CBPF-NF-028/04

Convecção natural em cavidades triangulares: aspectos computacionais*

L. G. Ferreira Filho† e N. G. de C. Leite‡
UERJ - Faculdade de Tecnologia - Resende, RJ

Resumo

The analysis is carried out for laminar natural convection in a prismatic enclosure, being its cross-section an isosceles triangle. Many cases of thermal boundary conditions were considered. We present here only two of them. The finite differences method for solving the stationary Navier-Stokes and energy conservation equations is described. The physical variables used are vorticity, stream-function and temperature. Results for isotherms and field lines are presented for Grashof number $Gr = 10^6$ and aspect ratio A=1. The present results are in good agreement with data of other authors.

*Um dos autores (L.G.F.F.) agradece ao CBPF/MCT pela hospitalidade e por oferecer facilidades de trabalho durante parte do periodo de realização deste artigo.

†Email: gonzaga@uerj.br
‡Email: nleite@uerj.br

1 INTRODUÇÃO

As equações estacionárias de Navier-Stokes e de conservação de energia para um fluido incompressível, com dissipação viscosa desprezível, num regime laminar em duas dimensões, usando a hipótese de Boussinesq (assumimos que a convecção natural, neste caso, é resultado apenas das diferenças de temperatura no termo de empuxo), nas variáveis ψ, ω e θ (função corrente, função vorticidade e temperatura, respectivamente) são dadas por[1],

$$\nabla^2\psi = -\omega,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \nu\nabla^2\omega + g\beta\frac{\partial\theta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \alpha\nabla^2\theta,$$

onde $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, ν é a viscosidade cinematica do fluido, g a aceleração devida à garvidade, β é o coeficiente de expansão térmica e α a difusividade térmica do fluido. A direção x é orientada na horizontal e a direção y orientada verticalmente para cima. Basicamente, a idéia é resolver este conjunto acoplado de equações diferenciais não-lineares e mapear a temperatura e a função corrente numa cavidade prismática com secção transversal triangular isosceles, com base B e altura H.

2 ADIMENSIONALIZAÇÃO

O primeiro passo para se resolver este conjunto de equações, é transformar convenientemente as variáveis dependentes e independentes de modo a torná-las adimensionais. Consideremos o seguinte grupo de transformações,

$$X = \frac{x}{B}, \qquad Y = \frac{y}{H},$$

$$\Psi = \frac{\psi}{\nu}, \qquad \Omega = \frac{\omega BH}{\nu}, \qquad \Theta = \frac{\theta - \theta_C}{\theta_H - \theta_C},$$

onde as maiúsculas são adimensionais, θ_C é a temperatura da parede fria e θ_H é a temperatura da parede quente. Com essas novas variáveis, as equações agora assumem a seguinte forma:

$$A\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2} + \frac{1}{A}\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2} = -\Omega,$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial X}\frac{\partial\Psi}{\partial Y} - \frac{\partial\Omega}{\partial Y}\frac{\partial\Psi}{\partial X} = A\frac{\partial^2\Omega}{\partial X^2} + \frac{1}{A}\frac{\partial^2\Omega}{\partial Y^2} + GrA^2\frac{\partial\Theta}{\partial X},$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial X}\frac{\partial\Psi}{\partial Y} - \frac{\partial\Theta}{\partial Y}\frac{\partial\Psi}{\partial X} = \frac{1}{Pr}(A\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2} + \frac{1}{A}\frac{\partial^2\Theta}{\partial Y^2}).$$

A razão de alongamento A, o número de Grashof Gr e o número de Prandtl Pr são dados por,

$$A = \frac{H}{B},$$
$$Gr = \frac{g\beta B^3(\theta_H - \theta_C)}{\nu^2},$$
$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}.$$

Os números de Grashof e de Prandtl formam o grupo adimensional da covecção natural. Fixamos o número de Prandtl em Pr=0.733, que corresponde ao ar. Variamos o número de Grashof na faixa $10^3 \leq Gr \leq 10^8$. Valores abaixo de 10^3 representam condução pura, ou seja, não ocorre escoamento do fluido e, portanto, nenhuma transferência de calor via convecção. Valores acima de 10^8 começam a apresentar efeitos de escoamento turbulento, e as equações acima deixam de ser válidas. Assim, o número de Grashof representa a relação entre as forças de empuxo devidas as diferenças de temperatura das paredes da cavidade, e as forças dissipativas devidas a viscosidade do fluido.

3 CONDIÇÕES DE CONTORNO

A condição de não deslizamento, prescreve que o fluido não deve deslizar pelas paredes da cavidade. Disso decorre que, no contorno, a velocidade do fluido deve ser identicamente nula. Por outro lado, a função corrente está relacionada com as componentes v_x e v_y da velocidade do fluido, da seguinte forma:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Isso implica que a função corrente deve ser constante no contorno. Assumiremos este valor arbitrariamente como zero. Usando a equação que relaciona a função corrente com a vorticidade, podemos agora definir os valores de contorno para esta última. Até segunda ordem numa expansão em série de Taylor, e usando o método de diferenças finitas em um reticulado sobre a secção reta da cavidade, podemos reescrever aquela equação como segue:

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = -\omega_{i,j},$$

onde i e j indexam cada nó do reticulado, variando nas direções x e y, respectivamente.

