

ALGUNOS PRINCIPIOS Y METODOS VARIACIONALES EN
ELASTO-PLASTICIDAD, CREEP Y SU FORMULACION
UNIFICADA A TRAVES DE LA ELASTO/VISCO-PLASTICIDAD

Raúl A. Feijóo y Edgardo Taroco
LABORATÓRIO DE CÁLCULO - CBPF
B R A S I L

El gran desarrollo industrial y tecnológico de estas últimas décadas ha llevado al hombre a tratar de conocer cada vez más el comportamiento de los materiales a la vez que, ha tratado de desenvolver nuevas técnicas y métodos numéricos capaces de resolver los problemas a que se ve enfrentado.

Dentro de este contexto podemos citar los estudios sobre el comportamiento elasto-plástico, visco-elástico y elasto/visco-plástico de los materiales. Estos fenómenos son importantes para modelar procesos industriales de conformación de metales tales como laminado, estampado, etc.. Por otra parte en el análisis de esfuerzos en estructuras como rotores, pistones, álabes de turbinas, componentes de reactores nucleares, vasos de presión, estructuras aeronáuticas en general, etc., se hace necesario llevar en cuenta el comportamiento inelástico de los materiales.

El objetivo de este trabajo es presentar algunas formulaciones variacionales equivalentes al problema cuasi-estático en elasto-plasticidad, creep secundario y elasto / visco-plasticidad, dentro de la teoría de deformaciones infinitesimales y procesos isotérmicos.

Algunos algoritmos numéricos para la solución aproximada de estos problemas variacionales son discutidos, a la vez que, pónese en evidencia cómo la formulación variacional asociada a elasto/visco-plasticidad puede ser considerada lo suficientemente general como para que la plasticidad

y el creep pasen a ser casos particulares de la misma.

Para facilitar la presentación de este trabajo se lo ha dividido en tres secciones, la primera se refiere a elasto-plasticidad, en la segunda se presenta creep con énfasis en creep secundario, la tercera sección se refiere a elasto/visco-plasticidad, formulaciones variacionales y sus soluciones aproximadas a través del Método de los Elementos Finitos.

1. FORMULACIONES VARIACIONALES Y APROXIMACIONES NUMERICAS EN ELASTO-PLASTICIDAD

No se pretende realizar aquí un análisis del estado actual de los principios y métodos variacionales en elasto-plasticidad. Los mismos se encuentran en una etapa de rápida evolución debido principalmente a los recientes progresos del Análisis Convexo y sus aplicaciones a Mecánica [1,2,3].

Dentro de las hipótesis de deformaciones infinitesimales e isotérmicas, la plasticidad será vista en este trabajo de una manera clásica [4,5]. Lo anterior permite razonar de la siguiente manera: conocido el estado actual de tensiones, deformaciones, deformaciones plásticas, e historia de dichas deformaciones, el problema consiste en determinar las velocidades de los desplazamientos y del tensor de tensiones (\dot{u} , \dot{T}) conocidas las velocidades de las fuerzas aplicadas y de los desplazamientos prescriptos.

En el caso de $A \geq 0$ (A mide el endurecimiento por deformación) se puede demostrar la existencia de dos principios de mínimo asociados [4, 6, 14]. En la resolución numérica de estos problemas variacionales en general, dos técnicas son empleadas. La primera asociada a métodos iterativos que consisten en sucesivas soluciones "elásticas" [7, 8, 9], y la segunda corresponde a los algoritmos para la determinación del mínimo de una función convexa con restricciones [10, 11, 12].

En esta sección serán comentados algunos algoritmos numéricos de tipo iterativos y los inconvenientes existentes en la determinación del paso Δt .

1.1 - Ecuaciones Constitutivas en Elasto-Plasticidad

Para describir el comportamiento de un material más allá de su rango elástico, es necesario definir al menos los siguientes aspectos.

i) *Un criterio que permita establecer la transición inicial de comportamiento elástico al plástico.* Este criterio es llamado "criterio inicial de fluencia" y si se designa con T al tensor de tensiones puede expresarse como:

$f(T) < 0$ el punto se encuentra dentro del comportamiento elástico.

$f(T) = 0$ el punto ha alcanzado el límite elástico y podrá iniciar su comportamiento plástico o no dependiendo del proceso de carga a que sea sometido.

La función f satisface ciertas propiedades [4, 5, 13] que permiten definir en el espacio de tensiones un dominio convexo C conteniendo el origen $T = 0$ en su interior, el cual a su vez es el dominio elástico. Por ejemplo, una forma particular de f que representa la condición inicial de fluencia en metales está dada por:

$$T \in C \Leftrightarrow f(T) \leq 0, \quad f(T) = \left(\frac{1}{2} S.S\right)^{1/2} - \chi_0$$

propuesta por Huber en 1904 y von Mises en 1913 de allí el nombre de criterio de Huber-von Mises, y donde S es la parte desviadora de T y $S.S.$ representa el producto escalar.

ii) *Modificación del criterio de fluencia.* Si el

proceso de carga continúa una vez alcanzada la condición inicial de fluencia, ciertos materiales sufren un fenómeno de endurecimiento por deformación (work-hardening) La condición de fluencia inicial cambiará, a medida que las deformaciones plásticas ocurran.

El material en que este fenómeno está ausente, es decir, la condición inicial de fluencia permanece inalterada cualquiera que sea el proceso de carga, recibe el nombre de material elasto-plástico perfecto o ideal.

Una ley de variación corresponde, por ejemplo, al caso conocido con el nombre de "isotropic work-hardening" y está dada por:

$$f(T, \chi) = F(T) - \chi \leq 0$$

$$\chi = \chi(h), \quad h = \int_0^t T \cdot D^P dt \quad \text{o bien} \quad h = \int_0^t \left(\frac{2}{3} D^P \cdot D^P\right)^{1/2} dt$$

donde $D^P dt$ es el incremento de deformación plástica producido en el intervalo de tiempo $(t, t+dt)$. Si χ es una función monótona creciente de su argumento h , la función de fluencia inicial crecerá uniformemente en todas las direcciones manteniendo su forma a medida que las deformaciones plásticas aumentan.

Otros criterios de modificación de esta función inicial han sido propuestos de manera de llevar en cuenta fenómenos tales como el efecto Baushinger, formación de puntos angulosos, etc. [4, 5, 13].

iii) *Relación entre deformaciones plásticas y tensiones.* Las hipótesis correspondientes a lo que se conoce en plasticidad como "flow theory", consisten en:

$$D = D^e + D^P, \quad \begin{array}{l} D^e \text{ tasa de deformación elástica,} \\ D^P \text{ tasa de deformación plástica,} \\ D = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla v^T) = (\nabla v)^S, \quad \nabla \text{ operador gradiente.} \end{array}$$

Admite la existencia de una función $\phi = \phi(T, \chi)$, llamada "función potencial de plasticidad", y la existencia de un escalar $\dot{\lambda} > 0$ tales que para los materiales con endurecimiento se verifica:

$$\begin{aligned} D^P &= \dot{\lambda} \phi_{,T} & \text{si } f(T, \chi) = 0 & \text{ y } f_{,T} \cdot \dot{T} > 0 \\ D^P &= 0 & \text{si } f(T, \chi) = 0 & \text{ y } f_{,T} \cdot \dot{T} \leq 0 \\ & & \text{o } f(T, \chi) < 0 & \end{aligned}$$

En el caso de elasto-plasticidad perfecta resulta $\dot{\lambda} > 0$ indeterminado verificándose:

$$\begin{aligned} D^P &= \dot{\lambda} \phi_{,T} & \text{si } f(T) = 0 & \text{ y } f_{,T} \cdot \dot{T} = 0 \\ D^P &= 0 & \text{si } f(T) = 0 & \text{ y } f_{,T} \cdot \dot{T} < 0 \\ & & \text{o } f(T) < 0 & \end{aligned}$$

El coeficiente $\dot{\lambda}$ para materiales con endurecimiento queda definido una vez establecido el criterio de fluencia, de endurecimiento y la curva $T_{11} - E_{11}^P$ de un ensayo uniaxial (E^P es el tensor de deformación plástica). En efecto, considerando el criterio de Huber-von Mises resulta:

$$\dot{\lambda} = \frac{f_{,T} \cdot \dot{T}}{A}$$

donde A es la pendiente de la curva $T_{11} - E_{11}^P$. Puede observarse que en materiales elasto-plásticos perfectos toda vez que $D^P \neq 0$ se verifica $A = 0$ y $f_{,T} \cdot \dot{T} = 0$ quedando $\dot{\lambda} \geq 0$ indeterminado. Cuando $\phi \equiv f$ la teoría recibe el nombre de ley asociativa de la plasticidad. De las relaciones anteriores se sigue que D^P está orientado según la normal saliente al convexo de plasticidad. Esta ley será adoptada en este trabajo.

Por último también supone que:

$$\dot{T} = \mathbb{D} D^e$$

donde \mathbb{D} es el tensor de cuarta orden de elasticidad que satisface condiciones de:

simetría	$\mathbb{D} = \mathbb{D}^T,$
inversibilidad	$\mathbb{D} \mathbb{D}^{-1} = \mathbb{I},$ \mathbb{I} tensor identidad de cuarta orden
positividad	$\mathbb{D}\mathbb{D} \cdot \mathbb{D} > 0 \quad \forall \mathbb{D} \neq 0 \in \text{Sym}$ $\mathbb{D}\mathbb{D} \cdot \mathbb{D} = 0$ si y sólo si $\mathbb{D} = 0$

Por ejemplo, si el material es isotrópico resulta:

$$\mathbb{D} = 2\mu \mathbb{I} + \bar{\lambda} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$$

$\mu, \bar{\lambda}$ constantes de Lamé y \otimes representa el producto tensorial.

De la inspección de las relaciones anteriores se sigue que para todo proceso con deformación plástica ($\dot{\lambda} > 0$) resulta:

$$\mathbb{D}\mathbb{D} = \mathbb{D}\mathbb{D}^e + \dot{\lambda} \mathbb{D}f_T = \dot{T} + \dot{\lambda} \mathbb{D}f_T$$

de donde:

$$\dot{\lambda} = \frac{f_T \cdot \mathbb{D}\mathbb{D}}{A + f_T \cdot \mathbb{D}f_T}$$

De esta última expresión se sigue que \mathbb{D}^p puede definirse en función del producto $f_T \cdot \mathbb{D}\mathbb{D}$ en lugar del producto $f_T \cdot \dot{T}$ [14]. La selección dependerá fundamentalmente de cual es la variable independiente, en otras palabras si se trabaja con desplazamientos o con tensiones como variables principales.

Por otra parte $\dot{T} = \mathbb{D}(\mathbb{D} - \mathbb{D}^p)$, y en virtud del resultado anterior:

$$\dot{T} = \left(\mathbb{D} - \frac{\mathbb{D}f_T \otimes \mathbb{D}f_T}{A + f_T \cdot \mathbb{D}f_T} \right) \mathbb{D} = \bar{\mathbb{D}}^{ep} \mathbb{D}$$

Nótese que \bar{D}^{ep} es simétrico.

La expresión anterior válida para materiales con o sin endurecimiento, fue deducida solamente para $D^p \neq 0$. Los otros estados pueden ser incluidos en esta expresión de la siguiente forma:

$$\dot{T} = \left(D - \alpha \frac{Df_T \otimes Df_T}{A + f_T \cdot Df_T} \right) D = D^{ep} D$$

donde:

materiales con endurecimiento	materiales elasto-plásticos perfectos
$\alpha=1$ si $f(T, \chi)=0$ y $f_T \cdot \dot{T} > 0$	si $f(T) = 0$ y $f_T \cdot \dot{T} = 0$
$\alpha=0$ si $f(T, \chi)=0$ y $f_T \cdot \dot{T} \leq 0$	si $f(T) = 0$ y $f_T \cdot \dot{T} < 0$
o $f(T, \chi) < 0$	o $f(T) < 0$

En el caso de trabajar con desplazamientos como variable independiente, la definición de α resulta [14]:

$\alpha=1$ si $f(T, \chi)=0$ y $f_T \cdot DD > 0$	si $f(T) = 0$ y $f_T \cdot DD \geq 0$
$\alpha=0$ si $f(T, \chi)=0$ y $f_T \cdot DD \leq 0$	si $f(T) = 0$ y $f_T \cdot DD < 0$
o $f(T, \chi) < 0$	o $f(T) < 0$

Por último la inversa de la expresión $\dot{T} = D^{ep} D$ sólo existe para el caso de materiales con endurecimiento y está dada por:

$$D = D^e + D^p = D^{-1} \dot{T} + \alpha \dot{\lambda} f_T = D^{-1} \dot{T} + \alpha \frac{f_T \cdot \dot{T}}{A} f_T =$$

$$= \left(D^{-1} + \alpha \frac{f_T \otimes f_T}{A} \right) \dot{T}$$

1.2 - Principios Variacionales

Considérese un cuerpo ocupando la región Ω en el instante t en equilibrio bajo la acción del sistema de fuerzas (b, \bar{t}) , donde b es la fuerza por unidad de volumen y \bar{t} es

la densidad de fuerza superficial prescrita en S_T parte del contorno S de Ω . En la parte complementaria que será designada por S_u , está prescrito el campo de desplazamiento u .

Permítase ahora que el sistema de fuerzas y las restricciones en el campo de desplazamientos varíen durante el intervalo $(t, t+dt)$ de manera que las fuerzas de inercia sean despreciables.

