INTERPOLAÇÃO POR SOMAS DE EXPONENCIAIS : UMA SOLUÇÃO USANDO TRANSFORMADAS DE LAPLACE

José Eduardo Souza de Cursi
LABORATÓRIO DE CÁLCULO - CBPF
Av. Venceslau Brás, 71-fundos
RIO DE JANEIRO

ABSTRACT

We shall present a solution for the problem of interpolating a function $\rho(x) = a_1 e^{-b_1 x} + \ldots + a_n e^{-b_n x}$ to given points $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$. Solution is obtained by transforming the non-linear system $\sum_{i=1}^{n} a_i e^{-b_i x_j} = y_j$, $j = 1, \ldots, N$ to a simpler one.

INTERPOLAÇÃO POR SOMAS DE EXPONENCIAIS: UMA SOLUÇÃO USANDO TRANSFORMADAS DE LAPLACE.

RESUMO:

É apresentada uma solução para o problema de interpolar uma função do tipo $\rho(x) = a_1 e^{-b_1 x} + \ldots + a_n e^{-b_n x}$ a um conjunto de pontos $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$. A solução é obtida através da transformação do sistema não-linear $\sum_{i=1}^{n} a_i e^{b_i x_j} = y_j$, $j = 1, \ldots, N$ em outro mais simples.

1. INTRODUÇÃO

Consideraremos aqui o problema de determinar os parâmetros a_i, b_i de uma função ρ dada por $\rho(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{b_i x}$ tal que $\rho(x_j) = y_j$, onde (x_j, y_j), $j = 1, \ldots N (N=2n)$ é um conjunto discreto de dados. A condição $N = 2n$ refere—se ao fato de considerarmos o problema de interpolação, não sendo necessária para as transformações e relações obtidas. Entretanto, caso $N < 2n$, o problema não terá solução única ou não terá solução e, caso $N > 2n$, possivelmente não existirá solução exata para o problema, que deverá ser resolvido por outro processo numérico. Isto decorre da caracterização dos espaços de Haar como espaços de interpolação única, como veremos a seguir. Inicialmente, vamos estabelecer um resultado auxiliar:

Proposição 1.1:

Seja ρ: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $\rho(x) = a_1e^{b_1x}+\ldots+a_ne^{b_nx}$ e tal que existem $t_1,\ldots,t_n$ reais distintos com $\rho(t_i)=0$, $i=1,\ldots,n$. Então $\rho = 0$.

Prova:

Façamos a prova por indução sobre n. Se $n = 1$ e existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $a_1e^{b_1t_1}= 0$, então $a_1 = 0$, uma vez que $e^{b_1t} \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e segue-se $\rho = 0$.

Seja, pois, $\rho(x) = a_1e^{b_1x}+\ldots+a_pe^{b_px}+a_{p+1}e^{b_{p+1}x}$ tal que existam $t_1, \ldots, t_p, t_{p+1}$ distintos em $\mathbb{R}$ com $\rho(t_i) = 0$, $i = 1, \ldots, p, p+1$. Suponhamos ainda $t_1 < t_2 < \ldots < t_p < t_{p+1}$, isto é, que os t_i's estejam ordenados.

Notando que:

$a_1e^{(b_1-b_{p+1})t_k} + \ldots + a_pe^{(b_p-b_{p+1})t_k} = -a_{p+1}$ para os t_k's definidos acima e considerando $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = a_1e^{(b_1-b_{p+1})x}+ \ldots + a_pe^{(b_p-b_{p+1})x}$; aplicando-se o teorema de valor médio a g, provamos a existência de $t^*_1,\ldots,t^*_p$ distintos em $\mathbb{R}$ tais que $g'(t^*_i) = 0$. Ora, $g'(x) = a'_1 e^{b'_1x} + \ldots + a'_pe^{b'_px}$ ($a'_i = a_i(b_i-b_{p+1})$ e $b'_i = b_i-b_{p+1}$), o que nos permite aplicar a hipótese de indução, resultando $g' = 0$ e, portanto, g é constante, isto é:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -a_{p+1}$$

de onde resulta facilmente $\rho = 0$.

