CBPF-NF-040/98

O Espectro de uma Classe de Operadores Dirac e a Topologia em 2 Dimensões

Luiz C. L. Botelho

and

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF / CNPq
R. Dr. Xavier Sigaud, 150, 22290-180
Rio de Janeiro - RJ, Brazil

Departamento de Física - UFRJ, 23851
Itaguaí, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

Introdução

Operadores do tipo Dirac em Variedades Riemmanianas são objetos matemáticos de fundamental importância na Geometria Diferencial ([1],[2],[3]) e nas suas aplicações à Física Quântica ([4],[5]).

Infelizmente, muitos dos estudos apresentados na Teoria dos Operadores de Dirac são extremamente complicados devido a utilização de métodos sofisticados da Teoria de Fibradas Vetoriais, Topologia Algébrica e Topologia Diferencial ([1]).

O nosso objetivo neste trabalho é apresentar, de um modo relativamente simples e baseado na Teoria dos Operadores Pseudo-Diferenciais de Seeley refs. ([2],[4],[5]); o resultado principal de Atiyah-Singer ([1]) que o traço do operador de evolução associado a uma classe de Operadores de Dirac definidos em variedades bidimensionais e provenientes da Física Quântica ([5]), tem um profundo significado topológico. Este resultado é detalhadamente apresentado no Capítulo 2 e é devido a este autor na sua forma de apresentação.

Capítulo 1

O Método de Seeley para determinar exatamente Funções de Green de Operadores Elípticos de $2^{\underline{a}}$ Ordem Bidimensionais.

Seja A o seguinte operador diferencial elíptico de $2^{\underline{a}}$ ordem atuando no espaço $C_{\epsilon}^{\infty}(R^2)_{q\times q}$, formado pelas funções infinitamente diferenciáveis de suporte compacto em R^2 com valores em $M_{q\times q\epsilon}(C)$ (matrizes complexas $q \times q$)

$$A = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D_x^\alpha \tag{1}$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ são inteiros não-negativos associados ao operador diferencial básico

$$D_x^\alpha = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \tag{2}$$

onde $A_\alpha(x) \in C_c^\infty(R^2)_{q \times q}$.

No caso em que for possível introduzir uma estrutura Hilbertiana em $C_c^\infty(R^2)_{\epsilon \times \epsilon}$ que implique que A seja um operador positivo definido em relação ao produto interno em questão (como será feito no Capítulo 2 do presente artigo); teremos a necessidade de estudar o semi-grupo contrativo gerado por A e definido pela fórmula espectral ([1],[2])

$$e^{-tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_c d\lambda e^{-t\lambda}(\lambda 1_{q \times q} - A)^{-1} \tag{3}$$

onde C é um contorno contendo a semi-reta positiva $\lambda > 0$ (o espectro de A!) e orientado no sentido anti-horário.

De acordo com Seeley ([1],[2]), consideremos o símbolo associado ao operador $(\lambda 1_{q \times q} - A)^{-1}$ e definido pela seguinte relação

$$\begin{aligned} \sigma(A - \lambda 1)(\xi) \overset{def}{\equiv} e^{-ix\xi}(A - \lambda 1)e^{ix\xi} &= \sum_{|\alpha| \leq 2} A_\alpha(x)(\xi_1^{\alpha_1})(\xi_2^{\alpha_2}) - \lambda 1_{q \times q} = \\ &= \sum_{|j|=0}^{2} A_j(x, \xi, \lambda) \end{aligned} \tag{4}$$

onde para $0 \leq j < 2$

$$A_j(x, \xi, \lambda) = \sum_{|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 = j} A_\alpha(x)(\xi_1^{\alpha_1})(\xi_2^{\alpha_2}) \tag{5}$$

$$A_2(x, \xi, \lambda) = -\lambda 1 + \left(\sum_{|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 = 2} Cl_\alpha(x)(\xi_1^{\alpha_1})(\xi_2^{\alpha_2})\right) \tag{6}$$