Dentro de las hipótesis de deformaciones infinitesimales a temperatura constante, designase como "problema incremental de equilibrio" [19] de la teoría cuasi-estática de la elasto-plasticidad al problema de determinar los campos \dot{T} , D y v , tales que satisfagan las siguientes ecuaciones:

Ecuaciones de equilibrio:

$$\operatorname{div} \dot{T} + \dot{b} = 0 \quad \text{en } \Omega$$

Ecuaciones cinemáticas

$$D = \operatorname{Sym} (\nabla v) \equiv \operatorname{Sym} (\nabla \dot{u})$$

Ecuaciones constitutivas:

$$\dot{T} = \left(D - \alpha \frac{Df_T \otimes Df_T}{A + f_T \cdot Df_T} \right) D, \quad \alpha \text{ definido en la } \S 1.1.$$

Condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \dot{T}n &= \dot{t} \quad \text{en } S_T \\ v &= \dot{u} \quad \text{en } S_u \end{aligned}$$

donde $(\dot{b}dt, \dot{t}dt)$ y $\dot{u}dt$ son los incrementos dados al sistema de fuerzas y al desplazamiento prescrito respectivamente.

Como puede apreciarse, el problema de valor de contorno es no lineal ya que el coeficiente α , que permite distinguir la región de comportamiento elástico y la de comportamiento elasto-plástico, depende de la propia solución

del problema. Dada la no linealidad, la solución aproximada del problema incremental se hace necesaria.

A continuación, se presentan algunos principios variacionales que serán útiles en la determinación de soluciones aproximadas. Para este fin, serán introducidas las siguientes definiciones:

Kin_V , campo de velocidades cinemáticamente admisibles:

$$Kin_V = \{v^*; v^* \text{ regular, } v^* = \dot{\bar{u}} \text{ en } S_u\}$$

$Est_{\dot{T}}$, campo de tasas de tensiones estáticamente admisibles:

$$Est_{\dot{T}} = \{\dot{T}^0; \text{div } \dot{T}^0 + \dot{b} = 0 \text{ en } \Omega, \dot{T}^0 n = \dot{\bar{t}} \text{ en } S_T\}$$

P.A. \dot{T} , campo de tasas de tensiones plásticamente admisibles:

$$P.A.\dot{T} = \{\dot{T}; \text{si } f(T, X) = 0 \text{ luego } f_{T_i} \dot{T}_i \leq 0\}$$

i) *Principios Variacionales donde v es la incógnita principal. Materiales con o sin endurecimiento.*

No resulta difícil demostrar [4,6,7,14] que el problema incremental de equilibrio es equivalente al siguiente principio de mínimo:

"De todas las velocidades cinemáticamente admisibles, $v^* \in Kin_V$, aquella que hace que el funcional $\Pi(v^*)$ alcance un mínimo (mínimo absoluto) es la solución del problema incremental de equilibrio".

Es decir, si v representa dicha solución resulta:

$$\Pi(v^*) \geq \Pi(v) \text{ para } \forall v^* \in Kin_V \text{ e igual si y sólo si } v^*=v$$

donde:

$$\Pi(v^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{T}^* \cdot D^* d\Omega - \int_{\Omega} \dot{b} \cdot v^* d\Omega - \int_{S_T} \dot{\bar{t}} \cdot v^* dS$$

\dot{T}^* y D^* definidos a través de las ecuaciones constitutivas y de compatibilidad en función de v^* . Como puede apreciarse, el problema del mínimo está definido en todo Kin_v y consiste en determinar el mínimo de un funcional cuadrático sin restricción. No obstante lo anterior, el problema es no lineal por cuanto el coeficiente α (que surge en \dot{T}^*) depende de la propia solución.

ii) *Principios variacionales donde \dot{T} es la incógnita principal.*

Nuevamente aquí no resulta difícil mostrar que el problema incremental es equivalente a los siguientes principios de mínimo:

Materiales con endurecimiento. "De todas las tasas de tensiones estaticamente admisibles, $\dot{T}^0 \in Est_{\dot{T}}$, aquella que conduce al funcional $\Pi_c(\dot{T}^0)$ a un mínimo (mínimo absoluto) es la solución del problema incremental".

Es decir, si \dot{T} representa dicha solución se verifica que:

$$\Pi_c(\dot{T}^0) \geq \Pi_c(\dot{T}) \text{ para } \forall \dot{T}^0 \in Est_{\dot{T}} \text{ e } = \text{ si y sólo si } \dot{T}^0 = \dot{T}$$

donde:

$$\Pi_c(\dot{T}^0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{T}^0 \cdot D^0 \, d\Omega - \int_{S_u} \dot{T}^0 n \cdot \dot{u} \, dS$$

y donde D^0 está definido a través de las ecuaciones constitutivas:

$$D^0 = (D^{-1} + \alpha \frac{f_T \otimes f_T}{A}) \dot{T}^0, \alpha \text{ definido en } \S 1.1.$$

Nuevamente, si bien el problema se reduce a determinar el mínimo de un funcional cuadrático sin restricciones el problema es no lineal ya que α depende de la propia solución.

Material sin endurecimiento. De la definición de α se tiene que, en este caso, el problema se reduce a:

$$\min_{\dot{T}^0 \in \text{Est}_{\dot{T}} \cap \text{P.A.}_{\dot{T}}} \{ \Pi_c(\dot{T}^0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{T}^0 \cdot D^{-1} \dot{T}^0 d\Omega - \int_{S_u} \dot{T}^0_n \cdot \dot{u} dS \}$$

Es decir, es el problema del mínimo de un funcional cuadrático con restricciones: \dot{T}^0 debe ser simultáneamente estática y plásticamente admisible. Obsérvese que la restricción es lineal en \dot{T}^0 .

De estos principios de mínimo se sigue la unicidad de \dot{T} y D [4,6,14] teoremas de unicidad del campo de tensiones y deformaciones pueden ser consultados en el trabajo de KOITER [6]. El problema de existencia de la solución es más complicado no estando totalmente resuelto [15].

1.3 - Métodos Iterativos en la Resolución de los Problemas de Mínimo.

Aquí serán presentadas las ideas fundamentales de los algoritmos iterativos más conocidos en la literatura y utilizados conjuntamente con el Método de Elementos Finitos.

i) *Incógnita principal v, materiales con o sin endurecimiento.* Aquí existen fundamentalmente dos procesos iterativos:

Matriz de rigidez modificada en cada paso. A través del resultado del paso anterior se define la región plástica, el problema consiste en:

$$\min_{v^{*n+1} \in \text{Kin}_v} \{ \Pi(v^{*n+1}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_n^{\text{ep}} D^{*n+1} \cdot D^{*n+1} d\Omega - \int_{\Omega} \dot{b} \cdot v^{*n+1} d\Omega - \int_{S_T} \dot{t} \cdot v^{*n+1} dS \}$$

donde:

$$D_n^{\text{ep}} = \left(D - \alpha_n \frac{Df_T \otimes Df_T}{A_n + f_T \cdot Df_T} \right) ,$$

$$\alpha_n = 1 \quad \text{si } f = 0 \text{ y } f_T \cdot \mathbb{D} D^{*n} \geq 0$$

$$\alpha_n = 0 \quad \text{si } f = 0 \text{ y } f_T \cdot \mathbb{D} D^{*n} < 0$$

o $f < 0$

y el proceso se inicia con $D^{*0} = 0$.

Al aplicar el M.E.F. se tiene $K_n v^{*n+1} = F$ es decir, la matriz de rigidez es modificada en cada paso lo que implica un mayor consumo de tiempo de máquina. Por otra parte, la convergencia de este proceso iterativo aún no ha sido demostrada.

Proceso iterativo elástico con tensiones iniciales. En este proceso se supone conocido λ a través del resultado del paso anterior, luego el proceso consiste en:

$$\min_{v^{*n+1} \in \text{Kin}_V} \{ \Pi(v^{*n+1}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{D} D^{*n+1} \cdot D^{*n+1} d\Omega -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n \frac{Df_T \cdot D^{*n}}{A + f_T \cdot Df_T} Df_T \cdot D^{*n+1} d\Omega -$$

$$- \int_{\Omega} \dot{b} \cdot v^{*n+1} d\Omega - \int_{S_T} \dot{t} \cdot v^{*n+1} dS \}$$

donde α_n está definido como anteriormente y donde el proceso se inicia con $D^{*0} = 0$.

La serie $\pi(v^{*n+1})$ es decreciente y la convergencia está demostrada únicamente para $A > 0$. Al utilizar el M.E.F. el algoritmo anterior conduce a un esquema:

$$K v^{*n+1} = F + F_n$$

es decir la matriz permanece constante y sólo es modificado el término independiente. Lo anterior induce una economía de tiempo por cuanto K es triangularizada una sola vez.

ii) *Incógnita principal T*

a) Materiales con endurecimiento, $A > 0$. Nueva -

mente aquí se presentan fundamentalmente dos procesos iterativos:

Matriz de flexibilidad variable en cada paso. El proceso iterativo consiste en:

$$\dot{T}^{0n+1} \min_{\epsilon \text{ Est. } \dot{T}} \{ \Pi_c(\dot{T}^{0n+1}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{T}^{0n+1} \cdot (D^{ep})_n^{-1} \dot{T}^{0n+1} d\Omega - \int_{S_u} \dot{T}^{0n+1}_n \cdot \dot{u} dS \}$$

donde:

$$(D^{ep})_n^{-1} = D^{-1} + \alpha_n \frac{f_T \otimes f_T}{A},$$

$$\alpha_n = 1 \text{ si } f(T, X) = 0 \text{ y } f_T \cdot T^{0n} \geq 0$$

$$\alpha_n = 0 \text{ si } f(T, X) = 0 \text{ y } f_T \cdot T^{0n} < 0$$

$$\text{o } f(T, X) < 0$$

siendo que el proceso se inicia con $\alpha_0 = 0$.

Nuevamente, en este algoritmo la matriz debe recalcularse en cada paso y la convergencia no está demostrada.

Proceso iterativo elástico con deformaciones iniciales. Consiste en "atrasar" el término asociado al trabajo de las tensiones debido a las deformaciones plásticas que es así considerada como una deformación inicial. El proceso consiste en:

$$\dot{T}^{0n+1} \min_{\epsilon \text{ Est. } \dot{T}} \{ \Pi_c(\dot{T}^{0n+1}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} T^{0n+1} \cdot D^{-1} T^{0n+1} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n \frac{f_T \cdot \dot{T}^{0n}}{A} f_T \cdot \dot{T}^{0n+1} d\Omega - \int_{S_u} \dot{T}^{0n+1}_n \cdot \dot{u} dS \}$$

Con α_n definido como anteriormente. Como puede apreciarse la matriz de flexibilidad se mantiene constante en todo el proceso iterativo modificándose solamente el término

independiente. La convergencia del método tampoco está demostrada.

b) Materiales sin endurecimiento (elasto-plásticos perfectos). Los algoritmos anteriores pueden ser aplicados pero aquí, en general, se recurre a los métodos existentes para determinar el mínimo de una función cuadrática con restricciones lineales. En efecto, el problema consistía en:

$$\min_{\dot{T}^0 \in \text{Est}_{\dot{T}} \cap \text{P.A.}_{\dot{T}}} \{ \Pi_C(\dot{T}^0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{T}^0 \cdot D^{-1} \dot{T}^0 d\Omega - \int_{S_u} \dot{T}^0 n \cdot \dot{u} dS \}$$

Es decir, los \dot{T}^0 admisibles son aquellos que siendo estáticamente admisibles son a su vez plásticamente admisibles es decir si $f(T) = 0$ se cumple que $f_T \cdot \dot{T}^0 \leq 0$ restricción ésta lineal en \dot{T}^0 . Para estas técnicas consúltese los trabajos [10,11,12,17].

Con los principios variacionales anteriores conjuntamente con los algoritmos presentados, el problema de la determinación de las velocidades (tanto de desplazamiento como de tensiones) queda resuelto. Si el incremento de tiempo es infinitesimal (dt) el nuevo estado en que se encontrará el cuerpo satisface automáticamente la condición de plasticidad $f \leq 0$. Desde el punto de vista computacional lo anterior es imposible siendo necesario incrementos finitos de tiempo Δt . Conocidas las velocidades para el instante t_n el estado para $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ quedará definido, por ejemplo, por:

$$\begin{aligned} T(t_{n+1}) &\cong T(t_n) + \dot{T}(t_n) \Delta t \\ u(t_{n+1}) &\cong u(t_n) + v(t_n) \Delta t \end{aligned}$$

debe notarse que este esquema, muy empleado por la mayoría de los autores que trabajan en el área [7,16], dará resultados "satisfactorios" si Δt se hace suficientemente pequeño y el intervalo de integración no es grande ya que, ninguno de los

esquemas vistos es capaz de controlar la distancia al convexo de plasticidad. En este proceso de integración paso - a - paso los errores se irán acumulando y al final del mismo la condición $f \leq 0$ podrá no estar satisfecha.

Estas dificultades han sido motivo de numerosas discusiones y algunos esquemas iterativos han sido propuestos, de manera de controlar esta distancia [7,12,18]. La convergencia de estos métodos no ha sido demostrada a excepción del esquema iterativo propuesto por NGUYEN [18].

2. UNA FORMULACION VARIACIONAL DEL PROBLEMA DE CREEP SECUNDARIO

Uno de los problemas que usualmente se presenta en la aplicación estructural de los materiales, es el análisis de tensiones y deformaciones correspondientes a cargas constantes, muchas veces durante prolongados períodos de tiempo. Tal fenómeno, conocido como deformaciones lentas a carga constante o deformaciones de creep, tiene importancia fundamental en la fabricación de motores, turbinas a gas, etc..