Das caracterizações dos espaços de Haar e deste lema, resulta imediato que:

Corolário 1.2:

Sejam $C(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $X \subset C(\mathbb{R})$ o subespaço das combinações lineares finitas de elementos de $\{e^{b_1 x}, \ldots, e^{b_n x}\} \subset C(\mathbb{R})$. Então X é Haar de dimensão n.

Também é possível estabelecer o resultado:

Corolário 1.3:

Sejam $\rho_1(x) = a_1^{(1)} e^{b_1^{(1)} x} + \ldots + a_n^{(1)} e^{b_n^{(1)} x}$ e $\rho_2(x) = a_1^{(2)} e^{b_1^{(2)} x} + \ldots + a_n^{(2)} e^{b_n^{(2)} x}$ tais que existam $t_1, \ldots, t_{2n}$ reais distintos com $\rho_1(t_i) = \rho_2(t_i)$, $i = 1, \ldots, 2n$. Então $\rho_1 = \rho_2$.

Prova

Basta notar que $[e^{b_1^{(1)} x}, \ldots, e^{b_n^{(1)} x}, e^{b_1^{(2)} x}, \ldots, e^{b_n^{(2)} x}]$ é um espaço de Haar de dimensão menor ou igual a 2n.

Este último resultado nos mostra que a interpolação por n exponenciais tem, se existir, resultado único. Entretanto, nem sempre existirá um interpolante desta espécie. Basta, por exemplo, que n pontos sejam da forma $(x_i, 0)$ e um seja da forma (x_k, y_k) com $y_k \neq 0$. Para quaisquer $b_1, \ldots, b_n$ tomados, $\rho(x) = a_1 e^{b_1 x} + \ldots + a_n e^{b_n x}$ deverá ser tal que $\rho(x_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Assim a proposição

1.1 mostra que $\rho = 0$ e é impossível interpolar uma função desta forma a tal conjunto de pontos, uma vez que $\rho(x_k) = 0 \neq y_k$.

Este mesmo corolário justifica nossas considerações iniciais. Se $N < 2n$, o interpolante ou não existe ou não é único (sua existência só é garantida para $N \leqslant n$) e se $N > 2n$, possivelmente não existe.

2. TRANSFORMADAS DE LAPLACE PARCIAIS

Neste capítulo estabeleceremos a notação e alguns resultados auxiliares sobre transformadas de Laplace, que serão utilizados para a resolução do problema exposto no capítulo anterior.

A transformada de Laplace de uma função real é definida por

$$\mathcal{L}(\rho)(s) = \int_0^{+\infty} \rho(x) e^{-sx} dx$$

quando esta integral existe.

Podemos generalizar esta definição para funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, introduzindo o conceito de transformada de Laplace parcial, isto é, efetuada somente em uma variável.

Definição 2.1.

Seja $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Definimos a transformada de Laplace na i-ésima variável por $\mathcal{L}_i(\rho) = F(x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ dada por:

$$F(x_1,\ldots, x_{i-1},s, x_{i+1},\ldots,x_n) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \rho(x_1,\ldots, x_n)e^{-sx_i}dx_i$$

É possível, respeitadas as condições de existência, efetuar a composição de transformadas. Em particular, denotaremos $\pounds^n_{i=1}(\rho) = \pounds_n(\pounds_{n-1}(\ldots(\pounds_1(\rho))))$, analogamente aos tradicionais símbolos de somatória.

Vamos agora estabelecer um resultado que virá a ser bastante útil.

<u>Proposição 2.2.</u>:

Seja $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\rho(x_1,\ldots,x_n) = g(x_k)$. Se existe $\pounds(g)$ então existe $\pounds^n_{i=1}(\rho) = \pounds^n_{\substack{i=1\\ i\neq k}}(1).\pounds_k(\rho) = \pounds^n_{\substack{i=1\\ i\neq k}}(1).\pounds(g)$.