Considerando a Transformada de Fourier

$$\widehat{\vartheta}(\xi) = \int_{R^2} e^{-i\xi x}\vartheta(x) d^2x \tag{7}$$

temos, também, a seguinte relação para a atuação do operador A em função $\vartheta(x) \in C_c^\infty(R^2)_{q\times q\epsilon}$

$$(A\varphi)(x) = \frac{1}{(\partial\pi)^2}\int_{R^2} e^{ix\xi}[\sigma(A)(x,\xi)]\widehat{\varphi}(\xi)\,d^2\xi \tag{8}$$

Note que a propriedade importante que as funções $a_j(x,\xi,\lambda)$ são funções homogêneas de grau j como funções de ξ e $\sqrt{\lambda}$ isto é ([2]) :

$$a_j(x,c\xi,c^2\lambda) = (c^j)a_j(x,\xi,\lambda) \tag{9}$$

É um importante teorema da Teoria dos Operadores Pseudo-Diferenciais ([2]) que o operador Inverso (Funções de Green) de $(A-\lambda 1)$ possue um símbolo dado por uma série de funções $\{C_{-2-j}(x,\xi)\}j = 0,\ldots\infty$

$$\sigma\left((A-\lambda 1)^{-1}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{-2-j}(x,\xi) \tag{10}$$

Deste modo, como resultado da eq.(3) e eq(10), teremos a seguinte expressão de Seeley para a Função de Green do operador A ([2]) (quando $\lambda > 0$ e independente da estrutura Hilbertiana do domínio do operador)

$$(A^{-1}\varphi)(x) = \int_0^\infty dt\,(e^{-tA}\varphi)(x) =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\Big/ d^2\xi\ d^2x\ d^2y\, e^{i\xi(x-y)}\oint_c \frac{c_{-2-j}(x,\xi,\lambda)}{\lambda}\,d\lambda\,\varphi(y)\right\} \tag{11}$$

Uma operação de multiplicação pode ser introduzido na álgebra não-comutativa dos símbolos associados a operadores elípticos A e B em $C_c^\infty(R^2)_{q\times q}$.

$$\sigma(A)\circ\sigma(B) \equiv \sigma(A\bullet B) \tag{12}$$

onde $A\bullet B$ denota o operador composição, ou equivalente.

$$\sigma(A)\circ\sigma(B) = \sum_{|\alpha|\le 2}\left[D_\xi^\alpha\,\alpha(A)(x,\xi)\right]\,[iD_x^\alpha\,\sigma(B)(x,\xi)]/\alpha! \tag{13}$$

onde

$$\alpha! = \alpha_1! \ \alpha_2!. \tag{14}$$

A partir da relação fundamental

$$(A - \lambda 1) \bullet (A - \lambda 1)^{-1} = 1 \tag{15}$$

obtemos que

$$\sigma(A - \lambda 1) \circ \sigma\big((A - \lambda 1)^{-1}\big) = 1 \tag{16}$$

e assim,

$$\left\{ \frac{1}{\alpha!} \sum_{|\alpha| \leq 2} \big(D_\xi^\alpha \sigma(A - \lambda 1)(x, \xi) \big) D_x^\alpha \left(\sum_{j=0}^{\infty} C_{-2-j}(x, \xi) \right) \right\} = 1 \tag{17}$$

ou

$$\frac{1}{\alpha!} \sum_{|\alpha| \leq 2} \sum_{j=0}^{\infty} \left[(D_\xi^\alpha \, \sigma(A - \lambda 1)(x, \xi)) \, D_\xi^\alpha (C_{-2-j}(x, \xi)) \right] = 1. \tag{18}$$

