CBPF-NF-030/98

LE MODELE DES CHAMPS DE JAUGE UNIFIES

J. LEITE LOPES

Laboratoire de Physique Nucléaire Théorique
Centre de Recherches Nucléaires et
Université Louis Pasteur de Strasbourg

Dans cet article nous nous proposons de discuter les idées physiques qui sont à la base du modèle des champs de jauge unifiés. En dépit des difficultés qu'on trouve actuellement à incorporer, d'une façon naturelle, les muons et hadrons dans ce modèle, on a bien le sentiment qu'on est sur une voie qui semble mener à la construction d'une théorie dans laquelle le champ électromagnétique de Maxwell et le champ des interactions faibles de Fermi ne sont que deux manifestations d'une seule entité physique sous-jacente - les champs de jauge unifiés.

1. INTRODUCTION

Les fondements de la théorie des interactions faibles ont été établis par Fermi[1]. Pour expliquer le spectre continu des électrons émis par les noyaux beta-radioactifs, Pauli avait suggéré que cette émission devait être accompagnée de celle d'une particule neutre, de spin $\frac{1}{2}$, très légère, de telle façon que le processus de la désintégration beta obéirait, lui aussi, aux lois de conservation d'énergie-impulsion, de moment angulaire et de charge. Ce processus consiste en la transformation d'un neutron en un proton et en la création simultanée d'une paire de particules, un électron et un neutrino de Pauli[2]. On sait aujourd'hui qu'il existe deux types de neutrinos : le neutrino-électronique,

Enz/Mehra (eds.), Physical Reality and Mathematical Description. 403–447.

ν_e, et le neutrino-muonique, ν_μ; comme toute particule de spin $\frac{1}{2}$, chacun de ces deux neutrinos possède un anti-neutrino associé. C'est l'anti-neutrino $\overline{\nu}_e$, qui accompagne l'électron dans la transformation neutron-proton, le neutrino accompagnant le positron dans la transformation inverse :

$$n \to p + e + \overline{\nu}_e \; ,$$

$$p \to n + \overline{e} + \nu_e$$

Fermi suggéra que l'interaction responsable de la réaction (1) était analogue à l'interaction électromagnétique, responsable de l'émission d'un photon, γ, par une particule chargée ε :

$$\varepsilon \to \varepsilon + \gamma$$

Pour la réaction (2), le lagrangien d'interaction s'écrit

$$L_{(\gamma} = ej^{\mu}_{(\gamma)}(x)A_{\mu} \; x)$$

où $A_\mu(x)$ désigne le champ électromagnétique interagissant avec le courant électrique $j^{\mu}_{(\gamma)}(x)$ de la particule ε au point x.
Si $\psi_\varepsilon(x)$ représente le spineur de Dirac qui décrit cette particule, le courant $j^{\mu}_{(\gamma)}(x)$ est donné par :

$$j^{\mu}_{(\gamma)}(x) = \overline{\psi}_{\varepsilon}(x)\gamma^{\mu}\psi_{\varepsilon}(x)$$

A ce courant Fermi a fait correspondre le courant $\overline{\psi}_p(x)\gamma^\mu\psi_n(x)$ associé à la transition d'un neutron en un proton, et au champ $A^\mu(x)$ qui décrit le photon, Fermi a simplement fait correspondre le courant associé à la paire e, $\overline{\nu}_e$, $\overline{\psi}_e(x)\gamma^\mu\psi_{\nu_e}(x)$. Le lagrangien de Fermi s'écrit alors :

$$= G_F(\overline{\psi}_p(x)\gamma^\mu\psi_n(x)(\overline{\psi}_e(x)\gamma_\mu\psi_{\nu_e}(x))$$

Dans les années qui suivirent l'article de Fermi, on a cherché la forme du lagrangien mieux adapté à l'expérience puisque, en plus de l'interaction donnée par l'expression (4), d'autres termes étaient a priori possibles, d'après la théorie de Dirac. Comme celle-ci fournit seize formes correspondantes à la base de l'algèbre des matrices gamma, le lagrangien le plus général serait de la forme :

$$L = \sum_a G_a(\overline{\psi}_p(x)\Gamma^a\psi_n(x))(\overline{\psi}_e(x)\Gamma^a\psi_{\nu_e}(x)) \qquad (5)$$

où Γ^a désignerait soit l'identité I, soit l'une des quatre matrices formées avec les matrices gamma :

$$\Gamma^a = I;\ \gamma^\mu;\ \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right];\ \gamma^\mu\gamma^5;\ i\gamma^5;$$

$$\mu,\nu = 0,1,2,3.$$

En 1949 on découvrit le méson π et le muon grâce à de nouvelles réactions suscitées par ces particules[3]. La désintégration du pion positif en un muon :

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \tag{7}$$

s'accompagne de l'émission d'un neutrino-muonique ν_μ.
La désintégration du muon s'écrit :

$$\mu^+ \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \bar{e} + \nu_e$$

et la capture du muon par des noyaux atomiques est due à la réaction :

$$\mu + p \rightarrow n + \nu_\mu$$

Dans ces réactions nous avons admis que le muon positif était l'antiparticule et le muon négatif, la particule; l'hypothèse inverse est aussi faisable et a été formulée par Konopinski et Mahmoud[4].

Si l'on appelle G_β la constante d'interaction de Fermi correspondant à la réaction (1), G_μ la constante correspondant à la réaction (8) et $G_{\mu n}$ la constante correspondant à la réaction (9), ces réactions étant décrites par un lagrangien analogue au lagrangien (4), on a trouvé de façon qualitative l'universalité des interactions faibles[5] au sens suivant :

$$G_\beta \simeq G_\mu \simeq G_{\mu n}$$

On découvrit[6] en 1956 que les lois des interactions faibles n'étaient pas invariantes par rapport à une réflexion spatiale - la parité étant violée dans ces réactions. Ainsi, le lagrangien (5) devait comprendre non seulement des termes invariants du type $(\bar{\psi}_p\gamma^\mu\psi_n)(\bar{\psi}_e\gamma_\mu\psi_{\nu_e})$ mais aussi une combinaison de termes pseudoscalaires tels que $(\bar{\psi}_p\gamma^\mu\psi_n)(\bar{\psi}_e\gamma_\mu\gamma^5\psi_{\nu_e})$. Ce fut en 1958 que Feynman et Gell-Mann et Marshak et Sudarshan[7] trouvèrent la forme du lagrangien de Fermi décrivant les réactions faibles.

2. LE LAGRANGIEN D'INTERACTION COURANT-COURANT

De nos jours on donne au lagrangien effectif pour les interactions faibles, la forme d'une interaction courant-courant :

$$L = \frac{G_F}{\sqrt{2}} j^{\lambda +}(x) j_\lambda(x) \tag{11}$$

G_F est la constante de Fermi et $j^\lambda(x)$, le courant faible total, est la somme des courants faibles leptonique et hadronique :

$$j^\lambda(x) = \ell^\lambda(x) + h^\lambda(x) .$$

Le courant leptonique est réalisé comme somme d'une partie relative à l'électron et d'une partie relative au muon :

$$\ell^\lambda = \ell^\lambda_{(e)} + \ell^\lambda_{(\mu)}$$
$$\bar{\psi}_{\nu_e}(x)\gamma^\lambda(1-\gamma^5)\psi_e(x) + \bar{\psi}_{\nu_\mu}(x)\gamma^\lambda(1-\gamma^5)\psi_\mu(x)$$

Le lagrangien L comprend ainsi une composante pour les réactions purement leptoniques : $L_{\ell\ell}$ (exemple : $\mu^- \to \nu_\mu + e + \bar{\nu}_e$), une composante pour les réactions semi-leptoniques $L_{\ell h}$ (exemple : $n \to p + e + \bar{\nu}_e$ ou $\pi^+ \to \pi^0 + e + \nu_e$), et une composante pour les réactions ne mettant que les hadrons en jeu L_{hh} (exemple : $\Lambda \to p + \pi^-$)

$$L = L_{\ell\ell} + L_{\ell h} + L_{hh}$$
$$= \frac{G_F}{\sqrt{2}}(\ell^{\lambda +}_{(e)}\ell_{(e)\lambda} + \ell^{\lambda +}_{(e)}\ell_{(\mu)\lambda} + \ell^{\lambda +}_{(\mu)}\ell_{(e)\lambda} + \ell^{\lambda +}_{(\mu)}\ell_{(\mu)\lambda}$$
$$L_{\ell h} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}(\ell^{\lambda +}_{(e)}h_\lambda + \ell^{\lambda +}_{(\mu)}h_\lambda + h^{\lambda +}\ell_{(e)\lambda} + h^{\lambda +}\ell_{(\mu)\lambda})$$
$$= \frac{G_F}{\sqrt{2}} h^{\lambda +} h_\lambda .$$

En raison des interactions fortes on ne peut pas donner une expression simple du courant hadronique en fonction d'opérateurs de champ pour les hadrons. On essaie d'obtenir les propriétés des éléments de matrice de ce courant au moyen de ses propriétés algébriques et grâce à des modèles comme le modèle des quarks.

On sait[8)] néanmoins que le courant hadronique a deux composantes - l'une pour les transitions conservant l'étrangeté, $h^\lambda_{(o)} = h^\lambda(\Delta s = 0)$, l'autre pour les transitions qui changent l'étrangeté $h^\lambda_{(1)} = h^\lambda(\Delta s \neq 0)$:

$$h^\lambda x = h^\lambda_{(o)}(x)\cos\theta_c + h^\lambda_{(1)} x)\sin\theta_c$$

θ_c est une constante, l'angle de Cabibbo. On sait aussi que les deux parties du courant hadronique sont une superposition d'une composante vectorielle et d'une composante axiale

$$h^{\lambda}_{(o)}(x) = V^{\lambda}_{(o)}(x) - A^{\lambda}_{(o)}(x) \qquad (\Delta s = 0)$$

$$h^{\lambda}_{(1)}(x) = V^{\lambda}_{(1)}(x) - A^{\lambda}_{(1)}(x) \qquad (\Delta s = 1)$$

comme pour le courant leptonique.

L'angle θ_c a été introduit par Cabibbo pour tenir compte du fait que les réactions avec changement d'étrangeté ont une amplitude plus faible (exemple : $\Lambda \to p + e + \nu_e$) que celles qui conservent l'étrangeté (exemple : $n \to p + e + \bar{\nu}_e$). L'universalité des interactions faibles est caractérisée par la première égalité des relations (10) et par le fait que le carré de la constante d'interaction, G_F^2, du courant faible leptonique est égal à la somme des carrés des constantes correspondantes au courant hadronique qui conserve l'étrangeté, $G_F^2\cos^2\theta_c$, et au courant hadronique avec changement d'étrangeté, $G_F^2\sin^2\theta_c$.

On a :

$$G_F = 1{,}02 \times 10^{-5}\ \frac{h^3}{m_p^2\ c}$$

$$\theta_c \simeq 0{,}2$$

Les propriétés du courant hadronique sont étudiées dans le modèle des quarks.

Le modèle des quarks part de l'hypothèse que les hadrons sont des états liés de trois particules fondamentales, les quarks p, n, λ, décrits chacun par un spineur de Dirac et ayant les nombres quantiques-charge Q, hypercharge Y, nombre baryonique B et isospin I-suivants :

	Q	Y	B	I
p	2/3	1/3	1/3	1/2
n	-1/3	1/3	1/3	1/2
λ	-1/3	-2/3	1/3	0

12)

Le triplet quark q(x)

$$\begin{pmatrix} p(x) \\ n(x) \\ \lambda(x) \end{pmatrix} \tag{13}$$

se transforme sous le groupe SU(3) d'après les transformations unitaires infinitésimales (somme sur a de 1 à 8) :

$$q'(x) = (I + i\,\frac{\lambda_a}{2}\,\varepsilon_a)q(x) \;,$$

où les matrices λ_a, a = 1,2 ..., 8 sont les matrices hermitiques, sans trace, à trois lignes et trois colonnes, les ε_a étant les paramètres infinitésimaux de la transformation.