<u>Prova</u>:

Temos

$$\pounds^n_{i=1}(\rho)(s_1,\ldots, s_n) =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-s_n x_n}dx_n \int_0^{+\infty}\ldots \int_0^{+\infty} g(x_k)e^{-s_k x_k}dx_k \int_0^{+\infty}\ldots \int_0^{+\infty} e^{-x_1 s_1}dx_1$$

uma vez que a composição reduz-se a uma integral iterada. Como existe $\pounds(g)$ e é independente de x, vem:

$$\mathcal{L}^n_{i=1}(\rho)(s_1, \ldots, s_n) =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-s_n x_n} dx_n \int_0^{+\infty} \ldots \int_0^{+\infty} e^{-s_1 x_1} dx_1 . \int_0^{+\infty} g(x_k) e^{-s_k x_k} dx_k$$

ou seja:

$$\mathcal{L}^n_{i=1}(\rho)(S_1, \ldots, S_n) = [\mathcal{L}_k(\rho) . \mathcal{L}^n_{\substack{i=1 \\ i \neq k}} (1)] (S_1, \ldots, S_n)$$

E, como $\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}_k(\rho)$, a prova está completa.

Lembrando que a transformada de Laplace é um operador linear, segue trivial o seguinte corolário:

<u>Corolário 2.3:</u>

Seja $\rho(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1) + \ldots + g_n(x_n)$. Então:

$$\mathcal{L}^n_{i=1}(\rho) = \sum_{i=1}^{n} [\mathcal{L}_i(\rho)\ \mathcal{L}^n_{\substack{k \neq i \\ k=1}}(1)]$$

É interessante notar também que

$$\mathcal{L}^n_{k=1}(1) = \mathcal{L}_1(1) \cdot \mathcal{L}_2(1) \ldots\ldots \mathcal{L}_n(1),$$

resultado que na verdade pode ser estendido a funções do tipo $\rho(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1) . \ldots . g_n(x_n)$, como

$$\mathcal{L}^n_{i=1}\left(\prod_{i=1}^{n} g_i(x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} [\mathcal{L}_i(g_i)]$$

3. O TEOREMA FUNDAMENTAL

Neste capítulo vamos estabelecer o principal resultado do artigo, o teorema 3.3. Mostremos inicialmente o seguinte Lema.

Lema 3.1.:

Sejam $t_0 > 0$, $a \neq 0$, $\lambda \neq 0$ reais tais que $a\,e^{-\lambda t_0} = y_0$. Então existe S_0 tal que $\mathcal{L}(a\,e^{-\lambda t})(S_0) = \mathcal{L}(y_0)(S_0)$.

Prova

Temos

$$\mathcal{L}(a\,e^{-\lambda t})(S) = \frac{a}{S+\lambda} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}(y_0)(S) = \frac{y_0}{S} .$$

Seja, pois, $S_0 = \dfrac{\lambda y_0}{a - y_0}$ (Note que $a = y_0 \overset{a \neq 0}{\Longrightarrow} e^{-\lambda t_0} = 1 \Longrightarrow \lambda t_0 = 0$, o que é absurdo, pois $\lambda \neq 0$ e $t_0 \neq 0$).

Temos $S_0 \neq 0$, pois se $S_0 = 0$ então $\lambda y_0 = 0$. Como $\lambda \neq 0$ por hipótese, resulta $y_0 = 0$. Mas então $a\,e^{-\lambda t_0} = 0$, o que implica $a = 0$, contrariando as hipóteses iniciais.

E ainda vale $S_0 \neq -\lambda$, pois se $S_0 = -\lambda$, então $y_0 = y_0 - a \Longrightarrow a = 0$, o que é absurdo.

Além disso, temos

$$S_0 = \frac{\lambda \cancel{a}\, e^{-\lambda t_0}}{\cancel{a}(1-e^{-\lambda t_0})} = \frac{\lambda\, e^{-\lambda t_0}}{1-e^{-\lambda t_0}}$$

o que mostra:

(a) $\lambda > 0 \Longrightarrow S_0 > 0$ (e, por conseguinte, $S_0 > -\lambda$)

(b) $\lambda < 0 \Longrightarrow S_0 > -\lambda$ (e, por conseguinte, $S_0 > 0$)

e existem $\mathcal{L}(a\, e^{-\lambda t})(S_0)$, $\mathcal{L}(y_0)(S_0)$.

