NOTAS DE FÍSICA

VOLUME XVI

Nº 22

# SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS BORNOLOGIQUES DES ESPACES D'APPLICATIONS HOLOMORPHES

par

Leopoldo Nachbin et Jorge Alberto Barroso

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71 - Botafogo - ZC-82

Rio de Janeiro, Brasil

1971

Notas de Física - Volume XVI - Nº 22

# SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS BORNOLOGIQUES DES ESPACES D'APPLICATIONS HOLOMORPHES *

**Leopoldo Nachbin**
*Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas e*
*Universidade Federal do Rio de Janeiro*
*Rio de Janeiro, Brasil*

**Jorge Alberto Barroso**
*COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro*
*Caixa Postal 1191, ZC-00*
*Rio de Janeiro, Brasil*

(Received 1st July, 1971)

## 1. INTRODUCTION

Les espaces et les applications holomorphes en dimension infinie ont été l'objet de recherches récentes par plusieurs auteurs, en particulier au sujet de leur propriétés topologiques; voir quelques références bibliographiques à la fin de cet exposé.

Nous discuterons ici quelques aspects de la notion d'application holomorphe (voir §3), ainsi que certaines propriétés topologiques des espaces de telles applications, du point de vue bornologique (voir §4).

Dans un autre texte en préparation, on fera une étude plus détaillée et approfondie des questions ici ébauchées.

---

* À paraître au Comptes Rendus du Colloque d'Analyse Fonctionnelle, tenu à l'Institut de Mathématique de l'Université de Liège, Septembre 1970, publication du Centre Belge de Recherche Mathématique.

## 2. NOTATION ET TERMINOLOGIE

On indiquera par $E$ et $F$ deux espaces localement convexes complexes séparés. Si $m \in \mathbb{N}$, on représentera par $\mathcal{L}_s({}^mE;F)$ l'espace vectoriel des applications $m$-linéaires symétriques continues de $E^m$, la $m$-puissance cartésienne de $E$, dans $F$; et par $\mathcal{P}({}^mE;F)$ l'espace vectoriel des polynômes $m$-homogènes continus de $E$ dans $F$. On a l'application linéaire bijective canonique

$$A \in \mathcal{L}_s({}^mE;F) \longmapsto \hat{A} \in \mathcal{P}({}^mE;F)$$

donnée par $\hat{A}(x) = Ax^m$ pour tout $x \in E$, où l'on écrit $Ax^m$ pour représenter $A(x,\dots,x)$ avec $x$ répété $m$ fois pourvu que $m \geq 1$ et $Ax^0 = A$ si $m = 0$.

$U$ sera une partie ouverte non-vide de $E$.

## 3. APPLICATIONS HOLOMORPHES

<u>DÉFINITION 1</u>. $f : U \longrightarrow F$ est <u>holomorphe dans</u> $U$ si, pour chaque $\xi \in U$, il y a une suite de coefficients $A_m \in \mathcal{L}_s({}^mE;F)$, $m \in \mathbb{N}$, tels que pour toute semi-norme continue $\beta$ sur $F$ on puisse trouver une partie ouverte $V$ de $U$ contenant $\xi$ pour laquelle

$$(1) \qquad \lim_{M \to +\infty} \beta[f(x) - \sum_{m=0}^{M} A_m(x-\xi)^m] = 0$$

uniformément pour $x \in V$. Pour chaque $f$ et $\xi$ donnés, la suite $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est unique. On écrira alors

$$d^m f(\xi) = m!\, A_m \in \mathcal{L}_s({}^m E;F),$$
$$\hat{d}^m f(\xi) = m!\, \widehat{A_m} \in \mathcal{P}({}^m E;F).$$

Soit $\mathcal{H}(U;F)$ l'espace vectoriel des applications holomorphes de $U$ dans $F$.

<u>PROPOSITION 1</u>. D'après la notation de la Définition 1, pour toute semi-norme continue $\beta$ sur $F$ et toute partie compacte $\xi$ - equilibrée $K$ de $U$, il existe une partie ouverte $V$ de $U$ contenant $K$ pour laquelle la condition (1) est valable uniformément pour $x \in V$.

