

CBPF - CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
Rio de Janeiro

Notas de Física

CBPF-NF-023/09

December 2009

Doppleraj efikoj ĉe Schwarzschild
Efeitos Doppler em Schwarzschild

F.M. Paiva e A.F.F. Teixeira

Doppleraj efikoj ĉe Schwarzschild Efeitos Doppler em Schwarzschild

F.M. Paiva

Departamento de Física, Unidade Humaitá II, Colégio Pedro II
Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

8-a de decembro, 2009

Resumo

Movado de korpoj kaj lumo estas studitaj en gravita kampo de Schwarzschild. Pluraj Doppleraj efikoj estas priskribitaj.

Movimentos de corpos e raios luminosos são estudados no campo gravitacional de Schwarzschild. Vários efeitos Doppler são descritos.

1 Enkonduko

En [1]–[6] ni studis la tempon ĉe la special-relativeco. Alia artikolo [7] nia estas finiĝanta, zorgante pri difinojn de pluraj malsamaj intertempoj ĉe la ĝeneral-relativeco. Ni nun prezentas specifigon de [7] por spacotempo de Schwarzschild,

1 Introduução

Em [1]–[6] nós estudamos o tempo na relatividade especial. Um outro artigo [7] está em conclusão, tratando de definições de vários diferentes intertempos na relatividade geral. Nós apresentamos agora uma especialização do [7] para o espaçotempo de Schwarzschild,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\rho}{r}\right) (c dt)^2 - \left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^{-1} (dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2\theta (d\varphi)^2, \quad \rho := \frac{2Gm}{c^2}. \quad (1)$$

Ni zorgos pri pluraj movadoj en kampo (1), en ebena $\theta = \pi/2$ de regiono $r > \rho$.

Memoru ke movado de materio havas ds^2 pozitivan kaj tiuokaze oni difinas infiniteziman propran intertempon $d\tau$ kiel $ds = c d\tau$; alie, movado de lumo havas $ds = 0$.

En sekcio 2 ni priskribas konstruadon de koordinathorloĝoj de metriko (1). En

Nós vamos tratar de vários movimentos no campo (1), no plano $\theta = \pi/2$ da região $r > \rho$.

Relembre que um movimento de matéria tem ds^2 positivo, e neste caso define-se um intervalo infinitesimal de tempo próprio $d\tau$ como $ds = c d\tau$; por outro lado, um movimento de luz tem $ds = 0$.

Na seção 2 nós descrevemos a construção de relógios de coordenada da métrica (1). Na

sekcio 3 ni difinas Doppleran efikon kaj prezentas la nemikse gravitan Doppleran faktoron en tiu metriko. En sekcio 4 ni skribas la diferencialajn ekvaciojn de geodezoj, kaj emfazas la gravecon de konstantoj E kaj h de integro. En sekcio 5 ni studas cirklaĵajn geodezojn, kaj sekcio 6 studas aliajn cirklaĵajn movadojn. Sekcio 7 montras, ke propratempo de cirkle moviĝanta korpo fluas malpli rapide ol tio de korpo restanta en la sama radiuso. Ĝi priskribas ankaŭ Doppleran efikon inter du korpoj cirkle moviĝantaj en la sama ebena, kaj kun la sama rotacirapido. Sekcio 8 pririgardas interesan specialan okazon de lasta sistemo, prezentante nulan Doppleran efikon. En sekcio 9 ni komparas la fluon de propratempo de radiuse geodeze moviĝanta korpo kun tio de ripozanta korpo, kaj sekcio 10 kalkulas Doppleran faktoron en tiu movado. Fine, sekcio 11 aplikas niajn rezultojn al movado de satelitoj orbitante Teron.

2 Koordinathorloĝoj

Ĉar la koeficiento g_{00} de metriko (1) pendas de r , tial du koordinathorloĝoj de (1) estas identikaj nur se ili estas en sama radiusa pozicio. Krome nur la koordinathorloĝoj de infinito (kie $g_{00} = 1$) estas normhorloĝoj. Se normhorloĝo (kiu montras $d\tau$) estas fiksa tiam ĉe koordinathorloĝo (kiu montras dt) en finhava radiusa pozicio, $d\tau = \sqrt{g_{00}} dt$; ĉar $g_{00} < 1$, tial normhorloĝo marŝas malpli rapide ol loka koordinathorloĝo.

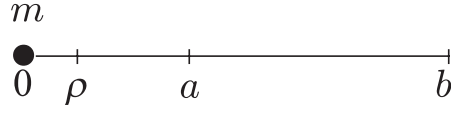
Demando: kiel estas konstruitaj la koordinathorloĝoj de metriko (1)? Respondo: (formala) ebleco estas unue fiksi unu *normhorloĝon* en ĉiu punkto $[r, \theta, \varphi]$ de spaca teksaĵo; poste, uzante la rilaton $d\tau = \sqrt{g_{00}(r)} dt$, rapidigi la marŝon de ĉiu horloĝo laŭ ĝia radiusa pozicio r . Alterne, la mekanismo de ĉiu horloĝo estas neŝanĝata, sed la ciferplato estas konvene

sekcio 3 ni difinimos efikon Doppler e prezentamos o fator Doppler puramente gravitacional nessa métrica. Na seção 4 nós escrevemos as equações diferenciais das geodésicas e enfatizamos a relevância das constantes E e h de integração. Na seção 5 nós estudamos geodésicas circulares, e a seção 6 estuda outros movimentos circulares. A seção 7 mostra que o tempo próprio de um corpo em movimento circular flui menos rápido que aquele de um corpo parado no mesmo raio. Ela descreve também o efeito Doppler entre dois corpos movendo-se circularmente no mesmo plano, e com mesma velocidade angular. A seção 8 examina um interessante caso especial deste último sistema, apresentando efeito Doppler nulo. Na seção 9 nós comparamos o fluir do tempo próprio de um corpo em movimento geodético radial com o de um corpo parado, e a seção 10 calcula o fator Doppler nesse movimento. Finalmente, a seção 11 aplica nossos resultados ao movimento de satélites orbitando a Terra.

2 Relógios de coordenada

Como o coeficiente g_{00} da métrica (1) depende de r , dois relógios de coordenada de (1) são idênticos somente se eles estiverem na mesma posição radial. Além disso, somente os relógios de coordenada do infinito (onde $g_{00} = 1$) são relógios padrão. Se um relógio padrão (que mostra $d\tau$) for fixado ao lado de um relógio de coordenada (que mostra dt) em posição radial finita, então $d\tau = \sqrt{g_{00}} dt$; como $g_{00} < 1$, o relógio padrão tem andamento menos rápido que o relógio de coordenada local.

Uma pergunta: como são construídos os relógios de coordenada da métrica (1)? Resposta: uma possibilidade (formal) é primeiramente fixar um *relógio padrão* em cada ponto $[r, \theta, \varphi]$ da trama espacial; depois, usando a relação $d\tau = \sqrt{g_{00}(r)} dt$, apressar a marcha de cada relógio conforme sua posição radial r . Alternativamente, o mecanismo de cada relógio não é mudado, mas a numeração no mostrador



Figuro 1: Fonto restanta en pozicio $r = a$ eligas lumon en kampo de Schwarzschild (1); tiu lumon estas perceptata kun Dopplera faktoro (4), per observanto restanta en pozicio $r = b$.

Figura 1: Uma fonte parada na posição $r = a$ emite luz em um campo de Schwarzschild (1); essa luz é percebida com fator Doppler (4), por um observador parado na posição $r = b$.

ŝanĝata por kompensi la fakton, ke $dt > d\tau$. Fine sinkronigi ilin laŭ Einstein [1].

é apropriadamente mudada para compensar o fato que $dt > d\tau$. Finalmente sincronizá-los ao modo de Einstein [1].

3 Nemikse gravita Dopplera efiko

Frekvenco estas grava eco de luma ondo. Se frekvenco de lumon ricevata estas malsimila al tio de lumon eligita ni diras, ke okazas Dopplera efiko. Tiu efiko estas mezurata per la Dopplera faktoro, difinata kiel

3 Efeito Doppler puramente gravitacional

A frequência é uma característica importante de uma onda luminosa. Se a frequência de uma luz recebida for diferente daquela da luz emitida, nós dizemos que ocorre efeito Doppler. Esse efeito é medido pelo fator Doppler, definido como

$$D_{a \rightarrow b} := \frac{\nu_b}{\nu_a}, \quad (2)$$

estante ν_a kaj ν_b la *propraj frekvencoj* de lumon igita el a kaj observata en b , respektive. La efiko nomiĝas ruĝiĝo se $D < 1$, kaj violiĝo se $D > 1$.

