

FORMA INCREMENTAL DEL TEOREMA DE LOS TRABAJOS
VIRTUALES APLICADO A GRANDES DEFORMACIONES*

Edgardo Taroco y Raul A. Feijão
Laboratório de Cálculo/CBPF

y

Luiz C. Martins
Programa de Engenharia Mecânica - COPPE/UF RJ

R E S U M E N

En este trabajo se obtienen, la descripción lagrangeana del teorema de los trabajos virtuales, así como también las descripciones lagrangeana y relativa de su forma incremental. Analisándose posteriormente los casos de deformación y tensión inicial. La formulación anterior es aplicada al problema de grandes deflexiones de placas delgadas y soluciones aproximadas obtenidas a través del método de elementos finitos son presentadas.

* Este trabajo fué financiado en parte por COPPETEC y CNPq, contrato nº 2222.0712/76.

INTRODUCCION

Si bien el estudio de la teoría no lineal del conti
nuo se inicia en el siglo pasado con los trabajos de Cauchy, Na
vier y Love, en 1940 Rivlin fué el primero en obtener solucio
nes exactas en ciertos problemas de valor de contorno que se
presentan en esta teoría, a la vez que contribuyó en la determinación
de ecuaciones constitutivas de diferentes materiales. De
1955 en adelante la teoría no lineal del continuo ha sido extensiva
sivamente elaborada bajo el impulso de investigadores tales co
mo Truesdell, Noll, Wang, Koiter, Green y Naghdi.

Las soluciones de los problemas de valor de contor
no que surgen en esta teoría han podido ser obtenidas en forma
aproximada con el advenimiento de los computadores digitales y
de técnicas numéricas eficientes tales como el método de elementos
finitos.

Con respecto a este último aspecto, conviene hacer
notar que numerosos códigos automáticos para el análisis no li
neal han sido escritos sin el adecuado conocimiento de los princi
pios básicos que gobiernan la mecánica del continuo.

El objetivo de este trabajo es mostrar la obtención
de las expresiones del teorema de los trabajos virtuales para
un referencial lagrangeano, así como también su forma incremental
para descripciones lagrangeana y relativa, de gran utili
dad en el estudio de grandes deformaciones de sólidos.

Posteriormente a la presentación de las expresiones del teorema de los trabajos virtuales y de su forma incremental, discutimos los casos de deformación y tensión inicial. Particularizando las expresiones obtenidas en general, se analiza el problema de grandes deflexiones de placas delgadas.

Finalmente se discute la implementación del Método de Elementos Finitos y se presentan soluciones numéricas para este caso.

CONFIGURACIONES Y DEFORMACIÓN DE UN CUERPO MATERIAL

Analizaremos en este trabajo la deformación de un cuerpo material sometido a un sistema de fuerzas. Esta deformación será caracterizada por el pasaje del cuerpo de una configuración a otra.

Para ello, comenzaremos definiendo cuerpo material B al conjunto de partículas o puntos materiales X , que admitiremos pueden ocupar distintas posiciones en el espacio euclídeo puntual tridimensional, \mathcal{E} .

La definición de cuerpo será completada especificando la aplicación biyectiva p_i que nos dá la correspondencia entre partículas materiales y los puntos que dichas partículas ocupan en \mathcal{E} . (Figura 1)

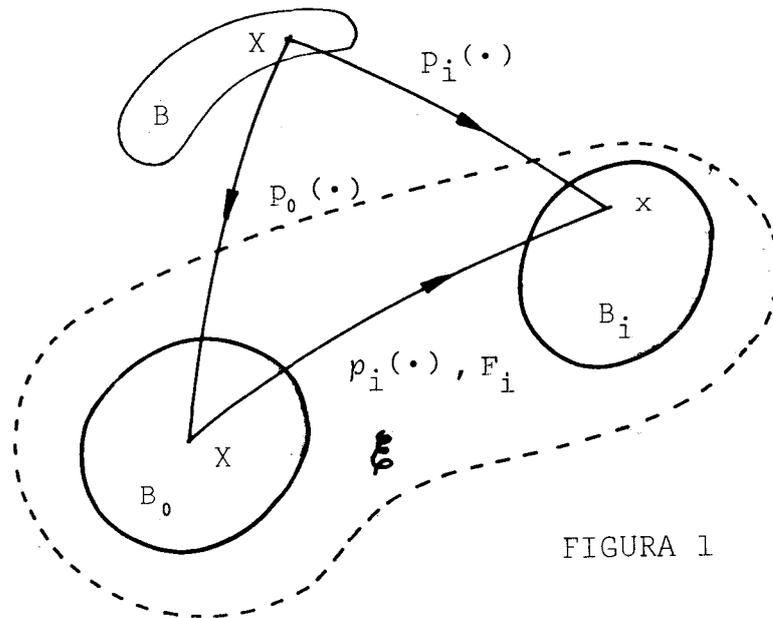


FIGURA 1

Denominaremos configuración del cuerpo material a la imagen de B bajo la aplicación p_i y la designaremos con B_i para enfatizar que la configuración depende del cuerpo material B y de la aplicación p_i :

