntar qual conteúdo macroscópico essas equações possuem. A passagem para a descrição macroscópica se faz de forma sistemática introduzindo campos pelo seguinte procedimento geral:

$$B(\vec{x}, t) = \int d\vec{q} d\vec{v} \delta(\vec{x} - \vec{q}) \beta(\vec{q}, \vec{v}) f(\vec{q}, \vec{v}, t) .$$

$B(\vec{x}, t)$  é o campo macroscópico e

$$b(\vec{q}, \vec{v}, \vec{x}) \equiv \delta(\vec{x} - \vec{q}) \beta(\vec{q}, \vec{v})$$

é o operador que gera a partir de  $f(\vec{q}, \vec{v}, t)$  o campo macroscópico. O fato de  $b(\vec{q}, \vec{v}; \vec{x})$  ser proporcional a  $\delta(\vec{q} - \vec{x})$  decorre de estarmos considerando operadores localizados. Claro é que operadores mais gerais podem ser considerados mas nos restringiremos aqui aos operadores localizados.

Um exemplo de campo, talvez o mais simples é o gerado por

$$b = \delta(\vec{x} - \vec{q})$$

isto é,  $\beta = 1$ , que nos dá

$$n(\vec{x}, t) = \int f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v}$$

ou seja, a distribuição espacial de partícula do sistema.

Tendo definido o campo  $B(\vec{x}, t)$  procuramos saber como ele evolue no tempo e temos

$$\partial_t B(\vec{x}, t) = \int \delta(\vec{x} - \vec{q}) \beta(\vec{q}, \vec{v}) \partial_t f(\vec{q}, \vec{v}, t)$$

donde observamos que sua evolução está descrita pela equação cinética para  $f$ , que podemos sempre por na forma seguinte

$$\partial_t f = -v_i \nabla_i f + \Omega f + Kf$$

onde

$$-v_i \nabla_i f \quad \text{é o termo cinemático,}$$

$$\Omega f = -\partial_i (a_i f) \quad \text{é o termo de Vlasov,}$$

e

$Kf = \int dv_2 \partial_j^1 G^{jk} (\partial_k^1 - \partial_k^2) f(2) f(1)$  é o termo de colisão aqui na forma de Landau.

Fazendo uso da equação cinética podemos escrever a variação temporal de  $B(\vec{x}, t)$  na seguinte forma:

$$\partial_t B + \nabla_i \phi_B^i = \sigma_B^1 + \sigma_B^2 + \sigma_B^3 \equiv \sigma_B$$

onde

$$\phi_B^i(\vec{x}, t) = \int d\vec{q} d\vec{v} \delta(\vec{x} - \vec{q}) v_i \beta(\vec{q}, \vec{v}) f(\vec{q}, \vec{v}, t)$$

é o fluxo ou corrente associado ao campo B e  $\sigma_B$  é a fonte do campo B. Os componentes  $\sigma_B^1$ ,  $\sigma_B^2$  e  $\sigma_B^3$  da fonte de B são dados pelas equações:

$$\sigma_B^1 = \int d\vec{v} d\vec{q} \delta(\vec{x} - \vec{q}) \left[ \nabla_i \beta(\vec{q}, \vec{v}) \right] \cdot v_i f(\vec{q}, \vec{v}, t)$$

$$\sigma_B^2 = \int d\vec{v} d\vec{q} \delta(\vec{x} - \vec{q}) \beta(\vec{q}, \vec{v}) \Omega f(\vec{q}, \vec{v}, t)$$

$$\sigma_B^3 = \int d\vec{v} d\vec{q} \delta(\vec{x} - \vec{q}) \beta(\vec{q}, \vec{v}) K f(\vec{q}, \vec{v}, t) .$$

Assim  $\sigma_B^1$  vem do termo cinemático da equação cinética,  $\sigma_B^2$  do termo de Vlasov e  $\sigma_B^3$  do termo de colisão.