Simpla maniero por kalkuli D estas fari, ke fonto eligu du sinsekvajn lumajn signalojn, apartitajn de infinitezima propra intertempo $d\tau_a$. Se tiuj signaloj estas ricevataj kun infinitezima propra intertempo $d\tau_b$, la Dopplera faktoro estas

sendo ν_a e ν_b as *frequências próprias* da luz emitida de a e observada em b , respectivamente. O efeito se chama desvio para o vermelho se $D < 1$, e desvio para o violeta se $D > 1$.

Um modo simples para calcular D é fazer com que a fonte emita dois sinais luminosos consecutivos, separados por um intertempo próprio infinitesimal $d\tau_a$. Se esses sinais forem recebidos com intertempo próprio infinitesimal $d\tau_b$, o fator Doppler é

$$D_{a \rightarrow b} = \frac{d\tau_a}{d\tau_b}. \quad (3)$$

Frekvencŝanĝo pendas de interrompido de fonto-observanto, kaj ankaŭ de gravito. Speciale, se ambaŭ lumfonto kaj observanto restas, kaj gravito estas neŝanĝinta ($g_{\mu\nu}$ ne pendas de tempa koordinato), ni kalkulas la Doppleran faktoron tre facile. Fakte, tiuokaze la koordinata intertempo

A mudança de frequência depende da velocidade relativa fonte-observador, e também da gravitação. Em particular, se ambos fonte luminosa e observador estiverem parados, e a gravitação for invariante ($g_{\mu\nu}$ não dependerem de t), nós calculamos o fator Doppler muito facilmente. De fato, neste caso o intertempo de co-

dt inter la eligitaj signaloj kaj la ricevataj estas samaj [8, paĝo 416]. Ĉar por la du restantaj korpoj okazas $d\tau_a = \sqrt{g_{00}(a)} dt$ kaj $d\tau_b = \sqrt{g_{00}(b)} dt$, tial la (3) kaj (1) faras (vidu figuron 1)

ordenada dt entre os sinais emitidos e os recebidos são o mesmo [8, pág. 416]. Como para os dois corpos parados ocorre $d\tau_a = \sqrt{g_{00}(a)} dt$ e $d\tau_b = \sqrt{g_{00}(b)} dt$, a (3) e a (1) fazem (veja a figura 1)

$$D_{a \rightarrow b} = \sqrt{\frac{1 - \rho/a}{1 - \rho/b}}. \quad (4)$$

Se $a < b$ do $D < 1$, indikante ruĝiĝon; kaj se $a > b$ do $D > 1$, indikante violiĝon. Se $a = b$ do $D = 1$, indikante neeston de Dopplera efiko. Atentu, ke la angulaj pozicioj de kaj fonto kaj observanto *restantaj* ne gravas por (4).

Se $a < b$ então $D < 1$, indicando desvio para o vermelho; e se $a > b$ então $D > 1$, indicando desvio para o violeta. Se $a = b$ então $D = 1$, indicando inexistência de efeito Doppler. Atente que as posições angulares da fonte e do receptor *parados* não importam para a (4).

4 Geodezaj ekvacioj

Ĉar la metrikoj koeficientoj de (1) ne dependas de t , tial la tempa geodeza ekvacio generas $g_{00} dt/d\tau = \text{konst}$, kaj do

$$d\tau_{geod} = \frac{1}{E}(1 - \rho/r) dt, \quad E = \text{konst}. \quad (5)$$

Ĉar ili ankaŭ ne dependas de φ , tial la azimuta geodeza ekvacio generas $g_{\varphi\varphi} d\varphi/d\tau = \text{konst}$, kaj do, en ebena $\theta = \pi/2$,

$$d\varphi_{geod} = \frac{c\rho h}{r^2}(1 - \rho/r) dt, \quad h = \text{konst}. \quad (6)$$

Konstantoj E kaj h estas nedimensiaj, kaj kvalite priskribas iun ajn geodezan movadon de materio (movadon de tempa tipo) en ebena $\theta = \pi/2$. Fakte, iuj ajn du tiel trajektorioj kun samaj valoroj de E kaj h estas surmeteblaj per spaca rotacio en la ebena.

Fine, por venonta uzo en sekcio 5 ni prezentas la duagrade diferencian geodezan ekvacion por r :

4 Equações geodéticas

Como os coeficientes métricos de (1) não dependem de t , a equação geodética temporal gera $g_{00} dt/d\tau = \text{konst}$, e portanto

Como eles tampouco dependem de φ , a equação geodética azimutal gera $g_{\varphi\varphi} d\varphi/d\tau = \text{konst}$, e portanto, no plano $\theta = \pi/2$,

As constantes E e h são adimensionais, e descrevem qualitativamente qualquer movimento geodético de matéria (movimento tipo tempo) no plano $\theta = \pi/2$. De fato, quaisquer duas tais trajetórias com mesmos valores de E e h são superponíveis mediante rotação espacial no plano.

Finalmente, para uso futuro na seção 5 nós apresentamos a equação geodética diferencial de ordem 2 para r :

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{\rho}{2r^2(1 - \rho/r)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = r(1 - \rho/r) \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 - \frac{\rho c^2(1 - \rho/r)}{2r^2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2. \quad (7)$$

Por kompreni la rolon de konstanto E en (5), konsideru normhorloĝon moviĝantan *geodeze*. Ĝi pasas preter punkto en radiusa pozicio r en loka momento t , kaj pasas preter najbara punkto en loka momento $t + dt$. Do ĝia montrilo antaŭeniras $d\tau_{geod}$ kiel en (5), inter la du pozicioj. Atentu, ke la rilato $d\tau_{geod}/dt$ ne pendas de la direkto de movado de horloĝo.

Praktika esprimo de konstanto E estas havita el (1) kaj (5),

$$E = \sqrt{\frac{1 - \rho/r}{1 - v^2/c^2}}, \quad (8)$$

kie v estas funkcio pendanta de movado (geodeza aŭ ne) de korpo en ebena $\theta = \pi/2$,

$$v := \sqrt{\frac{(dr/dt)^2}{(1 - \rho/r)^2} + \frac{r^2(d\varphi/dt)^2}{1 - \rho/r}}. \quad (9)$$

Ni ofte perceptos, ke tiu v tre bone ĝeneraligas la skalaran rapidon de speciala relativeco, kaj la skalaran Newtonan rapidon de korpo, en ebena $\theta = \pi/2$. Ekzemple, la Newtona rapido de *eskapo* ekde distanco r de centra maso m estas bonkonate $\sqrt{2Gm/r}$; kaj la responda relativeca, ekde la radiusa pozicio r , estas havebla el (8) kun $E = 1$, kaj estas $v = c\sqrt{\rho/r} \equiv \sqrt{2Gm/r}$. Do, ni nomos v kiel rapido. Vere, v rezultas el pli ĝenerala formulo, kiun ni prezentos en estonta artikolo [7].

Atentu en (8), ke se korpo kun geodeza movado atingas $r \rightarrow \infty$ kun $v_\infty \neq 0$, do $E = 1/\sqrt{1 - v_\infty^2/c^2}$, kaj do $E > 1$; ankaŭ atentu, ke restado en senlima radiusa pozicio ($v_\infty = 0$) estas geodezo kun $E = 1$. Kaj se geodeze moviĝanta korpo momente restas en iu limhava radiusa pozicio $r = b$, do $E = \sqrt{1 - \rho/b}$, kaj do $E < 1$; tiu pozicio estas tio de maksimuma distanco de korpo al centra maso.

Interesas rimarki, ke esprimo $E - 1$ sim-

Para compreender o papel da constante E na (5), considere um relógio padrão movendo-se *geodeticamente*. Ele passa por um ponto na posição radial r no momento local t , e passa por um ponto vizinho no momento local $t + dt$. Então seu marcador avança $d\tau_{geod}$ como na (5), entre as duas posições. Atente que a relação $d\tau_{geod}/dt$ não depende da direção do movimento do relógio.