El conocimiento más a fondo del fenómeno de creep, que el desarrollo tecnológico demanda día a día, ha incentivado las investigaciones en esta área. Dichas investigaciones se han centrado en dos aspectos fundamentales, uno de ellos se refiere a la obtención de ecuaciones constitutivas que representen el fenómeno de creep [22] y el otro al desarrollo de métodos de cálculo que permitan obtener soluciones a problemas de ingeniería estructural donde dicho fenómeno debe ser llevado en cuenta.

Dada la dificultad experimental de ensayar los diferentes estados de tensión que se pueden presentar en un sólido viscoelástico, el camino seguido ha sido el de realizar ensayos bajo estados simples de tensión [23,24] y posteriormente generalizar los resultados para casos de tensión más com

plejos [25].

En cuanto a los métodos de cálculo, dado que es reducido el número de problemas de creep donde es posible obtener soluciones exactas, se ha dado énfasis a los métodos de cálculo aproximados y entre ellos al Método de Elementos Finitos [26,27].

En esta sección se presenta la ley constitutiva introducida por Norton para el caso de tensión uniaxial y la posterior generalización de Odqvist admitiendo incompresibilidad e isotropía del material, para estados de tensión triaxial.

Se sugiere una expresión más general para la relación constitutiva de creep secundario mediante la introducción de funciones de los invariantes del tensor de tensiones. En un caso particular dicha relación coincide con la ley introducida por Odqvist.

Se introduce también una función potencial, a partir de la cual la ley de creep secundario puede ser derivada. De su convexidad, que es verificada, y del Principio de Potencia Virtual se muestra como arribar a un principio variacional de mínimo.

2.1 - Deformación de Creep en Tensión Uniaxial

Si bien el ingeniero francés L. T. Vicat efectuó, en el siglo pasado, observaciones sistematicas sobre el fenómeno de deformación lenta en barras metálicas traccionadas, a ser empleadas en la construcción de puentes colgantes, se admite generalmente que la teoría fenomenológica de creep comenzó a principios de este siglo con los trabajos del físico inglés E. N. Andrade [23].

El fué quién introdujo la terminología empleada hasta la fecha para distinguir diferentes zonas de creep y el primero en mostrar la diferencia de comportamiento entre deformaciones lentas de barras metálicas a tensión constante y

carga constante.

Las curvas de deformación de creep y velocidad de deformación de creep (E_{11}, t) y (D_{11}, t) obtenidas por él, son indicadas en la Figura 1.

En ambas curvas se distinguen tres zonas denominadas:

- I. creep primario o creep transiente;
- II. creep secundario o creep en régimen estacionario;
- III. creep terciario.

Andrade observa además que en el caso de deformaciones lentas a tensión constante, no hay diferencia entre creep secundario y terciario, existiendo en este caso solamente dos zonas de creep.

Posteriormente, en la década del 30, con la demanda tecnológica de materiales metálicos capaces de soportar temperaturas elevadas para ser empleados en la fabricación de máquinas y motores, los fenómenos de creep fueron estudiados extensivamente por varios investigadores, tales como Norton, Bailey, Sodeberg, Nadai etc..

De las leyes constitutivas propuestas por ellos cabe destacar la formulada por Norton [24], para creep secundario, conocida también como ley potencial y dada por la siguiente expresión:

$$D_{11} = k T_{11}^n$$

donde D_{11} es la velocidad de deformación uniaxial, T_{11} tensión uniaxial, k y n constantes del material.

En el caso en que $n=1$, la ley de Norton se reduce a la ley lineal de Maxwell:

$$D_{11} = k T_{11}$$

El modelo mecánico correspondiente a estas leyes, es un amortiguador lineal para el caso de la ley de Maxwell y

un amortiguador no lineal para el caso de la ley de Norton.

2.2 - Ley Constitutiva de Creep Secundario.

En 1930 Bailey [21] observó que en los metales las deformaciones de creep se producían a volumen constante sin ser influenciadas por la presión hidroestática.

Basándose en las observaciones efectuadas por él y admitiendo isotropía Odqvist [25] postuló en 1934, la siguiente ley constitutiva para creep secundario bajo tensión triaxial:

$$D = f(T_e)S \quad , \quad D_{ij} = f S_{ij} \quad (i, j = 1, 3)$$

donde:

D es el tensor velocidad de deformación de creep

S = T - $\frac{1}{3}(\text{tr}T)I$ es el tensor desviador

$$S_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij}$$

$f(T_e)$ es una función escalar a ser determinada , cuya variable es la tensión efectiva $T_e = \left(\frac{3}{2} S.S\right)^{1/2}$.

Nótese que la velocidad de deformación de creep D dada por la ley anterior, es isocórica pues verifica que:

$$\text{tr} D = D.I = 0 \quad , \quad D_{kk} = 0$$

La función $f(T_e)$ escogida por Odqvist:

$$f(T_e) = \frac{3}{2} k T_e^{n-1} = \frac{3}{2} k \left[\frac{3}{2} S.S \right]^{\frac{n-1}{2}}$$

es tal que en el caso particular de tensión uniaxial, la expresión postulada por él se reduce a la ley de Norton.

Para verificar lo anterior basta recordar que si el tensor de tensiones tiene una única componente T_{11} , las componentes del tensor desviador S_{ij} , y la tensión efectiva T_e estarán dadas por:

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} T_{11} & & \\ & -\frac{1}{3} T_{11} & \\ & & -\frac{1}{3} T_{11} \end{bmatrix}, \quad T_e = \frac{3}{2} S.S = T_{11}^2$$

Introduciendo los valores anteriores en la expresión de Odqvist se arriba a:

$$D_{11} = k T_{11}^n$$

que no es otra cosa que la ley postulada por Norton.

La ley constitutiva de creep secundario para un material isotrópico puede ser formulada en forma mas general mediante la expresión:

$$D = h(f) f_T$$

donde f es una función escalar de los invariantes del tensor T , $f = f(I_1, I_2, I_3)$, h es una función escalar de f , $h=h(f)$ y f_T es la derivada de f con respecto a T .

Dado que resultan expresiones más simples si se trabaja con los invariantes J_2 y J_3 del tensor desviador en lugar de I_2 y I_3 y recordando las relaciones entre los invariantes de T y S es posible expresar $f = f(I_1, I_2, I_3)$ en una forma más conveniente como función de I_1, J_2, J_3 .

Nótese que la ley constitutiva en este caso depende del conocimiento de dos funciones h y f . Por ejemplo, escogiendo las funciones:

$$f = J_2 \quad \text{y} \quad h = \frac{3}{2} k (3 f)^{\frac{n-1}{2}}$$

se obtiene la ley formulada por Odqvist.

2.3 - Inversión de la Ley Constitutiva

Introduciendo la constante $\gamma = 3^{\frac{n+1}{2}} k$, la ley de Odqvist puede ser expresada en la siguiente forma:

$$D = \frac{3}{2} k T e^{n-1} S = \frac{\gamma}{2} J_2^{\frac{n-1}{2}} S$$

Si queremos invertir la relación constitutiva anterior debemos previamente expresar J_2 en función de $L_2 = \frac{1}{2} D \cdot D$, segundo invariante de D .

Para ello multiplicamos escalarmente la relación constitutiva por si misma, con lo que obtenemos:

$$L_2 = \frac{\gamma^2}{4} J_2^n$$

De la relación anterior y de la ley constitutiva obtenemos la inversa de dicha ley:

$$S = \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{1/n} L_2^{\frac{1-n}{2n}} D$$

2.4 - Potenciales de Creep

Introduciendo los potenciales ϕ y ψ dados por:

$$\begin{aligned} \phi(J_2) &= \frac{\gamma}{n+1} J_2^{\frac{n+1}{2}} \\ \psi(L_2) &= \frac{2n}{1+n} \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{1/n} L_2^{\frac{1+n}{2n}} \end{aligned}$$

que verifican la relación $n \phi = \psi$, [28].

La ley constitutiva de creep secundario y su inversa pueden ser obtenidas derivando ϕ y ψ con respecto a T y D respectivamente:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\partial \phi}{\partial T} = \frac{\partial \phi}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial T} = \frac{\gamma}{2} J_2^{\frac{n-1}{2}} S \\ S &= \frac{\partial \psi}{\partial D} = \frac{\partial \psi}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial D} = \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{1/n} L_2^{\frac{1-n}{2n}} D \end{aligned}$$

2.5 - Problema de Valor de Contorno en Creep Secundario

Considérese un cuerpo ocupando una región Ω de contorno S del espacio euclidiano tridimensional, que experi

menta deformaciones lentas en régimen estacionario bajo el sistema de fuerzas (b, \bar{t}) :

$$\begin{aligned} b &= b(X) & X \in \Omega, \text{ es la fuerza por unidad de volumen,} \\ \bar{t} &= \bar{t}(X) & X \in S_T, \text{ es la densidad de fuerza superficial.} \end{aligned}$$

y sometido a una velocidad prescrita \bar{v} :

$$\bar{v} = \bar{v}(X) \quad X \in S_V$$

donde S_T y S_V son las partes del contorno S donde están especificadas fuerzas y velocidades respectivamente (Figura 2).

El problema de valor de contorno en creep secundario consiste en determinar los campos:

$$\begin{aligned} v &= v(X) & \text{velocidad} \\ D &= D(X) & \text{tensor tasa de deformación} \\ T &= T(X) & \text{tensor de tensiones} \end{aligned}$$

que satisfagan las siguientes ecuaciones:

Ecuaciones de equilibrio

$$\text{div}T + b = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

Ecuaciones cinemáticas

$$D = \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla v^T) = (\nabla v)^S,$$

Ecuaciones constitutivas

$$S = \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{1/n} L_2^{\frac{1-n}{2n}} D,$$

con las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} Tn &= \bar{t} & \text{en } S_T \\ v &= \bar{v} & \text{en } S_V \end{aligned}$$

2.6 - Una Formulación Variacional del Problema de Creep Secundario

Como fue presentado en §2.2 la ecuación constitutiva adoptada para modelar el fenómeno de creep secundario

lleva implícita la condición:

$$\text{tr } D = 0$$

Recordando la relación cinemática $D = (\nabla v)^S$ y la definición de divergencia de un campo vectorial v

$$\text{div } v = \text{tr } (\nabla v) = \nabla v \cdot I$$

la condición $\text{tr } D$ implica en que el campo de velocidades v deberá satisfacer la condición $\text{div } v = 0$.

En base a lo anterior e introduciendo la definición:

Kin_v , campo de velocidades cinemáticamente admisibles

$$\text{Kin}_v = \{v^*; v^* \text{ regular, } v^* = \bar{v} \text{ en } S_v, \text{div } v^* = 0 \text{ en } \Omega\}$$

no resulta difícil mostrar que el problema de valor de contorno en creep secundario es equivalente al siguiente problema variacional (deducido a partir del principio de Potencias Virtuales):

Determinar $v \in \text{Kin}_v$ tal que:

$$\int_{\Omega} b \cdot (v^* - v) d\Omega + \int_{S_T} \dot{t} \cdot (v^* - v) dS = \int_{\Omega} S \cdot (D^* - D) d\Omega,$$

se verifique para todo $v^* \in \text{Kin}_v$, donde S es deducido en función de v a través de las ecuaciones constitutivas ya adoptadas, y donde:

$$D^* = (\nabla v^*)^S, \quad D = (\nabla v)^S$$

Recordando la definición de la función potencial $\psi = \psi(D)$ y dado que satisface la desigualdad

$$\psi(D^*) - \psi(D) \geq \psi_D \cdot (D^* - D)$$

el principio variacional anterior conduce al siguiente principio de mínimo:

"De todas las velocidades $v^* \in \text{Kin}_V$ aquella que hace que el funcional $\pi(v^*)$:

$$\pi(v^*) = \int_{\Omega} \psi(D^*) d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot v^* d\Omega - \int_{S_T} \bar{T} \cdot v^* dS$$

alcance un mínimo absoluto es la solución del problema de valor de contorno".

Como puede observarse, el funcional $\pi(v^*)$ es no lineal y está definido en Kin_V esto es, el campo de velocidades cinemáticamente admisibles debe satisfacer $\text{div } v^* = 0$. Esta última propiedad se traduce en una complicación a más en la determinación de las funciones de interpolación apropiadas para la resolución aproximada del problema variacional planteado.

Para salvar este último inconveniente existen numerosas técnicas tales como la de introducir $\text{div } v = 0$ como otra ecuación de Euler de un nuevo funcional. Para ello se recurre a los operadores de Lagrange que desde un punto de vista mecánico implica en introducir la presión hidrostática como un nuevo campo incógnita.

En la sección siguiente será presentada una alternativa, que difiere de la anterior, basada en una formulación variacional asociada a materiales elasto/visco-plásticos.

3. UNA FORMULACION VARIACIONAL EN ELASTO/VISCO-PLASTICIDAD. APROXIMACIONES NUMERICAS EN PLASTICIDAD Y CREEP SECUNDARIO

En la mecánica de los sólidos es usual estudiar por separado las propiedades plásticas y las propiedades reológicas de los materiales. Como fue presentado en la Sección 1, cuando se analizan fenómenos plásticos la hipótesis común en todas las teorías es admitir que las deformaciones de

pendan de la historia de como esas deformaciones fueron procesadas pero no del tiempo.