Vemos que desse modo, na fronteira, o valor da vorticidade dependerá do valor da função corrente no ponto vizinho mais próximo do contorno, no interior da cavidade.

A variável temperatura assumirá nas paredes da cavidade, os valores fixos 0 e 1, conquanto a elas sejam impostas as condições fria e quente, respectivamente. Paredes adiabáticas, que representaremos pela letra a, serão caracterizadas pela condição de contorno,

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0,$$

onde n representa a direção normal à parede da cavidade.

4 MÉTODO COMPUTACIONAL E RESULTADOS

Utilizando o método de diferenças finitas, as equações de conservação foram discretizadas e transformadas num conjunto de equações algébricas não-lineares e acopladas. Resolvemos simultaneamente este sistema aplicando um algorítmo auto-consistente baseado no método de Newton-Raphson. Obtivemos um mapeamento da temperatura e da função corrente na cavidade para algumas combinações de condições de contorno e para alguns valores do número de Grashof e da razão de alongamento. Estes resultados são apresentados nas figuras abaixo, na forma de isotermas e de isolinhas da função corrente, que representam as linhas de campo do escoamento do fluido.

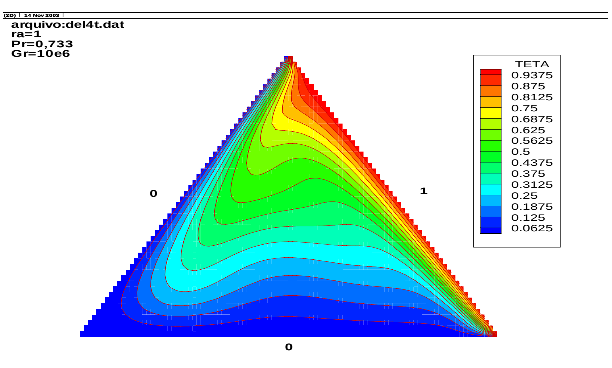

Figura 1: Isotermas, $Gr = 10^6$ e A=1

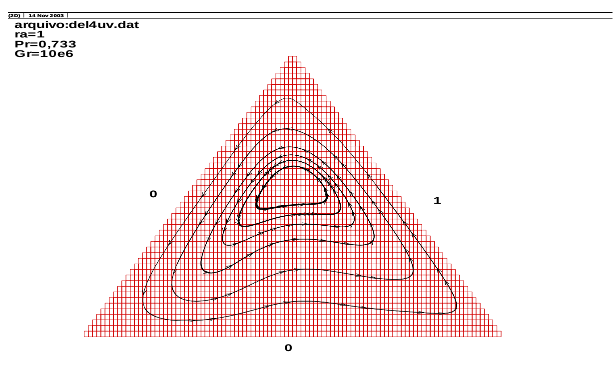

Figura 2: Linhas de Campo, $Gr = 10^6$ e A=1

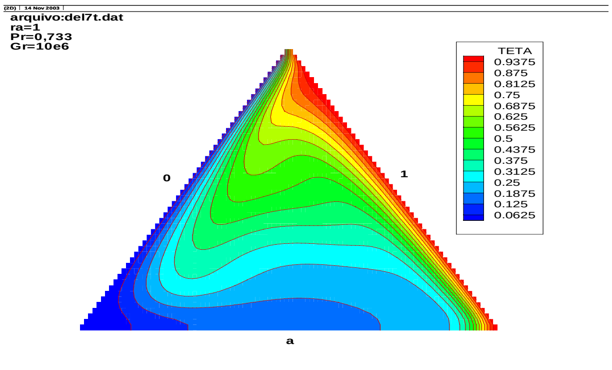

Figura 3: Isotermas, $Gr = 10^6$ e A=1

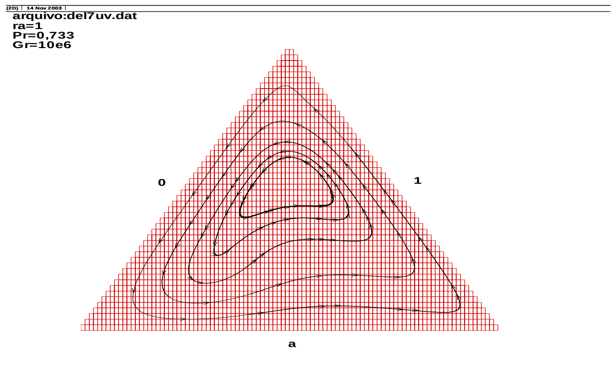

Figura 4: Linhas de Campo, $Gr = 10^6$ e A=1

Referências

[1] E. M. del Campo, M. Sen e E. Ramos - Analysis of laminar natural convection in a triangular enclosure - Num. Heat Tansfer, vol. 13, pp 353-372, 1988.