Si l'on admet que les masses des quarks sont égales, m_q, l'équation de mouvement du quark libre :

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\; q(x) = 0$$

conduit à la construction du courant conservé

$$V^{\mu}_{a}(x) = \bar{q}(x)\gamma^{\mu}\,\frac{\lambda_a}{2}\,q(x)$$

$$\partial^{\mu}V_{\mu a}(x) = 0$$

et du courant axial non-conservé

$$\bar{q}(x)\gamma^{\mu}\gamma^{5}\,\frac{\lambda_a}{2}\,q(x) \;,$$

$$\partial^{\mu}A_{\mu a}(x) = m_q i\bar{q}(x)\gamma^{5}\lambda_a q(x)$$

Le courant électromagnétique est

$$h^{\mu}_{(\gamma)}(x) = V^{\mu}_{3}(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,V^{\mu}_{8}(x)$$

et le courant faible s'écrit :

$$V^{\mu}_{(0)} = V^{\mu}_{1} + iV^{\mu}_{2} \;,$$

$$V^{\mu+}_{(0)} = V^{\mu}_{1} - iV^{\mu}_{2} \;,$$

$$A^{\mu}_{(0)} = A^{\mu}_{1} + iA^{\mu}_{2} \;,$$

LE MODELE DES CHAMPS DE JAUGE UNIFIES

$$A^{\mu+}_{(0)} = A^{\mu}_{1} - iA^{\mu}_{2} ,$$
$$V^{\mu}_{(1)} = V^{\mu}_{4} + iV^{\mu}_{5} ,$$
$$V^{\mu+}_{(1)} = V^{\mu}_{4} - iV^{\mu}_{5} ,$$
$$A^{\mu}_{(1)} = A^{\mu}_{4} + iA^{\mu}_{5} ,$$
$$A^{\mu+}_{(1)} = A^{\mu}_{4} - iA^{\mu}_{5} .$$

Le fait que le courant leptonique contienne l'opérateur $1 - \gamma^5$ signifie qu'il existe uniquement des neutrinos polarisés à gauche et des anti-neutrinos polarisés à droite.

Pour distinguer l'électron (et le neutrino électronique) du muon (du neutrino muonique) l'on a introduit un nombre quantique L_e pour le premier, L_μ, pour le deuxième et l'on admet que les leptons ont les nombres quantiques suivants :

	Q	L_e	L_μ	I
ν_e	0	1	0	1/2
e	-1	1	0	1/2
ν_μ	0	0	1	1/2
μ^-	-1	0	1	1/2

Le schéma de Konopinski et Mahmoud remplace μ^- par μ^+ dans cette table. Si l'on introduit les isospineurs (le schéma ci-dessus demande un isovecteur

$$\begin{pmatrix} \mu^+ \\ \nu \\ e^- \end{pmatrix}) \qquad \psi_\ell(x) = \begin{pmatrix} \nu_\ell(x) \\ \ell(x) \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \ell = e,\mu$$

le courant faible s'écrit

$$j^\lambda(x) = \ell^\lambda(x) + h^\lambda(x)$$
$$\ell^\lambda(x) = \sum_{\ell=e,\mu} \bar{\psi}_\ell(x)\gamma^\lambda(1-\gamma^5)\tau^+\psi_\ell(x),$$
$$h^\lambda(x) = \bar{q}(x)\gamma^\lambda(1-\gamma^5)\tau^+_\theta q(x)$$

avec

$$\tau^{+} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\tau_{\theta}^{+} = \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. LES BOSONS INTERMEDIAIRES DES INTERACTIONS FAIBLES

Après la suggestion initiale de Fermi, on avait essayé de décrire les interactions faibles au moyen de composantes scalaire, vectorielle, pseudo-scalaire, axiale et tensorielle du lagrangien, d'après une superposition du type donné par l'équation (5), les combinaisons V-A et S-T+P étant invariantes par rapport au réarrangement de Fierz. Il n'y avait ainsi aucune raison de tenir à l'idée de bosons intermédiaires qui seraient les responsables des interactions faibles - l'idée de postuler un grand nombre de champs intermédiaires et de constantes d'interaction n'est pas satisfaisante.

La conception de Yukawa[9)] d'associer les pions aux interactions faibles aussi bien qu'aux interactions fortes n'avait pas abouti puisque bien que les pions donnent lieu à une interaction faible pseudo-scalaire induite ils ne peuvent pas décrire les interactions de Fermi[10)].

Dès le moment néanmoins où Feynman et Gell-Mann et Marshak et Sudarshan montrèrent que le courant faible était un quadrivecteur, l'analogie avec l'électrodynamique devint plus frappante : on pensa que l'interaction locale de Fermi courant-courant pouvait bien être due à un échange d'un boson vectoriel lourd entre les courants.

Si l'on considère par exemple la désintégration du muon

$$\mu \to \nu_{\mu} + e + \bar{\nu}_{e} ,$$

le graphe de Feynman pour l'interaction locale courant-courant (fig. 1) :

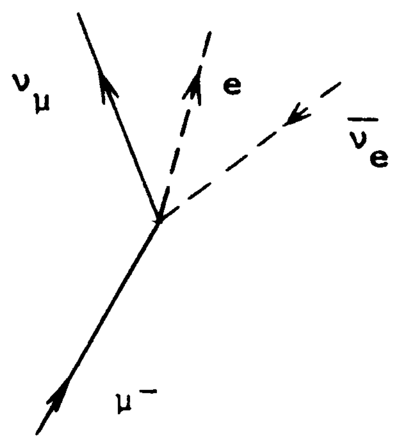

Figure 1

conduit à l'amplitude S de la réaction, qui s'écrit en première approximation, d'après les règles de Feynman[11]

$$S = -\frac{iG_F}{2}\int d^4x(\bar{\nu}_\mu(x)\gamma^\alpha(1-\gamma^5)\mu(x))(\bar{e}(x)\gamma_\alpha(1-\gamma^5)\nu_e(x)) \ .$$

L'idée que l'interaction est le résultat de l'échange d'un méson lourd W, de masse m_W, entre les courants, nous conduit à remplacer ce graphe par le diagramme de la figure 2 :

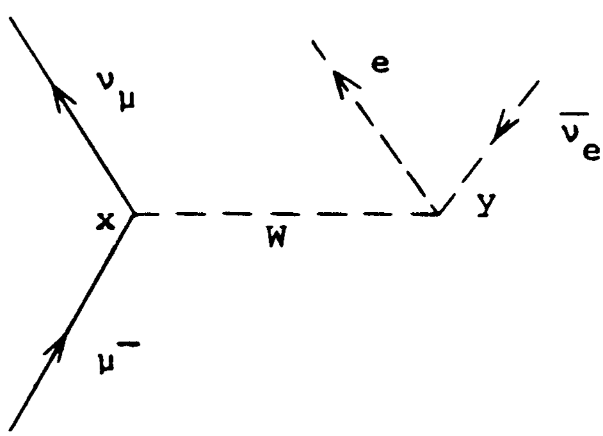

Figure 2

Si l'on désigne par $\Delta_F^{\alpha\beta}(x-y)$ le propagateur de Feynman du champ vectoriel $W^{\alpha}(x)$ associé aux mésons W, on aura pour l'amplitude correspondant à ce dernier diagramme l'expression

$$S'=-ig_W^2\iint d^4x d^4y(\bar{\nu}_\mu(x)\gamma^\alpha(1-\gamma^5)\mu(x))(\Delta_F(x-y))_{\alpha\beta}(\bar{e}(y)\gamma^\beta(1-\gamma^5)\nu_e(x)).$$

La constante g_W est la constante d'interaction entre les courants et le champ W^{α}.

Un champ vectoriel $W^{\alpha}(x)$ doté d'une masse m_W satisfait à l'équation :

$$\partial_\beta G^{\alpha\beta}(x) + m_W^2 W^\alpha(x) = \rho^\alpha(x) \ ,$$

où $\rho^\alpha(x)$ est le courant, source du champ et

$$G^{\alpha\beta}(x) = \partial^\beta W^\alpha(x) - \partial^\alpha W^\beta(x) \ .$$

Cette équation s'écrit

$$P_{\alpha\beta}W^\beta(x) = \rho_\alpha(x) \tag{15}$$

où

$$P_{\alpha\beta} = (\Box + m_W^2)g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\partial_\beta$$

est l'opérateur que nous appellerons opérateur de Proca.

Dans le vide, $\rho_\alpha(x) = 0$, l'équation

$$P_{\alpha\beta}W^\beta(x) = 0$$

doit conduire à l'équation de Klein-Gordon en raison de la relation relativiste entre l'énergie et l'impulsion. Il doit donc exister un opérateur $\pi^{\alpha\beta}$, l'opérateur de Peierls, tel que

$$\pi^{\alpha\lambda}P_{\lambda\beta} = \delta^\alpha{}_\beta(\Box + m_W^2) \ . \tag{16}$$

Une fonction de Green de l'équation de Proca $\Gamma^{\alpha\beta}(x-x')$, obéira à l'équation

$$P_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta\lambda}(x-x') = \delta_\alpha{}^{\lambda(4)}(x-x') \ .$$

Posons :

$$\Gamma^{\alpha\beta}(x-x') = \pi^{\alpha\beta}\Gamma(x-x')$$

où $\Gamma(x-x')$ est la fonction de Green correspondante de l'équation de Klein-Gordon; on aura alors encore la relation :

$$P_{\alpha\lambda}\pi^{\lambda\beta} = \delta_\alpha{}^\beta(\Box + m_W^2) \ .$$

De la définition de l'opérateur $P_{\alpha\beta}$ on déduit

$$\partial^\alpha\partial^\beta P_{\beta\lambda} = m_W^2\ \partial^\alpha\partial_\lambda$$

et par conséquent :

$$P_{\alpha\beta} + \frac{1}{m_W^2}\ \partial_\alpha\partial^\lambda P_{\lambda\beta} = (\Box + m_W^2)g_{\alpha\beta} \ . \tag{17}$$

Les équations (16) et (17) montrent que :

$$\pi^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + \frac{1}{m_W^2}\ \partial^\alpha\partial^\beta \ .$$

Une fonction de Green du champ de Proca s'obtient donc à partir d'une fonction de Green du champ de Klein-Gordon d'après la relation :

$$\Gamma^{\alpha\beta}(x-x') = (g^{\alpha\beta} + \frac{1}{m_W^2}\ \partial^\alpha\partial^\beta\ \Gamma(x-x') \ .$$

Le propagateur du méson vectoriel est donc :

$$\Delta_F^{\alpha\beta}(x-y) = (g^{\alpha\beta} + \frac{1}{m_W^2}\ \partial^\alpha\partial^\beta)\Delta_F(x-y)$$

où $\Delta_F(x-x')$ est la fonction de Feynman, c'est-à-dire :

$$\Delta_F^{\alpha\beta}(x-y) = -\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(g^{\alpha\beta} - \frac{1}{m_W^2}\ k^\alpha k^\beta)\ \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m_W^2 + i\varepsilon}$$

Dans l'espace des impulsions on obtiendra ainsi pour l'amplitude S' :

$$S'=(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\nu_\mu}+p_e+p_{\bar{\nu}_e}-p_\mu)\,\frac{(\bar{\nu}(p_{\nu\mu})(-ig_w\gamma^\alpha(1-\gamma^5)\mu(p_\mu))}{V(2E_{\nu_\mu}2E_\mu)^{\frac{1}{2}}}\,\cdot$$

$$\cdot\,\frac{i(g_{\alpha\beta}-\frac{1}{m_w^2}k_\alpha k_\beta)}{k^2-m_w^2+i\varepsilon}\,\frac{(\bar{e}(p_e)(-ig_w\gamma^\beta(1-\gamma^5)\nu(-p_{\nu_e}))}{V(2E_{\nu_e}2E_e)^{\frac{1}{2}}}$$

L'expression correspondante pour l'amplitude S sera approchée par cette formule de S' si l'on admet que le transfert d'impulsion

$$k = p_{\nu_\mu} - p_\mu$$

est très faible par rapport à la masse m_w :

$$k^2 << m_w^2$$

L'identification de S et S' dans cette approximation conduit à la relation :

$$\frac{g_w^2}{m_w^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$$

entre la constante g_w, la masse m_w et la constante de Fermi.