Sin embargo, los ensayos de metales ponen en evidencia que los efectos reológicos se presentan en forma más pronunciada cuando el estado plástico es alcanzado, obteniéndose tensiones superiores a las de el ensayo estático a medida que aumenta la velocidad de carga [31].

En el acero común, por ejemplo, una sollicitación rápida puede hasta triplicar el valor de la tensión de fluencia y producir una marcada reducción en el fenómeno de endurecimiento [32].

A lo anterior se deben, en parte, las discrepancias que suelen surgir entre los resultados experimentales del análisis de materiales sometidos a cargas variables en el tiempo con los obtenidos mediante la aplicación de la Teoría de la Plasticidad en la que, los fenómenos reológicos son despreciados [31].

En elasto/viscoplasticidad se admite existe una región del espacio de tensiones dentro de la cual el material se comporta elasticamente y fuera de ella tanto propiedades plásticas como viscosas son llevadas en cuenta.

El modelo elasto/viscoplástico presenta la ventaja adicional que a partir de él pueden obtenerse tanto el modelo plástico como el modelo de creep.

3.1 - Ecuaciones Constitutivas en Viscoplasticidad

Las ecuaciones constitutivas en viscoplasticidad fueron formuladas en un principio para estados de tensión simples y posteriormente generalizadas para estados de tensión más complejos.

El primero en analizar el comportamiento viscoplástico de los materiales fue Bingham [33]. En su libro "Fluidity and Plasticity" postuló la ley constitutiva que re

laciona tensiones con velocidades de deformación para el caso particular de corte puro. Esta ley puede expresarse de la siguiente manera:

$$2\mu D_{12} = \begin{cases} 0 & \text{si } f \leq 0 \\ f \frac{T_{12}}{|T_{12}|} & \text{si } f > 0 \end{cases}$$

donde $f = |T_{12}| - k$, T_{12} y D_{12} son las componentes del tensor de tensiones y velocidad de deformación respectivamente, μ y k constantes que dependen del material y donde $|T_{12}|$ representa el valor absoluto de T_{12} .

Hohenemser y Prager [33] generalizaron la ley anterior para estados de tensión arbitrarios a través de la expresión:

$$2\mu D = \begin{cases} 0 & \text{si } f \leq 0 \\ f \frac{S}{J_2^{1/2}} & \text{si } f > 0 \end{cases}$$

donde D y S son respectivamente el tensor tasa de deformación y el tensor desviador de tensiones, $f = J_2^{1/2} - k$ es la función de fluencia, $J_2 = \frac{1}{2}S.S$ y donde $S.S$ representa el producto escalar.

Puede verificarse facilmente que la ley de Hohenemser-Prager representa deformaciones a volumem constante ($\text{tr } D = 0$) y que, en el caso particular de corte puro se reduce a la ley de Bingham. También, es posible verificar que a partir de la ley anterior y como casos límites pueden ser obtenidas la ley viscosa lineal de Newton ($\mu \neq 0, k = 0$), o la ley de plasticidad ideal correspondiente a la ley de fluencia de von Mises ($k \neq 0, \mu \rightarrow 0$) [35].

En efecto:

Ley de Bingham como caso particular de la ley de Hohenemser-Prager.

En el caso de corte puro se verifica que las únicas componentes no nulas de T son $T_{12} = T_{21}$ y que $T = S$, luego:

$$f = J_2^{1/2} - k = |T_{12}| - k$$

y la ley de Hohenemser-Prager se reduce a:

$$2\mu D_{12} = \begin{cases} 0 & \text{si } f \leq 0 \\ f \frac{T_{12}}{|T_{12}|} & \text{si } f > 0 \end{cases}$$

que no es otra cosa que la ley de Bingham.

Ley viscosa de Newton como caso particular de la ley de Hohenemser-Prager cuando $\mu \neq 0$ y $k = 0$.

Para $\mu \neq 0$ y $k = 0$ se tiene:

$$f = J_2^{1/2}, \quad f \geq 0 \quad e = 0 \quad \text{si y sólo si } S = 0$$

Introduciendo lo anterior en la ley de H-P se tiene:

$$2\mu D = S$$

Material idealmente plástico con la función de fluencia de von Mises como caso límite de la ley de H-P cuando $k \neq 0$ y $\mu \rightarrow 0$.

Según se vio en la Sección 1 la ecuación constitutiva en plasticidad ideal está dada por:

$$D = \begin{cases} 0 & \left\{ \begin{array}{l} \text{si } f(T) = 0 \text{ y } f_T \cdot \dot{T} < 0 \\ \text{si } f(T) < 0 \end{array} \right. \\ \lambda f_T & \text{si } f(T) = 0 \text{ y } f_T \cdot \dot{T} = 0 \end{cases}$$

donde $\lambda \geq 0$ es una constante indeterminada.

Si se adopta como función de fluencia el criterio de von Mises resulta:

$$f = J_2^{1/2} - k, \quad J_2 = \frac{1}{2} S.S$$

luego:

$$f_T = \frac{1}{2} J_2^{-1/2} S$$

de donde:

$$D = \begin{cases} 0 & \left\{ \begin{array}{l} \text{si } J_2^{1/2} - k = 0, \text{ y } S.\dot{S} < 0 \\ \text{si } J_2^{1/2} - k < 0 \end{array} \right. \\ \dot{\lambda} \frac{S}{2J_2^{1/2}} = \frac{\dot{\lambda}}{2k} S & \text{si } J_2^{1/2} - k = 0 \text{ y } S.\dot{S} = 0 \end{cases}$$

que representa la ecuación de von Mises para plasticidad ideal.

Admitiendo que el estado de tensiones T y su tasa de variación \dot{T} son tales que exista deformación plástica, en otras palabras, de que $J_2^{1/2} - k = 0$ y $S.\dot{S} = 0$ resulta:

$$D = \frac{\dot{\lambda}}{2J_2^{1/2}} S$$

por tanto:

$$D.D = \frac{\dot{\lambda}^2}{4J_2} S.S = \frac{\dot{\lambda}^2}{2}$$

Es decir:

$$\dot{\lambda} = 2 L_2^{1/2}, \quad L_2 = \frac{1}{2} D.D$$

o sea que $\dot{\lambda} = \dot{\lambda}(D)$ está definida en el espacio de tasas de deformación.

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación de von Mises para plasticidad ideal se tiene:

$$S = \frac{k}{L_2^{1/2}} D$$

Portanto, puede observarse que:

i. Toda vez que $J_2^{1/2} - k = 0$ y $S \cdot \dot{S} = 0$ la ecuación de von Mises $D = D(S) = \dot{\lambda} S/2k$ —definida en el espacio de tensiones —queda indeterminada en virtud del coeficiente $\dot{\lambda}$. No ocurre lo mismo con la ecuación $S=S(D)=kD/L_2^{1/2}$ que está bien definida para todo D no nulo.

ii. Para todo D no nulo la ecuación $S=kD/L_2^{1/2}$ verifica que $J_2^{1/2} - k = 0$ y $S \cdot \dot{S} = 0$, en efecto:

$$\left(\frac{1}{2} S \cdot S\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2} \frac{k}{L_2} D \cdot D\right)^{1/2} = k$$

$$\frac{d}{dt} (S \cdot S) = 2S \cdot \dot{S} = \frac{d}{dt} (2k^2) = 0$$

Retornando a la ecuación constitutiva de H-P y para $f > 0$ resulta:

$$2\mu D = (J_2^{1/2} - k) S/J_2^{1/2}$$

donde:

$$4\mu^2 D \cdot D = (J_2^{1/2} - k)^2 S \cdot S/J_2 = 2(J_2^{1/2} - k)^2$$

por tanto:

$$J_2^{1/2} = 2\mu L_2^{1/2} + k$$

que sustituida en la ecuación constitutiva conduce a:

$$S = 2\mu D + \frac{k}{L_2^{1/2}} D$$

De lo anterior se concluye que en el límite para $k \neq 0$ y $\mu \rightarrow 0$ la ecuación constitutiva de H-P coincide con la ecuación constitutiva de von Mises en plasticidad ideal.

Una ecuación constitutiva mas general que las anteriores y que las incluye como caso particular ha sido propuesta por Perzyna [34]. La misma puede expresarse como:

$$\mu D = \langle \phi(f) \rangle f_T$$

en la que ϕ es una función real de variable real y donde:

$$\langle \phi(f) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } f \leq 0 \\ \phi & \text{si } f > 0 \end{cases}$$

La función ϕ , que debe satisfacer ciertas propiedades [35], es determinada a través de ensayos uniaxiales [31]. A su vez, si $\phi = J_2^{1/2} - k$ la ecuación constitutiva de Perzyna se reduce a la de Hohenemser-Prager. Por otra parte, si $\phi = (J_2^{1/2} - k)^n$ y $k = 0$ se obtiene la ley de creep secundario formulada por Odqvist haciendo $\mu = 1/\gamma$ (véase Sección 2). De esta manera, las ecuaciones constitutivas en viscoplasticidad permiten no sólo representar mejor el comportamiento real de un material sino también representan, como casos límites, los modelos de plasticidad y de creep-secundario.

Lo anterior también es importante desde el punto de vista computacional ya que permite la elaboración de un único programa de cálculo automático capaz de resolver problemas en cualquiera de las tres áreas mencionadas. Como se rá puesto en evidencia mas adelante, la formulación de plasticidad via viscoplasticidad tiene la ventaja adicional de que la propia formulación variacional incluye el control de la distancia al convexo o función de fluencia de plasticidad.

Por último como puede observarse de las ecuaciones constitutivas en viscoplasticidad presentadas, el tensor tasa de deformación debido a fenómenos viscoplásticos depende solamente del estado actual de tensiones y si se quiere de la historia del proceso.

3.2 - Ecuación Constitutiva en Elasto/Viscoplasticidad. Problema de Valor de Contorno.

Dentro de la teoría de deformaciones infinitesimales se admite que la tasa de deformación D puede ser expresada a través de:

$$D = D^e + D^{vp}$$

donde D^e es la tasa de deformación elástica y está relacionada con \dot{T} mediante la expresión:

$$D^e = D^{-1} \cdot \dot{T}$$

donde D es el tensor de elasticidad de cuarta orden que se supone satisface las propiedades de simetría, inversibilidad y positividad ya enunciada en secciones anteriores.

La parte viscoplástica D^{vp} estará asociada al estado actual de tensiones — y si se quiere a la historia de la deformación — a través, por ejemplo, de la ley propuesta por Perzyna:

$$D^{vp} = \frac{1}{\mu} \langle \phi(f) \rangle f_T$$

Con los elementos anteriores el problema de valor de contorno en elasto/viscoplasticidad limitado al caso de deformaciones infinitesimales y procesos cuasi-estáticos puede formularse de la siguiente manera:

Sea un cuerpo de material elasto/viscoplástico que ocupa la región Ω de contorno S del espacio euclidiano tridimensional. Dado el sistema de fuerzas (b, \bar{t}) donde:

$b = b(X, t)$, $(X, t) \in \Omega \times [0, \theta]$, densidad de fuerzas de volumen

$\bar{t} = \bar{t}(X, t)$, $(X, t) \in S_T \times [0, \theta]$, densidad de fuerzas su per fer cia les

y el desplazamiento prescripto \bar{u} :

$$\bar{u} = \bar{u}(X, t) , (X, t) \in S_u \times [0, \theta]$$

determinar el desplazamiento $u(X, t)$, la deformación $E(X, t)$, la tensión $T(X, t)$ y la deformación viscoplástica $E^{vp}(X, t)$ tal que satisfagan las siguientes ecuaciones:

$$\operatorname{div} \dot{T} + \dot{b} = 0$$

$$\dot{T} = D(D - D^{VP}) \quad \text{en } (X,t) \in \Omega \times [0, \theta]$$

$$\dot{E}^{VP} = D^{VP} = \frac{1}{\mu} \langle \phi(f) \rangle f_T$$

$$\dot{E} = D = \frac{1}{2} (\nabla \dot{u} + \nabla \dot{u}^T) = (\nabla \dot{u})^s$$

con las condiciones de contorno:

$$\dot{T}n = \dot{t} \quad \text{en } (X,t) \in S_T \times [0, \theta]$$

$$\dot{u} = \dot{\bar{u}} \quad \text{en } (X,t) \in S_u \times [0, \theta]$$

y las condiciones iniciales:

$$u(X,0) = u_0, \quad E(X,0) = E_0, \quad E^{VP}(X,0) = 0, \quad T(X,0) = T_0$$

asociadas a la solución del correspondiente problema elástico en el instante $t = 0$.

En las expresiones anteriores n es el vector unitario normal al contorno S , S_T y S_u son las partes de S donde están especificados los desplazamientos y las fuerzas de superficie.

Al igual que cuando fue presentado el problema de valor de contorno en plasticidad, aquí tampoco se está considerando el caso en que el proceso dependa de la historia del mismo. Se ha adoptado este criterio sólo para simplificar la presentación. La generalización para incluir este efecto no presenta dificultad alguna.

3.3 - Formulación Variacional y Aproximaciones Numéricas

Es posible mostrar [35] la equivalencia entre el problema de valor de contorno planteado y el problema variacional obtenido, por ejemplo, a partir del Principio de Potencias Virtuales.