<u>Preuve</u>. Il s'agit d'une adaptation immédiate de la preuve donnée dans [5] pour la Proposition 1, §7, où $E$ et $F$ sont des espaces de Banach. <u>CQFD</u>

<u>DÉFINITION 2</u>. $f : U \longrightarrow F$ est <u>équitablement holomorphe dans</u> $U$ si, pour chaque $\xi \in U$, il y a une suite de coefficients $A_m \in \mathcal{L}_s({}^m E;F)$, $m \in \mathbb{N}$, ainsi qu'une partie ouverte $V$ de $U$ contenant $\xi$ pour lesquelles la condition (1) de la Définition 1 est vraie uniformément pour $x \in V$, quelle que soit la semi-norme continue $\beta$ sur $F$. C'est le cas de la Définition 1 où l'on peut choisir $V$ indépendement de $\beta$, pour chaque $\xi$ fixé; donc $f$ est holomorphe dans $U$.

<u>PROPOSITION 2</u>. Tout polynôme continu de $E$ dans $F$ est équitablement holomorphe. Toute $f \in \mathcal{H}(U;F)$ est

équitablement holomorphe si $E$ est de dimension finie, ou bien si $F$ est normable.

Preuve. La première partie de l'énoncé, ainsi que le cas où $F$ est normable dans la deuxième partie, sont évidents. Le cas où $E$ est de dimension finie dans la deuxième partie résulte aussitôt de la Proposition 1. CQFD

Il y a des applications holomorphes qui ne sont pas équitablement holomorphes; dans l'Exemple 1, $E$ et $F$ peuvent être des espaces de Fréchet-Montel, tandis que, dans l'Exemple 2, $E$ est un espace de Banach et $F$ peut être un espace de Fréchet-Montel.

EXEMPLE 1. Soient $g \in \mathcal{H}(C;C)$ et $I$ un ensemble. Posons $E = F = C^I$ et définissons $f \in \mathcal{H}(E;F)$ par

$$x = (x_i)_{i\in I} \in E \longmapsto f(x) = (g(x_i))_{i\in I} \in F.$$

Si $g$ n'est pas un polynôme et si $I$ est infini, alors $f$ n'est pas équitablement holomorphe dans $E$. En fait, supposons que, pour un $\xi = (\xi_i)_{i\in I} \in E$, il existe une partie finie $J$ de $I$ et un nombre réel $\varepsilon > 0$ tels que, en indiquant par $V$ l'ensemble des $x = (x_i)_{i\in I} \in E$ pour lesquels $|x_i - \xi_i| < \varepsilon$ pour tout $i \in J$, alors la condition (1) de la Définition 1 soit valable uniformément pour $x \in V$, quelle que soit la semi-norme continue $\beta$ sur $F$. Fixons $k \in I$, $k \notin J$. Définissons $\beta$ par

$\beta(y) = |y_k|$ pour tout $y = (y_i)_{i\in I} \in F$. On obtient alors que

$$\lim_{M\to+\infty} |g(x_k) - \sum_{m=0}^{M} a_m(x_k - \xi_k)^m| = 0$$

uniformément pour $x_k \in \mathbb{C}$, où

$$a_m = \frac{1}{m!} g^{(m)}(\xi_k), \quad m \in \mathbb{N},$$

ce qui entraînerait que $g$ est un polynôme, d'après le théorème de Liouville. <u>CQFD</u>

<u>EXEMPLE 2</u>. $E$ étant un espace de Banach de dimension infinie, admettons que $g \in \mathcal{H}(E;\mathbb{C})$ ne soit pas bornée sur au moins une partie bornée de $E$. {Pour un exemple d'une telle situation voir Remarque 1, §7 dans [5]. On conjecture qu'une telle $g$ existe toujours sur un tel $E$. C'est le cas si dans $E'$ il existe une suite tendant vers $0$ d'après la topologie faible $\sigma(E',E)$, mais ne tendant pas vers $0$ au sens de la norme; voir le Corollaire de la Proposition 5 dans [3]. C'est donc le cas si de toute suite bornée dans $E'$ on peut extraire une sous-suite convergente d'après $\sigma(E',E)$; en particulier si $E$ est séparable ou reflexive. C'est le critère de Dineen-Hirschowitz; voir [3], Proposition 3 et son Corollaire, ainsi que [4], Théorème 3.} Définissons $g_n \in \mathcal{H}(E;\mathbb{C})$ par $g_n(x) = g(nx)$, où $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$. Considérons $f \in \mathcal{H}(E;F)$ donnée par