4. INDICATIONS D'UNE POSSIBLE UNIFICATION DES INTERACTIONS FAIBLES ET ELECTROMAGNETIQUES

Pour calculer la masse m_w on doit connaître la constante d'interaction g_w. Puisque le méson W est vectoriel, l'auteur[12)] a suggéré en 1958 que cette constante d'interaction g_w était égale à la charge e, constante d'interaction d'un autre boson vectoriel, le photon, avec la matière :

$$g_w = e$$

Dans ces conditions la masse m_w a une valeur de l'ordre de 40 masses protoniques.

Dans le même article, l'auteur suggérait l'existence de mésons vectoriels chargés $W^\pm$ et de mésons vectoriels neutres W^0 et essayait sans succès d'éliminer les réactions non observées produites par les courants neutres. Par conséquent, l'hypothèse

g_W = e indiquait pour la première fois que les mésons W et les photons appartenaient à la même famille et que les interactions électromagnétiques et faibles avaient la même origine. Nous verrons plus avant le développement élégant et précis de ces idées élaboré par Weinberg et par Salam et Ward[13)].

La théorie de Fermi n'est pas renormalisable : les intégrales divergentes des amplitudes d'ordre supérieur au premier ne sont pas absorbées dans la renormalisation de la masse et de la constante d'interaction. La théorie des mésons vectoriels qui ont une masse n'est pas renormalisable non plus : elle n'a pas d'invariance de jauge et le propagateur de Feynman possède un terme quadratique dans l'impulsion des mésons virtuels qui contribue à la divergence des amplitudes d'ordre supérieur au premier.

L'idée de Salam et Ward et de Weinberg a été de décrire les bosons vectoriels par des champs à masse nulle, ayant une invariance de jauge de Yang-Mills, et donc renormalisables. Et ensuite d'introduire une cassure spontanée de la symétrie pour établir, d'après le mécanisme de Higgs, la masse de ces mésons.

Un progrès important a été accompli par 't Hooft et Veltman[14)] (et Bollini et Giambiagi[15)]), qui ont démontré que la théorie reste renormalisable - si la renormalisabilité d'une théorie n'est pas nécessairement un critère de sa véracité il est, néanmoins, un critère nécessaire à la vérification de la théorie, au moyen du calcul, d'effets observables.

5. L'ALGEBRE DES COURANTS

On peut établir une relation entre les constantes g_W et e si l'on impose au lagrangien des interactions faibles et électromagnétiques de s'écrire sous la forme d'indépendance de charge; soit

$$L = L_W + L_\gamma \tag{18}$$

où :

$$L_\gamma = e j^\mu_{(\gamma)}(x) A_\mu(x)$$

est le lagrangien d'interaction électromagnétique avec :

$$j^\mu_{(\gamma)}(x) = \ell^\mu_{(\gamma)}(x) + h^\mu_{(\gamma)}(x) \ ,$$

$$\ell^{\lambda}_{(\gamma)}(x) = \bar\psi_e(x)\gamma^{\lambda}\psi_e(x) + \bar\psi_{\mu}(x)\gamma^{\lambda}\psi_{\mu}(x)$$

où $h^{\mu}_{(\gamma)}(x)$ désigne le courant électromagnétique des hadrons et $\ell^{\mu}_{(\gamma)}(x)$ le courant électromagnétique leptonique;

$$L_w = g_w(j^{\lambda}_w(x)W^{+}_{\lambda}(x) + j^{\lambda +}_w(x)W_{\lambda}(x)) + g_o j^{\lambda}_{(o)}(x)W_{(o)\lambda}(x)$$

où $j^{\lambda}_{(o)}(x)$ indique un possible courant faible neutre et $W^{\lambda}_{(o)}(x)$ un champ vectoriel hermitique.

Ecrire le lagrangien L sous la forme d'indépendance de charge revient à l'écrire

$$L = g\sum_a j^{\lambda}_a(x)\ W_{\lambda a}(x)$$

où g est fonction de g_w, g_o et e et les quatre champs $W_{\lambda a}$ et courants $j_{\lambda a}$ sont fonctions des champs et courants du lagrangien (18). La charge électrique des champs leptoniques est

$$Q^{(\ell)}_{(\gamma)} = -\int d^3x(\psi^{+}_e(x)\psi_e(x) + \psi^{+}_{\mu}(x)\psi_{\mu}(x)) \ .$$

Par analogie avec cet opérateur on définit la <u>charge faible</u> des champs leptoniques :

$$Q^{(\ell)}_w = \int d^3x(\psi^{+}_{\nu e}(1-\gamma^5)\psi_e + \psi^{+}_{\nu_\mu}(1-\gamma^5)\psi_{\mu})$$

et son adjoint :

$$Q^{(\ell)+}_w = \int d^3x(\psi^{+}_e(1-\gamma^5)\psi_{\nu e} + \psi^{+}_{\mu}(1-\gamma^5)\psi_{\nu_\mu}) \ .$$

Ces opérateurs dépendent du temps puisque les courants associés ne se conservent pas. A partir des règles de commutation des champs leptoniques

$$\{\psi_{\ell}(x),\psi_{\ell}(x')\}_o = \{\psi_{\nu_\ell}(x),\ \psi_{\nu_\ell}(x')\}_o = \delta(\underline{x}-\underline{x}')$$

(où $\ell = e,\mu$ et où $\{\ \}_o$ désigne l'anticommutateur pour $x_o = x'_o$, les anticommutateurs entre les $\psi(x)$ et $\psi(x')$ et entre les $\psi^{+}(x)$ et $\psi^{+}(x')$ étant nuls) et de l'identité :

$$\left[AB,CD\right] = -AC\{D,B\} + A\{C,B\}\ D + \{C,A\}\ DB - C\ \{A,D\}\ B$$

on trouve les commutateurs suivants :

$$\left[\psi^+_{\nu_\ell}(x)\psi_\ell(x),\ \psi^+_\ell(x')\psi_{\nu_\ell}(x')\right]_o =$$

$$= \left[\psi^+_{\nu_\ell}(x)\gamma^5\psi_\ell(x),\ \psi^+_\ell(x')\gamma^5\psi_{\nu_\ell}(x')\right]_o =$$

$$= (\psi^+_{\nu_\ell}(x)\psi_{\nu_\ell}(x') - \psi^+_\ell(x')\psi_\ell(x))_o\ \delta(\underline{x}-\underline{x}')\ ,$$

$$\left[\psi^+_{\nu_\ell}(x)\psi_\ell(x),\ \psi^+_\ell(x')\gamma^5\psi_{\nu_\ell}(x')\right]_o =$$

$$= (\psi^+_{\nu_\ell}(x)\gamma^5\psi_{\nu_\ell}(x') - \psi^+_\ell(x')\gamma^5\psi_\ell(x'))_o\ \delta(\underline{x}-\underline{x}')$$

avec $\ell = e,\mu$.

On peut alors déterminer aisément le commutateur de la charge faible leptonique $Q^{(\ell)}_w$ avec son adjoint $Q^{(\ell)}_w$.

On trouve

$$\left[Q^{(\ell)}_w\ ,\ Q^{(\ell)+}_w\right] = 2Q^{(\ell)}_{w3}$$

où ces opérateurs sont pris au même instant et :

$$Q^{(\ell)}_{w3} = \int d^3x \sum_{\ell=e,\mu} (\psi^+_{\nu_\ell}(x)(1-\gamma^5)\psi_{\nu_\ell}(x) - \psi^+_\ell(x)(1-\gamma^5)\psi_\ell(x))\ .$$

On trouve encore :

$$\left[Q^{(\ell)}_{w3}\ ,\ Q^{(\ell)}_w\right] = 4Q^{(\ell)}_w\ ,$$

$$\left[Q^{(\ell)}_{w3}\ ,\ Q^{(\ell)+}_w\right] = -4Q^{(\ell)+}_w\ .$$

En posant

$$Q^{(\ell)}_w = 2K_+\ ,$$

$$Q^{(\ell)+}_w = 2K^+_+ = 2K_-\ ,$$

$$Q_{w3}^{(\ell)} = 4K_3$$

ces commutateurs deviennent :

$$\left[K_+ \; , \; K_-\right] = 2K_3 \; ,$$
$$\left[K_3 \; , \; K_+\right] = K_+ \; ,$$
$$\left[K_3 \; , \; K_-\right] = -K_- \; .$$

Ils définissent l'algèbre Su(2), l'algèbre des moments angulaires. Etant donnée l'expression de K_+, K_-, K_3

$$K_+ = \frac{1}{2}\int d^3x \sum_\ell \psi^+_{\nu_\ell} (1-\gamma^5)\psi_\ell \; ,$$
$$K_- = \frac{1}{2}\int d^3x \sum_\ell \psi^+_\ell \; (1-\gamma^5)\psi_{\nu_\ell} ,$$
$$K_3 = \frac{1}{4}\int d^3x \sum_\ell \; \psi^+_{\nu_\ell}(1-\gamma^5) \; \psi_{\nu_\ell} \; - \psi^+(1-\gamma^5)\psi_\ell) \; ,$$

l'on peut utiliser le formalisme de l'isospin et poser

$$\psi_\ell(x) = \begin{pmatrix} \psi_{\nu_\ell}(x) \\ \\ \psi_\ell \; (x) \end{pmatrix}, \; \ell = e,\mu .$$

Il viendra :

$$K_+ = \frac{1}{2}\int d^3x \sum_\ell \psi^+_\ell(1-\gamma^5) \; \frac{\tau_+}{2} \; \psi_\ell \; ,$$
$$K_- = \frac{1}{2}\int d^3x \sum_\ell \psi^+_\ell(1-\gamma^5) \; \frac{\tau_-}{2} \; \psi_\ell \; ,$$
$$K_3 = \frac{1}{2}\int d^3x \sum_\ell \psi^+_\ell(1-\gamma^5) \; \frac{\tau_3}{2} \; \psi_\ell$$

où les matrices d'isospin

$$\tau_+ = \tau_1 + i\,\tau_2 \qquad , \qquad \tau_- = \tau_1 - i\,\tau_2 \; , \qquad \tau_3$$

agissent sur l'isospineur $\psi_\ell(x)$.

Si l'on pose donc

$$K_+ = K_1 + iK_2 \;,\; K_- = K_1 - iK_2$$

on obtient l'isovecteur

$$K_a = \frac{1}{2}\int d^3x \sum_{\ell} \psi_\ell^+ (1-\gamma^5)\, \frac{\tau_a}{2}\, \psi_\ell \qquad a = 1, 2, 3$$

qui satisfait aux commutateurs

$$\left[K_a, K_b\right] = i\, \varepsilon_{abc}\, K_c \tag{19}$$

ε_{abc} est le tenseur totalement antisymétrique.

Pour montrer qu'on a affaire ici, en réalité, à une algèbre $SU(2) \oplus SU(2)$, il faut expliciter les composantes polaire et axiale des K_a

$$K_a = \frac{1}{2}\,(K_a^V - K_a^A)$$

où

$$K_a^V = \sum_\ell \int d^3x\; \psi_\ell^+ \frac{\tau_a}{2}\, \psi_\ell \;,$$

$$K_a^A = \sum_\ell \int d^3x\; \psi_\ell \gamma^5 \frac{\tau_a}{2}\, \psi_\ell \;,$$

Si l'on introduit alors l'isovecteur :

$$L_a = \frac{1}{2}\,(K_a^V + K_a^A)$$

les règles de commutation (19) seront satisfaites par les commutateurs :

$$\left[K_a^V, K_b^V\right] = \left[K_a^A, K_b^A\right] = i\,\varepsilon_{abc}\, K_c^V \;,$$

$$\left[K_a^V, K_b^A\right] = i\,\varepsilon_{abc}\, K_c^A$$

et donc :

$$\left[L_a, L_b\right] = i\,\varepsilon_{abc}\, L_c$$

$$\left[K_a, K_b\right] = i\,\varepsilon_{abc}\, K_c$$

$$\left[L_a, K_b\right] = 0 \;, \qquad a,b = 1, 2, 3$$

qui définissent bien l'algèbre SU(2)⊕SU(2).

