ANÁLISE DE UM PROBLEMA EM VISCO-ELASTICIDADE COM MEMÓRIA LONGA

Por

Telma Suaiden**
Universidade de Brasília
Departamento de Matemática
70.910 - Brasília - DF

** Este trabalho foi realizado no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), sob orientação do Prof. Marco Antonio Raupp, enquanto o autor encontrava-se em licença pela Universidade de Brasília.

1. INTRODUÇÃO.

Neste trabalho estudaremos um problema de valor inicial para uma inequação variacional, que é modelo de um problema em mecânica dos solos. A apresentação dos resultados requer alguma notação que daremos a seguir.

Seja Ω o intervalo aberto $(0, L)$ e $H^1(\Omega)$ o espaço usual de Sobolev. Neste espaço indicamos o produto interno e a norma por $(\cdot,\cdot)_1$ e $|\cdot|_1$ respectivamente, ou seja,

$$(u,v)_1 = (u,v) + (u_x, v_x),$$

sendo $(u,v) = \int_0^L (u(x)\ v(x)\ dx$ e $u_x = \frac{du}{dx}$, e

$$|u|_1 = [(u,u)_1]^{1/2} .$$

No espaço $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ consideramos as formas bilineares A e C que são contínuas, simétricas e satisfazem:

$$A(u) \equiv A(u,u) \geq \gamma |u|_1^2 \ , \quad \gamma \text{ constante positiva,}$$

$$C(u) \equiv C(u,u) \geq 0,$$

para todo u em $H^1(\Omega)$. Ainda neste espaço vamos considerar o funcional não linear J definido por:

$$J(u,v) = \int_0^L \psi(u)\ \phi(v) \cdot dx$$

com $\phi(v) = |v|$ e $\psi(u) = \tilde{\psi}(u+x-L) = cH(u+x-L)(u+x-L)$, sendo que H é a função de Heaviside e c é uma constante positiva.

Sejam X um espaço de Banach com norma $|\cdot|_X$, T um real positivo fixo e os espaços de Banach:

$$L^p(0,T;X) = \{g:[0,T] \to X \ / \ |g|_{L^p(0,T,X)} =$$

$$= \left(\int_0^T |g(t)|_X^p\right)^{1/p} < \infty\},\quad 1 \leq p < \infty\ ,$$

e

$$L^\infty(0,T;X) = \{g:[0,T] \to X \ / \ |g|_{L^\infty(0,T;X)} =$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} |g(t)|_X < \infty\}.$$

Para $p=1$ e $X = H^1(\Omega)$ vamos considerar a forma bilinear B em $L^1(0,T;H^1(\Omega)) \times H^1(\Omega)$ definida por

$$B(u,v) = (\int_0^t K(t-s)\, u_x(x,s)ds,\ v_x).$$

Sendo K uma função limitada de uma variável real.

Isto posto, passamos à enunciação do problema objeto do presente trabalho. Seja u uma função de duas variáveis reais x e t, e $\dot{u}$ sua derivada com relação a t. Chamamos P o problema dado pela inequação variacional

$$(1.1) \qquad (\ddot{u}, v-\dot{u}) + A(u, v-\dot{u}) + B(u, v-\dot{u}) + C(\dot{u}, v-\dot{u}) + \\ + J(u,v) - J(u,\dot{u}) \geq (f, v-\dot{u}) + \\ + F(t)[v(0) - \dot{u}(0,t)] \quad \forall\, v \in H^1(\Omega),$$

($f(x,t)$ e $F(t)$ são dados do problema) e as condições iniciais

$$(1.2) \qquad u(x,0) = 0$$

$$(1.3) \qquad \dot{u}(x,0) = 0.$$

O problema P tem sua origem no estudo da penetração de uma estaca de fundação no solo, sob a ação de um martelo bate-estaca. Nos trabalhos [1], [2] e [3] foram apresentados resultados sobre existência, unicidade, estabilidade de solução, bem como convergência de algoritmos para a resolução numérica de um problema de valor inicial para uma inequação variacional que descreve o referido fenômeno. Em tais trabalhos supõe-se que o tensor de tensões na estaca num certo instante t, depende linearmente do estado de deformação, $\sigma = au_x + b\dot{u}_x$, ou seja, o material da estaca era suposto de um tipo visco-elástico de memória curta. Agora, admitiremos que o material da estaca é de um tipo visco-elástico de memória longa, com lei de comportamento da forma

$$\sigma = au_x + \int_0^t K(t-s)u_x(x,s)ds ,$$

sendo K uma função decrescente que ponderaria a duração do efeito de memória e a uma constante positiva.

Os resultados principais a serem considerados neste trabalho são os teoremas 1 e 2, demonstrados na seção 2 e 3, respectivamente. O teorema 2, que será enunciado ainda nesta seção, trata da convergência de uma família de algoritmos $\mathcal{F}_\theta$ que calculam efetivamente aproximações para a solução do problema P. O teorema 1, enunciado a seguir, estabelece condições suficientes para a existência e unicidade da solução do problema

<u>Teorema 1</u>. Sejam $0 < T < \infty$ e f, F, K satisfazendo

(1.4) $$f, \dot{f} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

(1.5) $F, \dot{F} \in L^{\infty}(0,T;\mathbb{R})$, $\ddot{F} \in L^{2}(0,T;\mathbb{R})$ e $F(0) = 0$,

(1.6) $K, \dot{K} \in L^{\infty}(0,T;\mathbb{R})$.

Então existe uma única $u \in L^{\infty}(0,T;\ H^{1}(\Omega))$ tal que

(1.7) $\dot{u} \in L^{\infty}(0,T;\ H^{1}(\Omega))$

(1.8) $\ddot{u} \in L^{\infty}(0,T;\ L^{2}(\Omega))$

(1.9) $u(0) = 0$

(1.10) $\dot{u}(0) = 0$

(1.11) $$(\ddot{u},\ v-\dot{u}) + A(u,\ v-\dot{u}) + B(u,v) + C(\dot{u},\ v-\dot{u}) + J(u,v) - J(u,\dot{u}) \geq (f,\ v-\dot{u}) + F(t)\left[v(0) - \dot{u}(0,t)\right],\quad \forall\ v \in H^{1}(\Omega).$$

A família F_{θ}, citada anteriormente, calcula na realidade aproximações para um problema que chamaremos P_{ε}. Este problema é uma equação variacional obtida de (1.1) via regularização do funcional J. As condições a serem satisfeitas são especificamente as seguintes:

(1.12) $u_{\varepsilon}(0) = 0$

(1.13) $\dot{u}_{\varepsilon}(0) = 0$

$$(1.14)\qquad (\ddot{u}_\varepsilon,\omega) + A(u_\varepsilon,\omega) + B(u_\varepsilon,\omega) + C(\dot{u}_\varepsilon,\omega) + + (\psi_\varepsilon(u_\varepsilon)\ \Phi'_\varepsilon(\dot{u}_\varepsilon),\omega) = (f,\omega) + + F(t)\omega(0),\quad \forall\ \omega \in H^1(\Omega).$$

As funções ψ_ε e Φ_ε são regularizações convexas de ψ e Φ respectivamente. É da solução u_ε, deste problema P_ε, que obtemos a solução u de P fazendo ε tender a zero.

Para descrever a família $\mathcal{F}_\theta$, são necessárias algumas definições, quais sejam:

(1.15) $\mathcal{V}_h \subset H^1(\Omega)$, $h > 0$, um subespaço de dimensão finita M_h, tal que $\forall\ \omega \in H^1(\Omega)$ existe $\omega_h \in \mathcal{V}_h$ satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty} |\omega - \omega_h|_1 = 0;$$

(1.16) N inteiro positivo, T fixo e finito, $k = T/(N+1)$ e $t_n = nk$, $n=0,1 \ldots N+1$;

(1.17) $U^n \equiv U^n(x) \in \mathcal{V}_h$, funções associadas a cada nível de tempo t_n;

(1.18) Os operadores Quociente de diferenças:

$$\partial_t U^n = \frac{U^{n+1} - U^n}{k} \qquad n=0,1,2 \ldots N,$$

$$\delta_t U^n = \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2k} \qquad n=1,2,\dots,N,$$

$$\partial_t^2 U^n = \frac{U^{n+1} - 2U^n - U^{n-1}}{k^2} \qquad n=1,2,\dots,N;$$

(1.19) A regra dos trapézios

$$I_t U^n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{k}{2}\{K(t_n - t_j)U^j +$$

$$+ K(t_n - t_{j+1})U^{j+1}\}, \quad j=1,\dots,N;$$

(1.20) A média ponderada

$$W_\theta U^n = \theta U^{n+1} + (1 - 2\theta)U^n + \theta U^{n-1},$$

$$0 \le \theta \le \frac{1}{2}, \quad n=1,\dots,N;$$

(1.21) $\chi_n^k(t)$, funções características de $[t_n, t_{n+1})$, associadas a k;

(1.22) As funções escadas:

$$U_{hk}(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \chi_n^k(t) U^n(x)$$

$$\partial_t U_{hk}(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \chi_n^k(t) \partial_t U^n(x)$$

$$\delta_t U_{hk}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \chi_n^k(t)\ \delta_t U^n(x)$$

$$\partial_t^2 U_{hk}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \chi_n^k(t)\ \partial_t^2 U^n(x)$$

$$I_t U_{hk}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \chi_n^k(t)\ I_t U^n(x)$$

(1.23) $\hat{\delta}_t$, $\hat{\partial}_t^2$ e $\hat{W}$, operadores obtidos de δ_t, ∂_t^2 e W_θ respectivamente por substituição de U^{n+1} por $\hat{U}^{n+1}$;

(1.24) $\overline{B}$, operador bilinear contínuo em $H^1(\Omega)$ definido por:

$$\overline{B}(u,v) = (u_x, v_x)$$

Agora estamos em condições de descrever a família $\mathcal{F}_\theta$ de algorítmos resultante da discretização de P . Sejam $f^n = f(x, t_n)$ e $F^n = F(t_n)$. Então para $n=1,2,\dots,N$ definimos:

