

A0025/78

OUT, 1978

ANÁLISE DINÂMICA ELASTO-PLÁSTICA DE VIGAS

João N.C. Guerreiro, A.C. Galeão e A.F.D. Loula



## ANÁLISE DINÂMICA ELASTO-PLÁSTICA DE VIGAS

João N.C. Guerreiro, A.C. Galeão e A.F.D. Loula  
Laboratório de Cálculo/CBPF  
Rio de Janeiro, RJ

### RESUMO

Estuda-se o problema da dinâmica de corpos elasto-plásticos, com pequenas deformações. A partir das relações constitutivas incrementais, obtém-se a equação de equilíbrio, na forma incremental do princípio dos trabalhos virtuais. Soluções aproximadas são obtidas usando o método dos elementos finitos para a discretização espacial, e algoritmos de integração passo-a-passo para a discretização do tempo.

Apresentam-se os algoritmos de Newmark e diferença finita central, e propõe-se um algoritmo de diferença finita combinada com decomposição modal.

Resultados numéricos são obtidos para a flexão elasto-plástica de vigas, analisando-se uma viga de seção cheia e um tubo com pressão interna.

*A ser apresentado nas 4<sup>as</sup> Jornadas Luso-Brasileiras de Engenharia Civil. Recife-Salvador, março de 1979.*

## 1. INTRODUÇÃO

É impossível prever-se o comportamento de um material elasto-plástico, sem o conhecimento da história dos ciclos de carga e descarga, anteriormente experimentados por este material. Deste modo, a forma incremental das equações de equilíbrio é a mais adequada para descrever o movimento de um corpo elasto-plástico. Para a obtenção de soluções aproximadas, geralmente se utiliza a forma fraca dessas equações, que equivale à forma incremental do princípio dos trabalhos virtuais. Neste contexto, destaca-se o método dos elementos finitos, combinado com algoritmos de integração numérica no tempo. [1], [2]

Além de depender da história, a lei constitutiva elasto-plástica é heterogênea, justamente por depender do estado de tensão e deformação do corpo. Este fato tem uma consequência importante sobre os modelos de vigas ou cascas, (onde são usadas as hipóteses de Kirchhoff), que é a impossibilidade de se realizar, a priori, a integração na secção transversal. Uma tentativa de superar este problema tem sido definir relações constitutivas entre momento e rotação [3], em vez de tensão  $\times$  deformação. Em um trabalho anterior [4], apresentou-se um modelo elasto-plástico perfeito de flexão de viga, no qual se supôs um diagrama de tensão triangular no trecho elástico e retangular no trecho plastificado da secção transversal, obtendo-se em forma fechada as integrais na secção transversal, em termos da altura de plastificação. Este modelo, apesar de sua eficiência computacional, não é aplicável a ciclos de carga e descarga nos quais haja inversão do sinal da tensão de plastificação, nem a estado multiaxial de tensões, uma vez que nestes casos, as regiões de plastificação, da secção transversal, não podem mais ser caracterizadas por um único parâmetro (altura de plastificação).

Neste trabalho estuda-se o problema da flexão elasto-plástica de vigas, realizando-se uma integração numérica na secção transversal, a cada incremento de carga, verificando-se o critério de plasticidade e a lei constitutiva incremental, em cada ponto de integração.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

### 2.1 - Forma Incremental do P.T.V.

Considerando-se pequenas deformações, a expressão do princípio dos trabalhos virtuais para um corpo em uma configuração  ${}^n C$ , é:

$$\int_V \rho \, {}^n \underline{\ddot{u}} \cdot \underline{\hat{u}} \, dV + \int_V {}^n \underline{\sigma} \cdot \underline{\hat{\varepsilon}} \, dV = {}^n \hat{W} \quad (1)$$

em que  $\rho$  é a massa específica,  $\underline{\hat{u}}$  é um campo de deslocamentos virtuais,  ${}^n \underline{\ddot{u}}$  é a aceleração de um ponto genérico do corpo, e  ${}^n \hat{W}$  é o trabalho virtual das forças externas aplicadas ao corpo.  ${}^n \underline{\sigma}$  é o tensor de tensões de Cauchy e

$$\underline{\hat{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{\hat{u}} + \nabla \underline{\hat{u}}^T) \quad (2)$$

( $\underline{\quad}$ ) indica vetores ou tensores e ( $\cdot$ ) denota produto escalar.

Se se particulariza a expressão (1) para uma nova configuração  ${}^{n+1} C$ , próxima de  ${}^n C$ , e se se definem  $\underline{u}$ ,  $\underline{\varepsilon}$ ,  $\underline{\sigma}$ , como os incrementos de deslocamento, deformação e tensão respectivamente, isto é:

$$\begin{aligned} {}^{n+1} \underline{u} &= {}^n \underline{u} + \underline{u} \\ {}^{n+1} \underline{\varepsilon} &= {}^n \underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon} \\ {}^{n+1} \underline{\sigma} &= {}^n \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \end{aligned} \quad (3a-c)$$

obtém-se:

$$\int_V \rho \, {}^{n+1} \underline{\ddot{u}} \cdot \underline{\hat{u}} \, dV + \int_V \underline{\sigma} \cdot \underline{\hat{\varepsilon}} \, dV = {}^{n+1} \hat{W} - \int_V {}^n \underline{\sigma} \cdot \underline{\hat{\varepsilon}} \, dV \quad (4)$$

que corresponde à forma incremental do P.T.V.

Se se adota agora uma aproximação linear para a relação constitutiva incremental, isto é:

$$\underline{\sigma} = {}^n \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad (5)$$

em que  ${}^n \underline{D}$  é uma aproximação do tensor constitutivo, entre as configurações  ${}^n C$  e  ${}^{n+1} C$ , obtém-se:

$$\int_V \rho \, {}^{n+1} \underline{\ddot{u}} \cdot \hat{\underline{u}} \, dV + \int_V {}^n \underline{D} \underline{\varepsilon} \cdot \hat{\underline{\varepsilon}} \, dV = {}^{n+1} \hat{\underline{W}} - \int_V {}^n \underline{\sigma} \cdot \hat{\underline{\varepsilon}} \, dV \quad (6)$$

que corresponde à expressão linearizada da forma incremental (4).