$$p_i : B \rightarrow B_i \subset \mathcal{E}$$

Una de las configuraciones de B escogida convenientemente será tomada como referencia (Figura 1), la aplicación que define esta configuración será designada con p_0 :

$$p_0 : B \rightarrow B_0 \subset \mathcal{E},$$

$$X \rightarrow X = p_0(X)$$

Desde que hemos admitido que las aplicaciones p_i

son biyectivas, dado $x \in B_i$ será posible determinar su correspondiente $X \in B$:

$$X = p_i^{-1}(x) \quad , \quad p_i^{-1} : B_i \rightarrow B$$

y en particular para la aplicación p_0 :

$$X = p_0^{-1}(x) \quad , \quad p_0^{-1} : B_0 \rightarrow B$$

De esta manera las configuraciones B_i definidas como imágenes de B pueden pasar a definirse como imágenes de B_0 bajo la siguiente aplicación:

$$x = p_i(x) = p_i[p_0^{-1}(x)] = p_i(x)$$

donde

$$p_i = p_i \cdot p_0^{-1} : B_0 \rightarrow B_i$$

A la aplicación p_i se la denomina deformación de B al pasar de la configuración B_0 a la B_i .

Admitiendo que p_i es suficientemente diferenciable, será posible definir su gradiente F_i :

$$F_i = \nabla p_i(X)$$

En lo que sigue supondremos que nuestras deformaciones p_i son tales que $\det F_i > 0$ para todo $X \in B_0$.

Finalmente, entenderemos por sistema de fuerzas (b_i, t_i) en la configuración B_i al par ordenado:

$$b_i = b_i(x) \quad \text{fuerza de masa, } b_i : B_i \rightarrow V$$

$$t_i = t_i(x) \quad \text{fuerza de superficie, } t_i : \partial B_i \rightarrow V$$

donde V es un espacio vectorial tridimensional.

Ahora bien, centraremos nuestro interés en uno de los problemas que se plantean en mecánica del continuo y que consiste en: definido un cuerpo material y conocida una configuración B_0 determinar la configuración B_i para un sistema de fuerzas (b_i, t_i) dado. En la determinación de la solución del problema planteado, el teorema de los trabajos virtuales así como su forma incremental resultan de gran utilidad.

TEOREMA DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Sea B_i la configuración del cuerpo material que queremos determinar y (b_i, t_i) el sistema de fuerzas correspondiente a dicha configuración.

El trabajo virtual de (b_i, t_i) para un desplazamiento virtual δu perteneciente al campo de desplazamientos admisibles está dado por:

$$\delta W_i = \int_{B_i} \delta u \cdot b_i \rho_i \, dB_i + \int_{\partial B_i} \delta u \cdot t_i \, d\partial B_i$$

donde:

el punto indica producto escalar de vectores

ρ_i densidad correspondiente a la configuración B_i

∂B_i parte del contorno de B_i donde existen fuerzas de superficie t_i .

Referiremos las integrales que definen δW_i a la configuración B_0 , para ello procederemos en la siguiente forma:

La primera integral, sobre la región B_i , recordando el principio de conservación de masa $\rho_0 dB_0 = \rho_i dB_i$ resulta:

$$\int_{B_i} \delta u \cdot b_i \rho_i dB_i = \int_{B_0} \delta u \cdot b_i \rho_0 dB_0$$

donde:

$$b_i(x) = b_i[\rho_i(X)] = b_i(X)$$

$$u(x) = u[\rho_i(X)] = u(X)$$

La segunda integral, sobre la región ∂B_i , recordando la definición del tensor de tensiones $t_i = T_i n_i$ resulta:

$$\int_{\partial B_i} \delta u \cdot t_i d\partial B_i = \int_{\partial B_i} \delta u \cdot T_i n_i d\partial B_i$$

donde:

T_i tensor de tensiones de Cauchy

n_i normal unitaria al contorno ∂B_i

Introduciendo el tensor de Piola-Kirchhoff de primera especie definido por:

$$S_i = \frac{\rho_0}{\rho_i} T_i (F_i^{-1})^T$$

es posible referir la integral sobre ∂B_i al contorno de B_0 .

$$\int_{\partial B_i} \delta u \cdot T_i n_i \, d\partial B_i = \int_{\partial B_0} \delta u \cdot S_i n_0 \, d\partial B_0$$

donde:

n_0 normal unitaria al contorno ∂B_0 .