(1.25) $$U^o \equiv 0, \quad U^1 \equiv 0;$$

(1.26) O algoritmo preditor

$$(\hat{\partial}_t^2 U^n, v) + A(\hat{W}_\theta U^n, v) + C(\hat{\delta}_t U^n, v) +$$

$$\overline{B}(I_t U^n, v) + (\psi_\varepsilon(U^n)\Phi'_\varepsilon(\partial_t U^{n-1}), v) = (f^n, v) +$$

$$+ F^n v(0), \quad v \in V_h;$$

(1.27) O algoritmo corretor

$$(\partial_t^2 U^n, v) + A(W_\theta U^n, v) + C(\delta_t U^n, v) + \overline{B}(I_t U^n, v) +$$

$$+ (\psi_\varepsilon(U^n)\Phi'_\varepsilon(\hat{\delta}_t U^n), v) = (f^n, v) +$$

$$+ F^n v(0), \quad v \in V_h.$$

Para cada θ, $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$, o algoritmo dado por (1.25)-(1.27) permite calcular U^2, U^3, ..., U^{N+1}, que serão as aproximações para $u_\varepsilon(2k)$, $u_\varepsilon(3k)$, ..., $u_\varepsilon((N+1)k)$, respectivamente (u_ε solução de P_ε). Se $\frac{1}{4} < \theta \leq \frac{1}{2}$ este algoritmo é incondicionalmente convergente. Mais precisamente tem-se o seguinte:

<u>Teorema 2</u>. Dados $\frac{1}{4} < \theta \leq \frac{1}{2}$, $\varepsilon > 0$ fixo, K tal que $\ddot{K} \in L^\infty(0,T;\mathbb{R})$, e assumindo (1.4)-(1.6) do Teorema 1, bem como as condições (2.i)-(2.vii) para ψ_ε e Φ_ε (seção 2), teremos

(1.28) $$|\partial_t U_{hK}|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + |U_{hK}|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq K_1$$

(1.29) $$|\partial_t^2 U_{hk}|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + |\partial_t U_{hk}|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq K_2$$

com K_1 e K_2 independentes de h e k. Por outro lado, denotando $Q_T = (0,L) \times (0,T)$, quando h e k tendem a zero tem-se,

(1.30) $$|U_{hk} - u_\varepsilon|_{L^2(Q_T)} \to 0,$$

(1.31) $$|\partial_t U_{hk} - \dot{u}_\varepsilon|_{L^2(Q_T)} \to 0,$$

(1.32) $$\int_0^T (\partial_t^2 U_{hk} - \ddot{u}_\varepsilon, v)dt \to 0 \quad \forall\, v \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

2. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.

Etapa 1 - Unicidade. Suponhamos que existam soluções u_1 e u_2 de (1.7)-(1.11) e seja $u = u_1 - u_2$. Escrevendo (1.11) para u_1 com $v = u_2$ e somando com (1.11) escrita para u_2 com $v = u_1$ obtemos:

$$(\ddot{u},u) + A(u,\dot{u}) + B(u,\dot{u}) +$$

$$C(\dot{u},\dot{u}) + J(u_1,\dot{u}_1) - J(u_1,\dot{u}_2) +$$

$$J(u_2,\dot{u}_2) - J(u_2,\dot{u}_1) \leq 0.$$

Integrando a desigualdade anterior de 0 a t, levando em conta (1.9)-(1.10) e as propriedades de J vem:

$$(2.1) \qquad |\dot{u}|^2(t) + A(u) + 2\int_0^t C(\dot{u}) \leq 2\left|\int_0^t B(u,\dot{u})\right| +$$

$$+ 2c\int_0^t |u|(s)|\dot{u}|(s)\, ds$$

onde denotamos por $|\cdot|$ a norma em $L^2(\Omega)$.

A propriedade P_1, que também será utilizada posteriormente, indica como tratar o termo que envolve a forma bilinear B em (2.1).

<u>Propriedade P_1</u>. Dado $0 < t \leq T < \infty$ e qualquer número real $\alpha > 0$, existe uma constante C_α, que depende linearmente de T, tal que se $\omega,\dot{\omega} \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ então

$$(2.2) \qquad \left|\int_0^t B(\omega,\dot{\omega})ds\right| \leq \alpha|\omega|_1^2(t) + C_\alpha \int_0^t |\omega|_1^2(s)\, ds.$$

De fato, integrando por partes o primeiro membro de (2.2), nos valendo de (1.6), podemos escrever:

$$|\int_0^t B(\omega,\dot{\omega})ds| \leq |(\int_0^t K(t-s)\omega_x(s)ds,\ \omega_x(t))| +$$

$$|\int_0^t (K(0)\omega_x(s),\ \omega_x(s))ds| +$$

$$|\int_0^t (\int_0^s \frac{d}{ds}K(s-s_1)\omega_x(s_1)ds_1,\ \omega_x(s))ds| \leq$$

$$|K|_{L^\infty(0,T;R)} |\omega|_1(t)\int_0^t |\omega|_1(s)ds +$$

$$|K|_{L^\infty(0,T;R)}\int_0^t |\omega|_1^2(s)ds + \frac{1}{2}|\dot{K}|_{L^\infty(0,T;R)}\left(\int_0^t |\omega|_1(s)ds\right)^2 \leq$$

$$\alpha|\omega|_1^2(t) + [\frac{T}{4\alpha}|K|^2_{L^\infty(0,T;R)} + |K|_{L^\infty(0,T;R)} +$$

$$\frac{T}{2}|\dot{K}|_{L^\infty(0,T;R)}]\int_0^t |\omega|_1^2(s)ds.$$

Substituindo (2.2) em (2.1), com $\omega = u$ e $\alpha = \gamma/4$, e considerando que $A(u) \geq \gamma|u|_1^2$ e $C(\dot{u}) \geq 0$, vem:

$$|\dot{u}|^2(t) + \gamma/2|u|_1^2(t) \leq (C_{\gamma/4} + c)\int_0^t (|\dot{u}|^2(s) + |u|_1^2(s))ds$$

A última desigualdade e o lema de Gronwall implicam

$$|\dot{u}|^2(t) + |u|_1^2(t) = 0,$$

ou seja, $u_1 = u_2$.

Etapa 2 - Existência. Inicialmente, consideramos uma regularização convexa J_ε do funcional J definida por:

$$J_\varepsilon(u,v) = \int_0^L \psi_\varepsilon(u)\ \phi_\varepsilon(v)\ dx$$

com $\psi_\varepsilon(u) = \tilde{\psi}_\varepsilon(u + x - L)$, sendo ϕ_ε e $\tilde{\psi}_\varepsilon$ funções convexas em $C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo:

(2.i) $\quad |\tilde{\psi}_\varepsilon(y) - \tilde{\psi}(y)| \leq \varepsilon,\ |\phi_\varepsilon(y) - \phi(y)| \leq \varepsilon,$

(2.ii) $\quad \tilde{\psi}_\varepsilon(y) \geq 0,\ \phi'_\varepsilon(y)y \geq 0,$

(2.iii) $\quad |\tilde{\psi}'_\varepsilon(y)| \leq c,\ |\phi'_\varepsilon(y)| \leq 1,$

(2.iv) $\quad |\tilde{\psi}_\varepsilon(y)| \leq c|y|,$

(2.v) $\quad$ Existe $\phi''_\varepsilon(y),$

para todo $y \in R$, e,

(2.vi) $$\phi_\varepsilon(0) = \phi'_\varepsilon(0) = 0,$$

(2.vii) $$|\phi'_\varepsilon(y_1) - \phi'_\varepsilon(y_2)| \leq \mu_\varepsilon |y_1 - y_2|,$$

$\forall\, y_1, y_2 \in R$, sendo μ_ε uma constante positiva que depende de ε.

Observamos que a condição (2.vii) será utilizada apenas na seção 3, ou seja, na demonstração do Teorema 2.

A regularidade de ψ_ε e ϕ_ε e o fato de trabalharmos com todo o espaço $H^1(\Omega)$, implicam que ao substituir J por J_ε em (1.11) obtemos um problema equivalente (veja [1]) ao problema de encontrar $u_\varepsilon \in L^\infty(0,T; H^1(\Omega))$ tal que

(2.3) $$\dot{u}_\varepsilon \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)),$$

(2.4) $$\ddot{u}_\varepsilon \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

(2.5) $$u_\varepsilon(0) = 0$$

(2.6) $$\dot{u}_\varepsilon(0) = 0$$

(2.7) $$(\ddot{u}_\varepsilon, v) + A(u_\varepsilon, v) + B(u_\varepsilon, v) + C(\dot{u}_\varepsilon, v) +$$

$$(\psi_\varepsilon(u_\varepsilon)\phi_\varepsilon'(\dot{u}_\varepsilon),v) = (f,v) + F(t)v(0)\,,\ \forall\ v\ \varepsilon\ H^1(\Omega)\,,$$

ou seja, é o problema que chamamos P_ε na seção 1.

O problema P_ε é uma "aproximação" do problema P. Para mostrar que ele tem solução construiremos, inicialmente, aproximações u_ε^h para u_ε, solução de P_ε, pelo método de Galerkin.

Seja (V_h, p_h, r_h) uma aproximação convergente de $H^1(\Omega)$, isto é,

(2.8) $V_h = R^{N_h}$, N_h inteiro, sendo que $N_h \to \infty$ quando $h \to 0$

(2.9) $p_h : V_h \to H^1(\Omega)$, isomorfismo de V_h em $p_h(V_h)$;

(2.10) $r_h : H^1(\Omega) \to V_h$, operador contínuo sobre V_h;

(2.11) $\lim\limits_{h\to 0} |v - p_h r_h v|_1 = 0, \quad \forall\ v\ \varepsilon\ H^1(\Omega)$.

As aproximações de Galerkin u_ε^h para u_ε associadas a (V_h, p_h, r_h) são aplicações $u^h : [0,T] \to V_h$ tais que

(2.12) $$u_\varepsilon^h(0) = 0$$

(2.13) $$\dot{u}_\varepsilon^h(0) = 0$$

(2.14) $(p_h \ddot{u}_\varepsilon^h,\ p_h v_h) + A(p_h u_\varepsilon^h,\ p_h v_h) + B(p_h u_\varepsilon^h,\ p_h v_h) +$

$$C(p_h\dot{u}_\varepsilon^h,\ p_h v_h) + (\psi_\varepsilon(p_h u_\varepsilon^h)\phi'_\varepsilon(p_h\dot{u}_\varepsilon^h),\ p_h v_h) =$$

$$(f, p_h v_h) + F(t) p_h v_h(0), \quad \forall\ v_h \ \varepsilon\ V_h$$

A equação (2.14) representa um sistema integro diferencial (não linear) de segunda ordem e dimensão N_h, com condições iniciais (2.12)-(2.13). Podemos escrever este sistema na seguinte forma:

$$(2.15) \qquad \begin{cases} \ddot{X} + D_h\dot{X} + E_h X + L_h \displaystyle\int_0^t K(t-s)\ X(s)\ ds\ + \\ \quad + H_{\varepsilon h}(X,\dot{X}) = Q_h(t), \\ X(0) = \dot{X}(0) = 0, \end{cases}$$

onde são dependentes da base de $p_h V_h$ as matrizes D_h, E_h e L_h e as funções vetoriais Q_h e $H_{\varepsilon h}$, sendo esta última suficientemente regular.