A solução de (6) fornece a primeira aproximação dos incrementos  $\underline{u}$ ,  $\underline{\varepsilon}$ , e  $\underline{\sigma}$ . Aproximações de ordem superior podem ser obtidas através de iterações [2]. Um esquema iterativo dentro de cada incremento é construído a partir das seguintes relações:

$$\begin{aligned} {}^{n+1} \underline{u}(k) &= {}^{n+1} \underline{u}(k-1) + \underline{u}(k) \\ {}^{n+1} \underline{\varepsilon}(k) &= {}^{n+1} \underline{\varepsilon}(k-1) + \underline{\varepsilon}(k) \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ {}^{n+1} \underline{\sigma}(k) &= {}^{n+1} \underline{\sigma}(k-1) + {}^n \underline{D} \underline{\varepsilon}(k) \quad , \end{aligned} \quad (7a-c)$$

em que  ${}^{n+1} \underline{u}(0) = \underline{u}$  ;  ${}^{n+1} \underline{\varepsilon}(0) = \underline{\varepsilon}$  e  ${}^{n+1} \underline{\sigma}(0) = \underline{\sigma}$ . Substituindo-se (7a-c) em (1), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_V \rho \, {}^{n+1} \underline{\ddot{u}}(k) \cdot \hat{\underline{u}} \, dV + \int_V {}^n \underline{D} \underline{\varepsilon}(k) \cdot \hat{\underline{\varepsilon}} \, dV &= {}^{n+1} \hat{\underline{W}} - \\ &- \int_V {}^{n+1} \underline{\sigma}(k-1) \cdot \hat{\underline{\varepsilon}} \, dV. \end{aligned} \quad (8)$$

Convergência de (8) é atingida quando  $\| \underline{u}^{(k)} \| \rightarrow 0$ .

## 2.2 - Relação Constitutiva para materiais elasto-plásticos

O comportamento elasto-plástico de um material é definido pelas seguintes relações:

i) Relação constitutiva entre acréscimos de tensões  $\underline{\sigma}$  e acréscimos de deformações elásticas  $\underline{\varepsilon}^e$ :

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}^e = \underline{D}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^P) \quad (9)$$

ii) Critério de plastificação: função escalar das tensões  $\underline{n}_\sigma$  e deformações plásticas  $\underline{n}_\varepsilon^P$ , que define o surgimento de acréscimos de deformações plásticas

$$F(\underline{n}_\sigma, \underline{n}_\varepsilon^P, \chi^n) = 0 \quad (10)$$

sendo  $\chi^n$  o parâmetro de endurecimento, que especifica a variação da condição de plasticidade após o material sofrer deformações plásticas.

iii) Lei de fluência, relacionando incrementos de tensões com incrementos de deformações plásticas. No caso de lei de fluência associativa, em que a lei de fluência é o próprio critério de plastificação, tem-se:

$$\underline{\varepsilon}^P = n_\lambda \underline{n}_Q, \quad (11)$$

sendo que em coordenadas cartesianas:

$$n_{Q_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial n_{\sigma_{ij}}}$$

Considerando que sempre que haja acréscimos de deformações plásticas, a equação (10) tem que ser satisfeita, obtém-se a seguinte relação entre  $\underline{\sigma}$  e  $\underline{\varepsilon}^P$

$$dF = \underline{n}_Q \cdot \underline{\sigma} - \underline{n}_P \cdot \underline{\varepsilon}^P = 0 \quad (12)$$

sendo, em coordenadas cartesianas,  $n_{P_{ij}} = -\frac{\partial F}{\partial n_{\varepsilon_{ij}^P}}$ .

A partir de (9), (11) e (12) determina-se

$$n_\lambda = \frac{\underline{D} \underline{\varepsilon} \cdot \underline{n}_Q}{A + \underline{D} \underline{n}_Q \cdot \underline{n}_Q} \quad (13)$$

$A = -\underline{n}_P \cdot \underline{n}_Q$ , é um parâmetro relativo ao endurecimento. Em plasticidade ideal,  $A = 0$ .

Substituindo (11) em (9) e considerando (13), chega-se a:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \left[ \underline{\varepsilon} - \left( \frac{\underline{D} \underline{\varepsilon} \cdot \underline{n}_Q}{A + \underline{D} \underline{n}_Q \cdot \underline{n}_Q} \right) \underline{n}_Q \right]$$

que pode ser escrita na forma:

$$\underline{\sigma} = \left[ \underline{D} - \underline{n}_D^P \right] \underline{\varepsilon} \quad (14)$$

em que

$$\underline{n}_D^P = \frac{\underline{D} \underline{n}_Q \times \underline{D} \underline{n}_Q}{A + \underline{D} \underline{n}_Q \cdot \underline{n}_Q} \quad (15)$$

onde ( $\times$ ) denota produto tensorial.

A equação (15) expressa a relação constitutiva incremental elasto-plástica. Genericamente  $\underline{n}_D^P$  pode ser escrito como:

$$\underline{n}_D^P = \underline{D} - \alpha \underline{n}_D^P \quad (16)$$

$$\text{com: } \alpha = 0 \quad \text{para} \quad \left\{ \begin{array}{l} F(\underline{n}_\sigma, \underline{n}_\varepsilon^P, \underline{n}_\chi) < 0 \quad (\text{trecho elástico}), \text{ ou} \\ F(\underline{n}_\sigma, \underline{n}_\varepsilon^P, \underline{n}_\chi) = 0, \text{ e } \underline{n}_Q \cdot \underline{\sigma} \leq 0 \\ (\text{descarregamento elástico}). \end{array} \right.$$

$$\alpha = 1 \quad \text{para} \quad F(\underline{n}_\sigma, \underline{n}_\varepsilon^P, \underline{n}_\chi) = 0 \text{ e } \underline{n}_Q \cdot \underline{\sigma} > 0 \quad (17a-b) \\ (\text{regime elasto-plástico})$$

### 3. ESQUEMA NUMÉRICO DE SOLUÇÃO

Soluções numéricas de (6) podem ser obtidas através de uma aproximação de elementos finitos na variável espacial, combinada com integração numérica no tempo.