Ainsi donc les charges faibles $Q_W^{(\ell)}$, $Q_W^{(\ell)+}$, $Q_{W3}^{(\ell)}$ se transforment comme $2K_+$, $2K_-$, $4K_3$ respectivement. Pour voir les propriétés analogues de la charge électrique, définissons les nombres leptoniques

$$N_\ell = \int d^3x\ \psi_\ell^+ \psi_\ell\ , \qquad \ell = e,\mu.$$

La charge $Q_{(\gamma)}^{(\ell)}$ s'écrit :

$$Q_{(\gamma)}^{(\ell)} = -\int d^3x \sum_\ell \psi_\ell^+ \frac{1-\tau_3}{2} \psi_\ell\ ,$$

c'est-à-dire

$$Q_{(\gamma)}^{(\ell)} = K_3^V - \frac{1}{2}\sum_\ell N_\ell\ . \tag{20}$$

Comme on le sait, l'expérience suggère que les nombres leptoniques N_ℓ se conservent. Par conséquent, les N_ℓ doivent commuter avec les opérateurs qui décrivent des variables physiques. Sinon, on déduirait de l'hypothèse

$$\left[N_\ell,\ \Omega\right] \neq 0$$

que

$$\langle \ell | \left[N_\ell,\ \Omega\right] | \ell' \rangle \neq 0$$

où ℓ est un état propre de l'opérateur N_ℓ avec valeur propre n_ℓ

$$(n_\ell - n_{\ell'}) \langle \ell | \Omega | \ell' \rangle \neq 0\ .$$

Par conséquent, si $n_\ell \neq n_{\ell'}$, on aurait $\langle \ell | \Omega |_{\ell'} \rangle \neq 0$ et l'on pourrait produire une transition de l'état ℓ à l'état ℓ' ce qui est impossible si l'on admet la règle de super-sélection pour les nombres leptoniques. On déduit de la propriété de N_ℓ que ces opérateurs sont des multiples de l'identité, que la charge $Q_{(\gamma)}^{(\ell)}$ commute de la manière suivante avec K_+, K_-, K_3 :

$$\begin{aligned}\left[Q_{(\gamma)}^{(\ell)}\ ,\ K_+\right] &= \left[K_3^V,\ K_+\right] = \\ &= \left[K_3 + L_3,\ K_+\right] = \\ &= \left[K_3,\ K_+\right] =\end{aligned}$$

$$= K_+ ,$$

$$\left[Q^{(\ell)}_{(\gamma)}, K_-\right] = -K_-$$

$$\left[Q^{(\ell)}_{(\gamma)}, K_3\right] = 0 .$$

On en conclut que $Q^{(\ell)}_{(\gamma)}$ est de la forme :

$$Q^{(\ell)}_{(\gamma)} = K_o + K_3$$

où K_o est un opérateur qui commute avec K_1, K_2, K_3

$$\left[K_o, K_a\right] = 0 \quad , \quad a = 1, 2, 3$$

et K_o, K_1, K_2, K_3 engendrent l'algèbre $U(1)\oplus SU(2)$.

En effet de l'expression (20) de $Q^{(\ell)}_{(\gamma)}$ on peut déduir

$$Q^{(\ell)}_{(\gamma)} = L_3 + K_3 - \frac{1}{2}\sum_{\ell} N_\ell$$

d'où

$$K_o = L_3 - \frac{1}{2}\sum_{\ell} N_\ell$$

6. UN LAGRANGIEN INDEPENDANT DE CHARGE ET LA RELATION ENTRE g_W ET e

Le résultat de ces manipulations est que $Q^{(\ell)}_{W}$ se transforme comme $2K_+$, $Q^{(\ell)+}_{W}$ comme $2K_-$ et $Q^{(\ell)}_{(\gamma)}$ comme $K_o + K_3$.

La définition de ces opérateurs nous amène à dire que, par une rotation du spin -K, le courant ℓ^μ_W se transforme comme $2K_+$, $\ell^{\mu+}_W$ comme $2K_-$ et $\ell^\mu_{(\gamma)}$ comme $K_o + K_3$.

On supposera que cette propriété est valable pour les courants hadroniques correspondants et donc pour les courants totaux:

$j^\mu_W(x)$ se transforme comme $2K_+$,

$j^\mu_W(x)$ " " " $2K_-$,

$j^\mu_{(\gamma)}(x)$" " " $K_o + K_3$.

Nous écrivons donc, η étant un nombre :

$$j_w^\mu(x) = \eta(j_1^\mu(x) + i\, j_2^\mu(x)),$$
$$j_w^{\mu+}(x) = \eta(j_1^\mu(x) - i\, j_2^\mu(x)),$$
$$j_{(\gamma)}^\mu(x) = j_3^\mu(x) + j_o^\mu(x),$$

Posons :

$$j_{(o)}^\mu(x) = -j_3^\mu(x) + j_o^\mu(x) .$$

On introduira alors les champs hermitiques $W_1(x)$, $W_2(x)$, $W_3(x)$, $V(x)$ par les relations

$$W^\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(W_1^\lambda(x) + i\, W_2^\lambda(x)),$$
$$W^{\lambda+}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(W_1^\lambda(x) - i\, W_2^\lambda(x)),$$
$$A^\lambda(x) = \frac{1}{2}\,(W_3^\lambda(x) + V^\lambda(x)),$$
$$W_{(o)}^\lambda(x) = \frac{1}{2}\,(W_3^\lambda(x) - V^\lambda(x))$$

et le lagrangien

$$L = e j_{(\gamma)}^\mu A_\mu + g_w(j_w^\lambda W_\lambda^+ + j_w^{\lambda+} W_\lambda) + g_o j_{(o)}^\lambda W_{(o)\lambda}$$

deviendra :

$$L = e\,(j_1^\lambda W_{1\lambda} + j_2^\lambda W_{2\lambda} + j_3^\lambda W_{3\lambda} + j_o^\lambda V_\lambda)$$

dès le moment où les constantes d'interaction satisfont aux relations

$$e = -g_o = \frac{2\eta g_w}{\sqrt{2}} \tag{21}$$

Pour mettre sur un pied d'égalité les interactions électromagnétiques et les interactions faibles sous la forme d'un lagrangien indépendant de la charge, on devrait donc avoir une relation entre la charge et les constantes d'interaction g_w et g_o, du type indiqué ci-dessus.

Si l'on pose $\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans l'équation (21) on obtient[12] l'égalité $g_w = e$. Pour $\eta = 2$ la relation

$$e = \frac{4g_w}{\sqrt{2}}$$

a été établie par T.D. Lee[16]. Nous verrons que le modèle de Salam et Weinberg relie les champs W^λ et A^λ à un champ de Yang-Mills $\mathcal{A}_a^\lambda$ et à un champ vectoriel B^λ. La relation (21) sera remplacée par une autre plus générale (voir (33)).

7. LE CHAMP DE YANG-MILLS

Il faut maintenant que nous précisions la nature du champ de jauge de Yang-Mills[17]. Ce champ est un champ vectoriel avec isospin égal à 1 et à masse nulle, qui interagit avec un courant d'isospin qui se conserve. Si l'on désigne par $\mathcal{A}_a^\mu(x)$, a = 1,2,3, un triplet de champs vectoriels, les équations de ces champs seront

$$\partial_\nu G_a^{\mu\nu}(x) = j_a^\mu(x) \,, \qquad a = 1,2,3$$

où $j_a^\mu(x)$ est le courant d'isospin. Puisque $G_a^{\mu\nu}(x)$ est un tenseur antisymétrique, $j_a^\mu(x)$ sera un courant conservé. L'équation d'un spineur de masse M qui interagit avec $\mathcal{A}_a^\mu(x)$ doit être du type :

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi(x) = g\gamma^\lambda \frac{\tau_a}{2}\psi_{(x)}\mathcal{A}_{a\lambda}(x)$$

g étant la constante d'interaction (somme sous-entendue sur a, de 1 à 3).

Les règles de Yang-Mills pour trouver ces équations et la forme du tenseur $G_a^{\mu\nu}(x)$ sont les suivantes :

a) remplacez $i\partial_\mu\psi(x)$ pour un spineur libre

par $$\left[i\partial_\mu - g\mathcal{A}_{a\mu}(x)\frac{\tau_a}{2}\right]\psi(x) \qquad (22)$$

pour un spineur en interaction avec $\mathcal{A}_a^\mu$;

b) remplacez $i\partial^\mu\mathcal{A}_a^\nu(x)$ par :

$$\left[i\partial^\mu - \frac{1}{2}g\,\mathcal{A}_b^\mu L_b\right]\mathcal{A}_a^\nu(x) \qquad (23)$$

pour le champ vectoriel, où

$$(L_b)_{ac} = i\ \varepsilon_{abc}$$

ε_{abc} est le tenseur totalement antisymétrique.

Le lagrangien de Yang-Mills s'écrit :

$$L = -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{a\mu\nu} + \bar{\psi}\gamma^\mu (i\partial_\mu - g\mathcal{A}_{a\mu} \frac{\tau_a}{a})\psi - M\bar{\psi}\psi \tag{24}$$

où

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\nu \mathcal{A}_a^\mu - \partial^\mu \mathcal{A}_a^\nu - g\varepsilon_{abc} \mathcal{A}_b^\nu \mathcal{A}_c^\mu$$

contient une auto-interaction du champ $\mathcal{A}_a^\mu$.

Le courant d'isospin est la somme d'une partie provenant du spineur et d'une autre partie provenant du champ vectoriel :

$$j_a^\mu(x) = g\{\bar{\psi}\gamma^\mu \frac{\tau_a}{2}\psi - \varepsilon_{abc}\ G_b^{\mu\nu} \mathcal{A}_{c\nu}\} .$$

Le lagrangien ci-dessus est invariant par rapport aux transformations de jauge suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_a^{\mu'}(x) &= \mathcal{A}_a^\mu(x) - \partial^\mu \Lambda_a(x) - g\varepsilon_{abc}\Lambda_b(x)\mathcal{A}_c^\mu(x) , \\ \psi'(x) &= (I + ig\Lambda_a(x)\frac{\tau_a}{2})\ \psi(x) \end{aligned} \tag{25}$$

où les fonctions de jauge sont soumises à l'équation

$$\Box\Lambda_a(x) + g\varepsilon_{abc}\ \partial_\mu\ \Lambda_b(x) \cdot \mathcal{A}_c^\mu(x) = 0$$

si le champ vectoriel satisfait à la condition de Lorentz.

Ni le courant ni le tenseur du champ ne sont des invariants de jauge :

$$j_a^{\mu'}(x) = j_a^\mu(x) - g\varepsilon_{abc}\{\Lambda_b(x) j_c^\mu(x) + \partial_\nu \Lambda_b(x) \cdot G_c^{\mu\nu}(x)\} ,$$

$$G_a^{\mu\nu'}(x) = G_a^{\mu\nu}(x) - g\varepsilon_{abc}\Lambda_b(x)\ G_c^{\mu\nu}(x) ,$$

mais le lagrangien (24) est invariant.