Com base na técnica das aproximações sucessivas e aplicando o teorema do ponto fixo de Banach |4|pp. 339, podemos concluir que (2.15) tem solução local única, contínua com derivada contínua. Sendo mais explícito, é possível verificar, a partir de (2.15), que existe $0 < \tilde{T} \leq T$ tal que a aplicação

$$\Gamma : (C[0,\tilde{T}])^{N_h} \times (C[0,\tilde{T}])^{N_h} \rightarrow (C[0,\tilde{T}])^{N_h} \times (C[0,\tilde{T}])^{N_h}$$

definida por:

$$\Gamma(z)(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} \omega(s) \\ \\ G(s,z(s)) \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} 0 \\ \\ L_h \int_0^t \int_0^s K(s-s_1)x(s_1)ds_1 ds \end{bmatrix},$$

onde $z = \begin{pmatrix} x \\ \omega \end{pmatrix}$ e $G = Q - D_h - E_h - H_{\varepsilon h}$, é uma contração.

Esses argumentos justificam, portanto, a existência e unicidade da solução local de (2.12)-(2.14). A extensão desta solução ao intervalo $[0,T]$ é uma das consequências das estimativas:

$$(2.16) \qquad |p_h \dot{u}_\varepsilon^h|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + |p_h u_\varepsilon^h|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C_1,$$

$$(2.17) \qquad |p_h \ddot{u}_\varepsilon^h|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + |p_h \dot{u}_\varepsilon^h|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C_2,$$

sendo que C_1 e C_2 não dependem de ε e h. Passamos agora, à demonstração de (2.16) e (2.17).

Para obtermos (2.16), tomamos em (2.14) $v_h = \dot{u}_\varepsilon^h$, do que resulta:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|p_h \dot{u}_\varepsilon^h|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} A(p_h u_\varepsilon^h) + B(p_h u_\varepsilon^h, p_n \dot{u}_\varepsilon^h) +$$

$$C(p_h\dot{u}_\varepsilon^h) + (\psi_\varepsilon(p_h u_\varepsilon^h)\ \Phi_\varepsilon'(p_h\dot{u}_\varepsilon^h),\ p_h\dot{u}_\varepsilon^h) = (f,\ p_h\dot{u}_\varepsilon^h) +$$

$$F(t)p_h u_\varepsilon^h(0,t) = (f,p_h\dot{u}_\varepsilon^h) + \frac{d}{dt}[F(t)p_h u_\varepsilon^h(0,t)] - \dot{F}(t)p_h u_\varepsilon^h(0,t).$$

Integrando esta desigualdade de 0 a t, e considerando (2.5)-(2.6), vem:

$$(2.18)\qquad \frac{1}{2}|p_h\dot{u}_\varepsilon^h|^2(t) + \frac{1}{2}A(p_h u_\varepsilon^h) + \int_0^t C(p_h\dot{u}_\varepsilon^h)ds +$$

$$\int_0^t (\psi_\varepsilon(p_h u_\varepsilon^h)\Phi_\varepsilon'(p_h\dot{u}_\varepsilon^h),\ p_h\dot{u}_\varepsilon^h)\ ds =$$

$$- \int_0^t B(p_h u_\varepsilon^h,\ p_h\dot{u}_\varepsilon^h)ds + \int_0^t (f,\ p_h\dot{u}_\varepsilon^h)ds +$$

$$F(t)p_h u_\varepsilon^h(0,t) - \int_0^t \dot{F}(s)p_h u_\varepsilon^h(0,s)ds \leq$$

$$\alpha|p_h u_\varepsilon^h|_1^2(t) + C_\alpha\int_0^t |p_h u_\varepsilon^h|_1^2(s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t |f|^2(s)ds +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t |p_h\dot{u}_\varepsilon^h|^2(s)ds + \beta|p_h u_\varepsilon^h|_1^2(s) + \frac{1}{4\beta}|F|^2_{L^\infty(0,T;R)} +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T (\dot{F}(s))^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t |p_h u_\varepsilon^h|_1^2(s)ds,$$

onde utilizamos (1.4)-(1.5) e (2.2) com $\omega = p_h u_\varepsilon^h$ (Propriedade P_1) para escrever o 2º membro da desigualdade (2.18).

Escolhendo convenientemente α e β, levando em conta as propriedades de A e C e (2.ii), podemos concluir, a partir de (2.18) que:

$$(2.19) \qquad |p_h\dot{u}_\varepsilon^h|^2(t) + |p_h u_\varepsilon^h|_1^2(t) \leq C_{\alpha\beta}^{-1}\{(C_\alpha + \tfrac{1}{2})\int_0^t [|p_h\dot{u}_\varepsilon^h|^2(s) + |p_h u_\varepsilon^h|_1^2(s)]ds + \frac{1}{2}\int_0^T [|f|^2(s) + (\dot{F}(s))^2]ds + \frac{1}{4\beta}|F|_{L^\infty(0,T;R)}\},$$

onde $C_{\alpha\beta} = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2} - \alpha - \beta\} > 0.$

A relação (2.19) e o lema de Gronwall implicam (2.16).

Para obtermos (2.17), derivamos (2.14) com relação a t e tomamos em seguida $v_h = \ddot{u}_\varepsilon^h$, do que resulta:

$$(2.20) \qquad (p_h\dddot{u}_\varepsilon^h, p_h\ddot{u}_\varepsilon^h) + A(p_h\dot{u}_\varepsilon^h, p_h\ddot{u}_\varepsilon^h) + C(p_h\ddot{u}_\varepsilon^h, p_h\ddot{u}_\varepsilon^h) + (\psi_\varepsilon'(p_h u_\varepsilon^h)p_h\dot{u}_\varepsilon^h\, \Phi_\varepsilon'(p_h\dot{u}_\varepsilon^h), p_h\ddot{u}_\varepsilon^h) + (\psi_\varepsilon(p_h u_\varepsilon^h)\frac{d}{dt}\,\Phi_\varepsilon'(p_h\dot{u}_\varepsilon^h), p_h\ddot{u}_\varepsilon^h) - (\dot{f}, p_h\ddot{u}_\varepsilon^h) =$$

$$\dot{F}(t)p_h\ddot{u}_\varepsilon^h(0,t) - (K(0)Dp_h u_\varepsilon^h + \int_0^t (\frac{d}{dt}K(t-s)Dp_h u_\varepsilon^h(s)ds, p_h\ddot{u}_\varepsilon^h),$$

onde denotamos $\frac{\partial}{\partial x}$ por D.

Devido a igualdade $\frac{d}{dt} K(t-s) = - \frac{d}{ds} K(t-s)$ e a regularidade de F, podemos afirmar, após uma integração por partes, que o segundo membro de (2.20) é igual a:

$$\frac{d}{dt}(\dot{F}(t)p_h\dot{u}_\varepsilon^h(0,t)) - \ddot{F}(t)p_h u_\varepsilon^h(0,t) - B(p_h\dot{u}_\varepsilon^h, p_h\ddot{u}_\varepsilon^h).$$

Portanto, integrando (2.20) de 0 a t, e considerando que o quinto termo de (2.20) é positivo (veja [1]), podemos escrever:

$$(2.21) \qquad \frac{1}{2}|p_h\ddot{u}_\varepsilon^h|^2(t) - \frac{1}{2}|p_h u_\varepsilon^h|^2(0) + \frac{1}{2} A(p_h\dot{u}_\varepsilon^h) +$$

$$\int_o^t C(p_h\ddot{u}_\varepsilon^h) \leq |\dot{F}(t)|\,|p_h u_\varepsilon^h(0,\, t)| +$$

$$\int_o^t |\ddot{F}(s)|\,|p_h\dot{u}_\varepsilon^h(0,s)|ds + \int_o^t |f|\,|p_h\ddot{u}_\varepsilon|^h ds +$$

$$\left|\int_o^t B(p_h\dot{u}_\varepsilon^h,\, p_h\ddot{u}_\varepsilon^h)\, ds\right| +$$

$$\left|\int_o^t (\psi_\varepsilon'(p_h u_\varepsilon^h)\Phi_\varepsilon'(p_h\dot{u}_\varepsilon^h)\; p_h\dot{u}_\varepsilon^h,\; p_h\ddot{u}_\varepsilon^h)\; ds\right| \leq$$

$$\frac{1}{4\beta}|\dot{F}|_{L^\infty(0,T,R)} + \beta|p_h u_\varepsilon^h|_1^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \{|\ddot{F}(s)|^2 +$$

$$|p_h u_\varepsilon^h|_1^2(s)\}ds + \frac{1}{2}\int_0^t \{|f|^2(s) + |p_h \ddot{u}_\varepsilon^h|^2(s)\}ds +$$

$$\alpha|p_h\dot{u}_\varepsilon^h|_1^2(t) + C_\alpha\int_0^t |p_h\dot{u}_\varepsilon^h|_1^2(s)ds + c\int_0^t |p_h\dot{u}_\varepsilon^h|(s)|p_h\ddot{u}_\varepsilon^h|(s)\,ds,$$

onde C_α é dado pela Propriedade P_1 e c por (2.iii).

A relação (2.21) e argumentos análogos aos utilizados para obter (2.19) implicam

$$(2.22)\qquad |p_h\ddot{u}_\varepsilon|^2(t) + |p_h\dot{u}_\varepsilon^h|_1^2(t) \le C_{\alpha\beta}^{-1}\{\frac{1}{2}|p_h\ddot{u}_\varepsilon^h|^2(0) +$$

$$\frac{1}{4\beta}|\dot{F}|_{L^\infty(0,T,R)} + \frac{1}{2}\int_0^T \{|\ddot{F}(s)| + |f|^2(s)\}ds +$$

$$(C_\alpha + \frac{c}{2} + \frac{1}{2})\int_0^t \{|p_h\ddot{u}_\varepsilon^h|^2(s) + |p_h\dot{u}_\varepsilon^h|_1^2(s)\,ds\}.$$

Para concluir (2.17), com base no lema de Grouwall e na relação (2.22), resta mostrar que $|p_h\ddot{u}_\varepsilon^h|^2(0)$ é limitado. Esta limitação decorre de (2.14). De fato, tomando $t = 0$ e $v_h = u_\varepsilon^h(0)$ em (2.14) obtemos

$$|p_h\ddot{u}_\varepsilon^h\,(0) \le |f|(0).$$

Assim sendo, finalizamos a demonstração da desigualdade (2.17).