Recordando la definición de transpuesto de un tensor y aplicando posteriormente el teorema de la divergencia transformaremos la integral sobre el contorno ∂B_0 a la región B_0 .

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_0} \delta u \cdot S_i n_0 \, d\partial B_0 &= \int_{\partial B_0} S_i^T \delta u \cdot n_0 \, d\partial B_0 = \\ &= \int_{B_0} \operatorname{div}(S_i^T \delta u) \, dB_0. \end{aligned}$$

De la definición de divergencia de un tensor S_i^T aplicado a un vector δu , se sigue:

$$\int_{B_0} \text{div}(S_i^T \delta u) dB_0 = \int_{B_0} [S_i \cdot \nabla \delta u + \delta u \cdot \text{div} S_i] dB_0.$$

donde:

el punto en el primer sumando del segundo miembro indica producto escalar de tensores.

$\nabla \delta u$ gradiente de δu .

Las transformaciones anteriores hacen posible referir el trabajo virtual δW_i a la configuración B_0 , obteniéndose:

$$\delta W_i = \int_{B_0} [S_i \cdot \nabla \delta u + \delta u \cdot (\text{div} S_i + \rho_0 b_i)] dB_0$$

De la condición de equilibrio de la configuración B_i referida a B_0 ;

$$\text{div} S_i + \rho_0 b_i = 0$$

resulta:

$$\delta W_i = \int_{B_0} S_i \cdot \nabla \delta u dB_0$$

Introduciendo el tensor de Piola-Kirchhoff de segunda especie [3], definido por: $\tilde{S}_i = F_i^{-1} S_i$ y de la definición de transpuesto de un tensor se obtiene:

$$\delta W_i = \int_{B_0} F_i \tilde{S}_i \cdot \nabla \delta u \, dB_0 = \int_{B_0} \tilde{S}_i \cdot F_i^T \nabla \delta u \, dB_0$$

Teniendo en cuenta que $p_i(X) = X + u(X)$ y que las operaciones variación y gradiente pueden ser intercambiadas, de la expresión anterior se sigue:

$$\delta W_i = \int_{B_0} \tilde{S}_i \cdot (\mathbb{1} + \nabla u^T) \delta \nabla u \, dB_0$$

donde:

$u = u(X)$ desplazamiento del punto X al pasar de B_0 a B_i

$\mathbb{1}$ tensor identidad

De la simetría del tensor \tilde{S}_i se obtiene finalmente que:

$$\delta W_i = \int_{B_0} \tilde{S}_i \cdot \delta E_i \, dB_0$$

donde:

$$E_i = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u) \text{ tensor de deformación.}$$

Para una base ortonormal fija, teniendo en cuenta que las componentes de los tensores ∇u , ∇u^T y $\nabla u^T \nabla u$ son:

$$(\nabla u)_{kj} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = u_{k,j}$$

$$(\nabla u^T)_{kj} = (\nabla u)_{jk} = u_{j,k}$$

$$(\nabla u^T \nabla u)_{kj} = (\nabla u^T)_{km} (\nabla u)_{mj} = u_{m,k} u_{m,j}$$

El producto escalar de los tensores $\tilde{S}_i \cdot \delta E_i$ estará dado por:

$$\tilde{S}_i \cdot \delta E_i = (\tilde{S}_i)_{kj} (\delta E_i)_{kj}$$

donde:

$$(E_i)_{kj} = (u_{k,j} + u_{j,k} + u_{m,j} u_{m,k})^{\frac{1}{2}}$$

FORMA INCREMENTAL DEL TEOREMA DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

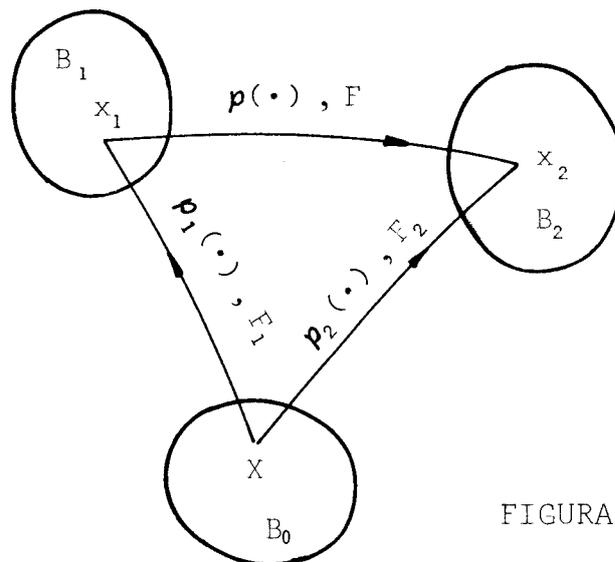
Admitamos conocida la configuración B_1 del cuerpo, correspondiente al sistema de fuerzas (b_1, t_1) y supongamos que queremos determinar la configuración B_2 correspondiente al sistema dado (b_2, t_2) . [4]