Como $\frac{a}{S_0+\lambda} = \frac{y_0}{S_0}$, a prova está completa.

Observação 3.2.:

Caso $t_0 < 0$, podemos fazer $t_0^* = -t_0$ e $\lambda^* = -\lambda$. Assim $a\, e^{-\lambda^* t_0^*} = y_0$ com $t_0^* > 0$, $a \neq 0$, $\lambda^* \neq 0$ e recaímos no caso anterior.

Note que desta forma, obteremos a existência de S_0^* tal que

$$\mathcal{L}(a\, e^{-\lambda^* t})(S_0^*) = \frac{a}{S_0^* + \lambda^*} = \frac{a}{S_0^* - \lambda} = \frac{y_0}{S_0^*} = \mathcal{L}(y_0)(S_0^*)$$

Pode-se, entretanto, generalizar o resultado 3.1 para $t_0 < 0$, pois para $S_0 = -S_0^*$:

$$\frac{a}{S_0 + \lambda} = -\frac{a}{S_0^* + \lambda^*} = -\frac{y_0}{S_0^*} = \frac{y_0}{S_0}$$

Esta extensão será utilizada para estabelecer o seguinte teorema:

Teorema 3.3.:

Sejam $t_1^{(0)}, \ldots, t_n^{(0)}$ não nulos, tais que: $a\, e^{-\lambda_1 t_1^{(0)}} + \ldots + a_n e^{-\lambda_n t_n^{(0)}} = y_0$, com a_i, $\lambda_i \neq 0$ e

$t_i^{(0)} > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n$. Então existem $S_1,\dots,S_n$, tais que:

$$\frac{a_1}{(S_1+\lambda_1)S_2\cdot\ldots\cdot S_n} + \frac{a_n}{S_1\cdot\ldots\cdot S_{n-1}(S_n+\lambda_n)} = \frac{y_0}{S_1\cdot\ldots\cdot S_n}$$

<u>Prova</u>:

Façamos a prova por indução sobre n. Se $n = 1$, estamos nas condições do Lema 3.1.: $a_1 e^{-\lambda_1 t_1^{(0)}} = y_0$ com a_1, λ_1, $t_1^{(0)}$ todos não nulos e $t_1^{(0)} > 0$. Assim, existe S_1 tal que:

$$\pounds(a_1 e^{-\lambda_1 t})(S_1) = \pounds(y_0)(S_1) \Rightarrow \frac{a_1}{S_1+\lambda_1} = \frac{y_0}{S_1}$$

Admitamos agora a validade do teorema quando $n = p$ e seja o caso $n = p+1$: $t_1^{(0)},\dots,t_p^{(0)}$, $t_{p+1}^{(0)}$ positivos, tais que $a_1 e^{-\lambda_1 t_1^{(0)}} + \dots + a_p e^{-\lambda_p t_p^{(0)}} + a_{p+1} e^{-\lambda_{p+1} t_{p+1}^{(0)}}$ com todos os a_i, λ_i não nulos:

Ora, então:

$$a_1 e^{-\lambda_1 t_1^{(0)}} + \dots + a_p e^{-\lambda_p t_p^{(0)}} = y_0 - a_{p+1} e^{-\lambda_{p+1} t_{p+1}^{(0)}}$$