As estimativas (2.16) e (2.17), além de permitirem dizer que as aproximações de Galerkin estão bem definidas no intervalo $[0,T]$, permitem concluir ainda a existência de subsequências, que continuamos a denotar por $p_h u_\varepsilon^h$, $p_h \dot{u}_\varepsilon^h$ e $p_h \ddot{u}_\varepsilon^h$, tais que, quando $h \to 0$, temos:

(2.23) $\quad p_h u_\varepsilon^h \to u_\varepsilon$ qtp em $\Omega \times (0,T)$,

(2.24) $\quad p_h \dot{u}_\varepsilon^h \to \dot{u}_\varepsilon$ qtp em $\Omega \times (0,T)$,

(2.25) $\quad p_h u_\varepsilon^h \to u_\varepsilon$ fraco* em $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$,
fraco em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$,

(2.26) $\quad p_h \dot{u}_\varepsilon \to \dot{u}_\varepsilon$ fraco* em $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$
fraco em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$,

(2.27) $\quad p_h \ddot{u}_\varepsilon^h \to \ddot{u}_\varepsilon$ fraco* em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$
fraco em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Observamos que em (2.23) e (2.24) a existência de u_ε e $\dot{u}_\varepsilon$ é consequência do Teorema de Rellich [5], devido a limitação de u_ε^h e $\dot{u}_\varepsilon^h$ em $H^1(\Omega \times (0,T))$.

As relações (2.23)-(2.27) implicam em que, tomando $v_h = r_h v$ em (2.14), $v \in H^1(\Omega)$, multiplicando o resul tado por $g \in L^2(0,T;R)$ e fazendo h tender a zero, temos:

$$(2.28) \quad \int_0^T \{(\ddot{u}_\varepsilon,v) + A(u_\varepsilon,v) + B(u_\varepsilon,v) + C(\dot{u}_\varepsilon,v) + (\psi_\varepsilon(u_\varepsilon)\Phi'_\varepsilon(\dot{u}_\varepsilon),v\}g(t)dt = \int_0^T \{(f,v) + F(t)v(0)\}g(t)dt, \quad \forall\, v \in H^1(\Omega) \text{ e } g \in L^2(0,T;R).$$

Vale lembrar que para a obtenção de (2.28) utilizamos também as propriedades de ψ_ε e Φ_ε, e (2.11).

A igualdade (2.28) e as condições

$$u_\varepsilon(0) = 0$$

e

$$\dot{u}_\varepsilon(0) = 0,$$

condições essas que podemos verificar sem muita dificuldade (vide [1]), dizem que u_ε é uma solução "fraca" de P_ε.

Para mostrarmos que de fato u_ε é solução de P_ε, adotamos o procedimento usual que é considerar para cada $s \in (0,T)$, a equação (2.28) com

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t \in \theta_k = (s - \frac{1}{k}, s + \frac{1}{k}) \\ \\ 0 & \text{se} \quad t \notin \theta_k , \end{cases}$$

multiplicá-la por $\frac{k}{2}$ = 1/medida de θ_k e fazer $k \to \infty$.

A seguir, fazemos ε tender a zero e obteremos $u = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon$ como solução de P. De fato, como as estimativas (2.16) e (2.17) não dependem de ε, podemos dizer, com base nos mesmos argumentos usados para obter (2.23)-(2.27), que existem subsequências de u_ε, $\dot{u}_\varepsilon$ e $\ddot{u}_\varepsilon$, ainda denotadas por u_ε, $\dot{u}_\varepsilon$ e $\ddot{u}_\varepsilon$, tais que quando $\varepsilon \to 0$:

(2.29) $\quad u_\varepsilon \to u \quad$ qtp em $\Omega \times (0,T)$,

(2.30) $\quad \dot{u}_\varepsilon \to \dot{u} \quad$ qtp em $\Omega \times (0,t)$,

(2.31) $\quad u_\varepsilon \to u \quad$ fraco* em $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$
fraco em $L^2(0,T,H^1(\Omega))$,

(2.32) $\quad \dot{u}_\varepsilon \to \dot{u} \quad$ fraco* em $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$
fraco em $L^2(0,T,H^1(\Omega))$,

(2.33) $\quad \ddot{u}_\varepsilon \to \ddot{u} \quad$ fraco* em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$
fraco em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

As relações (2.31)-(2.33) e (2.7) implicam que $\forall\ \omega \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, o primeiro membro de

$$(2.34)\quad \int_0^T \{(\ddot{u}_\varepsilon,\omega) + A(u_\varepsilon,\omega) + B(u_\varepsilon,\omega) + C(\dot{u}_\varepsilon,\omega) -$$

$$(f,\omega) - F(t)\omega(0)\}dt = - \int_0^T (\psi_\varepsilon(u_\varepsilon)\Phi_\varepsilon'(\dot{u}_\varepsilon),\omega)dt$$

tende, quando $\varepsilon \to 0$, para:

$$(2.35)\quad \int_0^T \{(u,\omega) + A(u,\omega) + B(u,\omega) + C(\dot{u},\omega) - (f,\omega) -$$

$$F(t)\omega(0)\}dt.$$

Quanto ao segundo membro de (2.34) temos que ele é igual a

$$(2.36)\quad \int_0^T \{J_\varepsilon(u_\varepsilon,\omega+\dot{u}_\varepsilon) - J_\varepsilon(u_\varepsilon,\dot{u}_\varepsilon) - (\psi_\varepsilon(u_\varepsilon)\Phi_\varepsilon'(\dot{u}_\varepsilon),\omega) -$$

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon,\omega + \dot{u}_\varepsilon) + J_\varepsilon(u_\varepsilon,\dot{u}_\varepsilon)\}dt \geq$$

$$\int_0^T \{-J_\varepsilon(u_\varepsilon,\omega + \dot{u}_\varepsilon) + J_\varepsilon(u_\varepsilon,\dot{u}_\varepsilon)\}dt$$

pois $\int_0^T \{J_\varepsilon(u_\varepsilon,\omega + \dot{u}_\varepsilon) - J_\varepsilon(u_\varepsilon,\dot{u}_\varepsilon) - (\psi_\varepsilon(u_\varepsilon)\Phi_\varepsilon'(\dot{u}_\varepsilon),\omega)\}dt \geq 0.$

Portanto, se mostrarmos que, quando $\varepsilon \to 0$

$$(2.36) \qquad \int_0^T J_\varepsilon(u_\varepsilon, \omega + \dot{u}_\varepsilon)dt \to \int_0^T J(u,\omega + \dot{u})dt,$$

$$(2.37) \qquad \int_0^T J_\varepsilon(u_\varepsilon, \dot{u}_\varepsilon)dt \to \int_0^T J(u,\dot{u})dt$$

teremos

$$(2.38) \qquad \int_0^T \{(\ddot{u},\omega) + A(u,\omega) + B(u,\omega) + C(\dot{u},\omega) +$$

$$J(u,\omega + \dot{u}) - J(u,\dot{u})\}dt \geq \int_0^T \{(f,\omega) +$$

$$F(t)\omega(0)\}dt, \quad \forall\ \omega \in L^2(0,T;H^1(\Omega)),$$

ou seja, u será uma solução "fraca" de P no sentido de satisfazer as condições iniciais $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ e a inequação (2.38) escrita para $\omega = v - \dot{u}$, $v \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

Demostraremos, a seguir, apenas (2.36), pois (2.37) é obtido de (2.36) tomando $\omega \equiv 0$. Para tanto escreveremos

$$(2.39) \qquad \int_0^T \{J_\varepsilon(u_\varepsilon,\omega + \dot{u}_\varepsilon) - J(u,\omega + \dot{u})\} =$$

$$\int_0^T \int_0^L \{\psi_\varepsilon(u_\varepsilon)\Phi_\varepsilon(\omega + \dot{u}_\varepsilon) - \psi(u)\Phi(\omega + \dot{u})\}dxdt =$$

$$\int_0^T \int_o^L [\psi_\varepsilon(u_\varepsilon) - \psi_\varepsilon(u)]\Phi_\varepsilon(\omega + \dot{u}_\varepsilon)dxdt + \int_o^T \int_o^L [\Phi_\varepsilon(\omega + \dot{u}_\varepsilon) -$$

$$\Phi_\varepsilon(\omega + \dot{u})]\psi_\varepsilon(u)dxdt + \int_o^T \int_o^L [\psi_\varepsilon(u) - \psi(u)]\Phi_\varepsilon(\omega + \dot{u})dxdt +$$

$$\int_o^T \int_o^L [\Phi_\varepsilon(\omega + \dot{u}) - \Phi(\omega + \dot{u})]\psi(u)dxdt$$

e vemos que cada uma das quatro integrais do segundo membro de (2.39) tendem a zero, quando $\varepsilon \to 0$, devido às relações (2.29)-(2.32) e às características das funções ψ_ε e Φ_ε. Consequentemente, obtemos (2.36).

Para encerrar a demonstração do Teorema 1, resta mostrar que u satisfaz (1.11). A verificação deste fato é análogo ao utilizado para mostrar que u_ε era solução de P_ε, onde devemos definir

$$v(t) = \begin{cases} \dot{u}(t) & \text{se} \quad t \notin \theta_k \\ v & \text{se} \quad t \in \theta_k \ . \end{cases}$$

3. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.