Definamos previamente las aplicaciones p_1, p_2, p .

$$x_1 = p_1(X) \quad , \quad p_1 : B_0 \rightarrow B_1$$

$$x_2 = p_2(X) \quad , \quad p_2 : B_0 \rightarrow B_2$$

$$x_2 = p(x_1) \quad , \quad p : B_1 \rightarrow B_2$$



cuyos respectivos gradientes:

$$F_1 = \nabla p_1 \quad , \quad F_2 = \nabla p_2 \quad , \quad F = \nabla p$$

cumplen la siguiente relación:

$$dx_2 = F_2 dX = F dx_1 = FF_1 dX.$$

a) Descripción lagrangeana o referencial

Esta descripción es obtenida refiriendo la deformación de B_1 a B_2 , a la configuración B_0 .

De la Figura 2 se tienen las siguientes relaciones para la deformación y su gradiente:

$$x_1 = p_1(X) = X + u_1, \quad x_2 = p_2(X) = x_1 + u = X + u_1 + u$$

$$F_1 = \nabla p_1 = \mathbb{I} + \nabla u_1; \quad F_2 = \nabla p_2 = F_1 + \nabla u = \mathbb{I} + \nabla u_1 + \nabla u.$$

donde: $u_1 = u_1(X)$ desplazamiento de X al pasar de B_0 a B_1
 $u = u(X)$ desplazamiento de X al pasar de B_1 a B_2

Introduciendo $F_2 = F_1 + \nabla u$ en la expresión de δW_1 a que arribamos en el ítem anterior, particularizada para la configuración B_2 resulta:

$$\delta W_2 = \int_{B_0} \tilde{S}_2 \cdot F_2^T \delta \nabla u \, dB_0 = \int_{B_0} (\tilde{S}_1 + \tilde{S}) \cdot (F_1^T + \nabla u^T) \delta \nabla u \, dB_0$$

donde: $\tilde{S} = \tilde{S}_2 - \tilde{S}_1$ es el incremento del tensor de Piola-Kirchhoff de segunda especie cuando el cuerpo pasa de la configuración B_1 a B_2 referido a B_0 .

Desarrollando el producto escalar y teniendo en cuenta que \tilde{S}_1 y S son simétricos, de la expresión anterior se obtiene:

$$\delta W_2 = \delta W_1 + \frac{1}{2} \int_{B_0} \tilde{S}_1 \cdot \delta (\nabla u^T \nabla u) \, dB_0 + \int_{B_0} \tilde{S} \cdot \delta E \, dB_0 +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{B_0} \tilde{S} \cdot \delta (\nabla u_1^T \nabla u + \nabla u^T \nabla u_1) dB_0$$

donde:

$$\delta W_1 = \int_{B_0} \tilde{S}_1 \cdot F_1^T \nabla \delta u \, dB_0 \quad \text{trabajo virtual de } (b_1, t_1)$$

$$E = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u) \quad \text{tensor de deformación}$$

b) Descripción relativa

Esta descripción es obtenida refiriendo la deformación de B_1 a B_2 a la configuración B_1 .

De la Figura 2 se tienen las siguientes relaciones para la deformación y su gradiente:

$$x_2 = p(x_1) = x_1 + u^1$$

$$F = \nabla p = \mathbf{1} + \nabla u^1$$

donde:

$$u^1 = u^1(x_1) \quad \text{desplazamiento de } x_1 \text{ al pasar de } B_1 \text{ a } B_2.$$

Procediendo en forma similar al caso anterior se arriba a:

$$\delta W_2 = \delta W_1 + \frac{1}{2} \int_{B_1} T_1 \cdot \delta (\nabla u^{1T} \nabla u^1) dB_1 + \int_{B_1} \tilde{S}^1 \cdot \delta E^1 dB_1$$

donde:

$$\delta W_1 = \frac{1}{2} \int_{B_1} T_1 \cdot \delta (\nabla u^1 + \nabla u^{1T}) dB_1 ,$$

$$E^1 = \frac{1}{2} (\nabla u^1 + \nabla u^{1T} + \nabla u^{1T} \nabla u^1)$$

T_1 tensor de tensiones en la configuración B_1 .