Uma expressão prática da constante E é obtida de (1) e (5),

sendo v uma função que depende do movimento (geodético ou não) do corpo no plano $\theta = \pi/2$,

Nós frequentemente vamos perceber que esse v generaliza muito bem a velocidade escalar da relatividade especial, e a velocidade escalar Newtoniana de um corpo, no plano $\theta = \pi/2$. Por exemplo, a velocidade Newtoniana de *escape* a partir da distância r à massa central m é bem sabido $\sqrt{2Gm/r}$; e a correspondente relativista, a partir da posição radial r , é obtível de (8) com $E = 1$, e dá $v = c\sqrt{\rho/r} \equiv \sqrt{2Gm/r}$. Assim, nós vamos chamar v de velocidade. Em verdade, v decorre de uma fórmula mais geral, que vamos apresentar em um futuro artigo [7].

Atente na (8) que, se um corpo com movimento geodético atinge $r \rightarrow \infty$ com $v_\infty \neq 0$, então $E = 1/\sqrt{1 - v_\infty^2/c^2}$, portanto $E > 1$; atente também que o estado de repouso no infinito radial ($v_\infty = 0$) é uma geodésica com $E = 1$. E se o corpo em movimento geodético pára momentaneamente em alguma posição radial finita $r = b$, então $E = \sqrt{1 - \rho/b}$, portanto $E < 1$; essa posição é a de máxima distância do corpo à massa central.

É interessante notar que a expressão $E - 1$ se

ilas al Newtona totala energio. Fakte, en Newtona gravito ni difinas la totalan energion E_t de korpo kiel la algebra adicio de ĝia kinetika energio (pozitiva) kun ĝia potenciala energio (malpozitiva). Se $E_t \geq 0$ ($E \geq 1$ relativece), la korpo povas foriĝi ĝis ∞ , tamen se $E_t < 0$ ($0 < E < 1$ relativece), la korpo trakuras nur regionoj kun $r < \infty$.

assemelha à energia total Newtoniana. De fato, na gravitação Newtoniana nós definimos a energia total E_t de um corpo como a soma algébrica de sua energia cinética (positiva) com sua energia potencial (negativa). Se $E_t \geq 0$ ($E \geq 1$, relativistamente), o corpo pode se afastar até o ∞ , enquanto que se $E_t < 0$ ($0 < E < 1$, relativistamente), o corpo percorre apenas regiões com $r < \infty$.

5 Cirklaĵaj geodezoj

Por studi cirklaĵajn geodezojn de Schwarzschilda metriko (1) en ebena $\theta = \pi/2$, ni konsideras $r = \text{konst}$ en (7) kaj ricevas la tempe konstantan rotacirapidon $\omega := d\varphi/dt$,

5 Geodésicas circulares

Para estudar as geodésicas circulares da métrica de Schwarzschild (1) no plano $\theta = \pi/2$, nós consideramos a (7) com $r = \text{konst}$, e obtemos a velocidade angular temporalmente constante $\omega := d\varphi/dt$,

$$\omega_{geod}^{cirk}(r) = \pm c\sqrt{\frac{\rho}{2r^3}}, \quad r = \text{konst}; \quad (10)$$

ĉar $\rho = 2Gm/c^2$ tial ni konstatas, ke $\omega_{geod}^{cirk}(r)$ formale koincidas kun la Newtona geodeza rezulto $\pm\sqrt{Gm/r^3}$. Vidu kurbon G en figuro 2.

como $\rho = 2Gm/c^2$, nós constatamos que $\omega_{geod}^{cirk}(r)$ coincide formalmente com o resultado geodético Newtoniano $\pm\sqrt{Gm/r^3}$. Veja a curva G na figura 2.

Uzante (6) kaj (10) ni vidas, ke la konstanto h de cirkla geodeza movado valoras

Usando (6) e (10) vemos que a constante h do movimento circular geodético vale

$$h_{geod}^{cirk}(r) = \pm \frac{\sqrt{r/(2\rho)}}{1 - \rho/r}, \quad r = \text{konst}, \quad (11)$$

kaj uzante (1) kaj (5) kaj (11), ni ricevas

e usando (1) e (5) e (11) nós recebemos

$$E_{geod}^{cirk}(r) = \frac{1 - \rho/r}{\sqrt{1 - 3\rho/(2r)}}, \quad r = \text{konst}. \quad (12)$$

Atentu en (12), ke cirkla geodezo de korpo havas $E_{geod}^{cirk} < 1$, kaj ekzistas nur se $r > 3\rho/2$.

Atente na (12) que uma geodésica circular de um corpo tem $E_{geod}^{cirk} < 1$, e existe somente se $r > 3\rho/2$.

Fine, uzante (9) kun $dr/dt = 0$, kaj (10), ni ricevas la tangentan rapidon de geodeza cirkla movado kun radiuso r :

Finalmente, usando a (9) com $dr/dt = 0$, e a (10), obtemos a velocidade tangencial do movimento circular geodético com raio r :

$$v_{geod}^{cirk}(r) = c\sqrt{\frac{\rho}{2(r - \rho)}}, \quad r = \text{konst}. \quad (13)$$

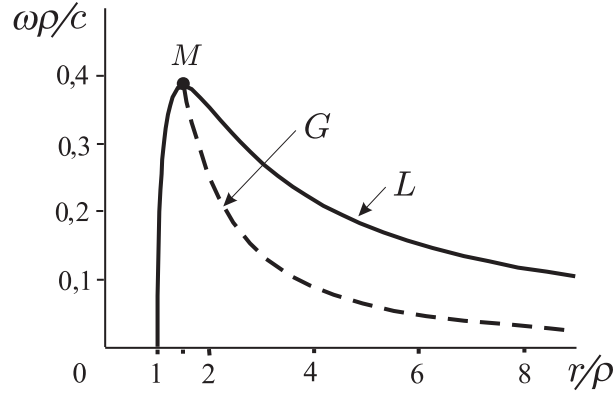


Figura 2: Streckata kurbo G montras la rotacirapidon ω de korpo kun cirkla geodeza movado kun radiuso r , kiel (10). Plena kurbo L montras la plej grandan rotacirapidon ω de korpo en cirkla movado kun radiuso r , kiel (14). Maksimumo punkto $M = [3/2, 2/\sqrt{27}]$ de kurbo L indikas bonkonatan geodezan cirklan movadon de lumo.

Figura 2: A curva tracejada G mostra a velocidade angular ω de um corpo com movimento circular geodético com raio r , como a (10). A curva cheia L mostra a máxima velocidade angular ω de um corpo em movimento circular com raio r , como a (14). O ponto máximo $M = [3/2, 2/\sqrt{27}]$ da curva L indica o bem conhecido movimento geodético circular de luz.

Ni vidas, ke $v_{geod}^{circ}(r) \rightarrow c$ se $r \rightarrow 3\rho/2$. Tio signifas, ke nur lumo moviĝas geodeze en cirklo kun tiu radiuso.

Vemos que $v_{geod}^{circ}(r) \rightarrow c$ se $r \rightarrow 3\rho/2$. Isso significa que somente a luz se move geodeticamente no círculo com esse raio.