#### 3.1 - Aproximação de elementos finitos

A discretização espacial conduz a um sistema de equações diferenciais ordinárias, da forma:

$$M \overset{n+1}{\ddot{U}} + (K_e - {}^n K_p)U = {}^{n+1}F - {}^n R \quad (18)$$

onde as matrizes M e K e os vetores F e R são obtidos a partir das integrais:

$$M \rightarrow \int_V \rho \overset{n+1}{\ddot{u}} \cdot \hat{u} \, dV$$

$$K_e \rightarrow \int_V \underline{D} \underline{\varepsilon} \cdot \hat{\varepsilon} \, dV$$

$${}^n K_p \rightarrow \int_V \alpha \overset{n}{D}_p \underline{\varepsilon} \cdot \hat{\varepsilon} \, dV$$

$${}^n R \rightarrow \int_V \overset{n}{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon} \, dV$$

$${}^{n+1}F \rightarrow {}^{n+1}\hat{W} = \int_V \overset{n+1}{b} \cdot \hat{u} \, dV + \int_S \overset{n+1}{t} \cdot \hat{u} \, dV \quad (19a-e)$$

onde  $\overset{n+1}{b}$  e  $\overset{n+1}{t}$  são as forças de massa e de superfície, que atuam no corpo, na configuração  ${}^{n+1}C$ .

### 3.2 - Algoritmos de integração numérica no tempo

Nos algoritmos implícitos, o equilíbrio é satisfeito na configuração  ${}^{n+1}C$ , utilizando-se a forma incremental (6). Já nos algoritmos explícitos, o equilíbrio é verificado na configuração  ${}^n C$ , usando-se diretamente a equação (1).

#### 3.2.1 - Algoritmo implícito de Newmark - Acel.Média Constante

Neste algoritmo [5], os deslocamentos e velocidades na configuração  ${}^{n+1}C$  são aproximadas por:

$$\begin{aligned} n^{+1}U &= nU + \Delta t \dot{n}U + \frac{1}{4} \Delta t^2 (\ddot{n}U + \ddot{n}^{+1}U) \\ n^{+1}\dot{U} &= \dot{n}U + \frac{1}{2} \Delta t (\ddot{n}U + \ddot{n}^{+1}U) \end{aligned} \quad (20a-b)$$

ou em termos de incrementos de deslocamentos por:

$$\begin{aligned} n^{+1}\ddot{U} &= \frac{4}{\Delta t^2} U - \frac{4}{\Delta t} \dot{n}U - \ddot{n}U \\ n^{+1}\dot{U} &= \frac{2}{\Delta t} U - \dot{n}U \end{aligned} \quad (21a-b)$$

Substituindo-se (21a) em (18), obtêm-se o sistema de equações algébricas:

$$\left( \frac{4}{\Delta t^2} M + K_e - {}^n K_p \right) U = {}^{n+1}F - {}^n R + M \left( \frac{4}{\Delta t} \dot{n}U + \ddot{n}U \right) \quad (22)$$

que resolvido fornece o vetor de incrementos de deslocamentos U. As acelerações  $n^{+1}\ddot{U}$  e velocidades  $n^{+1}\dot{U}$ , são calculadas através de (21a-b).

### 3.2.2 - Algoritmo explícito - Diferença Central

As aproximações de diferença central para acelerações e velocidades são:

$$\begin{aligned} n\ddot{U} &= \frac{{}^{n+1}U - 2 {}^nU + {}^{n-1}U}{\Delta t^2} \\ n\dot{U} &= \frac{{}^{n+1}U - {}^{n-1}U}{2\Delta t} \end{aligned} \quad (23a-b)$$

A aproximação (23a) substituída na forma discreta associada a (1), fornece o sistema de equações algébricas:

$$M {}^{n+1}U = ({}^nF - {}^nR)\Delta t^2 + M(2 {}^nU - {}^{n-1}U) \quad (24)$$

A solução de (24), juntamente com as relações (23a-b), permitem avançar no tempo. O inconveniente deste algoritmo é ser condicionalmente estável. Para problemas lineares a condição de

estabilidade é que  $\Delta t < \tau_N/\pi$ , em que  $\tau_N$  é o menor período de vibração do sistema discretizado. Sendo assim, a escolha do intervalo de integração fica condicionada à discretização espacial.

Considerando-se que, normalmente, os primeiros modos são os predominantes, propõe-se um algoritmo de diferença finita combinado com uma decomposição modal, para o qual a condição de estabilidade passa a ser  $\Delta t < \tau_M/\pi$ , sendo  $M$  o número de modos usados na representação da solução [6].

Seja então  $\Phi$ , a matriz formada pelos  $M$  primeiros modos do problema de auto-valor:

$$\left[ M - \frac{1}{\omega_r^2} K_e \right] \chi = 0 \quad ; \quad r = 1, 2, \dots, N$$

Da decomposição modal:

$${}^{n+1}U = \Phi \, {}^{n+1}\eta \quad , \quad (25)$$

aplicada à equação (24), obtém-se:

$${}^{n+1}\eta = \Phi^T ({}^n F - {}^n R) \Delta t^2 + 2 \, {}^n \eta - {}^{n-1} \eta \quad ,$$

ou em termos de coordenadas primitivas:

$${}^{n+1}U = \Phi \, \Phi^T ({}^n F - {}^n R) \Delta t^2 + 2 \, {}^n U - {}^{n-1} U \quad (26)$$

O esquema numérico acima proposto permite obter uma melhor aproximação dos primeiros modos, através de um refinamento na malha de elementos finitos, sem que haja necessidade de diminuir o intervalo de integração  $\Delta t$ .