$$x \in E \longmapsto f(x) = (g_0(x),\dots,g_n(x),\dots) \in F,$$

où $F = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors $f$ n'est pas équitablement holomorphe dans $E$. En fait, prenons $\xi = 0 \in E$ et supposons qu'on puisse trouver un nombre réel $r > 0$ tel que, en indiquant par $V$ la boule ouverte dans $E$ de centre $0$ et rayon $r$, alors la condition (1) de la Définition 1 soit vraie uniformément pour $x \in V$, quelle que soit la semi-norme continue $\beta$ sur $F$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, définissons $\beta$ par $\beta(y) = |y_k|$ si $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$. On obtient alors que

$$\lim_{M \to +\infty} \left|g_k(x) - \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{m!} d^m g_k(0)(x^m)\right| = 0$$

uniformément pour $x \in V$, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que

$$\lim_{M \to +\infty} \left|g(x) - \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{m!} d^m g(0)(x^m)\right| = 0$$

uniformément pour $x \in kV$, pour chaque $k \in \mathbb{N}$. Or, tout polynôme continu étant borné sur $kV$, on en déduit que $g$ est bornée sur $kV$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$, donc que $g$ est bornée sur toute partie bornée de $E$, contrairement à hypothèse. CQFD

DÉFINITION 3. $f : U \longrightarrow F$ est localement bornée dans $U$ si, pour chaque $\xi \in U$, il y a une partie ouverte $V$ de $U$ contenant $\xi$ pour laquelle $f(V)$ est bornée dans $F$.

PROPOSITION 3. Si $F$ est normable, toute $f \in \mathcal{H}(U;F)$ est localement bornée. Si $E$ est normable, toute $f \in \mathcal{H}(U;F)$ équitablement holomorphe est localement bornée. Toute $f \in \mathcal{H}(U;F)$ localement bornée est équitablement holomorphe.

Preuve. La première partie de l'énoncé est évidente. Prouvons la deuxième partie. D'après la notation de la Définition 2, pour chaque $\xi \in U$, choisissons $V$ bornée. Tout polynôme continu est borné sur n'importe quelle partie bornée; donc l'ensemble

$$\{A_m(x - \xi)^m ; \ x \in V\}$$

est borné dans $F$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Il en résulte de la condition (1) de la Définition 1 que

$$\sup \{\beta[f(x)] ; \ x \in V\} < +\infty$$

pour toute semi-norme continue $\beta$ sur $F$. Or, $V$ étant indépendente de $\beta$, on voit que $f(V)$ est bornée dans $F$. Finalement, la preuve de la troisième partie est une adaptation facile de celle donnée dans [5] pour la Proposition 1, §7, où $E$ et $F$ sont des espaces de Banach. CQFD

EXEMPLE 3. Si $E$ n'est pas normable et si $F = E$, alors l'application indentité $I : E \longrightarrow E$ est équitablement holomorphe, mais elle n'est pas localement bornée.

REMARQUE 1. L'application $f \in \mathcal{H}(E;F)$ considérée dans chacun des Exemples 1 et 2 ci-dessus, n'est pas localement bornée non plus.

## 4. PARTIES BORNÉES

DÉFINITION 4. On indiquera par $\mathcal{T}_0$ la topologie localement convexe définie sur $\mathcal{H}(U;F)$ par la famille des semi-normes

$$f \in \mathcal{H}(U;F) \longmapsto \sup\{\beta[f(x)]\ ;\ x \in K\},$$

où $\beta$ est une semi-norme continue arbitraire sur $F$ et $K$ est une partie compacte quelconque de $U$.