Le champ de Yang-Mills est donc un champ de jauge plus général que le champ électromagnétique. Les transformations de jauge de l'électrodynamique

$$A'^{\mu}(x) = A^{\mu}(x) - \partial^{\mu}\Lambda(x)$$

$$\psi'(x) = (I + ie\Lambda(x))\psi(x)$$

sont généralisées par les transformations (25). A la dérivée covariante électromagnétique $i\partial_{\mu} - eA_{\mu}$ correspond la dérivée covariante de Yang-Mills (22); pour le champ électromagnétique le produit vectoriel correspondant à celui qui apparaît dans l'opération (23) est évidemment nul.

8. LE MODELE DES CHAMPS DE JAUGE UNIFIES

Tournons-nous à présent vers le modèle des champs de jauge unifiés dans le cas simple de l'interaction faible du champ électron-neutrino électronique avec lui-même.

Tout d'abord remarquons qu'étant donnée l'équation d'un fermion libre de masse m

$$(i\gamma^{\alpha}\partial_{\alpha} - m)\,\psi(x) = 0$$

sa masse peut être considérée comme le résultat de l'interaction d'un tel fermion sans masse avec un champ scalaire $\phi(x)$

$$(i\gamma^{\alpha}\partial_{\alpha} - g\phi(x))\,\psi(x) = 0$$

si on admet que ce champ scalaire a une valeur moyenne dans le vide différente de zéro et réelle :

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \lambda \neq 0$$

En effet si l'on pose alors

$$\phi(x) = \lambda + \Phi(x)$$

où

$$\langle 0|\Phi(x)|0\rangle = 0$$

on obtiendra l'équation d'un fermion de masse

$$m = \lambda g$$

en interaction avec le champ scalaire $\Phi(x)$:

$$(i\gamma^\alpha \partial_\alpha - g\lambda - g\Phi(x))\psi(x) = 0$$

Cela n'étant possible que pour un champ scalaire nous aurons besoin d'une interaction de l'électron avec un tel champ si la masse m_e est censée être générée par ce mécanisme, le mécanisme de Higgs[18].

Rappelons que le neutrino est toujours polarisé à gauche; son opérateur sera donc de la forme :

$$\nu_L(x) = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\nu(x) \ .$$

Comme l'électron réel a une masse, $e(x)$ sera réalisé comme une superposition d'une composante à gauche et d'une composante à droite :

$$e(x) = e_L(x) + e_R(x)$$

Le neutrino étant toujours associé à l'électron il est naturel de considérer l'isospineur :

$$L(x) = \begin{pmatrix} \nu_L(x) \\ e_L(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\begin{pmatrix} \nu(x) \\ e(x) \end{pmatrix}$$

On aura aussi :

$$R(x) = e_R(x) = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)e(x)$$

qu'il faudra introduire dans l'expression du lagrangien.

Soit à écrire la partie du lagrangien qui se rapporte à l'électron et au neutrino et à leur interaction avec un champ scalaire de telle sorte qu'on obtienne une masse pour l'électron d'après le mécanisme de Higgs[18] et pas de masse pour le neutrino. Puisque :

$$(1 + \gamma^5)(1 - \gamma^5) \equiv 0$$

on aura :

$$\bar{L}L = \bar{R}R = 0$$

ce qui est une autre manière d'exprimer le fait que les particules polarisées n'ont pas de masse.

Par conséquent le champ $\phi(x)$ devra être complexe et devra apparaître dans l'interaction avec les leptons sous la forme

$$G\{\bar{L}\,\phi\,R + \bar{R}\phi^{+}\,L\} \; . \tag{26}$$

Comme $\bar{L}$ est un isospineur et R un isoscalaire, il faudra que ϕ soit un isospineur pour que cette expression soit isoinvariante :

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \chi(x) \\ \phi_o(x) \end{pmatrix} \; . \tag{26a}$$

On trouve alors :

$$G(\bar{L}\,\phi\,R + \bar{R}\phi^{+}L) =$$

$$= G((\bar{\nu}\;\bar{e})\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\binom{\chi}{\phi_o}\frac{1}{2}(1+\gamma^5)e + \bar{e}\,\frac{1}{2}(1-\gamma^5)(\chi^{+}\phi_o^{+})\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\binom{\nu}{e})) \; .$$

Si l'on pose

$$\phi_o(x) = \lambda + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$$

le lagrangien de l'électron et du neutrino en interaction avec le scalaire $\phi(x)$ sera :

$$\begin{aligned} L_e &= -\bar{L}i\gamma^{\alpha}\partial_{\alpha}L - \bar{R}i\gamma^{\alpha}\partial_{\alpha}R + G(\bar{L}\phi R + \bar{R}\phi^{+}L) = \\ &= -\bar{e}(i\gamma^{\alpha}\partial_{\alpha} - m_e)e - \bar{\nu}_L i\gamma^{\alpha}\partial_{\alpha}\nu_L + \\ &\quad + G((\bar{\nu}_L e_R)\chi(x) + (\bar{e}_R\nu_L)\chi^{+}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}((\bar{e}_L e_R)(\phi_1 + i\phi_2) + \\ &\quad + (\bar{e}_R e_L)(\phi_1 - i\phi_2)) \end{aligned}$$

où la masse de l'électron est donnée par :

$$m_e = \lambda\,G \tag{26b}$$

ce qui impose à λ la condition d'être réel puisque G, d'après la forme de l'interaction ci-dessus, est réel et que λG est positif strictement.

Comme la théorie doit décrire les interactions faibles, dues à un champ vectoriel complexe W^μ, $W^{\mu +}$ de masse m_W, et les interactions électromagnétiques provenant du champ $A^\mu(x)$ à masse nulle, la théorie devra contenir au moins trois champs vectoriels.

Associé à l'isospineur L(x) des leptons gauches il y aura un courant

$$j^\mu_a(x) = \bar{L}(x)\gamma^\mu \frac{\tau_a}{2} L(x) , \qquad a = 1,2,3.$$

On introduira alors un champ vectoriel de jauge, de Yang-Mills, qui interagira avec ce courant. Ce sera un champ vectoriel isovecteur, c'est-à-dire un triplet de champs vectoriels $\mathcal{A}^\lambda_a(x)$, $a = 1,2,3$.

Or de la même manière que l'opérateur de la charge est l'intégrale spatiale de la composante zéro du courant électrique, l'opérateur d'isospin est l'intégrale spatiale de la composante zéro du courant d'isospin :

$$T_a = \int d^3x \; L^+(x) \frac{\tau_a}{2} L(x) \quad .$$

Ces trois opérateurs sont les générateurs du groupe SU(2) que laisse invariante la partie cinématique du lagrangien des leptons

$$- \bar{L}\gamma^\lambda i\partial_\lambda L - \bar{R}\gamma^\lambda i\partial_\lambda R \; .$$

Le groupe plus général de symétrie est le groupe $U(1)\otimes SU(2)$, avec en plus le nombre leptonique total $N = N_L + N_R$ comme générateur. Si l'on peut associer le champ $\mathcal{A}^\lambda_a$ à la symétrie de l'isospin aucun champ vectoriel de masse nulle connu ne peut être associé à la conservation du nombre N[19]. Weinberg choisit alors l'hypercharge

$$Y = N_R + \frac{1}{2} N_L$$

comme générateur à côté des trois T_a.

Le courant associé à Y est :

$$j^\mu_\gamma(x) = \bar{R}\gamma^\mu R + \tfrac{1}{2}\bar{L}\gamma^\mu L$$

et l'on introduira un champ vectoriel B^μ qui interagira avec ce courant. La partie du lagrangien correspondant à ces champs vectoriels de masse nulle sera :

$$L_v = -\frac{1}{4}G_a^{\mu\nu}G_{a\mu\nu} + g\bar{L}\gamma^\lambda \frac{\tau_a}{2}\mathcal{A}_{a\lambda}L - $$

$$-\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + g'(\bar{R}\gamma^\mu R + \tfrac{1}{2}\bar{L}\gamma^\mu L)B_\mu$$

où

$$G_a^{\mu\nu}(x) = \partial^\nu \mathcal{A}_a^\mu(x) - \partial^\mu \mathcal{A}_a^\nu(x) - g\varepsilon_{abc}\mathcal{A}_b^\nu(x)\mathcal{A}_c^\mu(x) ,$$

$$B^{\mu\nu}(x) = \partial^\nu B^\mu(x) - \partial^\mu B^\nu(x) ,$$

avec une somme sous-entendue sur a, b, c de 1 à 3.

Il nous reste à compléter le lagrangien $L_{e\phi}$ avec l'inclusion de la partie libre du champ scalaire $\phi(x)$ qui sera en interaction avec les champs $\mathcal{A}_a^\mu$ et B^μ et en interaction quartique avec lui-même. Cette dernière interaction est de la forme $f(\phi^+(x)\phi(x))^2$ tandis que la première résulte des règles de Yang-Mills pour définir la dérivée d'un champ donné en présence de champs de jauge de Yang-Mills.

Les règles de jauge de Yang-Mills sont les suivantes, pour la différentiation covariante en présence de $\mathcal{A}_a$ et B^μ :

d'un spineur singlet R :

$$(i\partial^\mu - g'B^\mu)\ R$$

d'un spineur isospineur L :

$$(i\partial^\mu - \tfrac{1}{2}g'B^\mu - g\frac{\tau_a}{2}\mathcal{A}_a^\mu)L ,$$

d'un scalaire isospineur :

$$(i\partial^\mu + \tfrac{1}{2}g'B^\mu - g\frac{\tau_a}{2}\mathcal{A}_a^\mu)\phi .$$

Le signe de g' dans la dernière expression est choisi de telle sorte que, comme on le verra, le champ électromagnétique ait une masse nulle ou qu'il n'interagisse pas avec le champ $\phi_o(x)$.

Le lagrangien complet s'écrira donc :

$$L = -\bar{L}\gamma^{\alpha}(i\partial_{\alpha} - \tfrac{1}{2}g'B^{\mu} - g\frac{\tau_a}{2}\mathcal{A}_{a\alpha})L -$$

$$-\bar{R}\gamma^{\alpha}(i\partial_{\alpha} - g'B_{\alpha})R + G(\bar{L}\phi R + \bar{R}\phi^{+}L) -$$

$$-\tfrac{1}{4}G_{a}^{\mu\nu}G_{a\mu\nu} - \tfrac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \tag{26c}$$

$$+(\partial^{\mu}\phi^{+} - ig\phi^{+}\frac{\tau_a}{2}\mathcal{A}_{a}^{\mu} + i\frac{g'}{2}\phi^{+}B^{\mu})(\partial_{\mu}\phi + ig\frac{\tau_a}{2}\mathcal{A}_{a\mu}\phi - i\frac{g'}{2}B_{\mu}\phi) -$$

$$-M^2\phi^{+}\phi + f(\phi^{+}\phi)^2$$

où M désigne le paramètre de masse du champ ϕ.