#### 4. APLICAÇÕES A UM MODELO UNIDIMENSIONAL

No caso da teoria clássica de flexão de vigas, em que são desprezados os efeitos de deformação por cortante e de inércia de rotação, os tensores  $\underline{\sigma}$  e  $\underline{\epsilon}$  ficam reduzidos às componentes  $\sigma_{11}$  e  $\epsilon_{11}$ . Considerando-se apenas flexão plana, a expressão (1) do P.T.V. toma a forma:

$$\int_0^L \rho A \, {}^n \ddot{\hat{w}} \, \hat{w} \, dx - \int_0^L \int_A {}^n \sigma_{11} \hat{\epsilon}_{11} \, dA \, dx = {}^n \hat{W} \quad (27)$$

em que  $L$  é comprimento e  $A$  a área da secção transversal da viga, e  $\epsilon_{11}$  é dado por:

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (28)$$

sendo  $x$  e  $z$  coordenadas nas direções axial e transversal respectivamente, e  $u(x,t)$  e  $w(x,t)$  deslocamentos do eixo da viga segundo  $x$  e  $z$  respectivamente.

A forma incremental linear do P.T.V. para a viga em questão é:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho A \, {}^{n+1}\ddot{w} \, \hat{w} \, dx + \int_0^L \int_A {}^n E \, \epsilon_{11} \, \hat{\epsilon}_{11} \, dA \, dx = \\ = {}^{n+1}\hat{w} - \int_0^L \int_A {}^n \sigma_{11} \, \hat{\epsilon}_{11} \, dA \, dx \end{aligned} \quad (29)$$

onde se fez uso da relação constitutiva incremental, unidimensional

$$\sigma_{11} = {}^n E \, \epsilon_{11} \quad (30)$$

Deve-se notar que não se pode realizar a priori as integrais de área, indicadas em (29), uma vez que  ${}^n E$  é função da história das tensões e deformações. Desse modo, essas integrais são realizadas numericamente, guardando-se os valores de  ${}^n \sigma_{11}$  e  ${}^n \epsilon_{11}$  nos pontos de integração.

Para a obtenção de soluções aproximadas de (29), utilizou-se uma discretização de elementos finitos, fazendo-se uso do elemento finito de viga, com dois nós e dois graus de liberdade por nó (deslocamento transversal e rotação).

#### 4.1 - Viga bi-apoiada de secção retangular

Foi analisada a resposta no tempo de uma viga bi-apoiada, sujeita a um carregamento uniformemente distribuído, dependente do tempo, cuja intensidade é 75% da carga estática de ruptura (Figura 1).

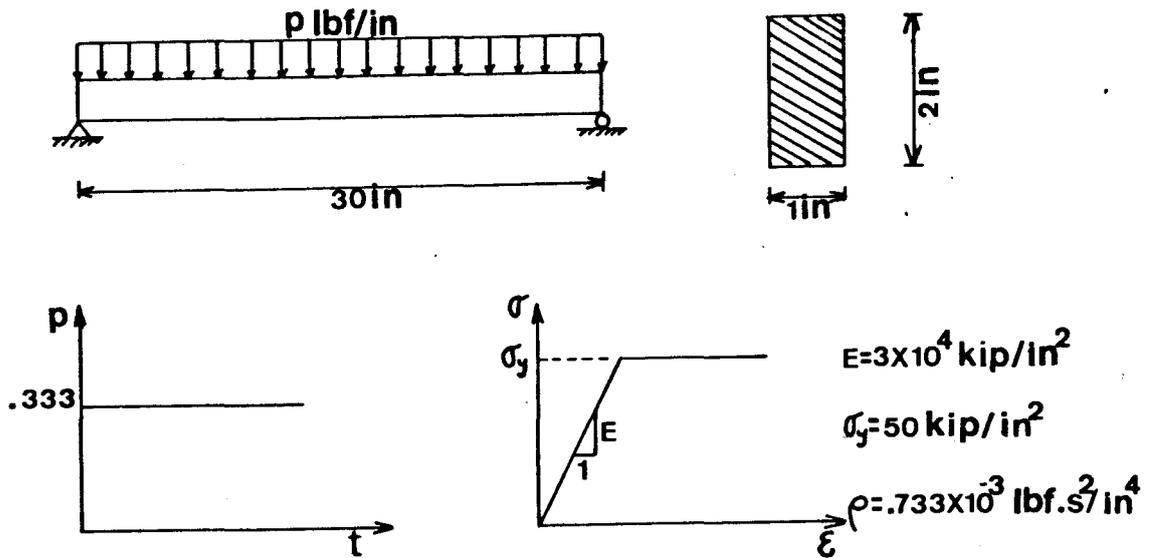


Figura 1 - Viga bi-apoiada com carga uniforme. Variação da carga no tempo. Diagrama tensão x deformação.

O critério de plastificação neste caso fica sendo:

$$n_{\sigma_{11}}^2 - n_{\sigma_y}^2 = 0, \quad (31)$$

e a relação constitutiva incremental é:

$$\sigma_{11} = E \epsilon_{11} \quad \text{para} \quad \begin{cases} n_{\sigma_{11}}^2 < n_{\sigma_y}^2, & \text{ou} \\ n_{\sigma_{11}}^2 = n_{\sigma_y}^2 & \text{e } n_{\sigma_{11}} \sigma_{11} \leq 0, \end{cases}$$

ou:

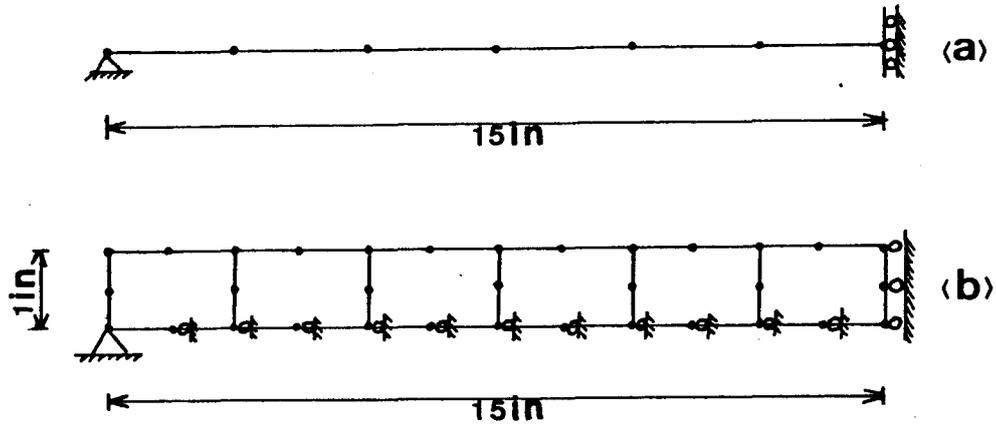
$$\sigma_{11} = E_T \epsilon_{11} ; \text{ para } n_{\sigma_{11}}^2 - n_{\sigma_y}^2 = 0 \text{ e } n_{\sigma_{11}} \sigma_{11} > 0$$

onde E é o módulo de Young e  $E_T$  é o módulo tangente à curva  $n_{\sigma} \times n_{\epsilon}$  no trecho plástico.