PROPOSITION 4. Pour qu'une partie $\mathfrak{X}$ de $\mathcal{H}(U;F)$ soit bornée pour $\mathcal{T}_0$ il est nécessaire et suffisant que, pour toute semi-norme continue $\beta$ sur $F$, pour toute partie compacte $K$ de $U$ et pour toute partie bornée $B$ de $E$, il existe des nombres réels $C$, $c \geq 0$ tels que, pour $m \in \mathbb{N}$ arbitraire, on ait

$$\sup\{\beta[\frac{1}{m!} d^m f(t)(x^m)]\ ;\ f \in \mathfrak{X},\ t \in K,\ x \in B\} \leq C \cdot c^m.$$

Preuve. La suffisance étant évidente, supposons que $\mathfrak{X}$ soit bornée pour $\mathcal{T}_0$ et prouvons la nécessité. Pour cela, on ira envisager deux cas.

Admettons d'abord que $B$ soit aussi compacte. Choisissons le nombre réel $r > 0$ de telle façon que

$L \subset U$, où $L$ est l'ensemble compact des éléments de la forme $t + \lambda x$, pour $t \in K$, $x \in B$, $\lambda \in C$, $|\lambda| \leq r$. D'après l'inégalité de Cauchy (voir [5], §6, Propositions 2 et 3, dans le cas où $E$ et $F$ sont des espaces de Banach), on aura

$$\sup \{\beta[\frac{1}{m!} d^m f(t)(x^m)] \; ; \; f \in \mathfrak{X}, \; t \in K, \; x \in B\} \leq$$

$$\frac{1}{r^m} \cdot \sup \{\beta[f(y)] \; ; \; f \in \mathfrak{X}, \; y \in L\} = C \cdot c^m$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$, où

$$C = \sup \{\beta[f(y)] \; ; \; f \in \mathfrak{X}, \; y \in L\}, \quad c = 1/r.$$

Admettons en suite que $B$ soit tout court bornée. Raisonnons par réduction à l'absurde et supposons que, si l'on prend $C = k$ et $c = k^2$ pour chaque $k = 1,2,\ldots$, il y a des $m_k \in \mathbb{N}$, $f_k \in \mathfrak{X}$, $t_k \in K$ et $x_k \in L$ tels que

$$\beta[\frac{1}{m_k!} d^{m_k} f_k(t_k)(x_k)^{m_k}] > k \cdot (k^2)^{m_k}.$$

En posant $y_k = x_k/k$, on obtient

$$\beta[\frac{1}{m_k!} d^{m_k} f_k(t_k)(y_k)^{m_k}] > k \cdot k^{m_k}.$$

pour tout $k = 1,2,\ldots$ . L'ensemble $J$ formé par l'origine de $E$ et par tous $y_k$ $(k = 1,2,\ldots)$ est compact, parce que $y_k \longrightarrow 0$ pour $k \longrightarrow +\infty$. On aura donc

$$\sup \{\beta[\frac{1}{m_k!} d^{m_k} f(t)(y^{m_k})] \; ; \; f \in \mathfrak{X}, \; t \in K, \; y \in J\} > k \cdot k^{m_k}$$

pour tout $k = 1,2,\ldots,$ ce qui contradit le premier cas envisagé. <u>CQFD</u>

<u>REMARQUE 2</u>. La proposition di-dessus se trouve démontrée dans [5] (voir la Proposition 1, condition (2), §12; comparer aussi avec la §8) en supposant que $E$ et $F$ soient des espaces de Banach, par une méthode qui ne marche pas si $E$ est localement convexe.

<u>DÉFINITION 5</u>. Une semi-norme $p$ sur $\mathcal{H}(U;F)$ est dite portée par une partie compacte $K$ de $U$ s'il y a une semi-norme continue $\beta$ sur $F$ et si, pour toute partie ouverte $V$ de $U$ contenant $K$, il y a un nombre réel $c(V) > 0$ de façon que

$$p(f) \leq c(V)\cdot\sup\{\beta[f(x)]\ ;\ x \in V\}$$

pour toute $f \in \mathcal{H}(U;F)$ et toute $V$, où il est à remarquer que le supremum en question peut être infini. On indiquera par $\mathcal{T}_\omega$ la topologie localement convexe sur $\mathcal{H}(U;F)$ définie par toutes les semi-normes sur cet espace vectoriel chacune desquelles est portée par quelque partie compacte de $U$. C'est clair que $\mathcal{T}_0 \leq \mathcal{T}_\omega$.