Le champ $\phi(x)$ est le doublet (26a) et l'on pose maintenant

$$\phi_o(x) = \lambda\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x)).$$

La substitution de ϕ_o par cette expression dans L donné ci-dessus, permet d'obtenir, entre autres, des termes linéaires en $\phi_1(x)$:

$$\sqrt{2}\,(-\lambda M^2 + 2\lambda^3 f)\phi_1 ;$$

des termes quadratiques en $\phi_1(x)$:

$$(-\tfrac{1}{2}M^2 + 3f\lambda^2)\,\phi_1^2 ; \tag{27a}$$

des termes quadratiques en $\phi_2(x)$:

$$(-\tfrac{1}{2}M^2 + f\lambda^2)\,\phi_2^2 ; \tag{27b}$$

des termes en $\chi^{+}(x)\chi(x)$:

$$(-M^2 + 2f\lambda^2)\,\chi^{+}\chi . \tag{27c}$$

Si l'on annule les termes linéaires en $\phi_1(x)$ (ces termes impliqueraient des vertices avec absorption d'un méson ϕ_1 dans le vide) on obtient les deux solutions en λ :

$$\lambda = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2 = \frac{M^2}{2f}$$

Comme on impose λ non nul, il restera

$$\lambda = \sqrt{\frac{M^2}{2f}}$$

On obtient ainsi deux possibilités pour λ réel et positif

$$M^2 > 0 \quad , \quad f > 0$$

$$M^2 < 0 \quad , \quad f < 0 \; .$$

Les termes indiqués en (27) deviennent, avec la valeur (26b) de λ (si l'on additionne les termes

$$\tfrac{1}{2}\, \partial^\mu\phi_1\partial_\mu\phi_1 \;,\; \tfrac{1}{2}\, \partial^\mu\phi_2\partial_\mu\phi_2 \;,\; \partial^\mu\chi^+\partial_\mu\chi$$

du lagrangien)

$$\tfrac{1}{2}\, \partial^\mu\phi_1\partial_\mu\phi_1 + M^2\phi_1^2 + \tfrac{1}{2}\, \partial^\mu\phi_2\partial_\mu\phi_2 + \partial^\mu\chi^+\partial_\mu\chi \; .$$

On obtient ainsi un champ ϕ_2, qui a, comme le champ χ, une masse nulle. Le champ ϕ_1 aura, lui, une masse m_ϕ telle que

$$-\tfrac{1}{2}\, m_\phi^2 = M^2 \qquad \text{avec} \qquad m_\phi^2 > 0 \; .$$

On devra donc imposer

$$M^2 < 0 \quad , \quad f < 0$$

de sorte que

$$m_\phi = \sqrt{2|M^2|} \; .$$

Dans L on trouvera, d'autre part, les termes suivants (une somme est sous-entendue sur a de 1 à 3)

$$-\tfrac{1}{4}\, G_a^{\mu\nu}G_{a\mu\nu} + \frac{\lambda^2g^2}{4}\,\mathcal{A}_a^\mu\mathcal{A}_{\mu a} - \tfrac{1}{4}\, B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \frac{\lambda^2g'^2}{4}\, B^\mu B_\mu + \frac{\lambda^2gg'}{2}\,\mathcal{A}_3^\mu B_\mu \; .$$

Si l'on introduit à présent les champs W^μ, $W^{\mu+}$

$$W^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{A}_1^\mu + i\mathcal{A}_2^\mu) \; ,$$
$$W^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{A}_1^\mu - i\mathcal{A}_2^\mu) \; , \tag{29}$$

on constate que :

$$\frac{\lambda^2g^2}{4}\,(\mathcal{A}_1^\mu\mathcal{A}_{1\mu} + \mathcal{A}_2^\mu\mathcal{A}_{2\mu}) = \tfrac{1}{2}\,\lambda^2g^2W^{\mu+}W_\mu \; .$$

Si l'on pose d'autre part :

$$W^{\mu\nu} = \partial^\nu W^\mu - \partial^\mu W^\nu$$

on trouve :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,(G_1^{\mu\nu} + iG_2^{\mu\nu}) = W^{\mu\nu} - ig(\mathcal{A}_3^{\nu}W^{\mu} - \mathcal{A}_3^{\mu}W^{\nu})$$

d'où

$$-\frac{1}{4}\,(G_1^{\mu\nu}G_{1\mu\nu} + G_2^{\mu\nu}G_{2\mu\nu}) + \frac{1}{4}\,\lambda^2 g^2(\mathcal{A}_1^{\mu}\mathcal{A}_{1\mu} + \mathcal{A}_2^{\mu}\mathcal{A}_{2\mu}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,W^{\mu\nu+}W_{\mu\nu} + m_w^2 W^{\mu}\,W_{\mu} - ig\mathcal{A}_{3\mu}(W^{\mu\nu+}W_{\nu} - W^{\mu\nu}W_{\nu}^{+}) -$$

$$-\, g^2(\mathcal{A}_3^{\mu}\mathcal{A}_{3\mu}W^{\nu+}W_{\nu} - \mathcal{A}_3^{\nu}W_{\nu}\mathcal{A}_3^{\mu}W_{\mu}^{+})\ .$$

Le champ W^{μ} aura donc une masse m_w donnée par

$$m_w^2 = \frac{1}{2}\,\lambda^2\ g^2$$

Les autres termes dans l'expression (28) peuvent s'écrire :

$$-\frac{1}{4}\,G_3^{\mu\nu}G_{3\mu\nu} - \frac{1}{4}\,B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\,\lambda^2(g\mathcal{A}_3^{\mu} + g'B^{\mu})(g\mathcal{A}_{3\mu} + g'B_{\mu}). \qquad (30)$$

D'autre part les termes d'interaction des leptons avec les champs vectoriels sont :

$$\frac{g}{4}\left[(\bar{\nu}\gamma^{\alpha}(1-\gamma^5)e)(\mathcal{A}_{1\alpha} - i\mathcal{A}_{2\alpha}) + (\bar{e}\gamma^{\alpha}(1-\gamma^5)\nu)(\mathcal{A}_{1\alpha} + i\mathcal{A}_{2\alpha})\right] +$$

$$+\,\frac{1}{4}\,(\bar{\nu}\gamma^{\alpha}(1-\gamma^5)\nu)(g'B_{\alpha} + g\mathcal{A}_{3\alpha}) + (\bar{e}\gamma^{\alpha}e)(\frac{3g'}{4}\,B_{\alpha} - \frac{g}{4}\mathcal{A}_{3\alpha}) +$$

$$+\,\frac{1}{4}(\bar{e}\gamma^{\alpha}\gamma^5 e)(g'B_{\alpha} + g\mathcal{A}_{3\alpha})\ .$$

Les deux premiers termes deviennent, avec la définition (29) du champ W^{μ} :

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\,g\,((\bar{e}\gamma^{\alpha}(1-\gamma^5)\nu)W_{\alpha} + (\bar{\nu}\gamma^{\alpha}(1-\gamma^5)e)W_{\alpha}^{+})$$

ce sont les termes de l'interaction faible pour les courants faibles qui transfèrent une charge. On voit qu'apparaissent un courant neutre $(\bar{\nu}\gamma^{\alpha}(1-\gamma^5)\nu)$ et un autre courant $(e\gamma^{\alpha}\gamma^5 e)$ qui interagissent avec la combinaison

$$g'B_{\alpha} + g\mathcal{A}_{3\alpha}\ .$$

Or d'après le terme en λ dans la forme (30) cette combinaison de B_α et $\mathcal{a}_{3\alpha}$ pourrait définir un nouveau champ vectoriel neutre doté d'une masse. Posons en effet :

$$Z^\lambda = \varepsilon(g\mathcal{a}_3^\lambda + g'B^\lambda) \tag{31}$$

où ε est une certaine constante.

On trouvera pour le terme en λ de l'expression (30)

$$\frac{1}{4}\,\frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}\quad Z^\mu Z_\mu$$

qui suggère une masse :

$$m_z^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}\ .$$

Ce champ Z^μ interagit avec les courants neutres $(\bar{\nu}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\nu)$ et $(\bar{e}\gamma_\mu\gamma^5 e)$.

Il nous reste le terme

$$(\bar{e}\gamma^\mu e)(\frac{3g'}{4}\,B_\mu - \frac{g}{4}\mathcal{a}_{3\mu})$$

et l'on serait tenté d'identifier cette combinaison linéaire de B_μ et $\mathcal{a}_{3\mu}$ avec le champ électromagnétique. Ceci n'est cependant pas possible puisque cette identification du champ électromagnétique serait incompatible avec les termes

$$-\frac{1}{4}\,G_3^{\mu\nu}G_{3\mu\nu} - \frac{1}{4}\,B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}\quad . \tag{32}$$

Essayons alors de compléter la définition de Z^μ (31) en posant :

$$A^\mu = \varepsilon(-g'\mathcal{a}_3^\mu + gB^\mu)\ .$$

Cette définition sera bonne pour le champ électromagnétique s'il en résulte une masse nulle pour ce champ.

On obtient alors pour les termes (32) :

$$-\frac{1}{4}\,G_3^{\mu\nu}G_{3\mu\nu} - \frac{1}{4}\,B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} =$$

$$- \frac{1}{4} \frac{1}{\varepsilon^2(g^2 + g'^2)} (F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + Z^{\mu\nu}Z_{\mu\nu}) +$$

$$+ \frac{ig}{2\varepsilon(g^2 + g'^2)} (gZ_{\mu\nu} - g'F_{\mu\nu})(W^\nu W^{\mu +} - W^{\nu +}W^\mu) +$$

$$+ \frac{1}{4} g^2(W^\nu W^{\mu +} - W^{\nu +}W^\mu)(W_\nu W^+_\mu - W^+_\nu W_\mu)$$

où

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu ,$$

$$Z^{\mu\nu} = \partial^\nu Z^\mu - \partial^\mu Z^\nu .$$

Pour avoir les termes

$$- \frac{1}{4} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu}Z_{\mu\nu}$$

la constante ε sera : $\varepsilon = (g^2 + g'^2)^{-\frac{1}{2}}$.

L'interaction de l'électron avec le champ électromagnétique sera du type :

$$\frac{gg'}{(g^2 + g'^2)^{\frac{1}{2}}} (\bar{e}\gamma^\mu e)A_\mu(x)$$

et la charge de l'électron sera par conséquent donnée par l'équation

$$e = \frac{gg'}{(g^2 + g'^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{33}$$

Il y aura en plus une interaction entre le champ vectoriel neutre Z^μ et les courants neutres $\bar{e}\gamma_\mu e$, $\bar{e}\gamma^\mu\gamma^5 e$, $\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu$:

$$\frac{1}{4} (g^2 + g'^2)^{\frac{1}{2}}((\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu) + (\bar{e}\gamma^\mu\gamma^5 e) + \frac{3g'^2 - g^2}{g^2+g'^2} (\bar{e}\gamma^\mu e))Z_\mu .$$

Comme l'interaction des mésons vectoriels chargés W avec les leptons a la forme

$$\frac{\sqrt{2}}{4} g((\bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu)W_\mu \quad + \text{hermitique conjugué}$$

la constante de Fermi sera en relation avec g par

$$\frac{g^2}{8\, m_w^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$$

On obtient ainsi

$$G_F = \frac{\sqrt{2}}{4}\, \frac{1}{\lambda^2}$$

puisque

$$m_w^2 = \frac{1}{2}\, \lambda^2 g^2 \ .$$

De

$$m_e = \lambda\ G$$

il résultera :

$$G = 2^{3/4} \sqrt{G_F}\, m_e$$

et finalement :

$$m_z^2 = \frac{1}{2}\, \lambda^2 (g^2 + g'^2) \ .$$

9. INVARIANCE DE JAUGE ET ELIMINATION DU CHAMP $\chi(x)$

Le lagrangien (26c) a une propriété importante : il est invariant par rapport à la transformation de jauge suivante :

$$\mathcal{A}_a^{\mu\,\prime}(x) = \mathcal{A}_a^{\mu}(x) - \partial^\mu \theta_a(x) - g\varepsilon_{abc}\theta_b(x)\mathcal{A}_c^{\mu}(x) \ ,$$

$$B^{\mu\,\prime}(x) = B^\mu(x) - \partial^\mu \Lambda(x) \ ,$$

$$\phi'(x) = \left[\exp(ig\,\frac{\tau_a}{2}\,\theta_a(x) - i\,\frac{g'}{2}\,\Lambda(x))\right] \phi(x) \ ,$$

$$L'(x) = \left[\exp(ig\,\frac{\tau_a}{2}\,\theta_a(x) + i\,\frac{g'}{2}\,\Lambda(x)\right] L(x) \ ,$$

$$R'(x) = \left[\exp(ig'\Lambda(x))\right] R(x) \ ,$$

où $\theta_a(x)$, $a = 1,2,3$, $\Lambda(x)$ sont les fonctions de jauge.

On peut se servir de cette invariance comme un instrument pour éliminer le champ scalaire $\chi(x)$ (voir éq. (26a)). En effet, puisque $\phi(x)$ est un isospineur, il est équivalent à quatre fonctions réelles. Nous pouvons donc écrire pour le champ $\phi(x)$

$$\phi(x) = \left[\exp(ig\,\frac{\tau_a}{2}\,\theta_a(x))\right]\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\Phi(x) \end{pmatrix}$$

qui est équivalent à l'équation (26a) puisqu'on a ici quatre fonctions réelles $\theta_a(x)$, $a = 1,2,3$ et $\Phi(x)$.