Para este exemplo assumiu-se um material com comportamento elasto-plástico perfeito, cujo diagrama tensão x deformação uniaxial está representado na Figura 1.

Na Figura 2a está indicada a discretização de elemento finito utilizada, consistindo de seis elementos iguais, onde

faz-se uso da condição de simetria do problema, resultando num modelo com 12 graus de liberdade.



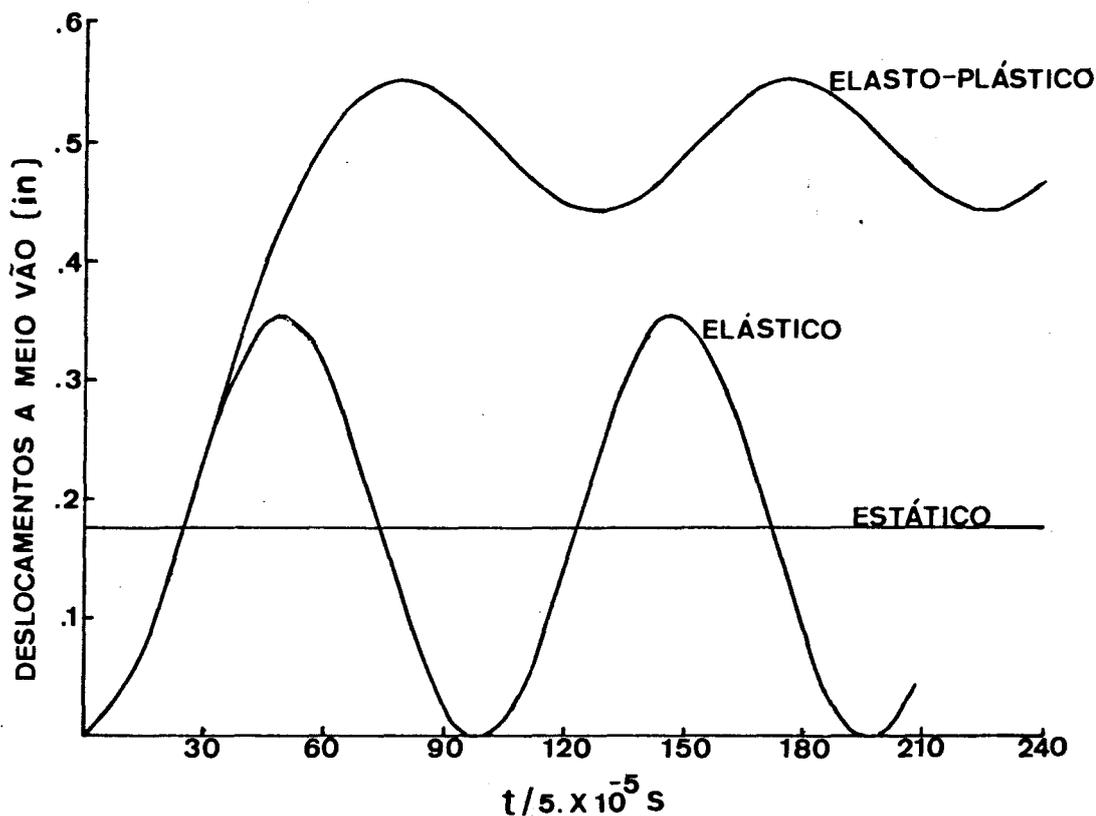
*Figura 2 - Discretização de elementos finitos*

Nas Figuras 3 a 5 estão representadas as histórias no tempo dos deslocamentos da secção a meio-vão.

O primeiro diagrama (Fig. 3) tem por objetivo comparar os resultados obtidos para este problema, quando se admitem: comportamento elástico (estático e dinâmico) e comportamento elasto-plástico perfeito.

As respostas dinâmicas foram calculadas usando-se o algoritmo de Newmark, com  $\Delta t = 0.5 \times 10^{-4}$  seg. Os resultados obtidos, no caso da resposta dinâmica elástica, coincidem com a correspondente solução exata.

Na Figura 4 faz-se uma comparação entre os resultados obtidos com o modelo unidimensional de viga, desenvolvido neste trabalho, e os resultados apresentados por Bathe [2], utilizando um modelo bi-dimensional, no qual a viga é simulada como um estado plano de tensões, usando seis elementos finitos isoparamétricos quadráticos com um total de 50 graus de liberdade. (Figura 2b).



*Figura 3 - Viga bi-apoiada. Comparação entre as análises elástica e elasto-plástica.*

O modelo desenvolvido em [2] automaticamente leva em conta os efeitos devidos à deformação por cortante e inércia de rotação. E, embora a teoria de viga aqui usada não considere esses efeitos, os resultados assim obtidos estão bastante próximos dos resultados apresentados na referência [2]. Considerando que os números de graus de liberdade são de: 12 no modelo uni-dimensional e 50 no modelo bi-dimensional, conclui-se que, para problemas deste tipo, onde a teoria de vigas é aplicável, há uma nítida vantagem, do ponto de vista computacional, do elemento de viga sobre o elemento bi-dimensional.