Chamando o segundo membro de y_0^* e aplicando a hipótese de indução, obtemos a existência de $S_1,\dots,S_p$ tais que

$$\frac{a_1}{(S_1+\lambda_1)\cdot\ldots\cdot S_p} + \dots + \frac{a_p}{S_1\cdot\ldots\cdot S_{p-1}(S_p+\lambda_p)} = \frac{y_0^*}{S_1\cdot\ldots\cdot S_p}$$

ou seja:

$$\frac{a_{p+1}}{S_1.....S_p} e^{-\lambda_{p+1} t_{p+1}^{(0)}} = \frac{y_0}{S_1.....S_p} - \left\{ \frac{a_1}{(S_1+\lambda_1)....S_p} + ... + \right.$$

$$\left. + \frac{a_p}{S_1.....(S_p+\lambda_p)} \right\}$$

que também pode ser escrito

$$a_{p+1}^{**} e^{-\lambda_{p+1} t^{(0)}}{}_{p+1} = y_0^{**}$$

com

$$a_{p+1}^{**} = \frac{a_{p+1}}{S_1.....S_p}$$

$$y_0^{**} = \frac{y_0}{S_1.....S_{p-1}S_p} - \left\{ \frac{a_1}{(S_1+\lambda_1).....S_p} + ... + \frac{a_p}{S_1....(S_p+\lambda_p)} \right\}$$

E, notando que $a_{p+1}^{**} \neq 0$, podemos aplicar novamente o lema 3.1, obtendo a tese.

A observação 3.2 pode ser utilizada para eliminar a restrição $t_i^{(0)} > 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, o que nos leva ao seguinte resultado:

<u>Corolário 3.4</u>:

Sejam x_j não nulo e y_j quaisquer tais que $a_1 e^{-b_1 x_j} + ... + a_n e^{-b_n x_j} = y_j$ com todos os a_i e b_i não nulos. Então existem $S_1, ..., S_n$ tais que

$$\frac{a_1}{(S_1+X_j)S_2.....S_n} + \ldots + \frac{a_n}{S_1.....S_{n-1}(S_n+X_j)} = \frac{y_j}{S_1.....S_n}$$

Prova:

Basta considerar $\lambda_i = X_j$ e $t_i^{(0)} = b_i$ no teorema anterior.

Deve-se notar que tanto no Lema 3.1 quanto na observação 3.2, S_0 é determinado de forma unívoca, através de uma fórmula. É, portanto, único. Já nos resultados 3.3 e 3.4, a n-upla $(S_1, \ldots, S_n)$ não é única. Obtemos a existência, não a unicidade. Um exemplo bastante simples será capaz de ilustrar este caso: sejam $n = 2$, $X_j = 1$; $y_j = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ no corolário 3.4 (isto é, $e^{-b_1} + 2e^{-b_2} = 3$). Obtemos a existência de S_1, S_2, tais que

$$\frac{2}{S_1(S_2+1)} + \frac{1}{(S_1+1)S_2} = \frac{3}{S_1 S_2}$$

E é fácil ver que quaisquer S_1, S_2 atendendo a $S_1, S_2 \neq 0$, $S_1, S_2 \neq -1$ e $2S_1 + S_2 = -3$ satisfazem a igualdade.

Existem, pois, infinitos pares (S_1, S_2) nas condições do teorema.

4. UMA APLICAÇÃO: DUAS EXPONENCIAIS E QUATRO PONTOS

Consideremos o problema de interpolar uma curva $y = a_1 e^{-b_1 x} + a_2 e^{-b_2 x}$ aos pontos (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)

(X_4, Y_4).

Isto significa determinar a_1, a_2, b_1, b_2 tais que:

$$a_1 e^{-b_1 x_j} + a_2 e^{-b_2 x_j} = y_j \quad j = 1,\dots, 4$$

Aplicando 3.4, obtemos a existência de $S_1^{(j)}, S_2^{(j)}$, tais que:

$$\frac{a_1}{(S_1^{(j)} + X_j) S_2^{(j)}} + \frac{a_2}{S_1^{(j)} (S_2^{(j)} + X_j)} = \frac{Y_j}{S_1^{(j)} S_2^{(j)}} \qquad j = 1,\dots 4$$

Ou seja:

$$a_1 S_1^{(j)} (S_2^{(j)} + X_j) + a_2 (S_1^{(j)} + X_j)\, S_2^{(j)} = Y_j (S_1^{(j)} + X_j)(S_2^{(j)} + X_j)$$

$$j = 1,\dots, 4$$

Ou ainda:

$$(a_1 + a_2 - y_j) S_1^{(j)} S_2^{(j)} + a_1 X_j S_1^{(j)} + a_2 X_j S_2^{(j)} = Y_j X_j (X_j + S_1^{(j)} + S_2^{(j)}).$$