Comme le lagrangien initial est un invariant de jauge, les fonctions $\theta_a(x)$ n'apparaissent pas dans l'expression du lagrangien et par conséquent nous pouvons remplacer $\phi(x)$ par

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\Phi(x) \end{pmatrix}$$

ce qui revient à poser $\chi(x) = \phi_2(x) = 0$ dans l'expression précédente de L est $\phi_1(x) = \Phi(x)$.

Le lagrangien transformé a à présent l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
L = {} & \frac{1}{2}\,\partial^\mu\Phi\partial_\mu\Phi - \frac{1}{2}\,m_\phi^2\Phi^2 - \frac{1}{4}\,F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\,Z^{\mu\nu}Z_{\mu\nu} + \\
& + \frac{1}{2}\,m_Z^2 Z^\mu Z_\mu - \frac{1}{2}\,W^{\mu\nu +}W_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,m_W^2 W^{\mu +}W_\mu - \\
& - \bar{e}(i\gamma^\alpha\partial_\alpha - m_e)e - \bar{\nu}\,i\gamma^\mu\partial_\mu\,\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\nu + \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{m_e}{\lambda}\,(\bar{e}e)\,\Phi + \frac{\sqrt{2}}{4}\,g((\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma^5)e)W_\mu + \\
& + (\bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu)W_\mu^+ + e(\bar{e}\gamma^\mu e)A_\mu + \\
& + \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)^{\frac{1}{2}}\,((\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu) + (\bar{e}\gamma^\mu\gamma^5 e) + \\
& + \frac{3g'^2 - g^2}{g^2 + g'^2}\,(\bar{e}\gamma^\mu e)\,Z_\mu - \\
& - \frac{ig}{(g^2 + g'^2)^{\frac{1}{2}}}\,(gZ_\mu - g'A_\mu)(W^{\mu\nu +}W_\nu - W^{\mu\nu}W_\nu^+) +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{ig}{2(g^2 + g'^2)^{\frac{1}{2}}} (gZ_{\mu\nu} - g'F_{\mu\nu})(W^\nu W^{\mu +} - W^{\nu +} W^\mu) -$$

$$- \frac{g^2}{g^2 + g'^2} (gZ_\alpha - g'A_\alpha)(gZ_\beta - g'A_\beta) W^+_\mu W_\nu \cdot$$

$$\cdot (g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta}) +$$

$$+ \frac{1}{4} g^2 (W^\nu W^{\mu +} - W^{\nu +} W^\mu)(W_\nu W^+_\mu - W^+_\nu W_\mu) +$$

$$+ (\frac{1}{2} \phi^2 + \lambda \sqrt{2}\, \phi)(\frac{g^2}{2} W^{\mu +} W_\mu + \frac{1}{4}(g^2 + g'^2) Z^\mu Z_\mu) +$$

$$+ f(\lambda^2 + \frac{1}{2} \phi^2 + \lambda \sqrt{2}\, \phi)^2$$

avec :

$$m^2_\phi = 2|M^2| \ ,$$

$$\lambda^2 = \frac{-m^2_\phi}{4\, f} \ , \ f < 0, \ \lambda > 0$$

$$m_e = \lambda G \ , \ m_w = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda g \ ,$$

$$m^2_z = \frac{1}{2} \lambda^2 (g^2 + g'^2) \ ,$$

$$e = \frac{gg'}{(g^2 + g'^2)^{\frac{1}{2}}} \ , \ \frac{g^2}{8\, m^2_w} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} ,$$

$$G = 2^{3/4} \sqrt{G_F}\, m_e \ .$$

Si l'on pose :

$$\tan\theta_w = \frac{g'}{g}$$

les relations entre le champ vectoriel neutre Z et le champ électromagnétique A avec les champs de jauge $\mathcal{A}$ et B s'écriront :

$$Z^\mu = \mathcal{A}^\mu_3 \cos\theta_w + B^\mu \sin\theta_w \ ,$$

$$A^\mu = -\mathcal{A}^\mu_3 \sin\theta_w + B^\mu \cos\theta_w \ ,$$

θ_w est l'angle de Weinberg. La charge e et la constante g satisfont aux relations :

$$e = g \sin\theta_w \leqslant g$$

Les masses des mésons W et Z seront données par les relations :

$$\frac{m_w}{m_z} = |\cos\theta_w|$$

$$\left(\frac{m_w}{m_\phi}\right)^2 = \frac{e^2\sqrt{2}}{8\,G_F}\,\mathrm{cosec}^2\theta_w \;.$$

On aura donc la limitation suivante sur la masse m_w :

$$m_w \gtrsim 40\; m_p$$

où m_p est la masse du proton.

La constante d'interaction entre leptons et le champ scalaire est très faible :

$$G = \frac{m_e}{m_w}\,\frac{g}{\sqrt{2}} \quad .$$

La beauté du modèle est l'unification des forces électromagnétiques et des forces d'interaction faible : à partir de l'hypothèse qu'un triplet de champs vectoriels à masse nulle interagit avec le courant d'isospin et qu'un champ vectoriel singlet à masse nulle interagit avec le courant d'hypercharge avec une invariance de jauge, on déduit, avec le postulat de la cassure spontanée de la symétrie - un champ scalaire à valeur moyenne dans le vide non nulle étant introduit pour attribuer une masse à l'électron -,les interactions électromagnétiques et les interactions faibles avec échange de charge. Le champ électromagnétique et le champ des bosons vectoriels chargés sont déduits des champs vectoriels donnés mais un autre champ, qui décrit des mésons vectoriels neutres, s'impose. La théorie a donc des conséquences expérimentales qui sont à vérifier puisqu'elle prédit des interactions faibles de courants neutres telles que le processus de diffusion élastique

$$\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e \quad .$$

En effet le processus

$$\nu_e + e \rightarrow \nu_e + e$$

peut avoir lieu si l'on n'invoque que des mésons chargés dans le modèle (figure 3)

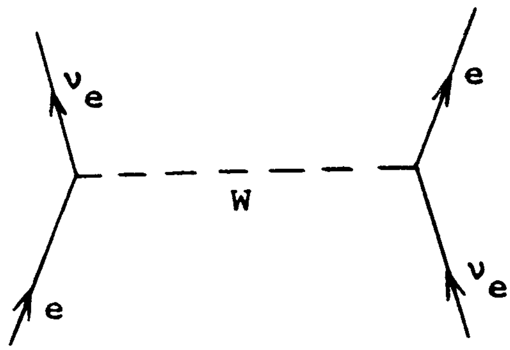

Figure 3

tandis que la réaction $\nu_\mu + e \to \nu_\mu + e$ ne peut avoir lieu, en premier ordre, que si le modèle admet des mésons vectoriels neutres (figure 4)

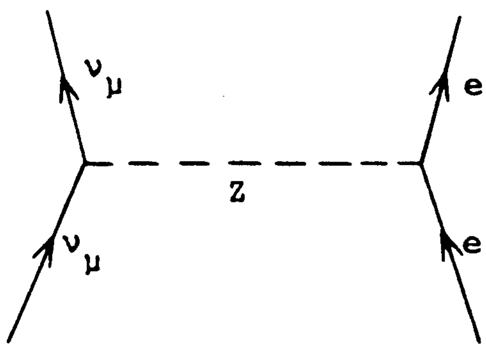

Figure 4

Des processus électromagnétiques auront, en principe, des corrections provenant de l'interaction faible avec les champs neutre Z et Φ. Les diagrammes de Feynman pour le moment magnétique, par exemple, seront maintenant jusqu'au deuxième ordre (figure 5) :

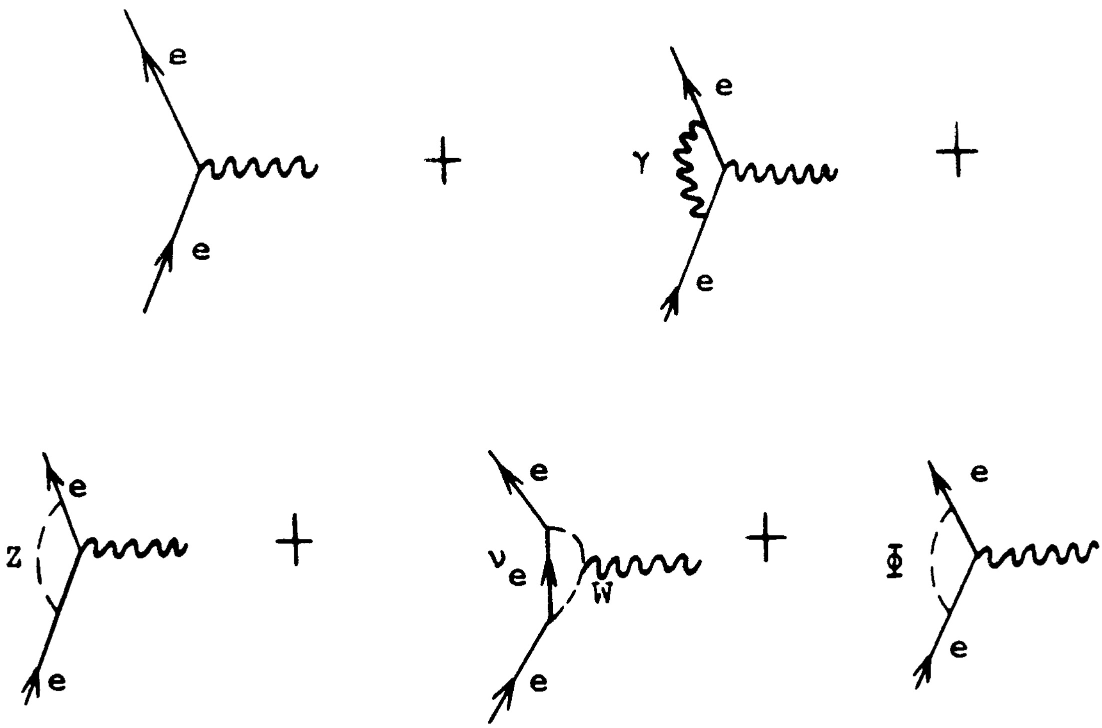

Figure 5

10. LE MODELE DES CHAMPS DE JAUGE UNIFIES ET LE MUON

Le modèle des champs de jauge unifiés ne peut pas se restreindre au seul traitement de l'interaction entre électrons et neutrinos électroniques. Il faut le généraliser de sorte que la théorie comprenne les muons et les hadrons.

De prime abord, il suffirait, pour introduire les muons, d'écrire des termes additionnels dans le lagrangien, obtenus en remplaçant partout :

$$e \to \mu \ , \ \nu_e \to \nu_\mu \ .$$

Ainsi, au lieu de l'interaction (26) on aurait

$$G(\bar{L}_e \,\phi\, R_e + \bar{R}_e \,\phi^+ L_e + \bar{L}_\mu \,\phi\, R_\mu + \bar{R}_\mu \phi^+ L_\mu) \ . \tag{34}$$

pour l'interaction entre leptons et le champ scalaire.

Cette règle n'est pas acceptable si la masse du muon doit provenir de la valeur moyenne de $\phi(x)$ dans le vide. En effet, pour un seul isospineur $\phi(x)$ et la même constante G, l'interaction (33) donnerait lieu à une masse m_μ égale à m_e.