En efecto definiendo para cada instante de tiempo $t = s \in [0, \theta]$ el espacio de velocidades cinematicamente admisibles Kin_v como:

$$\text{Kin}_v = \{v = v(X); \text{regular en } X \in \Omega, v = \dot{\bar{u}}(X, s) \text{ en } X \in S_u\}$$

el problema variacional equivalente consiste en:

Para cada instante de tiempo $t \in [0, \theta]$ determinar $v \in \text{Kin}_v$ tal que:

$$\int_{\Omega} \dot{T} \cdot (D^* - D) d\Omega = \int_{\Omega} \dot{b} \cdot (v^* - v) d\Omega + \int_{S_T} \dot{\bar{t}} \cdot (v^* - v) dS$$

se verifique para todo $v^* \in \text{Kin}_v$, con las condiciones iniciales y el campo \dot{T} definidos como en el item anterior y donde:

$$D^* = (\nabla v^*)^S, \quad D = (\nabla v)^S$$

Según fue observado, cuando fueron discutidas las ecuaciones constitutivas en elasto/viscoplasticidad, la tasa de deformación viscoplástica D^{VP} sólo depende del estado actual de tensiones — y si se quiere de la historia del proceso — por tanto, para cada instante t es posible definir la función $\psi = \psi(D)$ como:

$$\psi = \frac{1}{2} DD \cdot D - DD^{VP} \cdot D$$

Esta función satisface las propiedades:

$$\psi_D = \frac{\partial \psi}{\partial D} = \dot{T},$$

$$\psi(D^*) - \psi(D) \geq \dot{T} \cdot (D^* - D) \text{ e igual si y sólo si } D^* = D$$

De estas propiedades y el principio variacional anterior, se arriba al siguiente principio de mínimo:

De todas las velocidades cinematicamente admisibles $v^* \in \text{Kin}_v$ aquella que hace que el funcional $\pi(v^*)$:

$$\pi(v^*) = \int_{\Omega} \psi(D^*) d\Omega - \int_{\Omega} \dot{b} \cdot v^* d\Omega - \int_{S_T} \dot{\bar{t}} \cdot v^* d\Omega$$

alcance un mínimo — mínimo absoluto — es la solución del problema de valor de contorno propuesto.

Para la obtención de soluciones aproximadas del problema variacional anterior se procede a definirlo en un espacio Kin_V^α de dimensión finita. La construcción de este espacio de aproximación deberá realizarse de manera que las restricciones impuestas, cuando la definición de Kin_V , sean también satisfechas en Kin_V^α . Una de las maneras para lograr lo anterior consiste en aproximar el campo v por otro v^α , definido de la siguiente forma:

$$v^\alpha = \phi_\alpha(X) v^\alpha + \bar{v},$$

donde en la expresión anterior se ha adoptado la convención de índices repetidos para indicar sumatoria y donde:

$\phi_\alpha(X)$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$ son los vectores de interpolación tales que $\phi_\alpha(X) = 0$ para todo α y todo $X \in S_u$.

v^α , $\alpha = 1, 2, \dots, N$ escalares a definir en cada instante t a partir del problema variacional propuesto

\bar{v} campo vectorial tal que para todo $X \in S_u$ se verifica $\bar{v} = \dot{u}(X, t)$

En el caso de utilizar el Método de Elementos Finitos los escalares v^α pasan a tener un significado físico preciso [35]. Con las aproximaciones propuestas el problema variacional queda definido como:

Para cada $t \in [0, \theta]$ determinar el campo $v^\alpha \in Kin_V^\alpha$ tal que:

$$\int_{\Omega} (D D - D D^{vp}) \cdot (D^* - D) d\Omega = \int_{\Omega} \dot{b} \cdot v^* d\Omega + \int_{\Gamma_T} \dot{t} \cdot v^{*\alpha} d\Gamma$$

para todo $v^{*\alpha} \in Kin_V^\alpha$ con las condiciones iniciales ya enun-

ciadas y donde:

$$D = (\nabla v^\alpha)^S, D^{VP} = \frac{1}{\mu} \langle \phi \rangle f_T, D^* = (\nabla v^{*\alpha})^S$$

El problema anterior conduce al siguiente sistema de ecuaciones

$$K_{\beta\alpha} v^\alpha - H_\beta^{VP} = F_\beta^1 + F_\beta^2$$

donde:

$$K_{\beta\alpha} = \int_{\Omega} D (\nabla \phi_\alpha)^S \cdot (\nabla \phi_\beta)^S d\Omega,$$

$$H_\beta^{VP} = \int_{\Omega} D D^{VP} \cdot (\nabla \phi_\beta)^S d\Omega,$$

$$F_\beta^1 = \int_{\Omega} \dot{b} \cdot \phi_\beta d\Omega + \int_{\Gamma_T} \dot{t} \cdot \phi_\beta d\Gamma, F_\beta^2 = - \int_{\Omega} D (\nabla \bar{v})^S \cdot (\nabla \phi_\beta)^S d\Omega$$

Luego, supuesto conocido en el instante t_n el estado de tensiones y deformaciones el cálculo en el instante $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ se puede realizar de la siguiente manera:

1. Se calcula D^{VP} en el instante t_n a través de:

$$D^{VP} = \frac{1}{\mu} \langle \phi \rangle f_T$$

2. Se calcula el campo de velocidades a través del problema variacional propuesto

3. Conocido v^α se determina $D = (\nabla v^\alpha)^S$ y con ello se determina $\dot{T} = D(D - D^{VP})$ para el instante t_n

4. Con estos elementos en el instante t_{n+1} se tiene:

$$E = E_n + D\Delta t, T = T_n + \dot{T}\Delta t, E^{VP} = E_n^{VP} + D^{VP} \Delta t$$

$$u = u_n + v^\alpha \Delta t$$

Conocido el nuevo estado se procede a repetir los pasos 1-4.

La técnica de integración propuesta corresponde al Método de Euler pudiéndose recurrir a otros métodos tales como el de Runge-Kutta etc.

Como fue presentado anteriormente el modelo elasto/viscoplástico permite también aproximar en el límite el modelo elasto/plástico. El algoritmo numérico de resolución toma en este caso el siguiente esquema:

Supóngase se conoce la respuesta para el nivel de carga (b_n, \bar{t}_n) , es decir se conoce u_n, E_n, T_n, E_n^P . Para determinar la respuesta para el nivel (b_{n+1}, t_{n+1}) se procede como sigue:

i) Se determina, llevando en cuenta el estado n , la respuesta elástica correspondiente al incremento de carga al pasar del nivel n al $n+1$.

ii) Para el estado a que se arriba, con μ suficientemente pequeño y tomando por f el criterio de plasticidad que corresponda se procede a aplicar el procedimiento explicado anteriormente 1.-4. hasta que la D^{VP} sea nula en toda la región Ω . Desde un punto de vista computacional lo anterior equivale a aplicar el procedimiento hasta que, por ejemplo, el módulo del vector de fuerzas asociado a la deformación viscoplástica sea suficientemente pequeño. Finalizado el proceso se tiene un nuevo estado que satisface la condición $f \leq 0$.

Para analizar la respuesta para el nivel $n+2$ se repite i.-ii.

Puede observarse también que, con el algoritmo anterior y en el caso de materiales idealmente plástico puede determinarse las cargas de colapso.

El algoritmo numérico para creep secundario es idéntico al 1.-4. Dado que ahora las cargas son independientes del tiempo, $\dot{b} = \dot{t} = 0$, el proceso numérico se repite hasta que el estado de tensiones y velocidades de deformaciones sean estacionarios.

Desde un punto de vista computacional, lo anterior equivale a aplicar el procedimiento hasta que la norma de la diferencia entre el vector término independiente en el instante $n+1$ y el vector término independiente en el instante n sea suficientemente pequeña. Es decir hasta que:

$$\left\{ \int_{\Omega} \sum_{\beta=1}^N [D(D_{n+1}^{VP} - D_n^{VP}) \cdot (\nabla \phi_{\beta})^S]^2 d\Omega \right\}^{1/2} < \epsilon$$

donde

$$\epsilon > 0 \text{ , suficientemente pequeño}$$

También, debe entenderse que en el algoritmo asociado al problema de creep las ecuaciones constitutivas que permiten definir D^{VP} corresponden a las del creep que preténdese analizar.

Para mayores detalles del algoritmo propuesto consúltese [14] y [35] .

A continuación son presentados algunos ejemplos numéricos realizados con el algoritmo mencionado.

Ejemplo 1 - Creep secundario en tubo circular de pared espesa sometido a presión interna.

El problema de valor de contorno está asociado a las siguientes ecuaciones:

. Ecuaciones de equilibrio:

$$\text{div } T = 0 \quad , \quad \frac{d(rT_r)}{dr} - T_{\theta} = 0 \quad , \quad \frac{dT_z}{dz} = 0$$

. Condiciones de contorno:

$$T_n = \bar{t} \quad , \quad T_r(r_i) = -p \quad , \quad T_r(r_e) = 0$$

r_i = radio interno, r_e = radio externo , p = presión interna

. Ecuaciones cinemáticas:

$$D = (\nabla v)^S \quad , \quad D_\theta = \frac{v}{r} \quad , \quad D_r = \frac{dv}{dr} \quad , \quad D_z = 0$$

(estado plano de deformación)

. Ecuaciones constitutivas *von Mises-Odqvist*

Para representar creep secundario (ecuación de von Mises-Odqvist) a través de elasto/viscoplasticidad se considera por ejemplo:

$$\mu = 1/k \quad , \quad f = J_2 \quad , \quad \phi(f) = \frac{3}{2}(3J_2)^{n-1}$$

luego:

$$D^C = D^{VP} = \frac{1}{\mu} \langle \phi(f) \rangle f_T$$

que en componentes puede expresarse de la siguiente forma:

$$D_\theta = \frac{3}{4} k T_e^{n-1} (T_\theta - T_r)$$

$$D_r = \frac{3}{4} k T_e^{n-1} (T_r - T_\theta)$$

$$D_z = 0 \quad , \quad T_z = \frac{1}{2} (T_r + T_\theta)$$

n, k constantes del material

$$T_e = \frac{\sqrt{3}}{2} (T_\theta - T_r)$$

Utilizando el Método de Elementos Finitos y empleando un elemento rectangular de 4 nudos y con la subdivisión indicada en la Figura 3, se determinaron las tensiones T_θ , T_r y T_z en un tubo de relación de radios $r_e/r_i = 4$. Compárase los resultados obtenidos con la solución exacta para tres valores de n ($n=1, n=2, n=6$) Figura 4.

Ejemplo 2 - Creep secundario en disco que gira a velocidad constante.

Las ecuaciones en este caso son:

. Ecuaciones de equilibrio:

$$\text{div } T - \rho \ddot{u} = 0, \quad T_z = 0 \text{ (estado plano de tensiones)}$$

$$\frac{d(rT_r)}{dr} - T_\theta + \rho w^2 r^2 = 0$$

ρ = masa específica, w = velocidad angular (constante)

. Condiciones de contorno:

$$T_n = \bar{t}, \quad T_r(r_i) = T_r(r_e) = 0$$

. Ecuaciones cinemáticas:

$$D = (\nabla v)^s, \quad D_\theta = \frac{v}{r}, \quad D_r = \frac{dv}{dr}, \quad D_z = \frac{dw}{dr}$$

. Ecuaciones constitutivas:

En discos que giran a velocidad constante tanto las tensiones elásticas como las de creep verifican $T_\theta > T_r > T_z = 0$. Distintas ecuaciones constitutivas han sido llevadas en cuenta.

a) Ley asociativa *von Mises-Odqvist*

$$\mu = \frac{1}{k}, \quad f = J_2, \quad \phi(f) = \frac{3}{2}(3J_2)^{n-1}$$

luego:

$$D^c = D^{vp} = \frac{1}{\mu} \langle \phi(f) \rangle f_T$$

que en términos de componentes conduce a:

$$D_\theta = \frac{k}{2} T_e^{n-1} (2T_\theta + T_r)$$

$$D_r = \frac{k}{2} T_e^{n-1} (2T_r + T_\theta)$$

$$D_z = \frac{k}{2} T_e^{n-1} (T_r + T_\theta)$$

k, n constantes del material

$$T_e = \text{tensión efectiva} = T_\theta^2 - T_r T_\theta + T_r^2$$

b) Ley asociativa *Tresca*

$$\mu = \frac{1}{k}, \quad f = T_\theta - T_z, \quad \phi(f) = T_\theta^n$$

luego las componentes estarán dadas por:

$$D_\theta = k T_\theta^n, \quad D_r = 0, \quad D_z = -k T_\theta^n$$

c) Ley no asociativa *von Mises-Tresca*

En esta ley las componentes del tensor tasa de deformación de creep están dadas por:

$$D_\theta = \frac{k}{2} T_\theta^{n-1} (2T_\theta - T_r)$$

$$D_r = \frac{k}{2} T^{\eta-1} (2T_r - T_\theta)$$

$$D_z = -\frac{k}{2} T_\theta^{\eta-1} (T_r + T_\theta)$$

Utilizando el Método de Elementos Finitos y el algoritmo propuesto se determinaron las tensiones T_r y T_θ en un disco hueco con $r_e = 6$ in. y $r_i = 1.25$ in. que gira con velocidad angular constante $w=15.000$ r.p.m., siendo que el material tiene una masa específica de $\rho = 7.35 \times 10^{-4}$ lbs²/in⁴. Los resultados obtenidos pueden ser vistos en las Figuras 6-9. donde son comparados con los obtenidos por WAHL [36,37], integrando numéricamente las ecuaciones diferenciales para los casos a) y c), y con la solución exacta para el caso de la ley asociativa de Tresca.

Ejemplo 3 - Plasticidad ideal en tubo circular de pared espesa sometido a presión interna.