Podemos, então, procurar a intersecção das soluções destas equações, isto é, procurar S_1 e S_2 tais que:

$$(a_1 + a_2 - y_j) S_1 S_2 + a_1 x_j S_1 + a_2 x_j S_2 = Y_j X_j (X_j + S_1 + S_2) \quad \text{(I)} \quad j=1,\dots,4.$$

Este sistema, apesar de não-linear, é de resolução bastante simples, podendo ser facilmente reduzido a:

$$(a_1 + a_2 - y_1)S_1S_2 + a_1X_1S_1 + a_2X_1S_2 = \gamma_1$$

$$(y_1 - y_2)S_1S_2 + a_1(x_2 - x_1)S_1 + a_2(x_2 - x_1)S_1 = \gamma_2 - \gamma_1$$

$$\left[(x_2 - x_1)(y_1 - y_3)+(x_1 - x_3)(y_1 - y_2)\right] S_1S_2=(x_3- x_2)\gamma_1 + (x_2 - x_1)\gamma_3 + (x_1 - x_3)\gamma_2$$

$$\left[(x_2 - x_1)(y_1 - y_4)+(x_1 - x_4)(y_1 - y_2)\right] S_1S_2=(x_4 - x_2)\gamma_1 + (x_2 - x_1)\gamma_4 + (x_1 - x_4)\gamma_2$$

onde denotamos:

$$\gamma_i = (y_ix_i^2 - y_1x_1^2)+(y_ix_i - y_1x_1)(S_1 + S_2).$$

As duas últimas equações podem ser colocadas ainda na forma:

$$a_{11}u_1 + a_{12}u_2 = \beta_1$$

$$a_{21}u_1 + a_{22}u_2 = \beta_2$$

onde

$$u_1 = S_1S_2 \text{ e } u_2 = S_1 + S_2$$

$$a_{11} = (x_2-x_1)(y_1-y_3)+(x_1-x_3)(y_1-y_2)$$

$$a_{21} = (x_2-x_1)(y_1-y_3)+(x_1-x_3)(y_1-y_2)$$

$$a_{12} = y_1x_1(x_2-x_3)-y_2x_2(x_1-x_3)+y_3x_3(x_1-x_2)$$

$$a_{22} = y_1x_1(x_2-x_4)-y_2x_2(x_1-x_4)+y_4x_4(x_1-x_2)$$

$$\beta_1 = y_1x_1^2(x_3-x_2)-y_2x_2^2(x_3-x_1)+y_3x_3^2(x_2-x_1)$$

$$\beta_2 = y_1x_1^2(x_4-x_2)-y_2x_2^2(x_4-x_1)+y_4x_4^2(x_2-x_1)$$

Note que:

$$a_{11} = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} \qquad a_{12} = \begin{vmatrix} x_4 & y_4 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$a_{21} = \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1 & 1 \\ x_2y_2 & x_2 & 1 \\ x_3y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad a_{22} = \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1 & 1 \\ x_2y_2 & x_2 & 1 \\ x_4y_4 & x_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\beta_1 = \begin{vmatrix} x_3^2y_3 & x_3 & 1 \\ x_2^2y_2 & x_2 & 1 \\ x_1^2y_1 & x_1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \beta_2 = \begin{vmatrix} x_4^2y_4 & x_4 & 1 \\ x_2^2y_2 & x_2 & 1 \\ x_1^2y_1 & x_1 & 1 \end{vmatrix}$$

Desta forma, se $\det(a_{ij}) = 0$ é porque

$$\exists\ \alpha_1, \alpha_2 \neq 0,\ |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$$

tais que:

$$\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} = 0$$
$$\alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} = 0$$