Introduzindo as variáveis re-escaladas ($c > 0$)

$$\xi = C\xi'; \qquad \lambda^{\frac{1}{2}} = e(\lambda')^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

e, assim: (veja a eq.(9) e a eq.(18))

$$C_{-2-j}\left(x, c\xi', \left[(C\lambda')^{\frac{1}{2}} \right]^2 \right) =$$

$$C^{-(2+j)}C_{-2-j}(x,\xi',\lambda') \tag{20}$$

temos que, susbstituindo a eq.(20) na eq.(18) e comparando a serie de potencias em $\frac{1}{C}$ obtida, obtém-se a relação de recorrência de Seeley $(1 = 1 + 0C^{-1} + \ldots 0C^{-M} + \ldots)$ para cada inteiro j ([2][5])(depois de fazermos $C \to 1$, o que por sua vez determina os coeficientes $\{C_{-2-j}(x,\xi)\}$.

$$C_{-2}(x,\xi) = a_2^{-1}(x,\xi) \tag{21}$$

$$\begin{aligned} 0 &= a_2(x,\xi)C_{-2-j}(x,\xi) + \\ &\quad + \frac{1}{\alpha!}\sum_{l<j}\big(D_\xi^\alpha\, a_K(x,\xi)\big)\big(iD_x^\alpha\, C_{-2-l}(x,\xi)\big) \\ &K - |\alpha| - 2 - l = -j \end{aligned} \tag{22}$$

Consideremos, agora o seguinte operador elíptico

$$\begin{aligned} A = &-\left(g_{11}(x_1,x_2)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + g_{22}(x_1,x_2)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)1_{q\times q} \\ &+ (A_1(x_1,x_2))_{q\times q}\frac{\partial}{\partial x_1} \\ &+ (A_2(x_1,x_2))_{q\times q}\frac{\partial}{\partial x_2} \\ &+ (A_0(x_1,x_2))_{q\times q} \end{aligned} \tag{23}$$

com $\{g_{11}(x), g_{22}(x); x \in R^2\}$funções positivas definidas em $C_c^\infty(R^2)_{1\times 1}$.

Observemos que devido a eqs.(4) – (6), os coeficientes associados ao símbolo do operador acima são dados por:

$$\begin{aligned} a_2(x,\xi,\lambda) &= (g_{11}(x)\xi_1^2 + g_{22}(x)\xi_2^2 - \lambda)1 \\ a_1(x,\xi,\lambda) &= -i\,A_1(x)\,\xi_1 - iA_2(x)\,\xi_2 \\ a_0(x,\xi,\lambda) &= -A_0(x) \end{aligned} \tag{24}$$

Depois de cálculos via eq.(22), obtivemos (por exemplo)([2],[4],[5]) os seguintes coeficientes para o símbolo de Resolvente $(\lambda 1 - A)^{-1}$ do operador A

$$C_{-2}(x,\xi) = \frac{1}{(g_{11}(x)\xi_1^2 + g_{22}(x)\xi_2^2 - \lambda)}1_{q\times q} \tag{25}$$

$$C_{-3}(x,\xi) = i(A_1(x)\xi_1 + A_2(x)\xi_2)\left(C_{-2}(x,\xi)^2\right)$$
$$-2ig_{11}(x)\xi_1\Big[\Big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}g_{11}(x)\Big)(\xi_1)^2 + \Big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}g_{22}(x)\Big)(\xi_2)^2\Big]\left(C_{-2}(x,\xi)^3\right) \tag{26}$$
$$-2ig_{22}(x)\xi_2\Big[\Big(\tfrac{\partial}{\partial x_2}g_{11}(x)\Big)(\xi_1)^2 + \Big(\tfrac{\partial}{\partial x_2}g_{22}(x)\Big)(\xi_2)^2\Big]\left(C_{-2}(x,\xi)^3\right)$$

Analisemos, agora, a expansão de Seeley associada ao semi-grupo contrativo eq.(3) para o operador elíptico eq.(23) acima considerado. Devido a positividade das funções $g_{11}(x)$ e $g_{22}(x)$ e o fato de que $\{A_1(x), A_2(x), A_0(x)\}$ são funções de suporte compacto e assim o operador dado pela equação (23) pode ser considerado como uma pertubação do operador a coeficientes constantes ; não será difícil deduzir que o espectro do operador A definido em qualquer domínio conveniente com uma estrutura Hilbertiana do tipo

$W^m_\rho(R^2, d^2x)$ (Espaço de Sobolev) (e aqui d^2x denotando a medida de Lebesque usual); será sempre positivo (veja o apêndice para a verificação deste fato para o caso mais simples de $g_{11}(x) = g_{22}(x) = \frac{1}{\rho(x)}$.