$\tilde{S}^1 = \tilde{S}_2^1 - T_1$ es el incremento del tensor de Piola-Kirchhoff de segunda especie cuando el cuerpo pasa de la configuración B_1 a B_2 . Con el superíndice 1 estamos enfatizando que está referido a la configuración B_1 .

DEFORMACIÓN INICIAL Y TENSION INICIAL

Hasta ahora al estudiar la deformación de un cuerpo referimos dicha deformación a una configuración inicial B_0 , que admitimos libre de tensiones o sea supusimos $T_0(X) \equiv 0$ para todo $X \in B_0$.

Es de interés en mecánica del continuo analizar deformaciones de cuerpos referidas a una configuración con deformación o tensión inicial, problemas que en la práctica ocurren frecuentemente en elementos estructurales debido a imperfección de fabricación o montaje.

Para analizar estos casos haremos uso de la expresión incremental del trabajo virtual deducida en el ítem anterior. Tendremos así:

a) Deformación inicial

Admitamos que existe una configuración B_1 conocida, tal que el tensor T_1 es nulo en todo B_1 . De lo anterior, haciendo $\tilde{S}_1 = 0$ en la descripción lagrangeana de la forma incremental del teorema de los trabajos virtuales tendremos:

$$\delta W_2 = \int_{B_0} \tilde{S} \cdot \delta E \, dB_0 + \frac{1}{2} \int_{B_0} \tilde{S} \cdot \delta (\nabla u_1^T \nabla u + \nabla u^T \nabla u_1) \, dB_0.$$

donde:

$u_1 = u_1(X)$ representa la inferfección de la configuración B_1 respecto a B_0 .

$u = u(X)$ desplazamiento del punto X al pasar de B_1 a B_2 .

b) Tensión inicial

Admitamos que existe una configuración B_1 conocida, en la que el tensor T_1 no es nulo. Refiriendo la configuración final B_2 a la configuración inicial B_1 con tensión inicial, la descripción relativa de la forma incremental del teorema de los trabajos virtuales:

$$\delta W_2 = \frac{1}{2} \int_{B_1} T_1 \cdot \delta (\nabla u^1{}^T \nabla u^1) \, dB_1 + \int_B \tilde{S}^1 \cdot \delta E^1 \, dB_1$$

nos permite el análisis de este problema interpretando T_1 como el tensor de tensiones iniciales.

NOTA: Obsérvese que el efecto de las tensiones iniciales sólo colabora cuando se tienen en cuenta los términos no lineales de la deformación.

PLACAS CON GRANDES DEFLEXIONES

Presentaremos a continuación la aplicación del teorema de los trabajos virtuales al problema de grandes deflexiones de placas delgadas.

Como es sabido, el análisis lineal de placas delgadas está limitado al caso en que los desplazamientos normales a la superficie media son pequeños comparados con el espesor. Cuando los desplazamientos de la superficie media son del mismo orden que el espesor, términos no lineales deben ser llevados en cuenta en el tensor de deformación.

Veremos como se aplican las expresiones del teorema de los trabajos virtuales y su forma incremental en los siguientes casos que analizaremos por separado. Configuración inicial plana sin tensión inicial, configuración inicial deformada y configuración inicial plana con tensión inicial. En todos ellos supondremos material hookeano [3] cuya ley constitutiva está dada por:

$$\tilde{S} = C E$$

donde: C es un tensor de cuarto orden.

Admitiremos que durante la deformación se verifican las hipótesis de Kirchhoff, que nos permiten relacionar las de

formaciones en cualquier punto de la configuración inicial de la placa con las de su correspondiente en la superficie media [5].

En el cálculo de δW_i reduciremos el sistema (b_i, t_i) a un sistema de fuerzas equivalentes que actúa en la superficie media Ω y contorno $\partial\Omega$. No entraremos en mas detalles de como calcular δW_i , pero el lector interesado puede verlo en [5].