Se  $\sigma_B \equiv 0$ , então o campo B é conservado. Esse é o caso de  $n(\vec{x}, t)$  cuja corrente associada é

$$j_i(\vec{x}, t) = \int v_i f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v}$$

e, decorre da equação cinética que

$$\partial_t n + \nabla_i j_i = 0 \quad ,$$

o que expressa a conservação de partículas no sistema sob consi  
deração.

Em geral isso não ocorre e, cada campo B exige para a sua equação macroscópica a introdução da corrente que lhe é associada como também a fonte que lhe corresponde. Desta forma, para obtermos uma descrição macroscópica completa precisaríamos obter as equações de evolução dos campos  $\phi_B^i$  e  $\sigma_B$  e esses gerando por sua vez novas correntes e fontes e assim indefinidamente, o que vem mostrar que a descrição macroscópica completa da informação contida em f exige pelo menos um sistema infinito de equações. A prática exige, num certo ponto, introduzir con  
siderações fenomenológicas para se fechar de forma finita o sistema de equações macroscópicas, ou seja, é preciso modelar !

Um campo macroscópico que merece destaque é a entropia definida como

$$S(\vec{x}, t) = -k \int \left[ \log f(\vec{x}, \vec{v}, t) \right] f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v}$$

e seu fluxo

$$\phi_S^i = -k \int v_i f(\vec{x}, \vec{v}, t) \log f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v}$$

onde k é a constante de Boltzmann.

É um resultado importante das equações cinéticas o que afirma que somente o termo de colisão contribue para a fon  
te de entropia e, da equação da Landau obtemos:



$$\partial_t S + \nabla_i \phi_S^i = \sigma_S$$

em que a fonte de entropia fica dada por:

$$\sigma_S = \frac{1}{2} k \int d\vec{v}_1 d\vec{v}_2 G^{ij}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) A_i(\vec{x}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, t) A_j(\vec{x}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, t)$$

onde

$$A_i(\vec{x}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, t) = \frac{(\partial_i^1 - \partial_i^2) f(\vec{x}, \vec{v}_1, t) f(\vec{x}, \vec{v}_2, t)}{\left[ f(\vec{x}, \vec{v}_1, t) f(\vec{x}, \vec{v}_2, t) \right]^{1/2}}$$

Pelo fato de  $G^{ij}$  ser uma matriz não negativa, temos que

$$\sigma_S \geq 0$$

o que expressa a segunda lei da termodinâmica e a inversibilidade do processo markoviano descrito pela equação de Landau. Assim temos que, qualquer que seja a distribuição inicial,  $f$  evolue no tempo aumentando a entropia do sistema até um máximo quando o sistema entra em equilíbrio estatístico.