Neste caso, podemos escolher o contôrno C na eq.(3) como o eixo imaginário $\lambda = -iS$, $+\infty < S < -\infty$ e um semi-círculo infinitesimal envolvendo a origem.

Tendo em vista aplicações ao Teorema do Indice do Capítulo 2, estudaremos o objeto

$$Tr_{C_c^\infty(R^2)_{q\times q}}(e^{-tA}) =$$

$$= \boxed{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{R^2} d^2x\ \sigma(e^{-tA})(x,\xi)}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^2 \tfrac{1}{2\pi i}\int_{+\infty}^{-\infty} d(-iS)e^{iSt}\int_{R^2R^2} d^2x\, d^2\xi\, C_{-2-j}(x,\xi,-iS)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left\{\tfrac{1}{t}\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int_{R^2} d^2\xi\int_{R^2} d^2x\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iS}C_{-2-j}\left(x,\xi,\tfrac{-iS}{t}\right)dS\right\} \tag{27}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left\{\tfrac{1}{t}\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int_{R^2R^2} d^2x d^2\xi\, e^{iS}t^{\left(\frac{2+j}{2}\right)}C_{-2-j}\left(x, t^{\frac{1}{2}}\xi, -iS\right)\right\}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left\{t^{\frac{(j-2)}{2}}(2\pi)^{-3}\int_{R^2} d^2\xi\int_{R^2} d^2x\int_{-\infty}^{+\infty} C_{-2-j}(x,\xi,-iS)\right\}$$

Utilizando-se as eq.(22) –eq.(26) (e incluindo o termo $C_{-4}(x,\xi)$ não escrito nestas fórmulas), teremos o seguinte resultado (para $t \to 0^+$) ([2],[5]).

$$Tr_{C_c^\infty(R^2)_{q\times q}}(e^{-tA}) \sim \frac{1}{4\pi t}\left(\int d^2x\sqrt{g_{11(x)}\;g_{22(x)}}\right)1_{q\times q} \tag{28}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{R^2}\left\{d^2x\sqrt{g_{11}g_{22}}\left(-\frac{1}{6}R\right)1_{q\times q}\right.$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\sqrt{g_{11}g_{22}}A_1)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_2}(\sqrt{g_{11}g_{22}}A_2)\right)\right]$$

$$\left.-\frac{1}{4}(\tilde{g}_{11}(A_1)^2+\tilde{g}_{22}(A_2)^2+A_0)\right\}(x)+0(t)$$

onde

$$\begin{bmatrix}\tilde{g}_{11}(x) & 0\\ 0 & \tilde{g}_{22}(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_{11}(x) & 0\\ 0 & g_{22}(x)\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{g_{11}(x)} & 0\\ 0 & \frac{1}{g_{22}(x)}\end{bmatrix} \tag{29}$$

e $R(x)$ é o escalar de curvatura associada a métrica

$$dS^2=\tilde{g}_{11}(x)(dx_1)^2+\tilde{g}_{22}(x)(dx_2)^2 \tag{30}$$

Capítulo 2

Operadores de Dirac em Superfícies de Rieman e um Teorema do Índice do Tipo Atyah-Singer

Começaremos este capítulo introduzindo coordenadas complexas no R^2

$$z_1 = x_1 = ix_2;\quad \bar{z} = x_1 = ix_2 \tag{1}$$

$$\partial z = \frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2};\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{2}$$