Adoptaremos en todos los casos una base ortonormal como referencia.

a) Configuración inicial plana sin tensión inicial

La expresión del teorema de los trabajos virtuales:

$$\delta W_i = \int_{B_0} \tilde{S}_i \cdot \delta E_i \, dB_0$$

particularizada para el caso de placas, donde:

$$(\tilde{S}_i)_{jk} = C_{jkrs} (E_i)_{rs} \quad \text{material hookeano}$$

$$(E_i)_{jk} = \frac{1}{2} (u_{j,k} + u_{k,j}) + u_{3,j} u_{3,k} - X_3 u_{3,jk}$$

$$u_i = u_i(X) \quad \text{componentes del desplazamiento del punto } X, \\ X = (X_1, X_2, 0) \in \Omega \quad \text{(superficie media) al pasar de } B_0 \text{ a } B_i$$

$$X_3 \quad \text{distancia de un punto cualquiera de la configuración inicial de la placa a sua correspondiente en la superficie media}$$

conduce a un sistema de ecuaciones no lineales en u_1 , u_2 , u_3 , definidas en un dominio bi dimensional Ω conocidas como ecuaciones de von-Karman [5].

b) Configuración inicial deformada

Consideremos que la imperfección inicial está dada por:

$$u_1 = u^* = (0, 0, u_3^*)$$

estamos admitiendo por tanto que la superficie media de la configuración B_1 tiene una deflexión inicial $u_3^* = u_3^*(X_1, X_2)$.

La forma incremental del teorema de los trabajos virtuales cuando se considera deformación inicial u^* :

$$\delta W_2 = \int_{B_0} \tilde{S} \cdot \delta E \, dB_0 + \frac{1}{2} \int_{B_0} \tilde{S} \cdot \delta (\nabla u^{*T} \nabla u + \nabla u^T \nabla u^*) \, dB_0$$

particularizada para el caso de placas, donde:

$$(\tilde{S})_{jk} = C_{jkr s} (E)_{rs}$$

$$E_{jk} = \frac{1}{2} (u_{j,k} + u_{k,j} + u_{3,j} u_{3,k}) - X_3 u_{3,jk}$$

$$(\nabla u^{*T} \nabla u + \nabla u^T \nabla u^*)_{jk} = u_{3,j}^* u_{3,k} + u_{3,j} u_{3,k}^*$$

conduce a un sistema de ecuaciones no lineales en u_1 , u_2 , u_3 , definidas en un dominio bi dimensional Ω conocidas como ecuaciones de Marguerre [6].

c) Configuración inicial plana con tensión inicial

Consideremos la configuración inicial de la placa: plana y con tensiones iniciales \bar{T}_1 conocidas.

La expresión del teorema de los trabajos virtuales con tensión inicial

$$\delta W_2 = \frac{1}{2} \int_{B_1} \bar{T}_1 \cdot \delta (\nabla u^1 \nabla u^1) dB_1 + \int_{B_1} \tilde{S} \cdot \delta E^1 dB_1$$

particularizada para placas, donde:

$(\bar{T}_1)_{ij}$ matriz de tensiones iniciales

$$(\nabla u^1 \nabla u^1)_{ij} = u_{3,i}^1 u_{3,j}^1$$

$$(\tilde{S})_{ij} = C_{ijrs} (E^1)_{rs}$$

$$(E^1)_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^1 + u_{j,i}^1 + u_{3,i}^1 u_{3,j}^1) - X_3 u_{3,ij}^1$$

conduce a un sistema de ecuaciones no lineales en u_1^1, u_2^1, u_3^1 .

NOTA: Puede notarse que en el caso de tensión inicial, dentro de la teoría de pequeñas deflexiones, podrá desprejarse el trabajo:

$$\int_{B_1} \tilde{S} \cdot \delta \bar{E} dB_1$$

$$\text{donde } \delta \bar{E} = \delta E^1 |_{X_3} = 0$$

frente al trabajo realizado por las tensiones iniciales. En este caso la expresión del teorema de los trabajos virtuales conduce a la ecuación conocida como de Saint Venant (vease Timoshenko, "Theory of Elastic Stability" , pag. 334).

APROXIMACION POR EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

Soluciones aproximadas de los problemas anteriores pueden obtenerse a través del Método de Elementos Finitos. Esencialmente este método consiste en subdividir la región Ω en E subregiones Ω_e donde la solución exacta es aproximada. Supuesto satisfechas las condiciones de continuidad es posible generar una aproximación global a partir de la local.

La aproximación local de u puede expresarse en el caso específico de placas de la siguiente manera:

$$u_p^e = (u_1^{(e)}, u_2^{(e)})^T = \Phi u_p^{N(e)}$$

$$u_b^e = u_3^{(e)} = \Psi^T u_b^{N(e)}$$

donde:

Φ : matriz de interpolación del campo de desplazamiento de membrana.

Ψ : vector de interpolación del campo de desplazamiento de

flexión (u_3).

$u_p^{N(e)}$: vector de desplazamiento de membrana de los N nudos del elemento e .

$u_p^{N(e)}$: vector de desplazamiento de flexión de los N nudos del elemento e .