Mas então:

$$\begin{vmatrix} x_1 & \alpha_1 y_1 + \alpha_2 x_1 y_1 & 1 \\ x_2 & \alpha_1 y_2 + \alpha_2 x_2 y_2 & 1 \\ x_3 & \alpha_1 y_3 + \alpha_2 x_3 y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e

$$\begin{vmatrix} x_1 & \alpha_1 y_1 + \alpha_2 x_1 y_1 & 1 \\ x_2 & \alpha_1 y_2 + \alpha_2 x_2 y_2 & 1 \\ x_4 & \alpha_1 y_3 + \alpha_2 x_3 y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

o que significa que os pontos: $(x_i, \alpha_1 y_i + \alpha_2 x_i y_i)$ estão alinhados. Portanto, os dados são da forma

$$y(\alpha_1 + \alpha_2 x) = mx + n$$

isto é, não é possível interpolar uma função da forma desejada aos pontos considerados.

De forma análoga, a possibilidade $\beta_1 = \beta_2 = 0$ está eliminada, pois neste caso os pontos seriam da forma $x^2 y = mx + n$ e, novamente, não seria possível interpolar a função desejada.

Concluimos então que, sempre que for possível a interpolação, obteremos u_1 e u_2 tais que $|u_1| + |u_2| \neq 0$.

Obtidos u_1 e u_2, resolvendo uma equação de 2º grau, será obtida a dupla (S_1, S_2) e, retornando ao sistema, poderemos determinar os valores de a_1 e a_2.

<u>Observação 4.1</u>:

Se S_1 e S_2 forem complexos (caso em que $u_2^2 < 4u_1$), temos:

$$S_1 = \alpha + \beta i \qquad S_2 = \alpha - \beta i$$

Neste caso, a substituição no sistema leva a

$$(\alpha^2 + \alpha x_j + \beta^2)V_1 + i\beta\, x_j V_2 = y_j [x_j(x_j + 2\alpha) + \alpha^2 + \beta^2]$$

$$j = 1,\ldots,4.$$

onde denotamos $V_1 = a_1 + a_2$ e $V_2 = a_1 - a_2$.

Se tomarmos duas destas equações:

$$(\alpha^2 + \alpha x_1 + \beta^2)V_1 + i\beta x\ V_2 = y_1 \left[\bar{x}_1 (x_1+2\alpha) + \alpha^2 + \beta^2 \right]$$

$$(\alpha^2 + \alpha x_2 + \beta^2)V_2 + i\beta x_2 V_2 = y_2 \left[\bar{x}_2 (x_2+2\alpha) + \alpha^2 + \beta^2 \right]$$

Temos aí um sistema linear cujo determinante é $i\beta(x_2 - x_1)(\alpha^2 + \beta^2) \neq 0$.

Uma breve análise do sistema nos leva então às seguintes conclusões:

(i) V_1 é real

(ii) V_2 é imaginário puro.

Ou seja:

(i) $Im(a_1) = -Im(a_2)$

(ii) $Re(a_1) = Re(a_2)$

o que mostra $a_1 = \overline{a_2}$.

Neste caso, não é possível interpolar exponenciais reais aos pontos dados. Temos três casos:

(i) $b_1 = b_2$. Neste caso, os pontos são da forma $y_i = a\ e^{bx}$, gerados por uma só exponencial

(ii) $b_1 = \overline{b_2}$. Os pontos são gerados por $y = A\ e^{bx}\cos(\omega x+\delta)$.

(iii) $b_1 \neq b_2$ e $b_1 \neq \overline{b_2}$. Só há uma solução com o uso de coeficientes complexos.