Para cada inteiro j, definamos agora Espaços de Hilbert H_j e $\overline{H}_j$ do seguinte modo ([5]) : H_j é formado pelo espaço vetorial das funções complexas $f(z,\bar{z}) = f_1(x,y) + if_2(x,y)$ tais que sob a ação de uma transformação conforme $z = z(w)$ do plano complexo no plano complexo, esta função tenha a seguinte lei "tensorial" de transformação

$$f(z,\bar{z}) = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-j}\tilde{f}(w,\overline{w}) \tag{3}$$

Tornemos o espaço vetorial acima um Espaço de Hilbert pela introdução do seguinte produto interno em H_j

$$(g,f)_{H_j} = \int_{R^2} dz\, d\bar{z}\, (\rho(z,\bar{z}))^{j+1}\, \bar{g}(z,\bar{z})\, f(z,\bar{z}) \tag{4}$$

onde $\rho(z,\bar{z})$ denota uma função real positiva de suporte compacto em R^2 e associa a uma estrutura métrica conformal de **C**

$$dS^2 = \rho(z,\bar{z})\, dz\, d\bar{z}$$

O Espaço $\overline{H}_{+j}$ é definido de modo análogo, tendo somente a seguinte diferença: a equação de transformação conforme tensorial terá agora a forma

$$f(z,\bar{z}) = \left(\left(\overline{\frac{\partial w}{\partial Z}}\right)\right)^{-j} \tilde{f}(w,\overline{w}) \tag{5}$$

e o produto interno será definido do mesmo modo dado pela eq.(4). Temos os seguintes lemas:

Lema1. O Produto Escalar definido em H_j $\left(\text{ou}\, \overline{H}_j\right)$ é invariante sob a ação do Grupo das Transformações Conformes do Plano complexo.

Demonstração: Basta observarmos que o peso $\rho(z,\bar{z})$ transforma-se do seguinte modo sob à ação do Grupo das Tranformações Conformes do Plano.

$$\rho(z,\bar{z}) = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\overline{\frac{\partial w}{\partial z}}\right)\, \tilde{\rho}(w,\overline{w}) \tag{6}$$

Deste modo

$$\begin{aligned}(g,f)_{H_j} &= \int_{R^2} dw\, d\overline{w} \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)\left(\overline{\frac{\partial z}{\partial w}}\right)\left(\left|\frac{\partial w}{\partial z^2}(z)\right|^2 \tilde{\rho}(w,\overline{w})\right)^{j+1} \\ &\quad (\partial_z w)^{-j}\, \tilde{f}(w,\overline{w}) \\ &\quad \left(\overline{\partial_z w}\right)^{-j} \left(\overline{\tilde{g}(w,\overline{w})}\right) \\ &= \int_{R^2} dw\, d\overline{w}\; \tilde{\rho}(w,\overline{w})^{j+1}\; \overline{\tilde{g}(w,\overline{w})}\; \tilde{f}(w,\overline{w})\end{aligned} \tag{7}$$

Consideremos agora, os seguintes operadores de Dirac generalizado (operadores de Cauchy-Riemaman pesados) ([1]) na presença de um campo vetorial $(A_z(z,\bar{z});\ A_{\bar{z}}(z,\bar{z}))$.

$$L_j \ : \ H_j \to \overline{H}_{-(j+1)} \qquad (8)$$
$$f \to (\rho(z,\bar{z}))^j \, (\partial_{\bar{z}} + A_{\bar{z}})f$$

e o seu adjunto formal **Lema2**

$$L_j^* \ : \ \overline{H}_{-(j+1)} \to H_j \qquad (9)$$
$$f \to (\rho(z,\bar{z}))^{-(j+1)} \, (\partial_z + A_z)f$$

Analisaremos no que segue o caso mais simples de $A_Z = A_{\bar{z}} \equiv 0$ ([5]). Neste caso os operadores elípticos de 2ª ordem positivo (chamados também de Operadores de Polyakov ([6]).