Etapa 1 (Estimativa (1.28). Para obtermos esta estimativa tomamos em (1.27) $\omega = \delta_t U^n$. Em seguida, fazendo a somatória em n, $1 \leq n \leq M \leq N$, e usando as identidades $\partial_t^2 U^n = (\partial_t U^n - \partial_t U^{n-1})/k$ e $\partial_t U^n = (\partial_t U^n + \partial_t U^{n-1})/2$ vem

$$
(3.1) \qquad \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{2k}(\partial_t U^n - \partial_t U^{n-1}, \partial_t U^n + \partial_t U^{n-1}) +
$$

$$
\sum_{n=1}^{M} \{\theta\ A(U^{n+1} - U^{n-1}, U^{n+1} + U^{n-1}) +
$$

$$
\frac{(1 - 2\theta)}{2k} A(U^n, U^{n+1} - U^{n-1})\} +
$$

$$
\sum_{n=1}^{M} \{C(\partial_t U^n) + \overline{B}(I_t U^n, \partial_t U^n) =
$$

$$
- \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{2}(\psi_\varepsilon(U^n)\Phi_\varepsilon'(\hat{\delta}_t U^n), \partial_t U^n + \partial_t U^{n-1}) +
$$

$$
\sum_{n=1}^{M} \{\frac{1}{2}(f^n, \partial_t U^n + \partial_t U^{n-1}) + F^n \delta_t U^n(0)\} \leq
$$

$$
\sum_{n=1}^{M} c[L^3/3 + |U^n|_1]|\partial_t U^n + \partial_t U^{n-1}| +
$$

$$
\sum_{n=1}^{M} |f^n||\partial_t U^n + \partial_t U^{n-1}| + |\frac{1}{2k} F^M U^{M+1}(0) + \frac{1}{2k} F^{M-1} U^M(0) -
$$

$$\sum_{n=2}^{M-1} \frac{F^{n+1} - F^{n-1}}{2k} U^n(0)| ,$$

sendo c a constante de (2.iv).

Considerando a condição (1.25) temos que o primeiro membro de (3.1) vale

$$(3.2) \quad \frac{1}{2k}|\partial_t U^M|^2 + \frac{\theta}{2k}\{A(U^{M+1}) + A(U^M)\} + \frac{(1-2\theta)}{2k} A(U^M, U^{M+1})$$

$$+ \sum_{n=1}^{M} \{\overline{B}(I_t U^n, \delta_t U^n) + C(\delta_t U^n)\} =$$

$$\frac{1}{2k}|\partial_t U^M|^2 + \frac{1}{2k}(2\theta - \frac{1}{2})\{A(U^{M+1}) + A(U^M)\} +$$

$$\frac{1}{2k}\frac{(1-2\theta)}{2} A(U^M + U^{M+1}) + \sum_{n=1}^{M} \{\overline{B}(I_t U^n, \delta_t U^n) + C(\delta_t U^n)\},$$

devido a identidade

$$2A(U^M, U^{M+1}) = A(U^M + U^{M+1}) - A(U^M) - A(U^{M+1}).$$

Substituindo o resultado (3.2) em (3.1), após alguns cálculos diretos concluimos que, $\forall\ \alpha > 0$

$$\frac{1}{2k}|\partial_t U^M|^2 + \frac{1}{2k}(2\theta - \frac{1}{2})\{A(U^{M+1}) + A(U^M)\} +$$

$$\frac{1 - 2\theta}{4k} A(U^{M+1} + U^M) + \sum_{n=1}^{M} \{\overline{B}(I_t U^n, \delta_t U^n) + C(\delta_t U^n)\} \leq$$

$$\sum_{n=1}^{M} c(L^6/9 + |U^n|_1^2) + \sum_{n=1}^{M} 2c|\partial_t U^n|^2 +$$

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{M} |f^n|^2 + \sum_{n=1}^{M} |\partial_t U^n|^2 + \frac{\alpha}{2k}(|U^{M+1}|_1^2 + |U^M|_1^2) +$$

$$\frac{1}{4\alpha k} |F|^2_{L^\infty(0,T;R)} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{M-1} |\delta_t F^n|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{M-1} |U^n|_1^2.$$

Multiplicando a última desigualdade por $2k$ e levando em conta as propriedades de A e C vem:

$$(3.3) \qquad |\partial_t U^M|^2 + (2\theta - \frac{1}{2})\gamma\{|U^M|_1^2 + |U^{M+1}|_1^2\} \leq$$

$$\alpha(|U^{M+1}|_1^2 + |U^M|_1^2) + \frac{cL^6}{9} Mk +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M} k|f^n|^2 + \frac{1}{\alpha} |F|^2_{L^\infty(0,T;R)} +$$

$$\sum_{n=2}^{M-1} k|\delta_t F^n|^2 + (2c + 1)\sum_{n=1}^{M} k|U^n|_1^2 +$$

$$(4c + 2) \sum_{n=1}^{M} k|\partial_t U^n|^2 + \left|\sum_{n=1}^{M} \overline{B}(I_t U^n,\ U^{n+1} - U^{n-1})\right|.$$

Para prosseguir o argumento no sentido da obtenção (1.28), necessitamos introduzir uma propriedade da forma bilinear $\overline{B}$. Esta propriedade, que chamaremos de Propriedade P2, é a correspondente discretizada da Propriedade P1 da seção 2, assim como as estimativas (1.28) e (1.29), são as correspondentes de (2.16) e (2.17), respectivamente.

Passamos agora à <u>Propriedade P2</u>: Dado $\beta > 0$, existe uma constante $C_\beta > 0$, que depende linearmente de T, tal que $\forall\ P^n \in H^1(\Omega)$, $n=0,1,2,\ldots, M+1$, temos:

$$(3.4) \qquad \left|\sum_{n=1}^{M} \overline{B}(I_t P^n,\ P^{n+1} - P^{n-1})\right| \leq \beta(|P^M|_1^2 + |P^{M+1}|_1^2) +$$

$$C_\beta \sum_{n=0}^{M+1} k|P^n|_1^2.$$

Para obter (3.4) escrevemos,

$$(3.5) \qquad \left|\sum_{n=1}^{M} \overline{B}(I_t P^n,\ P^{n+1} - P^{n-1})\right| = \left|\sum_{n=1}^{M} \{\tfrac{k}{2}K(t_n)[\overline{B}(P^o,\ P^{n+1})\right.$$

$$- \overline{B}(P^o,\ P^{n-1})] + k \sum_{j=1}^{n-1} K(t_n - t_j)\overline{B}(P^j,\ P^{n+1} - P^{n-1}) +$$

$$\frac{k}{2}\,K(0)\overline{B}(P^n,\ P^{n+1} - P^{n-1})\}\Big| \leq$$

$$\sum_{n=1}^{M} \frac{k}{2}|K(t_n)|\left[|P^o|_1|P^{n+1}|_1 + |P^o|_1|P^{n-1}|_1\right] +$$

$$\frac{k}{2}|K(0)||P^M|_1|P^{M+1}|_1 + k\sum_{n=M-1}^{M}\ \sum_{j=1}^{n-1} |K(t_n-t_j)||P^j|_1|P^{n+1}|_1 +$$

$$k\sum_{n=2}^{M}\ \sum_{j=n-2}^{n-1} |K(t_n-t_j)||P^j|_1|P^{n-1}|_1 +$$

$$k\left|\sum_{n=2}^{M-2}\ \sum_{j=1}^{n-1} [K(t_{n+2} - t_j) - K(t_n-t_j)]\overline{B}(P^j,\ P^{n+1})\right| \leq$$

$$|K|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})} \sum_{n=1}^{M} k(|P^o|_1^2 + \frac{1}{2}|P^{n+1}|_1^2 + \frac{1}{2}|P^{n-1}|_1^2) +$$

$$\frac{k}{4}|K|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})} (|P^M|_1^2 + |P^{M+1}|_1^2) +$$

$$\beta|P^{M+1}|_1^2 + \frac{1}{4\beta}|K|^2_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})}k^2\left(\sum_{j=1}^{M-1} |P^j|_1\right)^2 +$$

$$\beta|P^M|_1^2 + \frac{1}{4\beta}|K|^2_{L^\infty(0,T;R)}k^2\left(\sum_{j=1}^{M-2} |P^j|_1^2\right)^2 +$$

$$\frac{k}{2}\ |K|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})} \sum_{n=2}^{M} \left[|P^{n-2}|_1^2 + |P^{n-1}|_1^2 + 2|P^{n-1}|_1^2\right] +$$

$$2k^2 |\dot{K}|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})} \left(\sum_{j=1}^{M-1} |P^j|_1 \right)^2 .$$

A relação (3.5) implica (3.4) quando tomamos

$$C_\beta = 5|K|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})} + \frac{T}{2\beta}|K|^2_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})} + 2T|\dot{K}|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})}$$

Considerando novamente a relação (3.3), nela substituindo o resultado da Propriedade P2 com $P^n \equiv U^n$, e em seguida escolhendo α e β de forma que $(2\theta - \frac{1}{2}) - \alpha - \beta > 0$, o que é possível pois $\theta > \frac{1}{2}$, resulta:

$$|\partial_t U^M|^2 + |U^{M+1}|_1^2 \leq (4c+2) \sum_{n=1}^{M} k|\partial_t U^n| +$$

$$(2c + 1 + C_\beta) \sum_{n=0}^{M+1} k|U^n|_1^2 + \frac{cT}{9}L^6 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{M} k|f^n|^2 +$$

$$\frac{1}{\alpha}|F|^2_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})} + \sum_{n=2}^{M-1} k|\delta_t F^n|^2 .$$

Esta última desigualdade e o lema de Gronwall na sua forma discreta levam a

$$|\partial_t U^{M-1}|_1^2 + |U^M|_1^2 \leq C_1' ,$$

que por sua vez implica (1.28), pois C_1' independe de h e k.