Las ecuaciones de equilibrio, cinemáticas y condiciones de contorno son idénticas a la del Ejemplo 1, las ecuaciones constitutivas corresponden a un material idealmente plástico con el criterio de fluencia correspondiente a Tresca que conduce a:

$$\mu \rightarrow 0, \quad f = T_\theta - T_r - Y, \quad \phi(f) = f$$

que en terminos de componentes conduce a:

$$D_\theta = \frac{1}{\mu} \langle T_\theta - T_r - Y \rangle, \quad D_z = 0, \quad D_r = -\frac{1}{\mu} \langle T_\theta - T_r - Y \rangle$$

Los resultados obtenidos son comparados con la solución exacta (Figura 10 a 14).

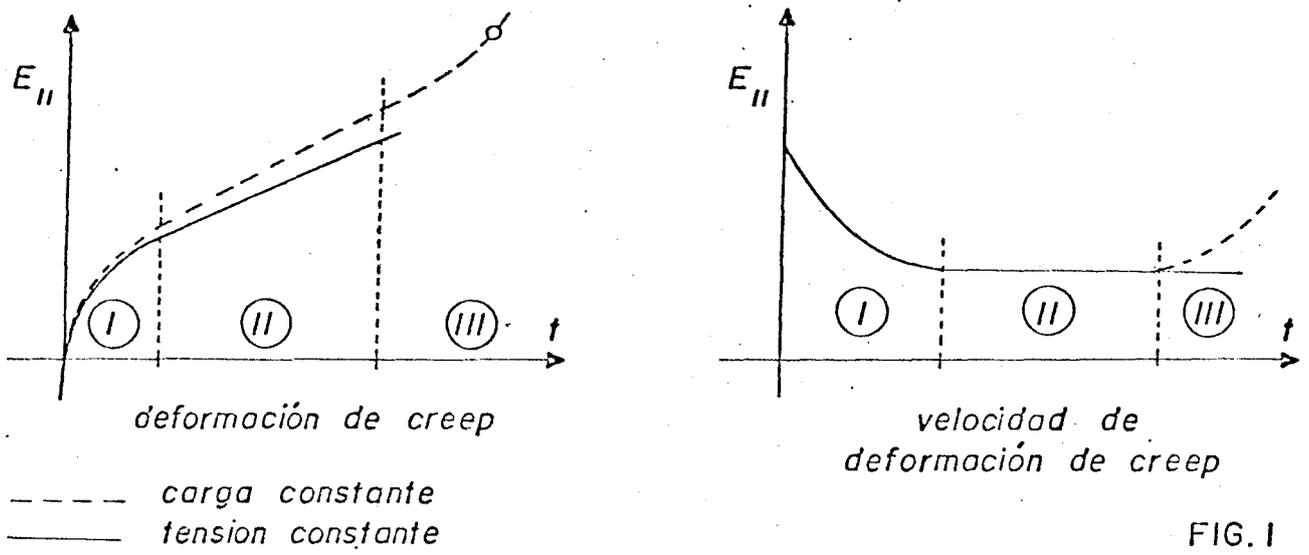


FIG. 1

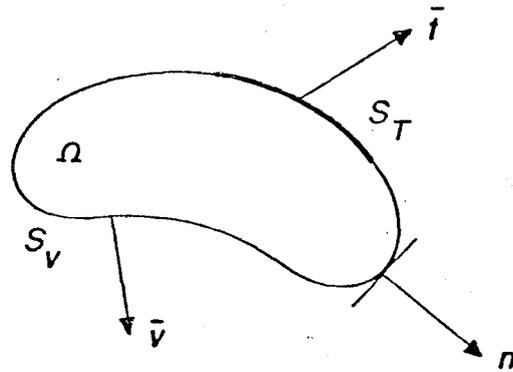


FIG. 2

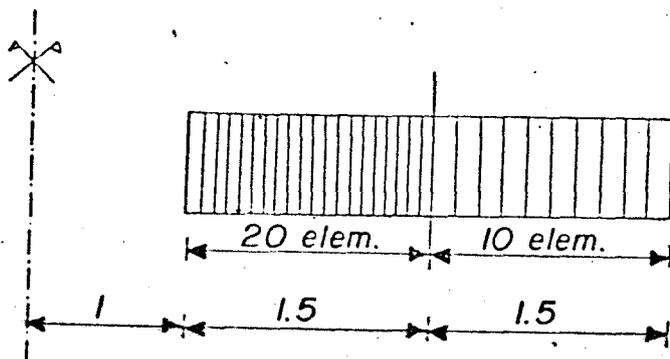


FIG. 3

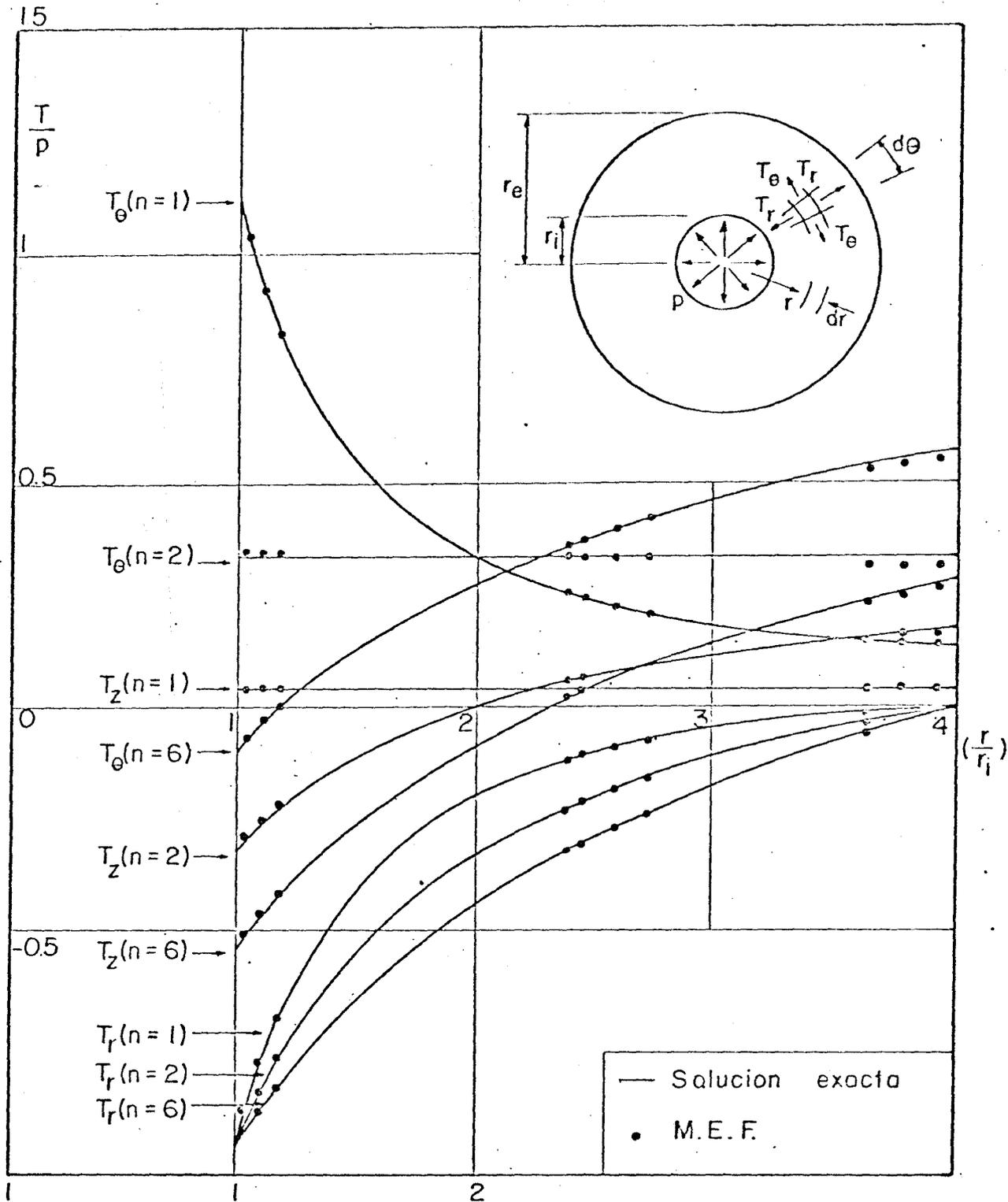


FIG.4 - Tensiones de creep en tubo circular de pared espesa sometido a presión interna