$$\mathrm{l}_j = L_j^* \, L_j \ : H_j \to H_j \qquad (10-A)$$

e

$$\mathrm{l}_j^* = L_j \, L_j^* \ : \overline{H}_{-(j+1)} \to \overline{H}_{-(j+1)} \qquad (10-B)$$

possuem as seguintes expressões explícitas

$$L_j \, L_j^* = -(\rho(z,\bar{z}))^{-1} \, \partial_{\bar{z}} \, \partial_Z + (j+1) \, (\rho(z,\bar{z}))^{-1} \, \partial_{\bar{z}}(\lg \ \rho(z,\bar{z}))\partial_z \qquad (11)$$

$$L_j^* \, L_j = -(\rho(z,\bar{z}))^{-1} \, \partial_{\bar{z}} \, \partial_Z - j(\rho(z,\bar{z}))^{-1} \, (\partial_z \, l_g \ \rho(z,\bar{z}))\partial_{\bar{z}} \qquad (12)$$

Vamos, agora, introduzir o famoso índice Geométrico-Topológico de Atyah-Singer para o operador L_j (eq.(8)), o qual será definido pela relação

$$Ind_{A.S}(L_j) = l_{in_{t\to 0}} \left\{ Tr_{C_c^\infty(R^2)} \left(e^{-tL_j^* L_j} \right) - Tr_{C_c^\infty(R^2)} \left(e^{-tL_j L_j^*} \right) \right\} \qquad (13)$$

Note o uso de um novo domínio para L_j (sem estrutura Hilbertiana!) que é o espaço $C_c^\infty(R^2) \complement H_j$ $\left(\text{ou} \complement \overline{H}_j \right)$ para qualquer j com $\rho(z,\bar{z}) \in C_c^\infty(R^2)$. Introduziremos a estrutura usual $L^2(R^2, dz \, d\bar{z})$ em $C_c^\infty(R^2)$ e, assim o traço será tomado em relação a medida usual de Lebesque $dz \, d\bar{z} = dx_1 \, dx_2$; afim de manter intacta a estrutura geométrico-Topológica usual das superfícies de Riemman em questão $(R^2, ds^2 = \rho(z,\bar{z}) \, dz \, d\bar{z})$ (carta de uma variedade Riemaniana Bidimensional).

É importante observar que o índice Geométrico-Topológico de Atyah-Singer eq.(13) difere do índice Analítico-Funcional dos operadores com a sua estrutura Hilbertiana H_j e $\overline{H}_j$ eq.(4) – eq.(5), o qual é definido pela relação:

$$
\begin{aligned}
Ind(L_j) &= \dim Her_{Hj}(Lj) \\
&\quad - \dim Her_{\overline{H}_{-(j+1)}}(L_j^*) \\
&= \lim_{t\to 0}\{+Tr_{Hj}(e^{-t}L_j^* L_j) \\
&\quad -Tr_{\overline{H}_{-(j+1)}}(e^{-t}L_j L_j^*)\} \\
&= \lim_{t\to 0^+}\Big\{\Big[\int dz\,d\bar{z}\;\rho(z,\bar{z})^{j+1}\Big(\frac{\rho(z,\bar{z})}{2\pi t} - \frac{(1+3j)}{12\pi}\Delta l_g\,\rho(z,\bar{z})\Big)\Big] \\
&\quad - \Big[\int dz\,d\bar{z}\;\rho(z,\bar{z})^{-j}\Big(\frac{\rho(z,\bar{z})}{2\pi t} - \frac{(2+3j)}{12}\Delta l_g\,\rho(z,\bar{z})\Big)\Big]\Big\} = +\infty
\end{aligned} \tag{14}
$$

Observe que o núcleo do operador L_j com domínio H_j é formado por aquelas funções integráveis e diferenciáveis de ordem 1 tais que $\partial z\, f(z,\bar{z})$ e $\int_{R^2} dz\,d\bar{z}\;\rho(z,\bar{z})^{j+1}.|f(z,\bar{z})|^2 < \infty$; o qual por sua vez contém as funções infinitamente difernciáveis e de suporte compacto tais que $\partial\bar{z}\, f(z,\bar{z}) \equiv 0$ na definição eq.(13).