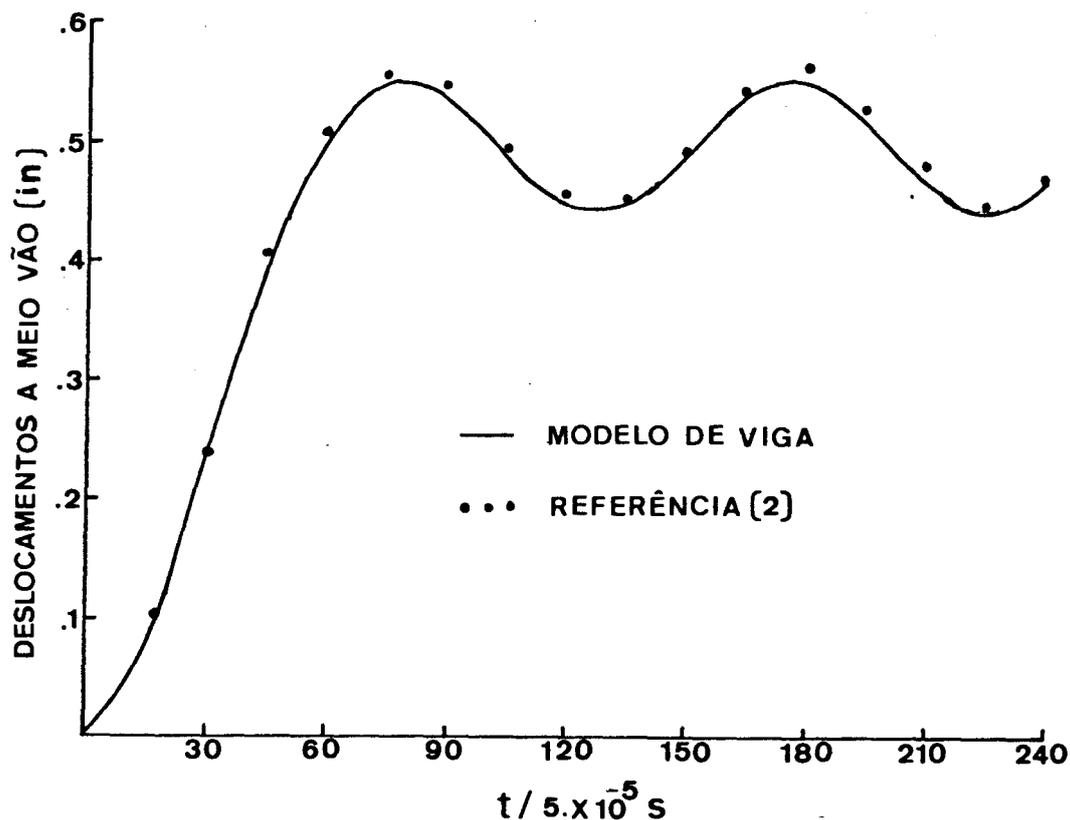


Figura 4 - Viga bi-apoiada. Comparação entre o modelo uni-dimensional proposto e o modelo de estado plano de tensões (Ref. [2]).

Na Figura 5 procura-se mostrar a convergência do algoritmo de diferença finita combinado com análise modal, desenvolvido no item 3.2.2. Verifica-se que com apenas cinco modos ( $\Delta t = 1.25 \times 10^{-5}$  seg.) os resultados obtidos já estão bastante próximos daquelas conseguidos com o algoritmo convencional de diferença finita ( $\Delta t = 2.0 \times 10^{-6}$  seg.), e que com sete modos ( $\Delta t = 6.25 \times 10^{-6}$  seg.) a coincidência entre os resultados já é notável. Os valores dos intervalos de integração ( $\Delta t$ ) usados, são pouco menores que os correspondentes  $\Delta t$  necessários para garantir a estabilidade do esquema numérico.

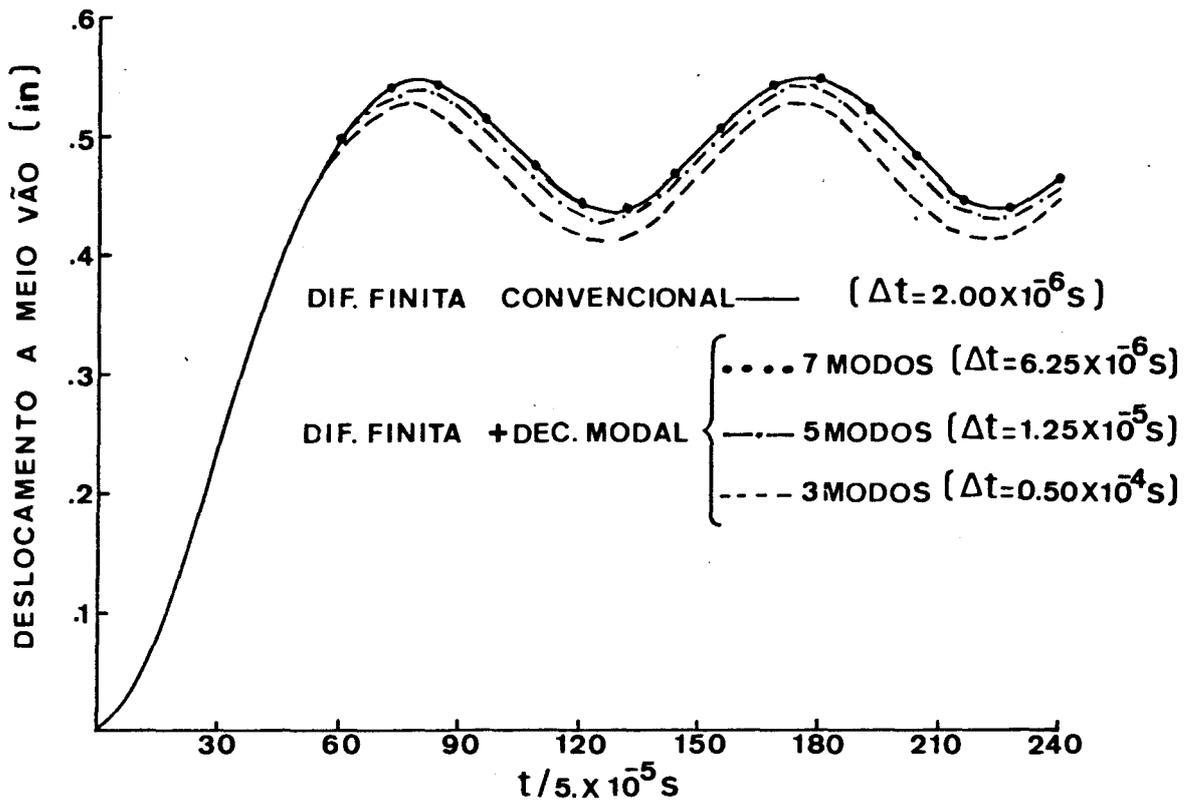


Figura 5 - Convergência do algoritmo de diferença finita proposto.