6 Cirklaĵ movadoj

Ni studos movadojn, geodezajn aŭ ne, kun $\theta = \pi/2$ kaj $r = \text{konst}$, en Schwarzschilda metriko (1). Malsimile al la Newtona kinematiko, la relativeca teorio limigas la rotacirapidon de tiuj movadoj. Fakte, en cirkla movado kun radiuso r , la kondiĉo $ds^2 > 0$ por movado de korpo faras, ke la rotacirapido $\omega := d\varphi/dt$ havu modulon plieta ol

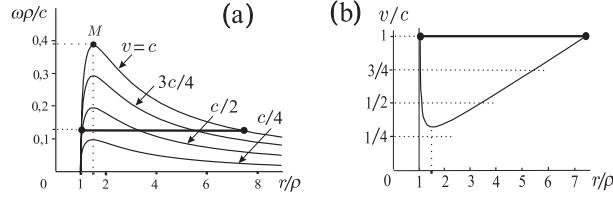
6 Movimentos circulares

Vamos estudar movimentos, geodéticos ou não, com $\theta = \pi/2$ e $r = \text{konst}$, na métrica de Schwarzschild (1). Diferentemente da cinemática Newtoniana, a relatividade limita a velocidade angular desses movimentos. De fato, em um movimento circular com raio r , a condição $ds^2 > 0$ para movimento de um corpo faz com que a velocidade angular $\omega := d\varphi/dt$ tenha módulo menor que

$$\omega_{limo}(r) := \frac{c}{r} \sqrt{1 - \rho/r}. \quad (14)$$

Tio estus la ω de lumo vojaĝanta kun rapido c en cirklo kun radiuso r . Kurbo L en figuro 2 montras la interesan funkcion (14). Atentu, ke paroj $[r, \omega]$ donante cirklan movadon de korpo ekzistas nur sub kurbo L . Tiu kurbo ankaŭ montras, ke duo de valoroj de radiuso r de la cirklo havas

Esse seria o ω de luz viajando com velocidade c em um círculo com raio r . A curva L na figura 2 mostra a interessante função (14). Atente que pares $[r, \omega]$ dando movimentos circulares de um corpo existem somente abaixo da curva L . Essa curva mostra também que um par de valores do raio r do círculo têm mesmo ω_{limo} . Para o único



Figuro 3: (a) Ĉiu kurbo montras parojn $[r, \omega]$ por cirkla movado kun la indikata tangenta rapido. La horizonta streko indikas stangon rotaciantan kun rotacirapido $\omega = 0,125 c/\rho$ ĉirkaŭe la centra maso, kaj kuŝante inter radiusaj pozicioj $r_{min} = 1,016\rho$ kaj $r_{max} = 7,25\rho$. (b) Rapido (16) de punktoj de stango en antaŭa figuro. Ambaŭ ekstremoj havas rapidon $v \rightarrow c$, kaj la pli eta rapido okazas en $r = 3\rho/2$.

Figura 3: (a) Cada curva mostra pares $[r, \omega]$ para movimento circular com a velocidade tangencial indicada. O traço horizontal indica uma barra rodando com $\omega = 0,125 c/\rho$ em torno da massa central, e deitada entre as posições radiais $r_{min} = 1,016\rho$ e $r_{max} = 7,25\rho$. (b) Velocidade (16) dos pontos da barra na figura anterior. Ambas extremidades têm velocidade $v \rightarrow c$, e a menor velocidade ocorre em $r = 3\rho/2$.

saman ω_{limo} . Por la sola radiuso $r = 3\rho/2$, raio $r = 3\rho/2$, $\omega_{limo}(r)$ atingas maksimuman valoron $\omega_{limo}(r)$ atingas maksimuman valoron

$$\omega_{maks} := \frac{2}{\sqrt{27}} \frac{c}{\rho}. \quad (15)$$

Vidu punkton $M = [3/2, 2/\sqrt{27}]$ en figuro 2. Ĉar (10) kun $r = 3\rho/2$ faras $|\omega_{geod}^{cirk}| = (2/\sqrt{27})(c/\rho)$ same kiel (15), tial punkto M indikas *luman geodezon*. Indas komenti, ke en ordinaraj fizikaj sistemoj tiu relativeca limigo $|\omega| \leq \omega_{maks}$ ordinare ne gravas, ĉar la materio generanta graviton ordinare okupas tiun radiusan pozicion $3\rho/2$.

Newtono, stango povas rotacii kun iu ajn rotacirapido ω ĉirkaŭ unu el ĝiaj ekstremoj, kaj povas esti iom ajn longa. Tamen special relativeco limigas la longon al maksimuma valoro c/ω tial, ke la ekstera ekstremo ne havu rapidon pli granda ol c . Plua limigo estas ĉe Schwarzschild tial, ke la ena ekstremo ne havu rapidon c .

Fakte, la tangenta rapido de punkto r de stango kun rotacirapido ω estas

Veja o ponto $M = [3/2, 2/\sqrt{27}]$ na figura 2. Como (10) com $r = 3\rho/2$ faz $|\omega_{geod}^{cirk}| = (2/\sqrt{27})(c/\rho)$ como a (15), o ponto M indica *geodésica de luz*. Vale a pena comentar que em sistemas físicos usuais essa limitação relativista $|\omega| \leq \omega_{maks}$ geralmente não importa, porque a matéria geradora da gravitação usualmente ocupa essa posição radial $3\rho/2$.

Newtonianamente uma barra pode rodar com qualquer ω em torno de uma das extremidades, e pode ter qualquer comprimento. Porém a relatividade especial limita o comprimento ao valor máximo c/ω , para que a extremidade exterior não tenha velocidade maior que c . Uma limitação adicional existe em Schwarzschild, para que a extremidade interior não tenha velocidade c .

De fato, a velocidade tangencial de um ponto r da barra com velocidade angular ω é

$$v_{cirk}(r) = \frac{r\omega}{\sqrt{1 - \rho/r}}, \quad (16)$$

do la limigo $v < c$ (ekvivalente $ds^2 > 0$ en (1)) generas limigojn $r_{min}(\omega) < r < r_{max}(\omega)$. Figuro 3.a montras kurbojn kies paroj $[r, \omega]$ havas la indikatan tangentan rapidon v . Ĝi ankaŭ montras stangon radiuse kuŝantan inter radiusaj pozicioj r_{min} kaj r_{max} , kiun rotacias kun $\omega = 0,125 c/\rho$. Figuro 3.b montras rapidon (16) de punktoj de stango.

então a limitação $v < c$ (equivalentemente $ds^2 > 0$ na (1)) gera as limitações $r_{min}(\omega) < r < r_{max}(\omega)$. A figura 3.a mostra curvas cujos pares $[r, \omega]$ têm a velocidade tangencial v indicada. Ela mostra também uma barra estendida radialmente entre as posições radiais r_{min} e r_{max} , e rodando com velocidade angular $\omega = 0,125 c/\rho$. A figura 3.b mostra a velocidade (16) dos pontos da barra.

7 Komparo de propra-tempoj – cirkle

Ni komparas la tempan fluon de du normhorloĝoj malsimile moviĝantaj. La unua moviĝas cirkle kun radiuso r kaj rotacirapido $d\varphi/dt = \omega = \text{konst}$, supozata pozitiva. Laŭ (1), la propra intertempo post unu kompleta turno estas

$$\Delta\tau_{mov} = (2\pi/\omega)\sqrt{1 - \rho/r - \omega^2 r^2/c^2}. \quad (17)$$

La alia normhorloĝo, restanta en tiu radiusa pozicio r dum la sama koordinata intertempo $\Delta t = 2\pi/\omega$, montras propran intertempon

7 Comparação de tempos próprios – circular

Vamos comparar o fluir do tempo de dois relógios padrão em diferentes movimentos. O primeiro tem movimento circular com raio r e velocidade angular $d\varphi/dt = \omega = \text{konst}$, suposta positiva. Segundo a (1), o intertempo próprio após uma volta completa é

O outro relógio padrão, parado naquela posição radial r durante o mesmo intertempo de coordenada $\Delta t = 2\pi/\omega$, mostra um intertempo próprio

$$\Delta\tau_{rip} = (2\pi/\omega)\sqrt{1 - \rho/r}. \quad (18)$$

Esprimoj (17) kaj (18) simpliĝas se ni uzas $v = \omega r/\sqrt{1 - \rho/r}$, la rapidon (16) de cirkle moviĝanta horloĝo. Tiuokaze,

As expressões (17) e (18) se simplificam se usarmos $v = \omega r/\sqrt{1 - \rho/r}$, a velocidade (16) do relógio em movimento circular. Nesse caso,

$$\Delta\tau_{mov} = \frac{2\pi r}{v\gamma}, \quad \Delta\tau_{rip} = \frac{2\pi r}{v}, \quad (19)$$

estante $\gamma := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Ĉar $\gamma > 1$, tial $\Delta\tau_{mov} < \Delta\tau_{rip}$, tio estas, la tempo de la moviĝanta normhorloĝo fluis pli malrapide ol la tempo de la restanta normhorloĝo.

Tiu rezulto koincidas kun tio de specialrelativeco, ke $\Delta\tau$ de moviĝanta horloĝo estas plieta ol tio de restanta horloĝo, poste unu kompleta turno. Certe, la fakto ke

sendo $\gamma := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Como $\gamma > 1$, então $\Delta\tau_{mov} < \Delta\tau_{rip}$, isto é, o tempo do relógio em movimento fluiu mais lentamente do que o tempo do relógio parado.