Etapa 2 (Estimativa (1.29). Subtraindo da equação (1.27) escrita para n+1, a equação (1.27) escrita para n, vem:

$$(\partial_t^2 U^{n+1} - \partial_t^2 U^n, \omega) + A(\omega_\theta U^{n+1} - \omega_\theta U^n, \omega)$$

$$+ C(\delta_t U^{n+1} - \delta_t U^n, \omega) + \overline{B}(I_t U^{n+1} - I_t U^n, \omega) +$$

$$(\psi_\varepsilon(U^{n+1})\Phi_\varepsilon'(\hat{\delta}_t U^{n+1}) - \psi_\varepsilon(U^n)\Phi'(\hat{\delta}_t U^n), \omega) =$$

$$(f^{n+1} - f^n, \omega) + (F^{n+1} - F^n)\omega(0), \quad \forall\, \omega \in V_h.$$

Admitindo nesta igualdade $\omega = \delta_t U^{n+1} - \delta_t U^n$, considerando as identidades

$$\delta_t U^{n+1} - \delta_t U^n = \frac{k}{2}(\partial_t^2 U^{n+1} + \partial_t^2 U^n)$$

e

$$\delta_t U^{n+1} - \delta_t^n = (\partial_t U^{n+1} - \partial_t U^{n-1})/2$$

e fazendo a somatória em n para $1 \leq n \leq M \leq N$, obtemos:

$$(3.6) \quad \frac{k}{2}(|\partial_t^2 U^{M+1}|^2 - |\partial_t^2 U^1|^2) + \frac{k}{2}\{(2\theta - \frac{1}{2})[A(\partial_t U^{M+1}) +$$

$$A(\partial_t U^M)] - \theta A(\partial_t U^1) + \frac{(1-2\theta)}{8} A(\frac{\partial_t U^{M+1} + \partial_t U^M}{2})\} +$$

$$\sum_{n=1}^{M} C(\delta_t U^{n+1} - \delta_t U^n) = -\frac{k}{2}\sum_{n=1}^{M} \overline{B}(I_t(\partial_t U^n), \partial_t U^{n+1} - \partial_t U^{n-1})$$

$$+ \frac{k^2}{2}\sum_{n=1}^{M} (\partial_t f^n, \partial_t^2 U^{n+1} + \partial_t^2 U^n) + \frac{k}{2}\{\partial_t F^M \partial_t U^{M+1} +$$

$$\partial_t F^{M-1}\partial_t U^M(0) - \partial_t F^1 \partial_t U^o(0) - \partial_t F^2 \partial_t U^1(0) -$$

$$\sum_{n=2}^{M-1} (\partial_t F^{n+1} - \partial_t F^n)\partial_t U^n(0)\} + \frac{k}{2}\sum_{n=1}^{M} ([\psi_\varepsilon(U^{n+1}) -$$

$$\psi_\varepsilon(U^n)]\Phi_\varepsilon'(\hat{\delta}_t U^{n+1}), \partial_t^2 U^{n+1} + \partial_t^2 U^n) +$$

$$\frac{k}{2}\sum_{n=1}^{M} (\psi_\varepsilon(U^n)[\Phi_\varepsilon'(\hat{\delta}_t U^{n+1}) - \Phi_\varepsilon'(\hat{\delta}_t U^n)], \partial_t^2 U^{n+1} + \partial_t^2 U^n),$$

devido ainda à identidade

$$2A(\partial_t U^M, \partial_t U^{M+1}) = A(\partial_t U^{M+1} + \partial_t U^M) - A(\partial_t U^M) - A(\partial_t U^{M+1}).$$

Multiplicando a igualdade (3.6) por $2/k$, utilizando a propriedade P2 com $P^n \equiv \partial_t U^n$, considerando as propriedades de A e C e as propriedades (2.iii)-(2.vii) de ψ_ε e Φ_ε concluimos

(3.7) $$|\partial_t^2 U^{M+1}|^2 + \gamma(2\theta - \tfrac{1}{2})\{|\partial_t U^{M+1}|_1^2 + |\partial_t U^M|_1^2\} \leq$$

$$|\partial_t^2 U^1|^2 + \theta\|A\|\,|\partial_t U^1|_1^2 + \beta(|\partial_t U^{M+1}|_1^2 + |\partial_t U^M|_1^2) +$$

$$C_\beta \sum_{n=0}^{M+1} k|\partial_t U^n|_1^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M} k|\partial_t f^n|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M} k|\partial_t^2 U^{n+1} + \partial_t^2 U^n|^2$$

$$+ \alpha(|\partial_t U^{M+1}|_1^2 + |\partial_t U^M|_1^2) + \frac{1}{2\alpha}|\dot{F}|^2_{L^\infty(0,T;R)} + \frac{1}{2}|\partial_t U^1|_1^2 +$$

$$\frac{1}{2}|\dot{F}|^2_{L^\infty(0,T;R)} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{M-1} k|\partial_t^2 F^n| + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{M-1} k|\partial_t U^n|_1^2 +$$

$$ck\sum_{n=1}^{M} |\partial_t U^n|\,|\partial_t^2 U^{n+1} + {}_t^2 U^n| +$$

$$\frac{1}{2}\,c(L^3/3 + K_1)\mu_\varepsilon \sum_{n=1}^{M} \{k|\partial_t^2 U^{n+1} + \partial_t^2 U^n|^2 + \frac{1}{k}|\hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n|\},$$

sendo que a constante positiva $\|A\|$ é a norma natural da forma bilinear A, e K_1 é como em (1.28).

Sendo assim, atribuindo o valor 1 para n em (1.27) e considerando $\omega = \partial_t^2 U^1$, concluimos que as quantidades $|\partial_t^2 U^1|$ e $|\partial_t U^1|_1$ são limitadas por uma constante que denominaremos de $C(|f^1|^2, |\dot{F}|_{L^\infty(0,T;R)})$, de acordo com a desigualdade:

$$|\partial_t^2 U^1|^2 + \theta A(\partial_t U^1) \leq |(f^1, \partial_t^2 U^1)| + |F^1 U^2(0)/k^2| \leq$$

$$|f^1||\partial_t U^1| + |(F^1 - F^o)/k||\partial_t U^1(0)| \leq$$

$$\frac{1}{2}|\partial_t U^1|^2 + \frac{\gamma\theta}{2}|\partial_t U^1|_1^2 + \frac{1}{2}|f^1|^2 + \frac{1}{2\gamma\theta}|\dot{F}|^2_{L^\infty(0,T;R)}.$$

Escolhendo α e β convenientemente em (3.7) e considerando a limitação descrita no parágrafo anterior, podemos escrever:

$$(3.8) \qquad |\partial_t^2 U^{M+1}|^2 + |\partial_t U^{M+1}|_1^2 \leq$$

$$[1 + 2c + c(L^3/3 + K_1)\mu_\varepsilon] \sum_{n=1}^{M+1} k|\partial_t^2 U^n|^2 +$$

$$(C_\beta + \frac{1}{2} + \frac{c}{2}) \sum_{n=1}^{M+1} k|\partial_t U^n|_1^2 + (\frac{3}{2} + \theta\|A\|)C(|f^1|, |\dot{F}|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})}) +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M} k|\partial_t f^n|^2 + (\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2})|\dot{F}|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{M-1} k|\partial_t^2 F^n|$$

$$\frac{1}{2}\, c(L^3/3 + K_1)\mu_\varepsilon \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{k}|\hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n|^2.$$

Nosso objetivo agora é estimar o termo

$$|\hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n|^2/k$$

para substituí-lo em (3.8). Para tanto, subtraimos da equa_ (1.26), escrita para n+1, a equação (1.26) escrita para n, e escolhemos $\omega = \hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n$:

$$\frac{2}{k}|\hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n|^2 - 2(\partial_t^2 U^n, \hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n) +$$

$$2k\theta A(\hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n) +$$

$$kA((1 - 2\theta)\partial_t U^n + 2\theta\partial_t U^{n-1}, \hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n) +$$

$$C(\hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n) + k\overline{B}(I_t U^n, \hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n) +$$

$$(\psi_\varepsilon(U^{n+1})\Phi_\varepsilon'(\partial_t U^n) - \psi_\varepsilon(U^n)\Phi_\varepsilon'(\partial_t U^{n-1}), \hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n)$$

$$= k(\partial_t f^n,\ \hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n) + k\ \partial_t F^n(\hat{\delta}_t U^{n+1}(0) - \hat{\delta}_t U^n(0))$$

$$\leq \frac{k}{4\alpha}|\partial_t f^n|^2 + \alpha k|\hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n|_1^2 + \frac{k}{4\alpha}|\partial_t F^n|^2 +$$

$$\alpha k|\hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n|_1^2.$$

Utilizando nesta desigualdade as estimativas aritméticas usuais e repetindo argumentos anteriores,

$$(3.9) \qquad \frac{2}{k}|\hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n| + 2k\theta\gamma|\ \hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n|_1^2 \leq$$

$$2\alpha k|\hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n|_1^2 + \frac{k}{4\alpha}(|\partial_t f^n|^2 + |\dot{F}|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})})$$

$$k|\partial_t^2 U^n|^2 + \frac{1}{k}|\hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n|^2 + \alpha k|\hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n|_1^2 +$$

$$\frac{k}{2\alpha}[(1 - 2\theta)^2|\partial_t U^n|_1^2 + 4\theta^2|\partial_t U^{n-1}|_1^2] +$$

$$\frac{k^2}{2}|K|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})}(|\partial_t U^n|_1 + 2\sum_{j=1}^{n-1}|\partial_t U^j|_1)|\hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n|_1 +$$

$$k|\partial_t U^n||\hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n| + k\mu_\varepsilon c(L^3/3 + K_1)|\partial_t^2 U^n||\hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n|$$

$$\leq 6\alpha k|\hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n|_1 + \frac{1}{k}|\hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n|^2 +$$

$$\frac{k}{4\alpha}(|\partial_t f^n|^2 + |\dot{F}|^2_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})}) +$$

$$k|\partial_t^2 U^n|^2 + \frac{k}{2\alpha}[(1 - 2\theta)^2|\partial_t U^n|_1^2 + 4\theta^2|\partial_t U^{n-1}|_1^2] +$$

$$\frac{1}{8\alpha}|K|^2_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})}\ k^3[|\partial_t U^n|_1^2 + 4(n-1)\sum_{j=1}^{n-1}|\partial_t U^j|_1^2] +$$

$$\frac{k}{4\alpha}|\partial_t U^n|_1^2 + \frac{k}{4\alpha}\ \mu_\varepsilon^2 c^2(L^3/3 + K_1)^2|\partial_t^2 U^n|^2$$

Escolhendo adequadamente α em (3.9) obtemos a estimativa para $|\hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n|^2/k$, que anunciamos anteriormente:

$$(3.10)\qquad \frac{1}{k}|\hat{\delta}_t U^{n+1} - \hat{\delta}_t U^n|^2 \leq \frac{k}{4\alpha}[|\partial_t f^n|^2 + |\partial_t F^n|^2] +$$

$$[1 + \mu_\varepsilon^2 c^2(L^3/3 + K_1)^2/4\alpha]k|\partial_t^2 U^n|^2 +$$

$$|K|^2_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})}\ \frac{T}{\alpha}\ k^2\sum_{j=1}^{n}|\partial_t U^j|_1^2 +$$

$$\frac{k}{2\alpha}[(1 - 2\theta)^2|\partial_t U^n|_1^2 + 4\theta^2|\partial_t U^n|_1^2].$$

O resultado (3.10) substituindo na relação (3.8) e o lema de Gronwall na forma discreta, implicam

$$|\partial_t^2 U^n|^2 + |\partial_t U^n|_1^2 \leq C_2',$$

sendo C_2' independente de h e k. Esta é exatamente a estimativa (1.29).