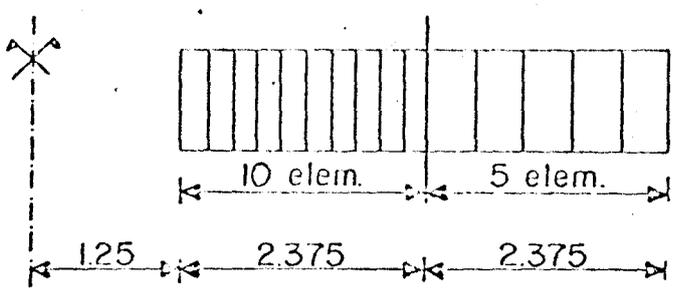


FIG.5 - Malha Empleada

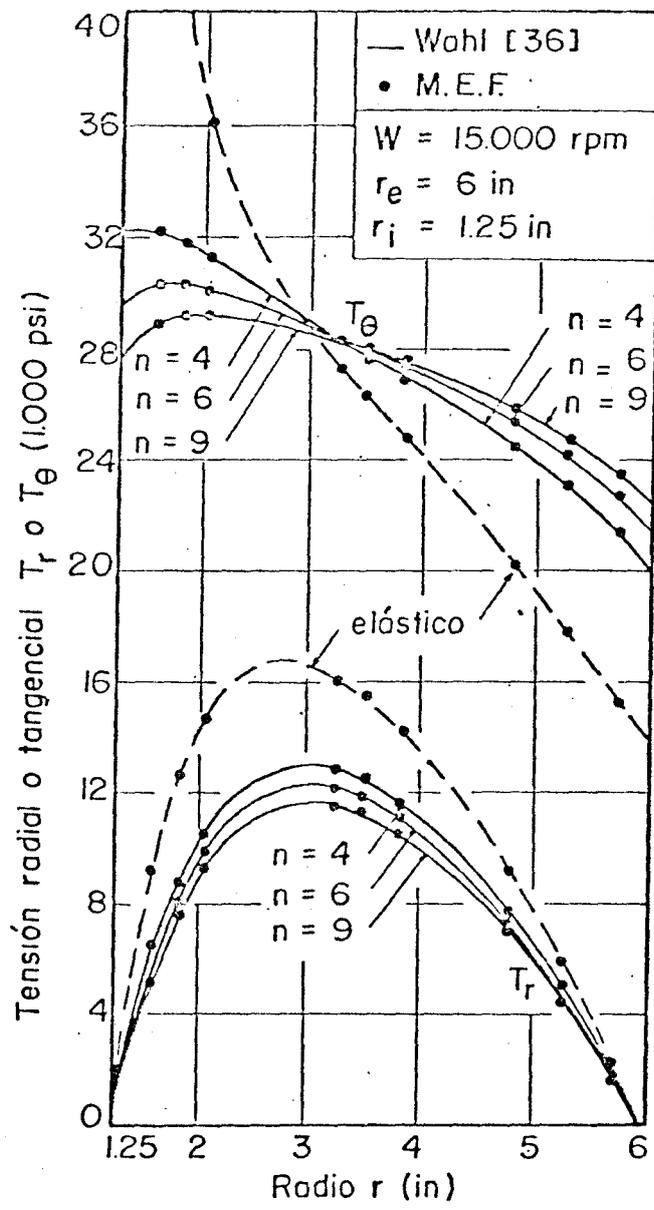


FIG.6 - Tensiones en disco para Ley asociativa *von Mises-Odqvist*

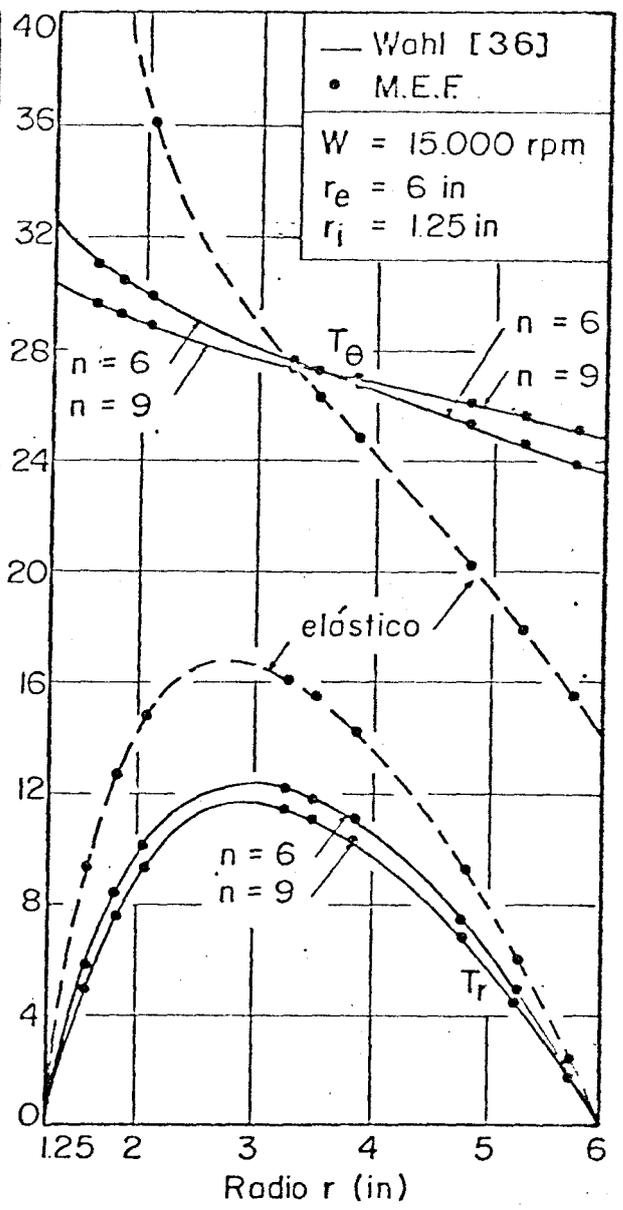


FIG.7 - Tensiones en disco para Ley no asociativa *Von Mises-Tresca*

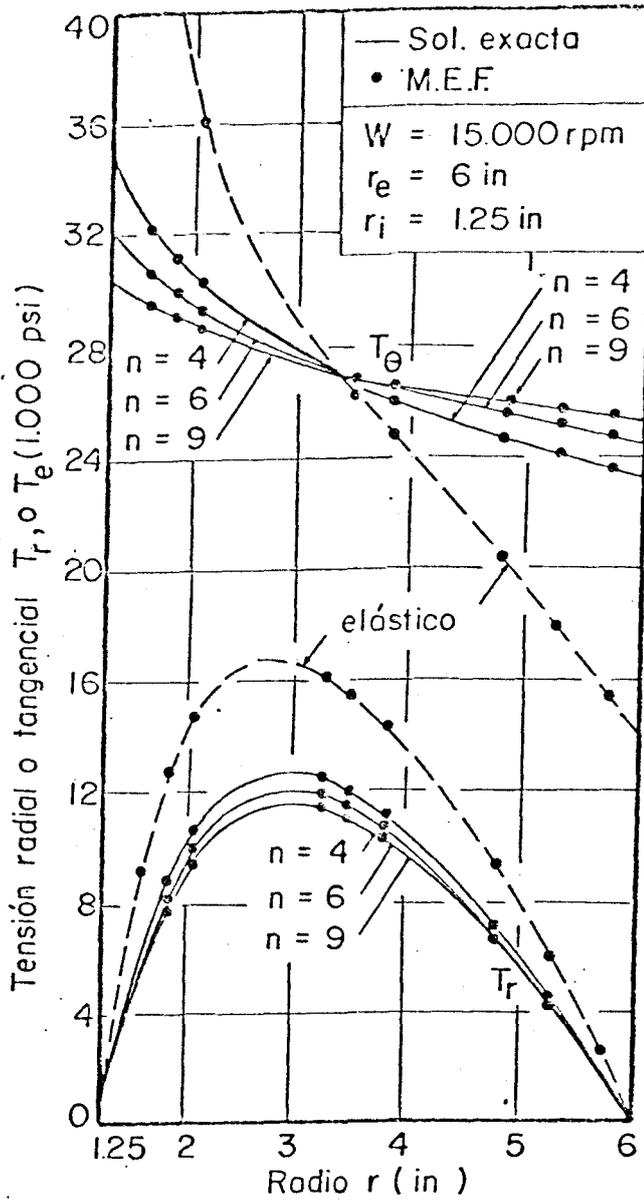


FIG.8 - Tensiones en disco para Ley asociativa *Tresca*

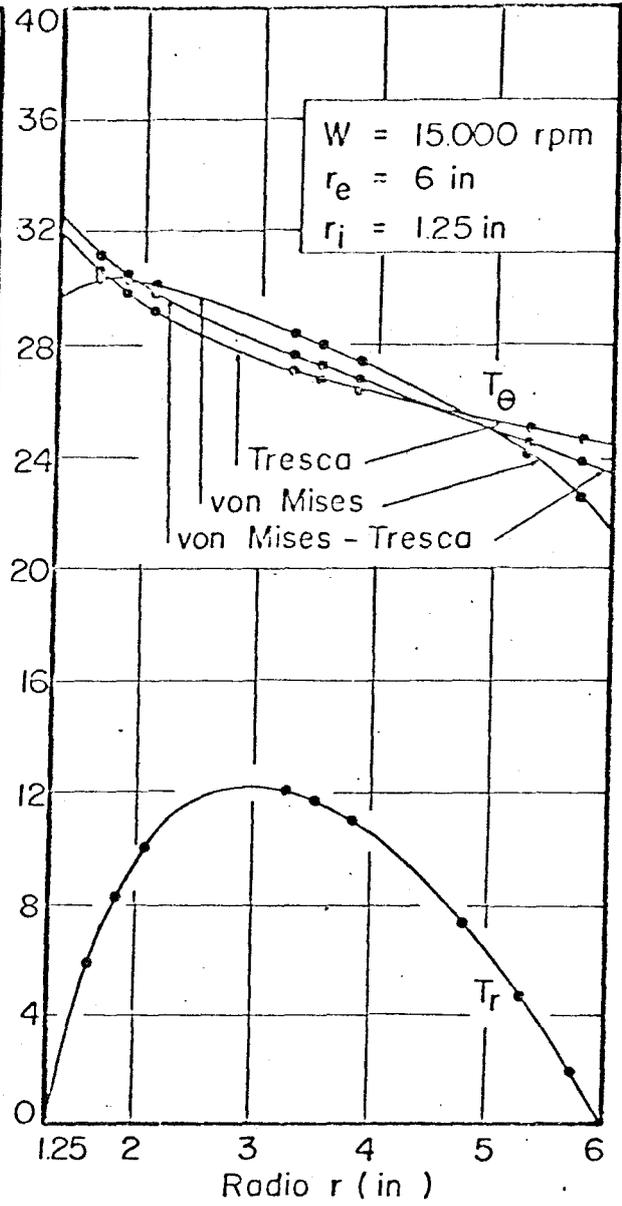


FIG.9 - Tensiones en disco para leyes, *von Mises-Odqvist*, *Tresca*, *von Mises-Tresca*

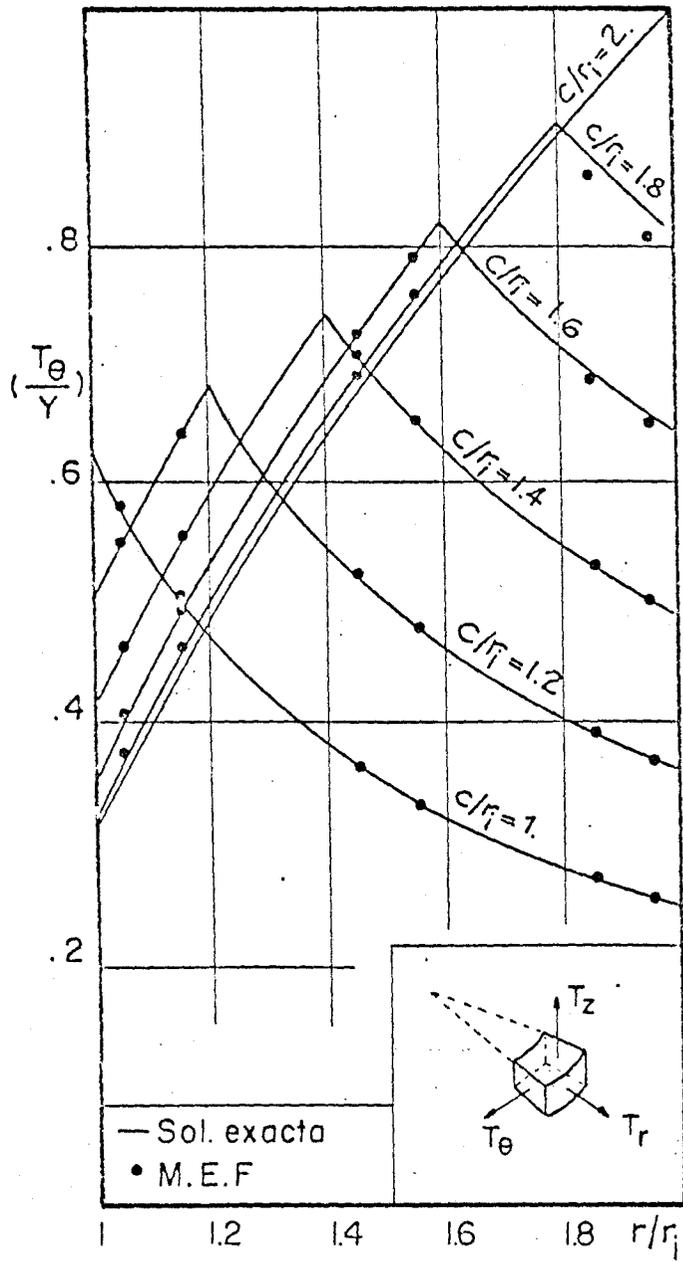


FIG.10 - Tensión circunferencial en tubo circular con presión interna.

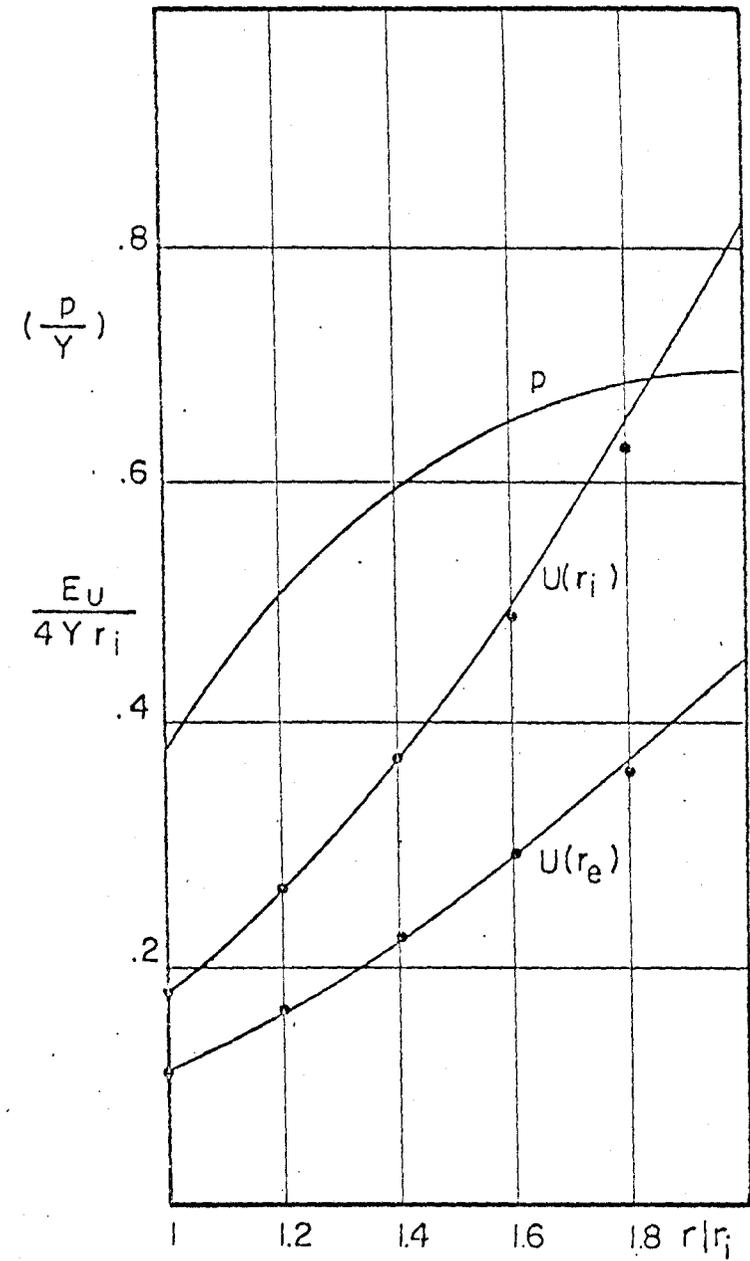


FIG.11 - Presión y desplazamientos en tubo circular con presión interna. Plasticidad ideal *ley de Tresca*.