O cálculo da expansão assintótica dos semi-grupos de evolução eq.(14) seguem a metodologia exposta no Capítulo1 (eq.(28) – eq.(30)) e possuindo como resultado ([5])

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} Tr_{C_c^\infty(R^2)}\left(e^{-tL_jL_j^*}\right) &= \\
&= \int dz\,d\bar{z}(1).\Big(\frac{\rho(z,\bar{z})}{2\pi t} - \frac{(1+3j)}{12\pi}\Delta l_g\,\rho(z,\bar{z})\Big)
\end{aligned} \tag{15}
$$

e

$$
\lim_{t\to 0^+} - Tr_{C_c^\infty(R^2)}\left(e^{-tL_jL_j^*}\right) = \int dz\,d\bar{z}(1).\Big(\frac{\rho(z,\bar{z})}{2\pi t} + \frac{(2+3j)}{12\pi}\Delta l_g\,\rho(z,\bar{z})\Big) \tag{16}
$$

e assim

$$
\begin{aligned}
Ind_{A.S}(L_j) &= \Big(-\frac{(1+3j)}{12\pi} - \frac{(2+3j)}{12\pi}\Big)\int dz\,d\bar{z}\;\rho(z,\bar{z})\,\frac{1}{\rho(z,\bar{z})}\Delta l_g\,\rho(z,\bar{z}) \\
&= \frac{(1+2j)}{4\pi}\,\chi((R^2, ds^2 = \rho\,dz\,d\bar{z}))
\end{aligned} \tag{17}
$$

já que a curvatura da Superfície de Riemman $m = (R^2, ds^2 = \rho dz d\bar{z})$ é dada por $R(z,\bar{z}) = \left(\frac{1}{\rho}\Delta l_g \rho\right)(z,\bar{z})$ e $\chi(m)$ é o invariante topológico de Euler-Poincaré de m.

É importante observar que o índice analítico funcional é divergente para $t \to 0^+$, como é de se esperar. Note que m é uma variante não-compacta.

A eq.(15) nos mostra que escolhendo Domínios Geométricos-Topológicos para Domínios de Operadores Elípticos, o traço do núcleo associado ao operador de evolução possue um significado topológico-geométrico (Teorema de Atyah-Singer).

Agradecimentos

O presente autor deseja agradecer aos professores M.P. do Carmos, Jacob Palis Junior e Carlos Isnard pela estimulante atmosfera de pesquisa no IMPA durante a sua estadia científica nesta instituição (Março -Agosto de 1996).

Referências

[1] - N. Berline, E. Getzler and M. Vergne; "Heat Kernels and Dirac Operators", Springer-Verlag, vol 298.

- M. F. Atiyah, R. Bott and V. K. Patodi; "On the heat equation and the index theorem". Invent Math. 19(1973), 279-330; Errata, Invent. Math. 28 (1975), 277-280.

- M.F. Atiyah and I. M. Singer; "Dirac operators coupled to vector potentials", Proc. Mat. Acad. Sci. USA 81 (1984), 2597-2600.

[2] - P.B. Gilkey; "Invariance, the heat equation and the Atiayah-singer index theorem", Publish or Perish, Washington (1984).

[3] - J.M. Bismut; "The infinitésimal Lefschetz formulas: a heat equation proof". J. Funct. Anal. 62 (1985), 435-457.

[4] - A.S. Schwartz, Commum. Math. Phys. 64 (1979) 233.

[5] - B. Durhuus, P. Olesen and J. L. Petersen; "Polyakov's Quantized String with Boundary Terms", Nucl. Phys. Bl98 (1982), 157-188.