Esse resultado coincide com o da relatividade especial, que o $\Delta\tau$ de um relógio em movimento é menor que o de um relógio parado, após uma volta completa. Certamente o fato de os

la du horloĝoj estas en gravita potencialo kun sama valoro estas baza por tiu koincido. Krome, ne gravas se la movado estas geodeza, aŭ ne.

El ekvacio (17) oni povas kalkuli Doppleran faktoron inter du korpoj, cirkle moviĝantaj en la sama ebena, kun sama konstanta rotacirapido kaj malsamaj radiusoj. Fakte, dividante (17) per ĝi mem kun malsamaj radiusoj, oni ricevas

$$D_{a \rightarrow b} = \sqrt{\frac{1 - \rho/r_a - \omega^2 r_a^2/c^2}{1 - \rho/r_b - \omega^2 r_b^2/c^2}}. \quad (20)$$

8 Kunaj cirklaĵoj movadoj

Konsideru du normhorloĝojn cirkle moviĝantajn kun sama rotacirapido $\omega := d\varphi/dt = \text{konst}$ en ebena $\theta = \pi/2$ de metriko (1), sed en malsamaj radiusoj r_1 kaj r_2 . Laŭ la Newtona kinematiko, la horloĝo en cirklo kun plieta radiuso havas plietan tangentan rapidon. Laŭ la special-relativeco, tiu fakto farus ke ĝia propratempo fluu *pli* rapide ol tiu de la alia. Sed ĝi trakuras regionojn kun plieta g_{00} ; laŭ la ĝeneral-relativeco, tiu alia fakto farus ke ĝia propratempo fluu *malpli* rapide ol tiu de la alia. Ni demandas: ĉu la du efikoj povas ekzakte ekvilibri?

La respondo estas *jes*. Por ĉiu valoro de ω , ni trovos ne-nombreblan kvanton da paroj de radiusoj (r_1, r_2) tiel ke la propraj intertempoj $\Delta\tau_1$ kaj $\Delta\tau_2$ de la horloĝoj estas samaj, post unu kompleta turno. La graveco de tiu rezulto estas, ke lumaj signaloj igitaj el unu horloĝo al la alia ne havas Doppleran efikon.

Fakte, ekvacio (1) kun $dr = 0$ faras $(d\tau_1)^2 = (1 - \rho/r_1)(dt)^2 - (r_1^2/c^2)(d\varphi)^2$ kaj $(d\tau_2)^2 = (1 - \rho/r_2)(dt)^2 - (r_2^2/c^2)(d\varphi)^2$. Uzante $d\tau_1 = d\tau_2$ kaj $\omega := d\varphi/dt$ okazas

dois relógios estarem em potencial gravitacional com mesmo valor é fundamental para essa coincidência. Além disso, não é importante se o movimento é geodético, ou não.

A partir da (17) pode-se calcular o fator Doppler entre dois corpos, movendo-se em círculos no mesmo plano, com mesma velocidade angular constante e com raios diferentes. De fato, dividindo a (17) por ela mesma com raios diferentes se recebe

8 Movimentos circulares conjugados

Considere dois relógios padrão em movimentos circulares com mesma velocidade angular $\omega := d\varphi/dt = \text{konst}$ no plano $\theta = \pi/2$ da métrica (1), porém em raios r_1 e r_2 diferentes. Segundo a cinemática Newtoniana o relógio no círculo com raio menor tem menor velocidade tangencial. Segundo a relatividade especial, esse fato faria com que seu tempo próprio fluísse *mais* rapidamente que o do outro. Porém ele percorre regiões com menor g_{00} ; segundo a relatividade geral, esse outro fato faria com que seu tempo próprio fluísse *menos* rapidamente que o do outro. Nós perguntamos: podem os dois efeitos exatamente compensar-se?

A resposta é *sim*. Para cada valor de ω , nós vamos encontrar uma quantidade não-numerável de pares de raios (r_1, r_2) tais que os intertempos próprios $\Delta\tau_1$ e $\Delta\tau_2$ dos dois relógios sejam iguais, após uma volta completa. A relevância desse resultado é que sinais luminosos emitidos de um relógio para o outro não têm efeito Doppler.

De fato, a equação (1) com $dr = 0$ produz $(d\tau_1)^2 = (1 - \rho/r_1)(dt)^2 - (r_1^2/c^2)(d\varphi)^2$ e igualmente $(d\tau_2)^2 = (1 - \rho/r_2)(dt)^2 - (r_2^2/c^2)(d\varphi)^2$. Usando $d\tau_1 = d\tau_2$ e $\omega := d\varphi/dt$ ocorre

$$r_1 r_2 (r_1 + r_2) = \frac{\rho c^2}{\omega^2}. \quad (21)$$

Atentu, ke oni ankaŭ povus ricevi (21) farante $D_{a \rightarrow b} = 1$ en (20). Ekvacio (21) estas simetria per ŝanĝo $r_1 \leftrightarrow r_2$. Solvata, ĝi prezentas radiuson r_2 kiel funkcio de radiuso r_1 laŭ

Atente que pode-se ainda receber a (21) fazendo $D_{a \rightarrow b} = 1$ na (20). A equação (21) é simétrica perante a troca $r_1 \leftrightarrow r_2$. Resolvida, ela apresenta o raio r_2 como função do raio r_1 segundo

$$r_2 = \frac{r_1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4c^2 \rho}{\omega^2 r_1^3}} - 1 \right). \quad (22)$$

Uzante (10) en (21) ni konstatas, ke se movado kun radiuso r_1 estas geodeza, do $r_2 = r_1$. Ni ankaŭ atentis en (21), ke se r_1 pliiĝas, do r_2 plietigias, kaj reciproke. Oni konkludas ke, se r_1 estas plieta ol la geodeza radiuso, do r_2 estas pligranda ol la geodeza radiuso. Figuro 4 remontras kurbojn L kaj G el figuro 2 kaj iom da paroj de radiusoj por speciala rotacirapido $\omega = 0,125 c/\rho$. Oni povas montri, ke rapido (16) de korpo en ekstera cirklo estas ĉiam pligranda ol de korpo en ena cirklo, same kiel la parolado de la unua paragrafo de ĉi tiu sekcio.

Usando a (10) na (21) nós constatamos que se o movimento com raio r_1 for geodético, então $r_2 = r_1$. Nós também vemos na (21) que se r_1 cresce, então r_2 diminui, e reciprocamente. Conclui-se que, se r_1 for menor que o raio geodético, então r_2 será maior que o raio geodético. A figura 4 novamente mostra as curvas L e G da figura 2 e alguns dos pares de raios para a particular velocidade angular $\omega = 0,125 c/\rho$. Pode-se mostrar que a velocidade (16) do corpo no círculo externo é sempre maior que a do corpo no círculo interno, como na discussão do primeiro parágrafo desta seção.

9 Komparo de propra-tempoj – radiuse

Normhorloĝo komence ripozanta en $r = a > \rho$ estas subite ĵetata radiuse, eksteren, en geodeza movado. Ĝi moviĝas ĝis la maksimuma radiusa pozicio $r = b > a$, kaj revenas al pozicio $r = a$. Alia normhorloĝo restas en radiuso $r = a$ dum la tuta tempo.

Ni demandas: en renkonto, kiu horloĝo prezentas pligrandan varion $\Delta\tau$ de propratempo? La fakto, ke la geodeza horloĝo moviĝas, dume la ne geodeza ĉiam restas, favoras ke $\Delta\tau_{geod}$ estu *plieta*. Sed la fakto, ke la geodeza horloĝo trakuras regionojn kun pligranda g_{00} favoras ke $\Delta\tau_{geod}$ estu *pligranda*. Do la demando ne posedas tujan evidentan respondon.