4.2 - Tubo com pressão interna

Na utilização do modelo elasto-plástico uni-dimensional de viga, na flexão de tubulações, deve-se levar em conta a influência da pressão interna nas zonas de plastificação. Neste caso o critério de plastificação de Von Mises fica dado por:

$$(\overset{n}{\sigma}_{11} - \overset{0}{\sigma}_{22})^2 + \overset{n}{\sigma}_{11} \overset{0}{\sigma}_{22} = \overset{n}{\sigma}_y^2 ; \text{ com } \overset{0}{\sigma}_{22} = \frac{pR}{h} ,$$

e a relação constitutiva incremental será:

$$\sigma_{11} = E \epsilon_{11} ,$$

se: 
$$\left\{ \begin{array}{l} (\overset{n}{\sigma}_{11} - \overset{0}{\sigma}_{22})^2 + \overset{n}{\sigma}_{11} \overset{0}{\sigma}_{22} < \overset{n}{\sigma}_y^2 , \text{ ou} \\ (\overset{n}{\sigma}_{11} - \overset{0}{\sigma}_{22})^2 + \overset{n}{\sigma}_{11} \overset{0}{\sigma}_{22} = \overset{n}{\sigma}_y^2 \text{ e } (2 \overset{n}{\sigma}_{11} - \overset{0}{\sigma}_{22}) \sigma_{11} \leq 0 \end{array} \right.$$

ou:

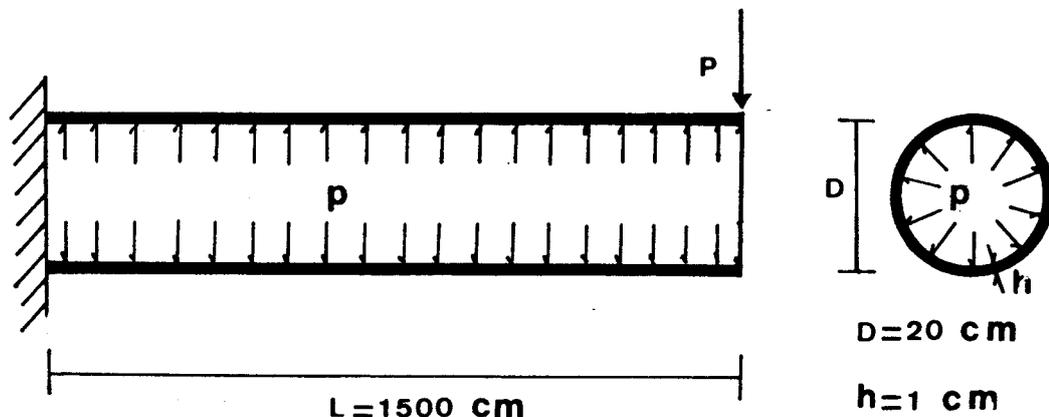
$$\sigma_{11} = n_E \epsilon_{11} ,$$

$$\text{se: } (n_{\sigma_{11}} - \sigma_{22})^2 + n_{\sigma_{11}} \sigma_{22} = n_{\sigma_y}^2 \text{ e } (2 n_{\sigma_{11}} - \sigma_{22}) \sigma_{11} > 0$$

com:

$$n_E = E \left[ 1 - \frac{(E-E_T)(2 n_{\sigma_{11}} - \sigma_{22})}{2 n_{\sigma_y} E_T + (E-E_T)(2 n_{\sigma_{11}} - \sigma_{22})} \right]$$

Estudou-se a resposta estática de um tubo em balanço sujeito a uma carga P, atuando na extremidade livre, para diferentes valores da pressão interna p (Figura 6). Foi admitido, para o material, um comportamento elasto-plástico perfeito com  $\sigma_y = 4200 \text{ kgf/cm}^2$  e  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$



*Figura 6 - Tubo com pressão interna.*

A figura 7 mostra os gráficos de carga  $\times$  deslocamento, evidenciando a influência da pressão interna, sobre a carga última de ruptura.

A Figura 8 procura mostrar, qualitativamente, a evolução do diagrama de tensões  $\sigma_{11}$ , com a carga externa P (sem descarregamento), para os casos em que  $p = 0$  e  $p \neq 0$ .  $M_e$  é o máximo momento absorvido pela seção em regime elástico, e  $M_p$  é o momento de ruptura (plastificação total).

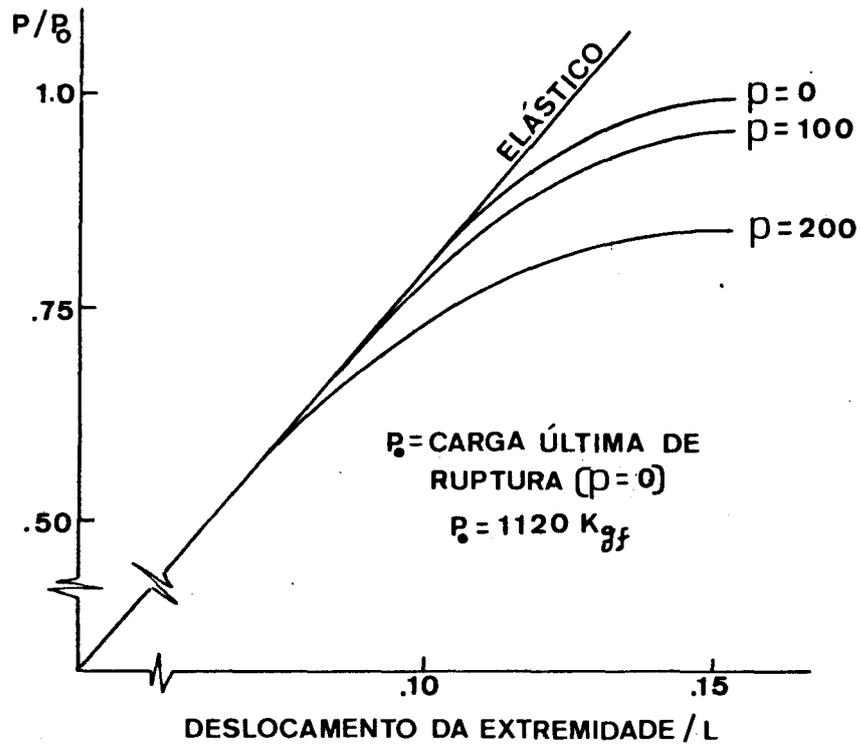


Figura 7 - Flexão elasto-plástica de tubos -  
Influência da pressão interna.