Para o cálculo dos b_i's deve-se efetuar uma modificação no Corolário 3.4:

Consideremos $\lambda_1 = x_j$, $t_1^{(0)} = b_1$, $\lambda_2 = b_2$, $t_2^{(0)} = x_j$ para $j = 1, 2$ e $\lambda_1 = b_1$, $t_1^{(0)} = x_j$, $t_1^{(0)}$, $\lambda_2 = x_j$, $t_2^{(0)} = b_2$ para $j = 3, 4$. Obtemos então a existência de $S_1^{(j)}$, $S_2^{(j)}$ tais que:

$$\frac{a_1}{(S_1^{(j)}+x_j)S_2^{(j)}} + \frac{a_2}{(S_2^{(j)}+b_2)S_1^{(j)}} = \frac{y_j}{S_1^{(j)}\ S_2^{(j)}} \qquad j = 1,\ 2.$$

$$\frac{a_1}{(S_1^{(j)}+b_1)S_2^{(j)}} + \frac{a_2}{(S_2^{(j)}+x_j)S_1^{(j)}} = \frac{y}{S_1^{(j)}\ S_2^{(j)}} \qquad j = 3,\ 4.$$

Mais uma vez procurando a intersecção, isto é, (S_1, S_2), tais que:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{a_1}{(S_1+x_j)S_2} + \dfrac{a_2}{S_1(S_2+b_2)} = \dfrac{y_j}{S_1\ S_2} & j = 1,\ 2 \\[3ex] \dfrac{a_1}{(S_1+b_1)S_2} + \dfrac{a_2}{(S_2+x_j)S_1} = \dfrac{y_j}{S_1 S_2} & j = 3,\ 4 \end{array}\right\} \text{(II)}$$

Obtemos um sistema de resolução mais simples que o utilizado para o cálculo dos a_i's. É fácil ver que:

$$S_1^2 + \left[(x_1 + x_2) + \frac{a_1(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)} \right] S_1 + x_1 x_2 = 0$$

$$S_2^2 + \left[(x_3 + x_4) + \frac{a_2(x_4 - x_3)}{(y_4 - y_3)} \right] S_2 + x_3 x_4 = 0$$

Uma vez calculados os valores de S_1 e S_2, obtemos das equações (II) os b_i's.

5. CONCLUSÃO

O processo apresentado consiste essencialmente do cálculo das raízes de um polinômio e sua posterior substituição em um sistema de equações simultâneas. Ao interpolar n exponenciais, será exigido o cálculo das raízes de dois polinômios de grau n, um para obter os valores dos a_i's e outro para obter os valores dos b_i's. Nesse sentido guarda semelhança com o desenvolvido por Prony [1, 2, 3] para a interpolação no caso em que os pontos são igualmente espaçados.

Um ponto da maior importância é a existência da intersecção das soluções das equações construídas, isto é, que seja realmente não vazio o conjunto-solução dos sistemas (I) e (II). Sobre este ponto, deve-se notar que, se os dados provêm de duas exponenciais:

$$\begin{vmatrix} e^{b_1 x_i} & e^{b_2 x_i} & y_i \\ e^{b_1 x_j} & e^{b_2 x_j} & y_j \\ e^{b_1 x_k} & e^{b_2 x_k} & y_K \end{vmatrix} = 0 \quad 1 \leq i,j,k \leq 4$$

Logo, as linhas deste determinante são linearmente dependentes e é fácil ver que existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ não todos nulos, tais que:

$$\alpha_1 \frac{S_\ell^{(i)}}{S_\ell^{(i)} x_i} + \alpha_2 \frac{S_\ell^{(j)}}{S_\ell^{(j)} + X_j} + \alpha_3 \frac{S_\ell^{(K)}}{S_\ell^{(K)} + X_j} = \alpha_1 y_j + \alpha_2 y_j + \alpha_3 y_K$$

$$\ell = 1,\ 2$$

o que mostra a existência de soluções para os sistemas (I) e (II), se os dados provêm de exponenciais. Chamamos a atenção para o fato de que o processo apresentado determina o interpolante, admitida a sua existência.

AGRADECIMENTO

Agradeço ao Prof. *Cyro de Carvalho PATARRA* , pela leitura crítica e sugestões quanto à redação deste trabalho.

REFERÊNCIAS

[1] Hildebrand, F.B. - Introduction to Numerical Analysis - McGrawHill B.C. - New York, 1956.

[2] Kelly, L.G. - Handbook of numerical methods and Applications - Addison - Wesley P.C.,USA 1967.

[3] Willers, F.A. - Practical Analysis - Dover Publications, inc. - New York, 1948.