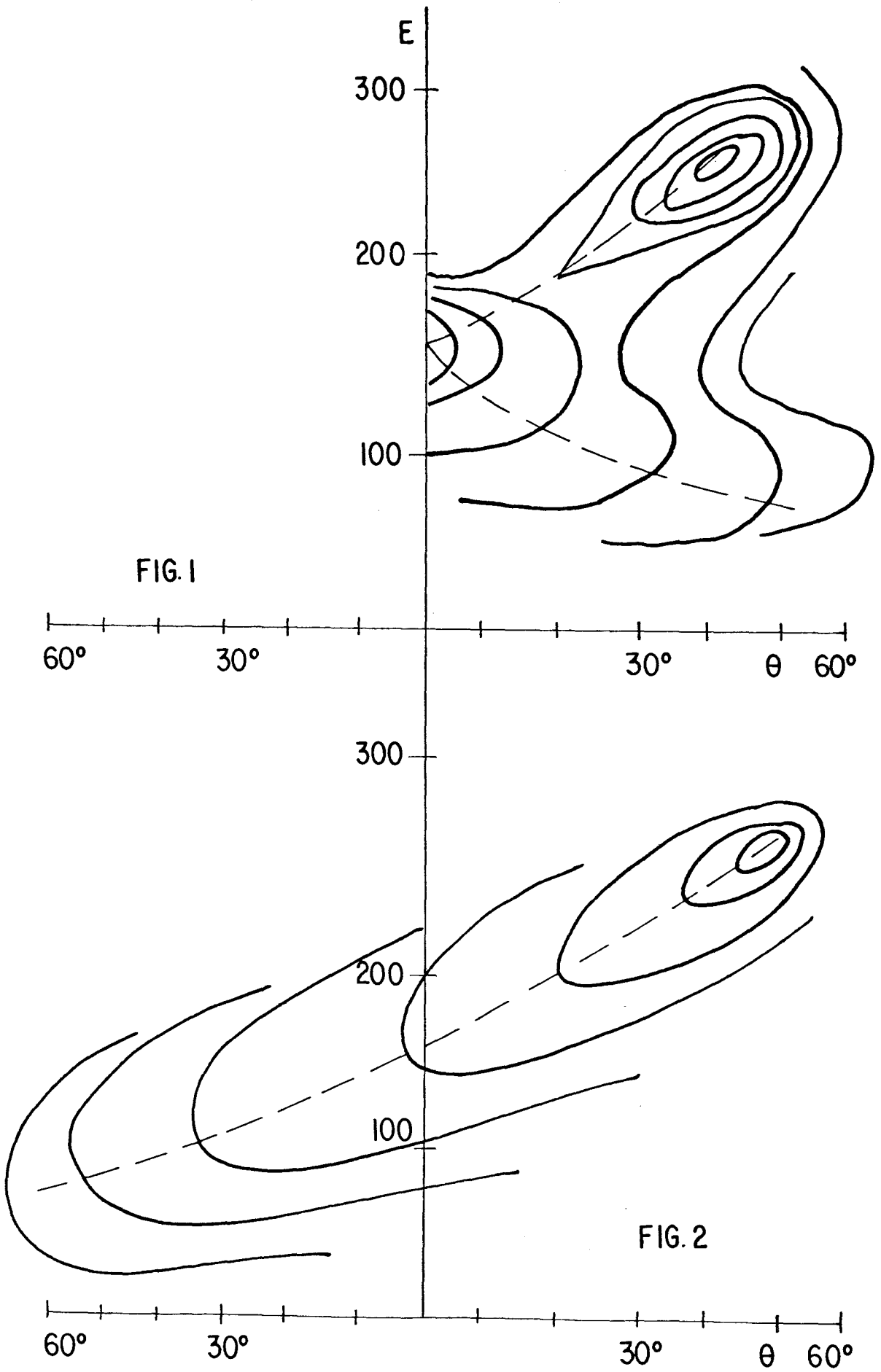
## 5. Observações Finais

Gostaria de salientar a título de conclusão quais as direções que podemos tomar para a pesquisa em colisões de íons pesados. Indiscutivelmente a equação de Fokker-Planck é a que

melhor se presta para fazer fenomenologia e a melhor forma de se extrair informações dessa equação é fazendo simulação no computador. Esse é um campo que ainda vai dar muitos frutos. A outra direção é na pesquisa de equações quântico-cinéticas que tratem corretamente as inhomogeneidades. Essa é uma área que justo está começando a se desenvolver e é complementar à anterior, porém essencial para validar os modelos fenomenológicos.

## 6. Bibliografia

- (1) Wilczynsky, J., Phys. Lett. 47B, 484 (1973).
- (2) L.C. Gomes, J.D. Walecka e V.F. Weisskopf, Am. Phys. (N.Y.) 3, (1958), 241.
- (3) M.C. Nemes e A.F.L. de Toledo Piza, On the Quantum Dynamical Foundations of Collision Terms, Pré-pré-print, IFUSP (1981).
- (4) Uma referência geral para o estudo de equações cinéticas é: R. Balescu, Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics, John Wiley & Sons (1975), capítulos, 11, 12 e 18.