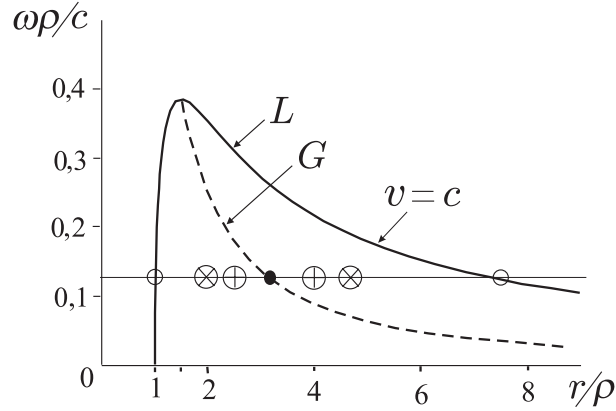
Ĉar la geodeze moviĝanta horloĝo mo-

9 Comparação de tempos próprios – radial

Um relógio padrão inicialmente em repouso em $r = a > \rho$ é subitamente jogado para fora radialmente, em movimento geodético. Ele se move até a máxima posição radial $r = b > a$, e retorna à posição $r = a$. Outro relógio padrão fica parado no raio $r = a$ durante o tempo todo.

Nós perguntamos: no reencontro, qual relógio apresenta a maior variação $\Delta\tau$ de tempo próprio? O fato que o relógio geodético está em movimento enquanto o não-geodético está sempre parado favorece $\Delta\tau_{geod}$ ser *menor*. Mas o fato que o relógio geodético percorre regiões com g_{00} maior favorece $\Delta\tau_{geod}$ ser *maior*. Então a pergunta não possui uma resposta imediata óbvia.

Como o relógio em movimento geodético está



Figuro 4: Kurboj L kaj G el figuro 2 kaj kvar paroj (\circ , \otimes , \oplus , \bullet) de korpoj en radiusoj (r_1, r_2) el ekvacio (22), kun rotacirapido $\omega = 0,125 c/\rho$; por ĉiu paro, la propratempoj de korpoj fluas same. Speciale, atentu liman paron (\circ) kun rapido c , kaj atentu paron $r_1 = r_2$ (\bullet) kun geodeza movado.

Figura 4: Curvas L e G da figura 2 e quatro pares (\circ , \otimes , \oplus , \bullet) de corpos nos raios (r_1, r_2) da equação (22), com velocidade angular $\omega = 0,125 c/\rho$; para cada par, os tempos próprios dos corpos fluem igualmente. Em particular, atente para o par limite (\circ) com velocidade c , e atente para o par $r_1 = r_2$ (\bullet) com movimento geodético.

<p>mente restas en $r = b$, tial $v_b = 0$, kaj do (8) faras $E = \sqrt{1 - \rho/b}$ por ĝia movado. Tio en (5) okazigas $(1 - \rho/b)(d\tau)^2 = (1 - \rho/r)^2(dt)^2$, ke uzata en metriko (1) faras (memoru, ke $ds^2 = c^2(d\tau)^2$)</p>	<p>momentaneamente parado en $r = b$, então $v_b = 0$, e portanto a (8) faz $E = \sqrt{1 - \rho/b}$ para o seu movimento. Isso na (5) ocasiona $(1 - \rho/b)(d\tau)^2 = (1 - \rho/r)^2(dt)^2$, que usado na métrica (1) faz (relembre que $ds^2 = c^2(d\tau)^2$)</p>
--	---

$$\frac{(dr)^2}{\rho/r - \rho/b} = (c d\tau_{geod})^2; \quad (23)$$

<p>integrante duapotencan radikon de (23) de $r = a$ ĝis $r = b$ aperigas $\Delta\tau_{geod}(\rho, a, b)$:</p>	<p>integrando a raiz quadrada da (23) de $r = a$ até $r = b$ revela $\Delta\tau_{geod}(\rho, a, b)$:</p>
---	---

$$c\Delta\tau_{geod} = \sqrt{b/\rho} \left(\sqrt{a(b-a)} + b \cos^{-1} \sqrt{a/b} \right). \quad (24)$$

<p>Dum tiu intertempo, la monro de la normhorloĝo restanta en $r = a$ antaŭeniras, laŭ sekcio 2,</p>	<p>Nesse intertempo, a marcação do relógio padrão parado em $r = a$ avança, segundo a seção 2,</p>
---	---

$$\Delta\tau_{rip} = \sqrt{1 - \rho/a} \Delta t, \quad (25)$$

<p>estante Δt la koordinata intertempo dum la forirado de la vojaĝanta horloĝo. Simile al (23), praviĝas</p>	<p>sendo Δt o intertempo de coordenada durante o afastamento do relógio viajante. Semelhantemente à (23), ocorre</p>
---	---

$$\frac{(dr)^2}{(1 - \rho/r)^2(\rho/r - \rho/b)} = \frac{(cdt)^2}{1 - \rho/b}, \quad (26)$$

kio interrilatas tempan kaj radiusan koordinatojn de moviĝanta horloĝo. Integrate la duapotencan radikon de (26) de $r = a$ ĝis $r = b$ oni malkovras la intertempon Δt . Uzante tiun Δt en (25) rezultigas la propran intertempon de la ripozanta horloĝo

$$c\Delta\tau_{rip} = \sqrt{1-\rho/a} \left(\sqrt{b/\rho-1} \left(\sqrt{a(b-a)} + (b+2\rho) \cos^{-1} \sqrt{a/b} \right) + 2\rho \tanh^{-1} \sqrt{\frac{b/a-1}{b/\rho-1}} \right). \quad (27)$$

Atentu, ke se $b = a > \rho$ do ne estas movado, kaj do $\Delta\tau_{rip} = 0$. Atentu ankaŭ, ke se la ejo de ĵeto estas tre proksima al la radiuso de Schwarzschild, t.e., se $a \rightarrow \rho$, do $\Delta\tau_{rip} \rightarrow 0$ kvankam $\Delta t \rightarrow \infty$.

Intertempoj (27) kaj (24) estas nelonge prezentitaj per Grøn kaj Braeck [9]. Nek ili nek ni sukcesis montri *algebre*, ke $\Delta\tau_{geod} > \Delta\tau_{rip}$ por iuj ajn valoroj de $\rho < a < b$. Tamen, numeraj kalkuloj kaj tridimensiaj grafikaĵoj indikas tiun rezulton. Tio montras, ke la efikoj akumulitaj per gravito en ĉi tiu movado estas pli fortaj ol la efikoj akumulitaj per rapido, kontraŭe al okazo de sekcio 7.

10 Dopplera faktoro en radiusaj movadoj

Luma fonto moviĝas radiuse en spacotempo (1), kaj eligas lumon el radiusa pozicio $a > \rho$. Tiu lumo estas perceptata per observanto restanta en radiusa pozicio $b > \rho$. Ambaŭ okazoj $a > b$ kaj $a < b$ estas pripensindaj. La angulaj valoroj θ kaj φ de pozicioj de eligo kaj percepto estas samaj. Ni scivolas la Doppleran faktoron de percepto.

Same kiel en sekcio 3 ni faras, ke fonto eligu du sinsekvajn lumajn signalojn, en koordinatmomentoj t_1 kaj $t_1 + d_a t$, estante fonto en radiusaj pozicioj a kaj $a + d_a r$, respektive; kaj $d_a t > 0$. Ĉar la fonto moviĝas aŭ eksteren aŭ enen, tial ambaŭ okazoj $d_a r > 0$ kaj $d_a r < 0$ estas konsiderindaj.

que relaciona as coordenadas temporal e radial do relógio em movimento. Integrando a raiz quadrada da (26) desde $r = a$ até $r = b$ descobre-se o intertempo Δt . Usando este Δt na (25) faz resultar o intertempo próprio do relógio parado

Atente que se $b = a > \rho$ então não há movimento, e portanto $\Delta\tau_{rip} = 0$. Atente também que se o ponto de lançamento for muito próximo do raio de Schwarzschild, i.e., se $a \rightarrow \rho$, então $\Delta\tau_{rip} \rightarrow 0$ embora $\Delta t \rightarrow \infty$.

Os intertempos (27) e (24) foram recentemente apresentados por Grøn e Braeck [9]. Nem eles nem nós conseguimos mostrar *algebricamente* que $\Delta\tau_{geod} > \Delta\tau_{rip}$ para quaisquer valores de $\rho < a < b$. Entretanto, cálculos numéricos e gráficos tridimensionais indicam esse resultado. Isso mostra que os efeitos acumulados por gravitação neste movimento são mais fortes que os efeitos acumulados por velocidade, ao contrário do caso da seção 7.