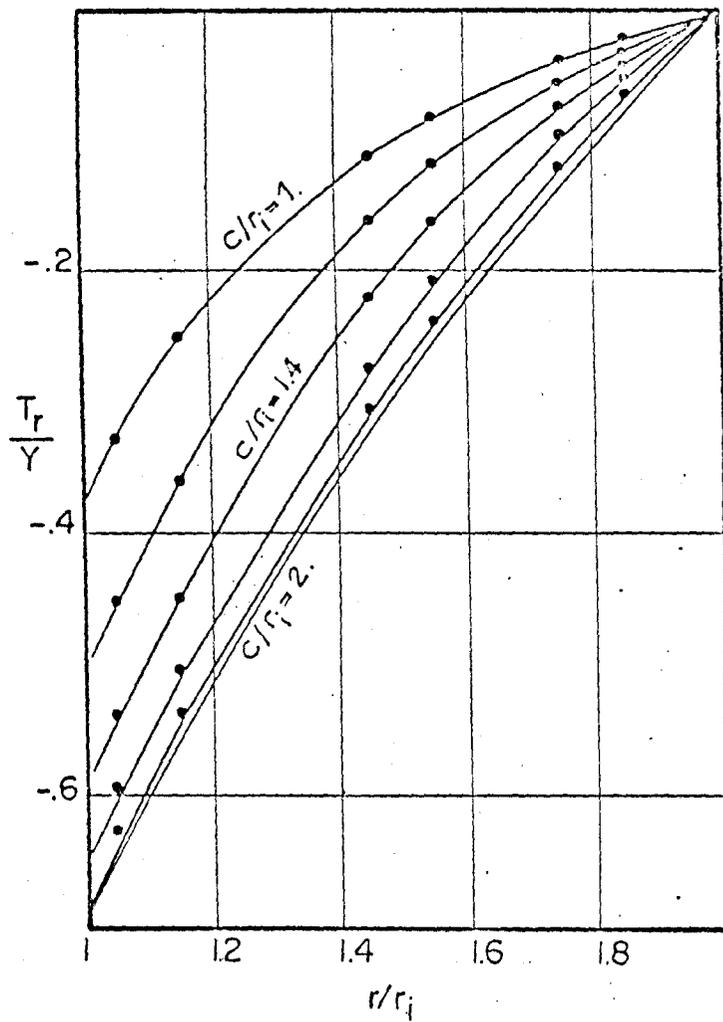


FIG.12 - Tensión radial en tubo circular con presión interna

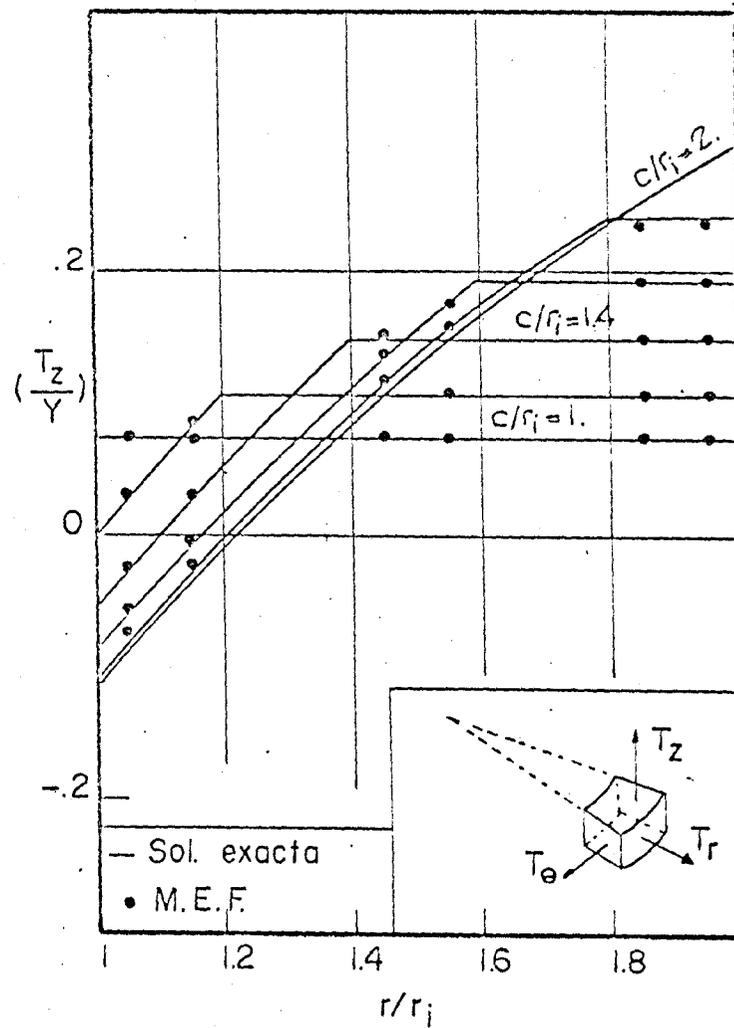


FIG.13 - Tensión axial en tubo circular con presión interna

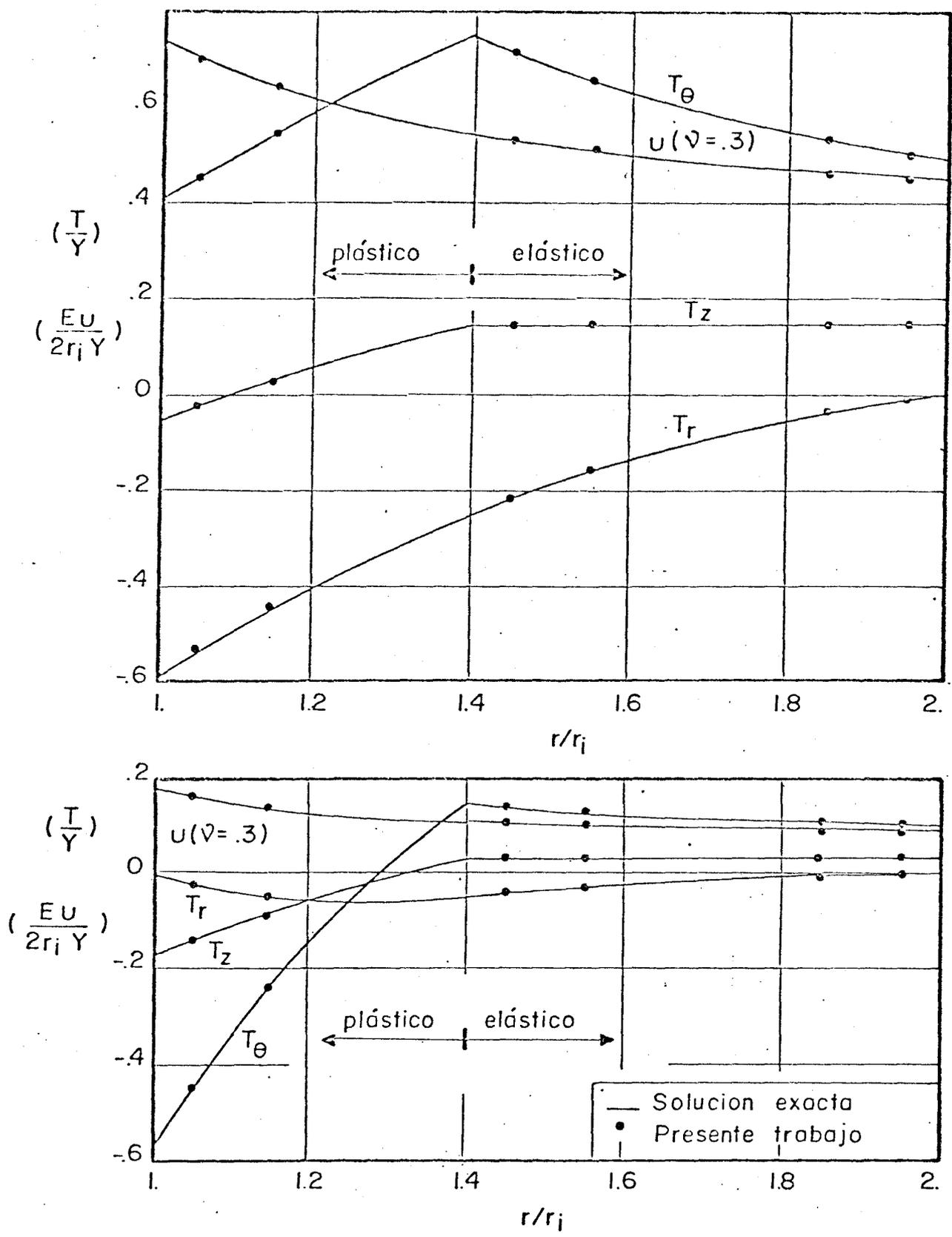


FIG.14 - Tensiones y deformación residual en tubo circular con presión interna. Plasticidad ideal *Ley de Tresca*

BIBLIOGRAFIA

- [1] Moreau, J.J.; "Application of convex analysis to the treatment of elasto-plastic systems", IUTAM/IMY Symp. Applic. Meth. Functional Analysis to Problems of Mechanics", Marsella (1975).
- [2] Nayroles, B.; "Structure algébrique des théories classiques de plasticité", Séminaire "Plasticité et Viscoplasticité", École Polytechnique, Paris, (1972), McGraw Hill (1974).
- [3] Rockafellar, R.T.; "Convex Analysis", Princeton Univ. Press (1970).
- [4] Hill, R.; "The mathematical theory of plasticity", Oxford Univ. Press (1950).
- [5] Ilyushin, A.A.; "Some problems of the theory of plastic deformation", Trans. Brown Univ., (1946).
- [6] Koiter, W. T.; "General problems of elastic plastic solids"; Progress in Solid Mechanics. North Holland, (1960).
- [7] Zienkiewicz, O.C.; Valliappan, S.; King, I.P. ; "Elastoplastic solutions of engineering problems "initial stress" finite element approach", Int. J. Num. Meth. Engng., 1, 75-100, (1969).
- [8] Capurso, M.; "A general method for the increment solution of elastic-plastic problems", Meccanica, 4, (1969).

- [9] Nguyen, Q.S.; Zarka, J.; "Quelques méthodes de résolution numérique en plasticité classique et en viscoplasticité, Seminario citado en referencia 2.
- [10] Maier, G.; "Quadratic programming and the theory of elastic-plastic structures", *Meccanica*, vol.3, (1968).
- [11] Gavarini, C.; "L'analyse limite des structures au Moyen de la programmation mathématique, " Seminario referencia 2.
- [12] Donato, O.D.; Franki, A.; Garg, V.K.; Anand, S.G.; Belytschko, T.B.; "Elastic plastic analysis by quadratic programming", *J. Engng. Mech. Div.*, 100, 126-131 (1974).
- [13] Olszak, W.; Mroz, Z.; Perzyna, P.; "Recent trends in the development of the theory of plasticity", Pergamon Press, (1963).
- [14] Feijão, R.; Taroco, E.; Notas de aula del curso "Introducción a los principios y Métodos variacionales en elasto-plasticidad", II.^a Escola de Mat. Aplic. a realizarse en Enero de 1980, CBPF-Rio de Janeiro.
- [15] Duvaut, G.; Lions, J.L.; "Les inéquations en Mécanique et en physique", Dunod, (1972).
- [16] Zienkiewicz, O.C.; "The Finite Element Method", McGraw-Hill, London, (1971).

- [17] Glowinski, R.; Lions, J.L.; Trémolières, R.; "Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles" , Dunod, Paris, (1976).
- [18] Nguyen, Q.S.; "On the elastic-plastic initial-boundary value problem and its numerical integration", Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 11, 817 - 832, (1977).
- [19] Del Piero, G.; "On the mathematical theory of elastic-plastic materials", Arch. Mech. 27, 2, 253-271, (1975).
- [20] Flugge, Wilhelm; "Viscoelasticity", Springer-Verlag, (1975).
- [21] Findley, W.N.; J. S. Lai and K. Onaran, "Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials" , North-Holland, (1976).
- [22] Haupt, P.; "Some comments on thermomechanical constitutive equations for inelastic analysis of LMFBR components". Transactions of the 4th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, San Francisco, California , (1977).
- [23] Andrade, E.N.; "On the viscous flow in metals, and allied phenomena", Proceedings of the Royal Society, A/84, 1 (1910).
- [24] Norton, F.H.; "Creep of Steel at High Temperatures", McGraw Hill, New York, (1929).

- [25] Odqvist, F.K.G.; "From Stanford 1960 to Gothenburg 1970" IUTAM Symposium on Creep in Structures , Gothenburg 1970. Proceedings, Editor: Jean Hult , Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1972.
- [26] Greenbaum, G.A.; M. F. Rubinstein; "Creep analysis of axisymmetric bodies using finite elements", 7, p. 379-397, 1968 - Nuclear Engineering and Design.
- [27] Sutherland, W. H., "AXICRP - Finite element computer code for Creep analysis of plane stress, plane strain and axisymmetric bodies" - 11, p. 269-285 , 1970 - Nuclear Engineering and Design.
- [28] Kachanov, L.M.; "Analytical methods of Creep design, specially sithin the nonlinear range", High Temperature Structures and Materials, Proceedings of the third Symposium on Naval Structural Mechanics, Columbia University, 1963, Pergamon Press, (1964).
- [29] D'Isa, Frank A.; "Mechanics of Metals" Addison-Wesley Publishing Company, (1968).
- [30] Taroco, E.; R. Feijõo; "Principios Variacionales y Soluciones Aproximadas en elasto/viscoplasticidad" - Publicación Interna. LAC. CBPF. Rio de Janeiro, (1979).
- [31] Perzyna, P., Fundamental problems in viscoplasticity Recent Advances in Applied Mechanics, Chap. 9 , pp. 243. Academic Press, New York, (1966).
- [32] Campbell, J.D. and J. Durby; "The Yield behavior of mild steel in dynamic compression, Proc Royal Soc., 236-A, pp. 24, 1956.

- [33] Prager, W.; "Introduction to Mechanics of Continua." Ginn and Company Boston, (1961).
- [34] Perzyna, P., The constitutive equations for rate sensitive plastic materials, Quart. Appl. Math . 20, pp. 321, (1963).
- [35] Taroco, E., R. Feijóo; "Introducción a elasto / viscoplasticidad", II Escola de Mat. Aplic. a ser realizada en enero de 1980, LAC-CBPF, Rio de Janeiro.
- [36] Wahl, A.M.; G.O. Sankey; M.J. Manjoine & E. Shoemaker, "Creep tests of rotating disks at elevated temperature and comparison with theory", J. Appl. Mech. Trans. ASME, vol. 76, 1954, p. 225.
- [37] Wahl, A.M., "Analysis of creep in rotating disks based on the Tresca Criterion and associated flow rule", J. Appl. Mech. Trans. ASME, vol. 78, 1956 , p. 231.