L'hypothèse la plus simple est donc de remplacer l'interaction (26) par la suivante :

$$G_e(\bar{L}_e\, \phi\, R_e + \bar{R}_e\, \phi^+\, L_e) + G_\mu(\bar{L}_\mu\, \phi\, R_\mu + \bar{R}_\mu\, \phi^+ L_\mu)$$

avec :

$$L_e = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\binom{\nu_e}{e} \;,\; R_e = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)e \;,$$

$$L_\mu = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\binom{\nu_\mu}{\mu} \;,\; R_\mu = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\mu \;.$$

On maintient dans ce modèle un seul champ scalaire isospineur $\phi(x)$ mais on est obligé de détruire l'universalité de l'interaction de ce champ avec les composantes des leptons, en introduisant deux constantes telles que :

$$m_e = \lambda G_e \quad , \quad m_\mu = \lambda G_\mu$$

et donc :

$$G_\mu \simeq 206\ G_e \;.$$

Une autre possibilité que nous proposons[20] est d'introduire un angle α et d'écrire l'interaction ϕ-leptons comme il suit (ce qui est équivalent à la formulation précédente, les champs e et μ ne pouvant pas se mélanger si les nombres leptoniques se conservent) :

$$G\{\bar{L}_e R_e \cos\alpha + \bar{L}_\mu R_\mu \sin\alpha\}\phi + \text{herm. conj.} \tag{35}$$

On maintiendrait ainsi une seule constante G et la valeur de l'angle α expliquerait la différence de masse électron-muon :

$$\begin{aligned} m_e &= G\ \lambda\ \cos\alpha \;, \\ m_\mu &= G\ \lambda\ \sin\alpha \;. \end{aligned} \tag{36}$$

La valeur de α est : $\alpha = 89^\circ 43'22''$ et on obtient

$$G = m_\mu (2\sqrt{2}\, G_F)^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{m_e^2}{m_\mu^2})^{\frac{1}{2}} .$$

Il résulte de l'expression (35) que l'interaction entre le champ scalaire réel $\Phi(x)$ et les leptons a la forme suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\frac{m_e}{\lambda} (\bar{e}e) + \frac{m_\mu}{\lambda} (\bar{\mu}\mu)) \Phi(x) . \tag{37}$$

Ainsi la théorie des champs de jauge unifiés pour les leptons admettra le lagrangien (26c) avec la convention de faire la somme des termes leptoniques pour électrons et muons et de remplacer l'interaction électron-champ scalaire par le terme (35).

11. L'INCORPORATION DES HADRONS DANS LE MODELE DE JAUGE

Une généralisation de ce modèle de sorte à inclure les hadrons est au premier abord simple : il faudrait tout simplement introduire le courant de quarks, $h^\alpha(x)$ donnée par les équations (13 et (14) :

$$h^\alpha(x) = \bar{p}(x)\gamma^\alpha(1-\gamma^5)\{n(x)\cos\theta_c + \lambda(x)\sin\theta_c\} .$$

Le lagrangien devrait donc avoir des termes d'interactions entre les champs $\mathcal{A}_a^\mu(x)$ et $B^\mu(x)$, d'une part, et les courants d'isospin et d'hypercharge des quarks d'autre part, de manière à contenir, après la cassure de la symétrie, des termes du type :

$$\frac{\sqrt{2}}{4} g\{\bar{p}(x)\gamma^\lambda(1-\gamma^5)(n(x)\cos\theta_c + \lambda(x)\sin\theta_c)W_\lambda + h.c.\}.$$

La grande difficulté de ce modèle est qu'il prédit des courants neutres avec changement d'étrangeté ($\Delta S = 1$) qui interagissent avec le champ vectoriel neutre Z^0 (en plus des courants neutres avec $\Delta S = 0$). Or les résultats expérimentaux sont très rigoureux à ce sujet et semblent exclure de tels courants neutres avec $\Delta S = 1$.

Pour éviter ces difficultés, on peut admettre l'existence d'un quatrième quark, p', et considérer les deux doublets de quarks suivants :

$$\begin{pmatrix} p \\ n\cos\theta_c + \lambda\sin\theta_c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} p' \\ -n\sin\theta_c + \lambda\cos\theta_c \end{pmatrix}$$

Alors le courant neutre avec $\Delta S = 1$ qui serait contenu dans le terme :

$$(\bar{n}\cos\theta_c + \bar{\lambda}\sin\theta_c)\gamma^\alpha(1-\gamma^5)(n\cos\theta_c + \lambda\sin\theta_c)$$

dans le modèle antérieur, serait dans ce modèle-ci du type :

$$j^\alpha_{(o)} = (\bar{n}\cos\theta_c + \bar{\lambda}\sin\theta_c)\gamma^\alpha(1-\gamma^5)(n\cos\theta_c + \lambda\sin\theta_c) +$$
$$+ (-\bar{n}\sin\theta_c + \bar{\lambda}\cos\theta_c)\gamma^\alpha(1-\gamma^5)(-n\sin\theta_c + \lambda\cos\theta_c)$$

c'est-à-dire

$$j^\alpha_{(o)} = \bar{n}\gamma^\alpha(1-\gamma^5)n + \bar{\lambda}\gamma^\alpha(1-\gamma^5)$$

qui ne contient pas des termes avec $\Delta S = 1$. S'il y a des termes de masse pour les quarks il sera nécessaire de faire restreindre la valeur de ces masses pour que les effets de courant neutre indésirables soient supprimés. Les diagrammes indésirables sont ceux qui entraînent une transition de λ en n et qui sont donc responsables de réactions telles que :

$$K_L \longrightarrow \mu^+ + \mu^- \quad ,$$

$$K^+ \longrightarrow \pi^+ + \nu + \bar{\nu} \, ,$$

$$\Sigma^+ \longrightarrow p + e + \bar{e} \quad , \text{etc.}$$

La première de ces réactions présente un problème[21)] qui n'est pas encore résolu. Cette réaction peut se produire d'après le diagramme de la figure 6

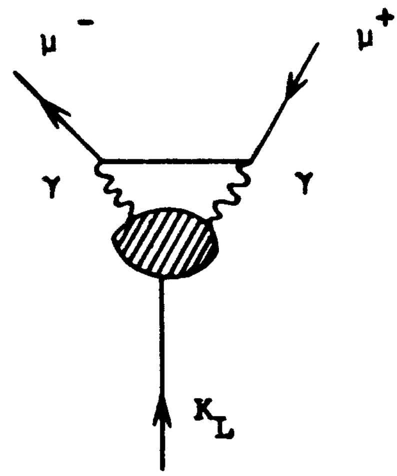

Figure 6

c'est-à-dire le méson K_L donne lieu à deux photons virtuels qui produisent, d'après les lois de l'électrodynamique quantique, une paire de muons. On espère donc avoir grossièrement le rapport :

$$\frac{\text{ampl.}(K_L \to \mu^+ + \mu^-)}{\text{ampl.}(K_L \to \gamma + \gamma)} \simeq \left(\frac{1}{137}\right)^2$$

Comme l'expérience indique que :

$$\frac{\text{ampl.}(K_L \to \gamma + \gamma)}{\text{ampl.}(K_L \to \text{somme tous processus})} \simeq 4{,}5 \times 10^{-4}$$

on doit avoir :

$$\frac{\text{ampl.}(K_L \to \mu^+ + \mu^-)}{\text{ampl.}(K_K \to \text{somme})} \simeq 2 \times 10^{-8}$$

Un calcul plus rigoureux basé sur l'unitarité de la matrice S donne une borne inférieure :

$$\frac{\text{ampl.}(K_L \to \mu^+ + \mu^-)}{\text{ampl.}(K_L \to \text{somme})} > 6 \times 10^{-9} \ .$$

Or l'expérience indique jusqu'à aujourd'hui la relation suivante :

$$\frac{\text{ampl.}(K_L \to \mu^+ + \mu^-)}{\text{ampl.}(K_L \to \text{somme})_{\text{exp.}}} < 1.8 \times 10^{-9}$$

ce qui contredit la valeur théorique ci-dessus.

Il faudra donc que les modèles de jauge qui admettant l'existence de bosons neutres ne donnent pas une contribution nouvelle à ce processus qui augmente le désaccord avec la donnée expérimentale. Nous n'examinerons pas ici cette question ni les modèles qui postulent des leptons lourds.

On est encore loin d'une synthèse simple et élégante entre les champs de jauge unifiés et les hadrons. Les modèles se multiplient[22], une indication que l'on ne sait pas encore comment faire cette synthèse entre leptons et hadrons - surtout les particules étranges - pour avoir une théorie des champs de jauge unifiés.

REFERENCES

1) E. FERMI, Zs.f. Physik 88, 161 (1934) Voir: The development of Weak Interaction Theory, P.K. Kabir Editor, Gordon and Breach 1963, New York.

2) W. PAULI, Collected Scientific Papers, vol. 2, 1313, Interscience 1964, New York.

3) C.M.G. LATTES, G. OCCHIALINI and C. POWELL, Nature 160, 453, 486 (1947).

4) E. KONOPINSKI and H.M. MAHMOUD, Phys. Rev. 92, 1054 (1953).

5) G. PUPPI, Nuovo Cim. 5, 587 (1948); O. KLEIN, Nature 161, 897 (1948); J. TIOMNO and J.A. WHEELER, Rev. Mod. Phys. 21, 153 (1949).

6) T.D. LEE and C.N. YANG, Phys. Rev. 104, 254 (1956).

7) R.P. FEYNMAN and M. GELL-MANN, Phys. Rev. 109, 193 (1958); E.C.G. SUDARSHAN and R.E. MARSHAK, Phys. Rev. 109, 1860 (1958).

8) M. GELL-MANN and M. LEVY, Nuovo Cimento 16, 705 (1958) (voir note added in proof page 708); N. CABIBBO, Phys. Rev. Letters 10, 531 (1963).

9) Cf. H. YUKAWA, Rev. Mod. Phys. 21, 474 (1949).

10) J. LEITE LOPES, Phys. Rev. 109, 509 (1958).
L. WOLFENSTEIN, Nuovo Cimento 8, 882 (1958).

11) Cf. R.P. FEYNMAN, Quantum Electrodynamics, Benjamin New-York (1962); J.M. JAUCH and F. ROHRLICH, The theory of photons and electrons, Addison-Wesley, Cambridge, Mass. 1955; J.D. BJORKEN and S.D. DRELL, Relativistic Quantum Mechanics I; Relativistic Quantum Field II, Mc Graw-Hill, New York, 1965.

12) J. LEITE LOPES, Nucl. Phys. 8, 234 (1958); voir aussi S.A. BLUDMAN, Nuovo Cim. 9, 433 (1958) pour l'hypothèse des courants neutres.

13) S. WEINBERG, Phys. Rev. Letters 19, 1264 (1967); 27, 1688 (1971).
A. SALAM and J. WARD, Phys. Lett. 13, 168 (1964).

14) G.t' HOOFT and M. VELTMAN, Proc. Colloquium on Renormalization of Yang-Mills Fields, Marseille, 1972.

15) C.G. BOLLINI and J.J. GIAMBIAGI, Phys. Lett. 40B, 566 (1972).

16) T.D. LEE, Phys. Rev. Letters 26, 801 (1971).
J. LEITE LOPES, Nucl. Phys. B38, 555 (1972). Dans ce dernier article, le modèle de la dominance vectorielle est généralisée au cas des interactions faibles.

17) C.N. YANG and R.L. MILLS, Phys. Rev. 96, 191 (1954).

18) P.W. HIGGS, Phys. Lett. 12, 132 (1964); Phys. Rev. 145, 1156 (1966).
F. ENGLERT and R. BROUT, Phys. Rev. Letters 13, 321 (1964).
G.S. GURALNIK, C.R. HAGEN and T.W.B. KIBBLE, Phys. Rev. Lett. 13, 585 (1964).

19) T.D. LEE and C.N. YANG, Phys. Rev. 98, 1501 (1955).

20) J. LEITE LOPES, The muon-mass and the unified gauge field theory for leptons, Strasbourg, preprint CRN/HE 73-11 (1973).

21) H. STERN and M.K. GAILLARD, Ann. Phys. (N.Y.) 76, 580 (1973).

22) Cf. J.D. BJORKEN and C.H. LLEWELLYN SMITH, Phys. Rev. D7, 887 (1973).