Etapa 3. Passagem ao Limite . As estimativas (1.28) e (1.29) implicam na existência de subsequências de U_{hk}, $\partial_t U_{hk}$ e $\partial_t^2 U_{hk}$, que continuamos a indicar com os mesmos índices, tais que, quando h e $k \to 0$:

(3.11) $\quad U_{hk} \to u \quad$ fraco* em $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$,
fraco em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$,

(3.12) $\quad \partial U_{hk} \to u_1 \equiv \dot{u} \quad$ fraco* em $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$,
fraco em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$,

(3.13) $\quad \partial_t^2 U_{hk} \to u_2 \equiv \ddot{u} \quad$ fraco* em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$,
fraco em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

O objetivo nesta etapa é: (i) mostrar que $u = u_\varepsilon$ e (ii) que valem (1.30)-(1.32), já que o argumento para as identificações $u_1 \equiv \dot{u}$ e $u_2 \equiv \ddot{u}$ é o mesmo de [2] (Teorema 2).

Para verificar que $u = u_\varepsilon$ basta mostrar que u é solução "fraca" de P_ε no sentido

$$(3.14) \qquad \int_0^T \{(\ddot{u},v) + A(u,v) + B(u,v) + C(\dot{u},v) + (\psi_\varepsilon(u)\Phi_\varepsilon'(\dot{u}),\ v)\}dt = \int_0^T \{(f,v) + F(t)v(0)\}dt$$

$$\forall\ v \in L^2(0,T;\ H^1(\Omega)),$$

pois o mesmo procedimento adotado no Teorema 1 e mais a unicidade implicam que $u = u_\varepsilon$.

A fim de obter (3.14), tomamos $v \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ arbitrário, e aproximações $V^n \in \mathcal{V}_h$ tais que

$$(3.15) \qquad \lim_{h,k\to 0} |V_{hk} - v|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} = 0.$$

Em seguida, para cada $n = 1,2,\ldots N$ escolhemos $\omega = V^n$ em (1.27), multiplicamos cada resultado por k e fazemos a so matória em n, o que leva a:

$$(3.16)\qquad \sum_{n=1}^{N} k\{(\partial_t^2 U^n,\ V^n) + A(W_\theta U^n,\ V^n) + C(\delta_t U^n,\ V^n) +$$

$$\overline{B}(I_t U^n,\ V^n) + (\psi_\varepsilon(U^n)\Phi_\varepsilon'(\hat{\delta}_t U^n),\ V^n)\} =$$

$$\sum_{n=1}^{N} k\{(f^n,\ V^n) + F^n V^n(0)\}.$$

Definindo $\psi_\varepsilon(U_{hk})$ e $\Phi_\varepsilon'(\hat{\delta}_t U_{hk})$ por:

$$\psi_\varepsilon(U_{hk}) = \sum_{n=1}^{N} \chi_n^k \psi_\varepsilon(U^n).$$

$$\Phi_\varepsilon'(\hat{\delta}_t U_{hk}) = \sum_{n=1} \chi_n^k \Phi_\varepsilon'(\hat{\delta}_t U^n),$$

e considerando as definições (1.22) podemos escrever (3.16) na seguinte forma equivalente:

$$(3.17)\qquad \int_0^T \{(\partial_t^2 U_{hk},\ V_{hk}) + A(W_\theta U_{hk}, V_{hk}) + C(\delta_t U_{hk}, V_{hk})$$

$$-(f_{hk},\ V_{hk}) - F_{hk} V_{hk}(0)\}dt =$$

$$\int_0^T \overline{B}(I_t U_{hk}, V_{hk})dt + \int_0^T (\psi_\varepsilon(U_{hk})\Phi'_\varepsilon(\hat{\delta}_t U_{hk}), V_{hk})dt$$

As convergências dadas por (3.11)-(3.13), as propriedades (1.4)-(1.5) e a relação (3.15), permitem concluir que, quando h e k tendem a zero, o primeiro membro de (3.17) converge para:

$$\int_0^T \{(\ddot{u},v) + A(u,v) + C(\dot{u},v) - (f,v) - F(t)v(0)\}dt.$$

Assim sendo devemos mostrar ainda que quando $h,k\to 0$,

$$(3.18) \qquad \int_0^T \{\overline{B}(I_t U_{hk}, V_{hk}) - B(u,v)\}dt \to 0$$

e

$$(3.19) \qquad \int_0^T \{(\psi_\varepsilon(U_{hk})\Phi'_\varepsilon(\hat{\delta}_t U_{hk}),V_{hk}) - (\psi_\varepsilon(u)\Phi'_\varepsilon(\dot{u}),v)\}dt \to 0$$

Para obtermos tais convergências escrevemos inicialmente a integral envolvida em (3.18) como a soma de três outras da seguinte forma:

$$(3.20) \qquad \int_0^T \{\overline{B}(I_t U_{hk}, V_{hk}) - B(u,v)\}dt =$$

$$\int_0^T \overline{B}(\sum_{n=1}^N \chi_n^k(t)[I_t U^n - \int_0^{t_n} K(t_n - s)U_{hk}(x, s)ds], V_{hk})dt +$$

$$\int_0^T \overline{B}(\sum_{n=1}^N \chi_n^k(t) \int_0^{t_n} K(t_n - s)U_{hk}(x,s)ds -$$

$$\int_0^t K(t - s)U_{hk}(x,s)ds, V_{hk})dt +$$

$$\int_0^T \{\overline{B}(\int_0^t K(t-s)U_{hk}(x,s)ds, V_{hk}) - B(u, v)\}dt.$$

Como $\overline{B}(\int_0^t K(t-s)U_{hk}(x,s)ds, V_{hk}) = B(U_{hk},V_{hk})$ vemos que a terceira parcela do segundo membro de (3.20) converge para zero, quando $h,k \to 0$, devido a (3.11) e (3.15). As outras duas parcelas serão tratadas separadamente. A primeira delas leva à desigualdade:

$$(3.21)\quad |\int_0^T \overline{B}(\sum_{n=1}^N \chi_n^k(t)[I_t U^n - \int_0^{t_n} k(t_n - s)U_{hk}(x,s)ds, V_{hk})dt| \le$$

$$V_{hk}\;{}_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\{\int_0^T \int_0^L \sum_{n=1}^N \chi_n^k(t)(D_x I_t U^n -$$

$$\int_0^{t_n} K(t_n - s)D_x U_{hk}(x,s)ds)^2 dxdt\}^{1/2}.$$

Como

$$D_x I_t U^n = \frac{k}{2} \sum_{j=0}^{n-1} [K(t_n - t_j)U_x^j + K(t_n - t_{j+1})\ U_x^{j+1}]$$

e

$$\int_o^{t_n} K(t_n - s)D_x U_{hk}(x,s)ds = \sum_{j=0}^{n-1} U_x^j [\frac{k}{2}(K(t_n - t_j) +$$

$$K(t_n - t_{j+1})) - \frac{k^3}{12} \ddot{K}(\zeta_j)],$$

$$\zeta_j \ \varepsilon \ [t_j, t_{j+1}]$$

pois

$$\int_o^{t_n} K(t_n - s)D_x U_{hk}(x,s)ds = \int_o^t K(t_n - s) \sum_{j=0}^{N} \chi_j^k(s)U_x^j ds$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} K(t_n - s)U_x^j ds.$$

Podemos concluir que

$$D_x I_t U^n - \int_o^{t_n} K(t_n - s)D_x U_{hk}(x,s)ds =$$

$$\frac{k}{2} \sum_{j=0}^{n-1} [K(t_n - t_{j+1})U_x^{j+1} - K(t_n - t_{j+1})U_x^j] +$$

$$\frac{k^3}{12}\sum_{j=0}^{n-1} \ddot{K}(\zeta_j)U_x^j =$$

$$\frac{k}{2}\sum_{j=0}^{n-1} [K(t_n - t_j) - K(t_n - t_{j+1})]U_x^j + \frac{k}{2}K(0)U_x^n +$$

$$\frac{k^3}{12}\sum_{j=0}^{n-1} \ddot{K}(\zeta_j)U_x^j.$$

Substituindo este resultado em (2.21) vem:

(3.22) $$\left|\int_o^T \overline{B}\left(\sum_{n=1}^N \chi_n^k(t)\left[I_t U^n - \int_o^{t_n} K(t_n - s)U_{hk}(x,s)ds\right], V_{hk}\right)dt\right| \leq$$

$$|V_{hk}|_{L^2(o,T;H^1(\Omega))}\left\{\int_o^T\int_o^L \sum_{n=1}^N \chi_n^k(t)3\left[\frac{k^4}{4}\, n|\dot{K}|^2_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})}\sum_{j=0}^{n-1}|U_x^j|^2 +\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{k^2}{4}K^2(0)|U_x^n|^2 + \frac{k^6}{144}\, n|\ddot{K}|^2_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})}\sum_{j=0}^{n-1}|U_x^j|^2\right]dxdt\right\}^{1/2} \leq$$

$$|V_{hk}|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\{3\max\{T|\dot{K}|_{L^\infty(0,T;R)}, K^2(0),\; T|\ddot{K}|_{L^\infty(0,T;R)}\}$$

$$\int_o^T\int_o^L \sum_{n=1}^N \chi_n^k(t)\left[k^3\sum_{j=0}^{n-1}|U_x^j|^2 + k^2|U_x^n|^2 +\right.$$

$$\left.k^5\sum_{j=0}^{n-1}|U_x^j|^2\right]dxdt\}^{1/2}$$

Supondo-se que $k < 1$ e chamando de C a constante

$$|V_{hk}|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\{3\ \max\{T|\dot{K}|_{L^\infty(0,T;R)},K^2(0),T|\ddot{K}|_{L^\infty(0,T;R)}\}\}^{1/2}$$

temos que o segundo membro de (3.22) é menor ou igual a:

$$\sqrt{2}\ C\{\int_0^T\int_0^L \sum_{n=1}^N \chi_n^k(t)k^2 \sum_{j=0}^n |U_x^j|^2 dxdt\}^{1/2} \leq$$

$$\sqrt{2}\ C\{\int_0^T \sum_{n=1}^N \chi_n^k(t)k^2 \sum_{j=0}^N |U^j|_1^2 dt\}^{1/2} \leq$$

$$\sqrt{2}\ C\sqrt{T}|U_{hk}|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}\{k\int_0^T \sum_{n=1}^N \chi_n^k(t)dt\}^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{2}\ CT\sqrt{k}\ .$$

Concluimos portanto que

$$\left|\int_0^T \overline{B}(\sum_{n=1}^N \psi_n^k(t)[I_tU^n - \int_0^{t_n} K(t_n - s)U_{hk}(x,s)ds],\ V_{hk})\right| \leq$$

$$\sqrt{2}\ CT\sqrt{k}\ ,$$

ou seja, que a primeira parcela do segundo membro de (3.20) também tende para zero, quando $h,k \to 0$.