10 Fator Doppler em movimentos radiais

Uma fonte luminosa se move radialmente no espaçotempo (1), e emite luz da posição radial $a > \rho$. Essa luz é percebida por um observador parado na posição radial $b > \rho$. Ambos casos $a > b$ e $a < b$ devem ser considerados. Os valores angulares θ e φ das posições de emissão e recepção são iguais. Queremos saber o fator Doppler de recepção.

Como na seção 3, nós fazemos com que a fonte emita dois sinais luminosos consecutivos, nos momentos de coordenada t_1 e $t_1 + d_a t$, estando a fonte nas posições radiais a e $a + d_a r$, respectivamente; e $d_a t > 0$. Como a fonte se move ou para fora ou para dentro, ambos casos $d_a r > 0$ e $d_a r < 0$ devem ser considerados. Um

Observanto *restas* en radiusa pozicio b , kaj ricevas la signalojn en koordinatmomentoj t_2 kaj $t_2 + d_b t$, respektive. Por uzo en esprimo (3) de Dopplera faktoro, ni kalkulas la proprajn intertempojn $d\tau_a$ kaj $d\tau_b$, respondajn al dt_a kaj dt_b , respektive.

Uzante (1) kaj (9) kun $d\varphi = 0$ kaj $d\theta = 0$ oni ricevas, por moviĝanta fonto,

$$d\tau_a = \sqrt{1 - v_a^2/c^2} \sqrt{1 - \rho/a} da_t. \quad (28)$$

Simile, por la restanta observanto en radiusa pozicio b , la intertempo $d\tau_b$ estas

$$d\tau_b = \sqrt{1 - \rho/b} db_t. \quad (29)$$

Ni bezonas rilatigi db_t al da_t . La ekvacio de movado de *luma signalo* en radiusa movado estas havebla farante $ds^2 = 0$ en linia elemento (1) kaj konsiderante $d\theta = 0$ kaj $d\varphi = 0$. Rezultas

$$c dt = \epsilon_\gamma \frac{dr}{1 - \rho/r}, \quad (30)$$

estante $\epsilon_\gamma = +1$ se signalo moviĝas en *pozitiva* direkto de r , kaj $\epsilon_\gamma = -1$ kontraŭe. Ni integras (30) por la unua signalo,

$$c \int_{t_1}^{t_2} dt = \epsilon_\gamma \int_a^b \frac{dr}{1 - \rho/r}, \quad (31)$$

kaj ankaŭ por la dua signalo,

$$c \int_{t_1+d_a t}^{t_2+d_b t} dt = \epsilon_\gamma \int_{a+d_a r}^b \frac{dr}{1 - \rho/r}. \quad (32)$$

Subtrahante (31) de (32) fariĝas

$$c(d_b t - d_a t) = \epsilon_\gamma \left(\int_{a+d_a r}^b - \int_a^b \right) \frac{dr}{1 - \rho/r} \equiv -\epsilon_\gamma \int_a^{a+d_a r} \frac{dr}{1 - \rho/r}, \quad (33)$$

tio estas,

$$d_b t = d_a t - \frac{\epsilon_\gamma}{c} \frac{d_a r}{1 - \rho/a}. \quad (34)$$

observador está *parado* na posição radial b , e recebe os sinais nos momentos de coordenada t_2 e $t_2 + d_b t$, respectivamente. Para uso na expressão (3) do fator Doppler, nós vamos calcular os intervalos próprios $d\tau_a$ e $d\tau_b$, correspondentes a dt_a e dt_b , respectivamente.

Usando a (1) e a (9) com $d\varphi = 0$ e $d\theta = 0$ se recebe, para a fonte em movimento,

Igualmente, para o observador parado na posição radial b , o intervalo $d\tau_b$ é

Precisamos relacionar db_t a da_t . A equação do movimento de um *signal luminoso* em movimento radial é obtida fazendo $ds^2 = 0$ no elemento de linha (1) e considerando $d\theta = 0$ e $d\varphi = 0$. Resulta

sendo $\epsilon_\gamma = +1$ se o sinal se move na direção *crescente* de r , e $\epsilon_\gamma = -1$ no caso contrário. Integramos a (30) para o primeiro sinal,

e também para o segundo sinal,

Subtraindo a (31) da (32) ocorre

isto é,

Ni povas skribi $d_a r$ kiel funkcio de $d_a t$ uzante v difnata en (9) kun $d\varphi/dt = 0$: | Podemos escrever $d_a r$ como função de $d_a t$ usando a v definida na (9) com $d\varphi/dt = 0$:

$$v_a = \epsilon_a \frac{1}{1 - \rho/a} \frac{d_a r}{d_a t}, \quad (35)$$

estante $\epsilon_a = +1$ se la fonto moviĝas en la pozitiva direkto de r en momento de eligo, kaj $\epsilon_a = -1$ kontraŭe, por ke $v_a \geq 0$. Portante $d_a r$ de (35) al (34), ĉi tiu ekvacio fariĝas | sendo $\epsilon_a = +1$ se a fonte se movimenta no sentido crescente de r no momento da emissão, e $\epsilon_a = -1$ no caso contrário, para que $v_a \geq 0$. Levando $d_a r$ da (35) à (34), esta última equação se torna

$$\frac{d_a t}{d_b t} = \frac{1}{(1 + \epsilon v_a/c)}, \quad \epsilon := -\epsilon_a \epsilon_\gamma. \quad (36)$$

Kuna analizo de ϵ_a kaj ϵ_γ montras, ke $\epsilon = +1$ se la fonto foriĝas de radiusa pozicio $r = b$ en momento de eligo de signaloj, kaj $\epsilon = -1$ kontraŭe. Kunigante (28), (29), kaj (36), ni fine ricevas | Uma análise conjunta de ϵ_a e ϵ_γ mostra que $\epsilon = +1$ se a fonte está se afastando da posição radial $r = b$ no momento da emissão dos sinais, e $\epsilon = -1$ no caso contrário. Juntando (28), (29), e (36), nós finalmente recebemos

$$D = \sqrt{\frac{1 - \rho/a}{1 - \rho/b} \frac{1 - \epsilon v_a/c}{\sqrt{1 - v_a^2/c^2}}}. \quad (37)$$

Ni vidas en (37), ke se gravito ne estas, t.e., se $\rho = 0$, okazas | Vemos na (37) que na ausência de gravitação, isto é, se $\rho = 0$, ocorre

$$D_{sr} = \sqrt{\frac{1 - \epsilon V/c}{1 + \epsilon V/c}}, \quad V := |d_a r/dt|; \quad (38)$$

ĉi tiu estas la rezulto proponita por special-relativeco.

Ekvacio (37) antaŭdiras, ke kuna ago de $v_a \neq 0$ kaj gravito povas malaperigi Doppleran efikon; fakte, se $a > b$ do povas okazi $D = 1$ se $\epsilon = +1$, tio estas, se la fonto foriras de pozicio $r = b$ en momento de eligo. Kontraŭe, se $a < b$ do povas okazi $D = 1$ se $\epsilon = -1$, tio estas, se la fonto proksimiĝas al pozicio $r = b$ en momento de eligo.

Ni nun kalkulas la Doppleran faktoron se la fonto estas tuje antaŭ b , aŭ tuje post. Por tio ni faras $a = b$ en (37) kaj ricevas

este é o resultado proposto pela relatividade especial.

A (37) prediz que uma ação conjunta de $v_a \neq 0$ e gravitação pode fazer desaparecer efeito Doppler; com efeito, se $a > b$ então pode ocorrer $D = 1$ se $\epsilon = +1$, isto é, se a fonte estiver se afastando da posição $r = b$ no momento da emissão. Opostamente, se $a < b$ então pode ocorrer $D = 1$ se $\epsilon = -1$, isto é, se a fonte estiver se aproximando da posição $r = b$ no momento da emissão.

Vamos agora calcular o fator Doppler se a fonte estiver imediatamente antes de b , ou imediatamente depois. Para isso fazemos $a = b$ na (37) e recebemos

$$D = \sqrt{\frac{1 - \epsilon v_a/c}{1 + \epsilon v_a/c}}. \quad (39)$$

Ruĝiĝo ($D < 1$) okazas se la fonto foriras de ricevanto ($\epsilon = +1$) kaj violiĝo ($D > 1$) okazas se ĝi alproksimiĝas ($\epsilon = -1$). Ekvacio (39) similas al (38) de special-relativeco se v_a estas la rapido V de fonto laŭ la special-relativeco.