Presentaremos para cada caso a ser estudiado las matrices de rigidez a que se arriba a nivel de elemento con la aproximación local definida anteriormente. Para cada elemento el teorema de los trabajos virtuales conduce a una expresión del tipo:

$$K(e) d^{N(e)} = f(e)$$

donde:

$K(e)$ matriz de rigidez del elemento Ω_e

$\{d^{N(e)}\} = \{u_p^{N(e)T}, u_b^{N(e)T}\}^T$ vector de desplazamientos de los nudos del elemento

$\{f(e)\}$ vector de fuerzas equivalentes.

Del ensamble adecuado de todos los elementos se obtendrá el sistema de ecuaciones para cada caso.

a) Configuración inicial plana sin tensión inicial

La matriz del elemento está dada por:

$$K(e) = \begin{bmatrix} K_1 & K_4 \\ 2K_4^T & K_2 + K_3 \end{bmatrix}$$

donde:

$$K_1 = \int_{\Omega_e} B_\ell^T D B_\ell t \, d\Omega_e \qquad K_2 = \frac{1}{12} \int_{\Omega_e} B_b^T D B_b t^3 \, d\Omega_e$$

$$K_3 = 2 \int_{\Omega_e} B_r^T D B_r t \, d\Omega_e \qquad K_4 = \int_{\Omega_e} B_\ell^T D B_r t \, d\Omega_e$$

$$B_\ell = H_1 \phi$$

$$B_r = \frac{1}{2} \left[H_1 (\psi^T U_b^N(e) \, I) \right] H_2 \psi^T$$

$$B_b = - H_3 \psi^T$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial X_1} & , & 0 \\ 0 & , & \frac{\partial \cdot}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial X_2} & , & \frac{\partial \cdot}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad , \quad H_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad , \quad H_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial X_1^2} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial X_2^2} \\ \frac{2\partial \cdot}{\partial X_1 \partial X_2} \end{bmatrix}$$

I matriz identidad de rango dos

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

t espesor de la configuración inicial

b) Configuración inicial deformada

La matriz del elemento está dada por:

$$K(e) = \begin{bmatrix} K_1 & K_4 + K_6 \\ 2K_4^T + K_6^T & K_2 + K_3 + K_5 + K_7 + 2K_7^T \end{bmatrix}$$

donde:

$$K_5 = \int_{\Omega_e} B_0^T D B_0 t d\Omega_e \quad K_6 = \int_{\Omega_e} B_\ell^T D B_0 t d\Omega_e$$

$$K_7 = \int_{\Omega_e} B_0^T D B_r t d\Omega_e$$

$$B_0 = \left[H_1 (u_3^* \ I) \right] H_2 \psi^T$$

c) Configuración inicial plana con tensión inicial

La matriz del elemento está dada por:

$$K(e) = \begin{bmatrix} K_1 & K_4 \\ 2K_4^T & K_2 + K_3 + K_g \end{bmatrix}$$

donde:

$$K_g = \int_{\Omega_e} B_g^T [\bar{T}_1] B_g t d\Omega_e$$

$$B_g = H_2 \psi^T$$

$[\bar{T}_1]$ matriz de tensiones iniciales

En el caso de pequeñas deflexiones, teoría de Saint Venant, la matriz de rigidez del elemento se reduce a:

$$K(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_2 + K_g \end{bmatrix}$$

APLICACION NUMERICA

La presente teoría fué aplicada para determinar el campo de desplazamientos de una placa cuadrada sometida a carga normal uniforme q , con $(u_1 = u_2 = u_3 = 0)$ en todo el contorno.

Para ello se empleó un elemento rectangular con cuatro nudos y seis grados de libertad $(u_1^N, u_2^N, u_3^N, u_{3,1}^N, u_{3,2}^N, u_{3,12}^N)$ los dos primeros asociados a desplazamientos de membrana y los cuatro restantes a desplazamientos de flexión. [5]