Então, para concluirmos (3.18), a partir da igualdade (3.20), resta mostrar que, quando $h,k \to 0$

$$(3.23)\qquad \left|\int_0^T \bar{B}\left(\sum_{n=1}^{N} \chi_n^k(t)\int_0^{t_n} K(t_n - s)U_{hk}(x,s)ds - \int_0^t K(t-s)U_{hk}(x,s)ds,\ V_{hk}\right)\right|$$

tende a zero.

Como para cada $t \in [t_j, t_{j+1}]$ $j=0,1,2,\ldots N$ existe $\zeta_j \in (t_j, t)$ tal que

$$\int_0^{t_j} K(t_j - s)U_{hk}(x,s)ds - \int_0^t K(t-s)U_{hk}(x,s)ds =$$

$$\left[K(0)U_{hk}(x,\zeta_j) + \int_0^{\zeta_j} K(\zeta_j - s)U_{hk}(x,s)ds\right](t_j - t)$$

devido à identidade

$$\int_0^t K(t-s)U_{hk}(x,s)ds = \int_0^{t_j} K(t_j - s)U_{hk}(x,s)ds +$$

$$\left[K(0)U_{hk}(x,\zeta_j) + \int_0^{\zeta_j} K(\zeta_j - s)U_{hk}(x,s)ds\right](t - t_j),$$

podemos concluir que

$$(3.24) \qquad \sum_{n=1}^{N} \chi_n^k(t)\int_o^{t_n} K(t_n - s)U_{hk}(x,s)ds - \int_o^t K(t-s)U_{hk}(x,s)ds = \sum_{n=1}^{N} \chi_n^k(t)(t_n - t)[K(0)U_{hk}(x,\zeta_j) + \int_o^{\zeta_n} K(\zeta_n - s)U_{hk}(x,s)ds].$$

Levando em conta que $|t_n - t| \leq k$ em (3.24), e substituindo (3.24) em (3.23) vem:

$$|\int_o^T \overline{B}(\sum_{n=1}^{N} \chi_n^k(t)\int_o^{t_n} K(t_n - s)U_{hk}(x,s)ds - \int_o^t K(t-s)U_{hk}(x,s)ds, V_{hk})| \leq$$

$$|V_{hk}|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \{\int_o^T \int_o^L \sum_{n=1}^{N} \chi_n^k(t)k^2 2[K^2(0)|D_x U_{hk}(x,\zeta_n)|^2 + (\int_o^{\zeta_n} \dot{K}(\zeta_n - s)D_x U_{hk}(x,s)ds)^2]dxdt\}^{1/2} \leq$$

$$|V_{hk}|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \sqrt{2}\; k\Big\{\int_0^T\int_0^L \sum_{n=1}^{N} \chi_n^k(t)\,\big[K^2(0)\,|D_xU_{hk}(x,\zeta_n)|^2 +$$

$$\Big(\int_0^{\zeta_n}[\dot{K}(\zeta_n-s)]^2 ds\Big)\Big(\int_0^{\zeta_n}|D_xU_{hk}(x,s)|^2 ds\Big)dxdt\Big\}^{1/2} \leq$$

$$k\Big\{\gamma^*\int_0^T \sum_{n=1}^{N} \chi_n^k(t)\,\big[|U_{hk}|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + T|U_{hk}|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}\big]dt\Big\}^{1/2},$$

sendo $\gamma^* = |V_{hk}|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\; 2\max\{K^2(0),\; T|\dot{K}|^2_{L^\infty(0,T;R)}\}$.

Desta última desigualdade é fácil concluir que existe uma constante C que não depende de h e k tal que

$$\Big|\int_0^T \overline{B}\Big(\sum_{n=1}^{N} \psi_n^k(t)\int_0^{t_n} K(t_n - s)U_{hk}(x,s)ds -$$

$$\int_0^t K(t-s)U_{hk}(x,s)ds,\; V_{hk}\Big)\Big| \leq Ck.$$

Daí se conclui a (3.18).

Para obtermos (3.19) observamos inicialmente que existem subsequências de U_{hk} e $\partial_t U_{hk}$ tais que quando h e k tendem a zero

$$|U_{hk} - U|_{L^2(Q_T)} \to 0$$

e

$$|\partial_t U_{hk} - u|_{L^2(Q_T)} \to 0$$

ou seja, valem (1.30) e (1.31). O argumento é o mesmo utilizado em [2] (Teorema 2). Então, para concluir (3.19) com base em (1.30) e (3.15), resta mostrar que

(3.25) $$\Phi_\varepsilon'(\hat{\delta}_t U_{hk}) \to \Phi_\varepsilon'(\dot{u}), \quad \text{quando} \quad h,k \to 0.$$

Como

$$\hat{\delta}_t U^n = \delta_t U^n + (U^{n+1} - U^{n+1})/2k,$$

se mostrarmos que

(3.26) $$\sup_{0 \le n \le N-1} \left| \frac{\hat{U}^{n+1} - U^{n+1}}{2k} \right|^2 = 0(k^2),$$

a relação (1.31) implica que $\hat{\delta}_t U_{hk} \to \dot{u}$ em $L^2(Q_T)$.

Para encontrar a relação (3.26), subtraimos (1.27) de (1.26) e escolhemos $V = (\hat{U}^{n+1} - U^{n+1})/2k$. O resultado obtido leva a

$$\frac{2}{k}\left| \frac{\hat{U}^{n+1} - U^{n+1}}{2k} \right|^2 + \frac{\theta}{2k} A(\hat{U}^{n+1} - U^{n+1}) + C\left(\frac{\hat{U}^{n+1} - U^{n+1}}{2k} \right) =$$

$$- (\psi_\varepsilon(U^n)[\Phi'_\varepsilon(\hat{\delta}_t U^n) - \Phi'_\varepsilon(\partial_t U^{n-1})], \frac{\hat{U}^{n+1} - U^{n+1}}{2k}) \leq$$

$$2\sqrt{2}\ c(|U^n|_1 + L^3/3)\left|\frac{\hat{U}^{n+1} - U^{n+1}}{2k}\right|,$$

devido a (2.iii) e (2.iv).

Multiplicando esta última desigualdade por $k/2$ e considerando as propriedades de A e C vem:

$$\left|\frac{\hat{U}^{n+1} - U^{n+1}}{2k}\right|^2 \leq \sqrt{2}\ ck(|U^n|_1 + L^3/3)\left|\frac{\hat{U}^{n+1} - U^{n+1}}{2k}\right| \leq$$

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\hat{U}^{n+1} - U^{n+1}}{2k}\right| + c^2k^2(|U^n|_1 + L^3/3)^2.$$

Esta relação e a limitação de $|U^n|_1$ dada em (1.28) implicam (3.26), concluindo assim a demonstração do Teorema 2.

B I B L I O G R A F I A

[1] M. A. Raupp, R.A. Feijoo, C.A. de Moura - "A non-linear problem in dynamic visco-elasticity with friction", to appear in Bol. Soc. Bras. Mat. (prepublished as Relatório CBPF A0023/77, June, 1977).

[2] C.A. de Moura - "Discretização tipo Galerkin e 'Predictor-Corrector' para uma equação de evolução de um sistema visco-elástico com atrito", Atas do XI Colóquio Bras. de Matemática, Poços de Caldas, July 1977.

[3] R. A. Feijoo, M. A. Raupp, C. A. de Moura - "Soluciones numericas de um problema dinamico visco-elastico no lineal", Anais do IV Congr. Bras. Eng. Mec. Florianópolis, December 1977.

[4] K. Yosida, Functional Analysis, Springer, Berlin (3rd. ed.), 1971.

[5] J. L. Lions - "Equations Differentielles operationnelles et problèmes aux limites", Springer.

p \ t_1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	$\sqrt{2}-1$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0.5	1 1	.8182 .8182	.6667 .6667	.5385 .5385	.4286 .4286	$\sqrt{2}-1$ $\sqrt{2}-1$	.3333 .3333	.2500 .2500	.1765 .1765	.1111 .1111	.0505 .0505	0 0
0.6	.7811 .7817	.6717 .6720	.5777 .5778	.4959 .4959	.4238 .4238	$\sqrt{2}-1$ $\sqrt{2}-1$	.3598 .3598	.3026 .3025	.2511 .2509	.2044 .2042	.1619 .1616	.1229 .1225
0.7	.6397 .6403	.5745 .5748	.5172 .5173	.4662 .4662	.4203 .4203	$\sqrt{2}-1$ $\sqrt{2}-1$	.3790 .3790	.3414 .3414	.3071 .3070	.2757 .2755	.2461 .2463	.2197 .2193
0.8	.5414 .5417	.5055 .5057	.4734 .4734	.4443 .4443	.4178 .4178	$\sqrt{2}-1$ $\sqrt{2}-1$	.3935 .3935	.3713 .3713	.3508 .3507	.3317 .3316	.3141 .3139	.2975 .2972
0.9	.4693 .4694	.4541 .4541	.4402 .4402	.4275 .4275	.4158 .4158	$\sqrt{2}-1$ $\sqrt{2}-1$	.4050 .4050	.3950 .3950	.3857 .3856	.3770 .3769	.3688 .3688	.3612 .3611
1	$\sqrt{2}-1$ $\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-1$ $\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-1$ $\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-1$ $\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-1$ $\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-1$ $\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-1$ $\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-1$ $\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-1$ $\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-1$ $\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-1$ $\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-1$ $\sqrt{2}-1$

Table III

A G R A D E C I M E N T O

O ambiente e a acolhida que me propiciaram os integrantes do Laboratório de Cálculo (LAC), do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), foi fundamental na execução deste trabalho.

A parte de computação, embora não tenha sido exposta neste estudo, foi também importante no contexto geral de seu desenvolvimento. Aqui, contei com a colaboração preciosa de Raul A. Feijoo e Nelson Rezende.

Dedicado e caprichoso, Adelio Gurgel do Amaral, do Departamento de Matemática da UnB, viabilizou esta publicação, com sua datilografia impecável.

Sou igualmente grata a todos.

Marco Antonio Raupp, orientador seguro e capaz, Carlos Antonio de Moura, Renée Hanono e Maurício Kritz, colegas sempre dispostos a ouvir e trocar idéias, a vocês agradeço especialmente.