Se la fonto moviĝas geodeze kaj radiuse, kaj se $a > b$, do (37) estas skribebbla multe pli kompakte. Tiuokaze, nomu v_b la rapido de fonto kiam ĝi pasas preter b , kaj nomu v_a la rapido kiam ĝi pasas preter a . Ĉar la konstanteco de E en (8) implicas

$$\frac{\sqrt{1 - \rho/a}}{\sqrt{1 - v_a^2/c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \rho/b}}{\sqrt{1 - v_b^2/c^2}}, \quad (40)$$

tial (37) simpliĝas al

$$D = \gamma_b(1 - \epsilon v_a/c), \quad \gamma_b := 1/\sqrt{1 - v_b^2/c^2}. \quad (41)$$

Ekvacio (41) validas ankaŭ se $a < b$, kondiĉe ke $\sqrt{(1 - \rho/a)/(1 - \rho/b)} \geq \sqrt{1 - v_a^2/c^2}$; ĉi tiu estas necesa kondiĉo por ke fonto pasu tra la radiusa pozicio $r = b$.

Ni ĝeneraligas (37) por okazo de ankaŭ observanto radiuse moviĝanta. Kalkulante kiel antaŭe ni ricevas

$$D = \sqrt{\frac{1 - \rho/a}{1 - \rho/b}} \sqrt{\frac{1 - \epsilon v_a/c}{1 + \epsilon v_a/c}} \sqrt{\frac{1 - \epsilon' v_b/c}{1 + \epsilon' v_b/c}}, \quad (42)$$

estante $\epsilon' = +1$ se observanto foriras de radiusa pozicio $r = a$ en momento de recepto de signaloj, aŭ $\epsilon' = -1$ kontraŭe, kaj estante v_b la rapido (9) de observanto en momento de recepto.

Ocorre desvio para vermelho ($D < 1$) se a fonte estiver se afastando do receptor ($\epsilon = +1$) e desvio para violeta se ela estiver se aproximando ($\epsilon = -1$). A (39) é idêntica à (38) da relatividade especial se v_a for a velocidade V da fonte segundo a relatividade especial.

Se a fonte tiver movimento geodético radial, e se $a > b$, então a (37) pode ser escrita de forma muito mais compacta. Neste caso, chame v_b a velocidade da fonte quando ela passa por b , e chame v_a a velocidade dela quando passa por a . Como a constância de E na (8) implica

então a (37) simplifica para

A equação (41) também vale se $a < b$, contanto que $\sqrt{(1 - \rho/a)/(1 - \rho/b)} \geq \sqrt{1 - v_a^2/c^2}$; esta é a condição necessária para que a fonte passe pela posição radial $r = b$.

Vamos generalizar a (37) para o caso de também o observador estar em movimento radial. Calculando como anteriormente nós recebemos

sendo $\epsilon' = +1$ se o receptor estiver se afastando da posição radial $r = a$ no momento da recepção dos sinais, ou $\epsilon' = -1$ no caso contrário, e sendo v_b a velocidade (9) do receptor no momento da recepção.

11 Apliko al Tero

Ni aplikas nun iom da niaj teoriaj rezultoj al movado de satelitoj orbitante Teron.

11 Aplicação à Terra

Vamos agora aplicar alguns dos nossos resultados teóricos ao movimento de satélites que

Unue, ni kalkulas radiuson de orbito de geodeze Tero-staranta satelito. Ĉar Tera rotacirapido estas $\omega_T = (2\pi/86.400) \text{ rad/s}$, kaj Schwarzschilda radiuso de Tero estas $\rho_T = 2Gm_T/c^2 = 9 \times 10^{-3} \text{ m}$, tial el (10) oni ricevas $r_{geod} = 42 \times 10^6 \text{ m}$. Uzante tiun rezulton kaj (20) oni povas kalkuli la Doppleran efikon observatan en Tero ($r_T = 6 \times 10^6 \text{ m}$) el geodeze Tero-staranta satelito: $D_{s \rightarrow T} \approx 1 + 6 \times 10^{-10}$ (violeta).

Nun ni kalkulas radiuson de orbito de ne-geodeza satelito kun la sama rotacirapido de Tero kaj sen Dopplera efiko kiam vidata de Tero. Uzante la superajn valorojn en (22) oni ricevas $r_2 = 151 \times 10^6 \text{ m}$. Atentu, ke esperinde tio estas pli granda ol radiuso de geodeze Tero-staranta orbito; ankaŭ rimarku, ke tio estas pli eta ol la distanco Tero-Luno.

Du freŝdataj artikoloj enhavas kelkajn el niaj rezultoj. Fakte, iom da cirklaĵ movadoj en nia sekcio 7 estas ankaŭ priskribitaj en [10], kaj la radiusaj movadoj en nia sekcio 9 estas studitaj en [9]. Same kiel ni, tiuj artikoloj komparas $\Delta\tau$, sed ĉi tie ni plu analizas Dopplerajn efikojn.

En estonta artikolo [7] ni studos pluraĵ difinojn de intertempo en arbitraj spacotempoj en ĝeneral-relativeco, kaj generaligas iom da rezultoj de ĉi tiu artikolo. Estas interesa ankaŭ detale studi malkune la kontribuojn de special-relativeco kaj de ĝeneral-relativeco al rezultoj de ĉi tiu artikolo.

orbitem a Terra. Primeiro nós calculamos o raio da órbita de um satélite geodético geostacionário. Como a velocidade angular da Terra é $\omega_T = (2\pi/86.400) \text{ rad/s}$, e o raio de Schwarzschild da Terra é $\rho_T = 2Gm_T/c^2 = 9 \times 10^{-3} \text{ m}$, da (10) se recebe $r_{geod} = 42 \times 10^6 \text{ m}$. Usando esse resultado e a (20) pode-se calcular o efeito Doppler observado na Terra a partir do satélite geodético geostacionário: $D_{s \rightarrow T} \approx 1 + 6 \times 10^{-10}$ (desvio para o violeta).

Agora nós calculamos o raio da órbita de um satélite não-geodético com mesma velocidade angular que a da Terra, e sem efeito Doppler quando visto da Terra. Usando os valores acima na (22) recebe-se $r_2 = 151 \times 10^6 \text{ m}$. Note que, como esperado, isso é maior que o raio da órbita geodética geostacionária; note também que isso é menor que a distância Terra-Lua.

Dois artigos recentes contêm alguns de nossos resultados. Com efeito, os movimentos circulares na nossa seção 7 estão também descritos em [10], e os movimentos radiais da nossa seção 9 são estudados em [9]. Do mesmo modo que nós, aqueles artigos comparam $\Delta\tau$, mas aqui nós analisamos também efeitos Doppler.

Em um futuro artigo [7] nós vamos estudar várias definições de intertempo em espaçotempos arbitrários na relatividade geral, e vamos generalizar alguns dos resultados deste artigo. É interessante também estudar detalhadamente as contribuições em separado da relatividade especial e da relatividade geral aos resultados deste artigo.

Citaĵoj

- [1] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *La relativeca tempo – I*, arXiv/physics/0603053; CBPF-NF-006/06.
- [2] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – I*, arXiv/physics/0701092; CBPF-NF-002/07.
- [3] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – II*, arXiv:0704.1130; CBPF-NF-011/07.

Referências

- [4] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko inter du akcelataj korpoj – I*, arXiv:0801.2290; CBPF-NF-001/08.
- [5] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – III*, arXiv:0808.0126; CBPF-NF-018/08.
- [6] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Dopplera efiko de luma ebena vidata per akcelata observanto*, arXiv:0810.2776; CBPF-NF-022/08.
- [7] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *La relativeca tempo – II*, baldaŭ aperonta en arXiv(physics).
- [8] J.L. Anderson, *Principles of relativity physics*, Academic Press (1967).
- [9] Ø. Grøn, S. Braeck, *A cosmic solution to the twin paradox*, arXiv:0909.5364.
- [10] M.A. Abramowicz, S. Bajtlík, *Adding to the paradox: the accelerated twin is older*, arXiv:0905.2428.