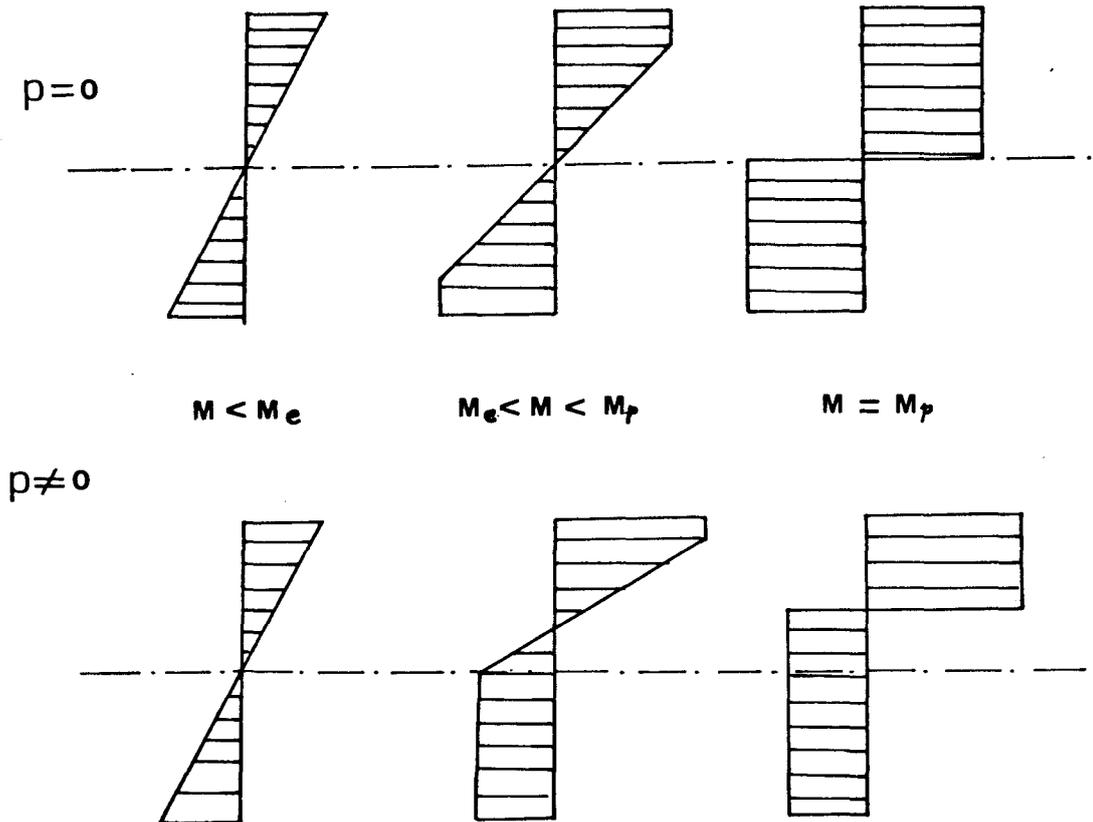


Figura 8 - Evolução das tensões longitudinais

## 5. CONCLUSÕES

A verificação do critério de plastificação e da lei constitutiva incremental nos pontos usados para a integração numérica na secção transversal, permite generalizar este procedimento para a análise elasto-plástica de modelos tri-dimensionais de viga, com secção arbitrária. Nas situações em que a teoria de vigas é aplicável, há uma nítida vantagem computacional deste modelo comparado com modelos de estado plano de tensões.

Mostrou-se que em tubulações, a consideração da pressão interna pode ser um fator importante na avaliação da carga última de ruptura.

O algoritmo de integração explícito proposto neste trabalho, tem a vantagem, frente ao de diferença finita convencional, de aumentar o intervalo de integração, respeitando a condição de estabilidade. Por outro lado, exige a determinação dos modos normais de vibração do correspondente problema linear. Assim, nos casos em que o número de modos, necessários para representar satisfatoriamente a solução, seja pequeno, este algoritmo pode ser vantajoso do ponto de vista computacional.

BIBLIOGRAFIA

- [1] - O.C. Zienkiewicz, *The finite element method in Engineering Science*. McGraw-Hill, London, (1971).
- [2] - K.J. Bathe, *Static and dynamic geometric and material non-linear analysis using ADINA*, Report 82448-2, M.I.T., Cambridge, (1977).
- [3] - D. Dini & L. Lazzeri, *Modelling techniques for pipe-whip analysis*, Nucl.Eng.Des. 37, pp. 361-372, (1976).
- [4] - A. Loula, A.C. Galeão e J.N. Guerreiro, *Um modelo de elemento finito para o estudo do chicoteamento em tubulações de alta energia*, Conferência sobre Análise, Projeto e Construção de Estruturas de Centrais Nucleares, Porto Alegre, RS, Paper N° 53, (1978).
- [5] - N.M. Newmark, *A method of computation for structural dynamics*, Proc. ASCE, 85, EM-3, pp. 67-74, (1959).
- [6] - A. Loula e J.N. Guerreiro, *Um algoritmo de integração numérica de equações diferenciais no tempo*, I Simpósio Nacional de Cálculo Numérico, Belo Horizonte, MG, (1978).

Observação: Este trabalho faz parte do Projeto "Análise de Componentes de Reatores Nucleares", financiado pela CNEN (Comissão Nacional de Energia Nuclear) e pela FINEP (Financiadora de Estudos e Projetos).