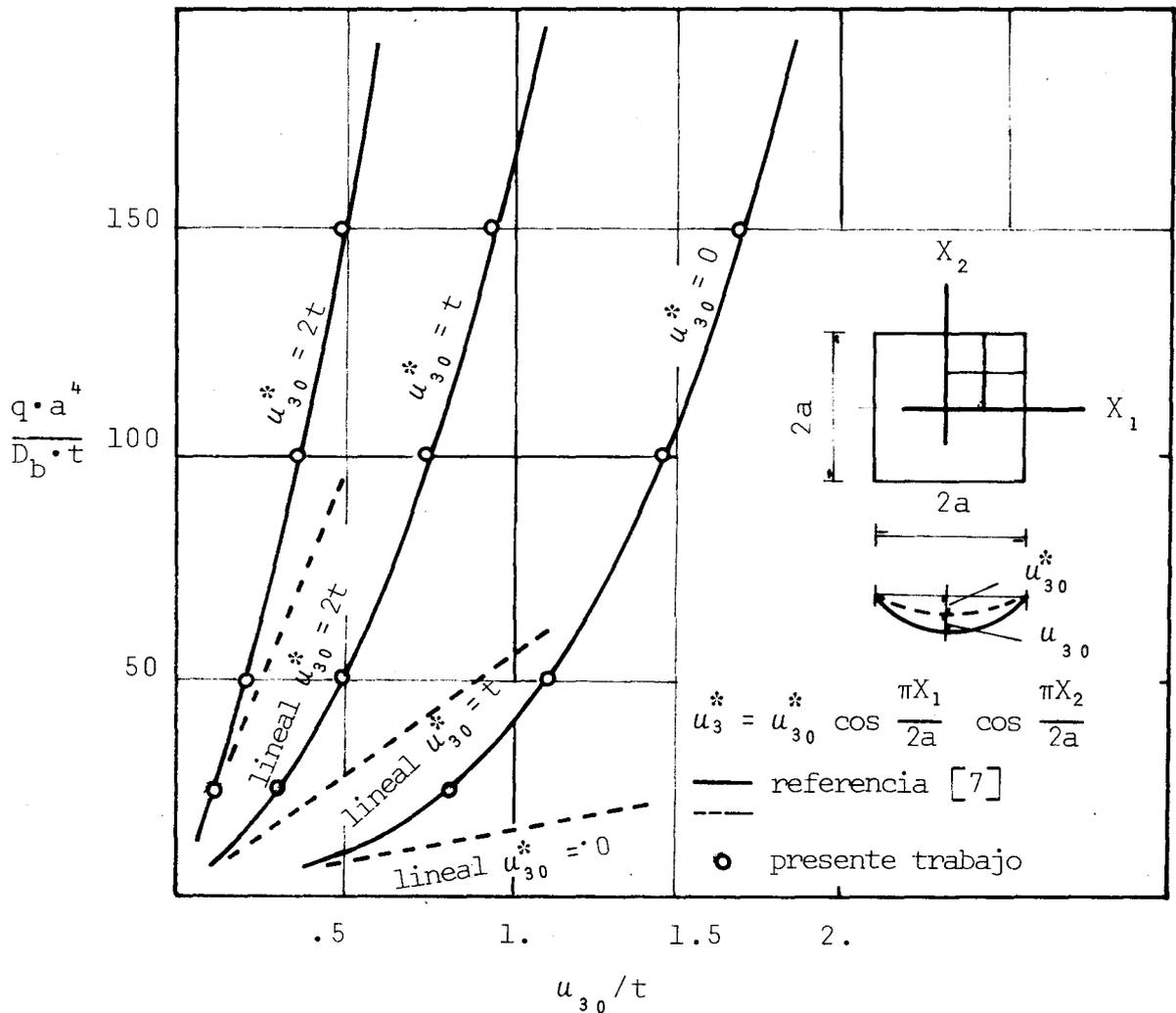


FIGURA 3

En la figura 3 se presentan las deflexiones obtenidas en el centro de la placa para distintos niveles de carga comparándolas con los resultados dados en [7]:

u_{30}^* imperfección inicial en el centro de la placa

u_{30} deflexión en el centro de la placa

$D_b = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$ rigidez de flexión

BIBLIOGRAFIA

- [1] Truesdell, C., *The Elements of Continuum Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1966.
- [2] Leigh, D.C., *Nonlinear Continuum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [3] Malvern, L.E., *Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium*, Prentice-Hall, New Jersey, 1969.
- [4] Larsen, P.K. & E.P. Popov, *A Note on Incremental Equilibrium Equations and Approximate Constitutive Relations in Large Inelastic Deformations*, Acta Mecanica 19, pp. 1-14, 1974.
- [5] Taroco, E., R. Feijóo, L. Bevilacqua, *Método de Elementos Finitos Aplicado a Placas con Grandes Deflexiones*, Anales de las XVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Caracas, 1975.
- [6] Taroco, E., R. Feijóo, *Large Deflection of Plates with Initial Imperfections*, Proceedings of the Third Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Rio de Janeiro, 1975.
- [7] Bergan, P.G. & R.W. Clugh, *Large Deflections Analysis of Plates and Shallow Shells Using the Finite Element Method*, Int. J. Num. Meth. Engng. 5, pp. 543-56, 1973.