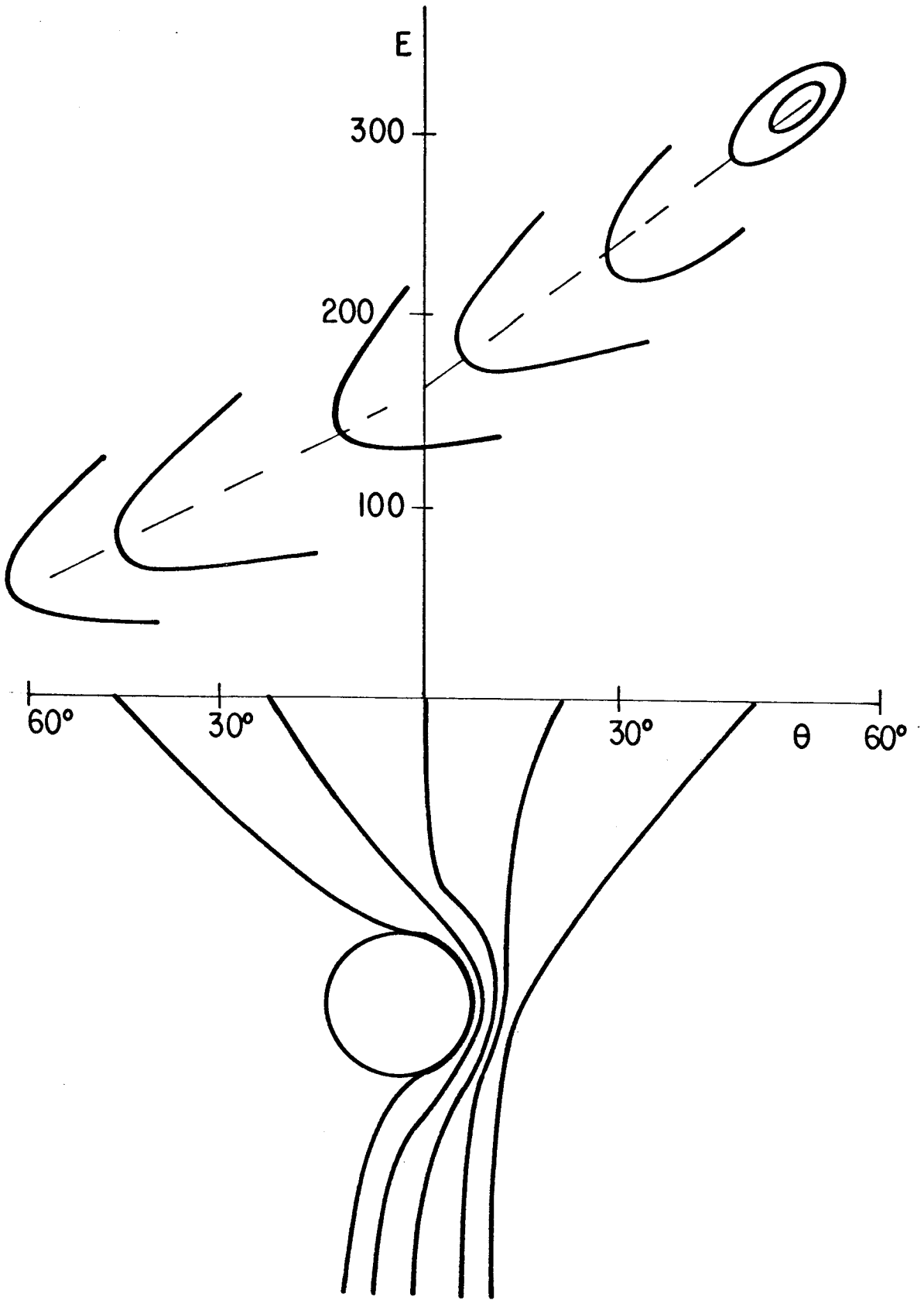


FIG. 3