<u>PROPOSITION 5</u>. Si $E$ est métrisable, pour qu'une partie $\mathfrak{X}$ de $\mathcal{H}(U;F)$ soit bornée pour $\mathcal{T}_\omega$ il est nécessaire et suffisant qu'elle soit bornée pour $\mathcal{T}_0$.

<u>Preuve</u>. La nécessité étant évidente, prouvons la suffisance. Soit $\mathfrak{X}$ bornée pour $\mathcal{T}_0$. Alors

$$\sup \{\beta[f(x)] \; ; \; f \in \mathfrak{X}, \; x \in K\} < +\infty$$

quelles que soient la semi-norme continue $\beta$ sur $F$ et la partie compacte $K$ de $U$. Or, $E$ étant métrisable, il en résulte que, pour toute partie compacte $K$ de $U$, il existe une partie ouverte $V$ de $U$ contenant $K$ telle que

$$\sup \{\beta[f(x)] \; ; \; f \in \mathfrak{X}, \; x \in V\} < +\infty.$$

Ceci entraîne que $\mathfrak{X}$ est bornée pour $\mathcal{T}_\omega$. <u>CQFD</u>

<u>REMARQUE 3</u>. Cette proposition correspond à la Proposition 1, §14, de [5]. Voir aussi: Proposition 3.2, Chapitre III, [1]; Proposition 3, [6].

La proposition précédente peut être en défaut si $E$ n'est pas métrisable. En voici un exemple.

<u>EXEMPLE 4</u>. Soit $E$ muni d'une topologie faible. Son dual topologique $E'$ est contenu dans $\mathcal{H}(E;C)$. Sur $E'$, on a la topologie forte de la convergence uniforme sur les parties bornées de $E$. Supposons que $\mathfrak{X}$ soit une partie fortement bornée de $E'$, mais pas bornée pour la topologie localement convexe la plus fine sur $E'$. (On a un exemple d'une telle situation si $E$ est l'espace vectoriel d'un espace normé de dimension infinie muni de

sa topologie faible et si $\mathfrak{X}$ désigne la boule unité fermée du dual d'un tel espace normé; il y a des formes linéaires sur $E'$ non bornées sur $\mathfrak{X}$.} C'est clair alors que $\mathfrak{X}$ est bornée pour $\mathcal{J}_0$, parce que toute partie compacte de $E$ est bornée. D'autre part, $\mathfrak{X}$ n'est pas bornée pour $\mathcal{J}_\omega$. En fait, soit $\gamma$ une semi-norme sur $E'$ non bornée sur $\mathfrak{X}$. Soit $p$ la semi-norme sur $\mathcal{H}(E;C)$ définie par

$$p(f) = \gamma[df(0)]$$

pour toute $f \in \mathcal{H}(E;C)$. Alors $p$ n'est pas bornée sur $\mathfrak{X}$. D'autre part, nous affirmons que $p$ est portée par $\{0\} \subset E$, donc continue pour $\mathcal{J}_\omega$. En fait, soit $\alpha$ une semi-norme continue quelconque sur $E$. Le sous-espace vectoriel fermé $\alpha^{-1}(0)$ a codimension finie dans $E$. Soient $E_\alpha$ l'espace vectoriel $E$ semi-normé par $\alpha$ et $(E_\alpha)'$ son dual topologique, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de $E'$ des formes linéaires sur $E$ s'annulant sur $\alpha^{-1}(0)$. Chaque $\varphi \in (E_\alpha)'$ a sa norme $\alpha(\varphi)$. Soit $c(\alpha) > 0$ un nombre réel fixé tel que $\gamma(\varphi) \leq c(\alpha)\cdot\alpha(\varphi)$ pour toute $\varphi \in (E_\alpha)'$; rappelons que $(E_\alpha)'$ est de dimension finie et normé par $\alpha$. Nous soutenons que

$$(2) \quad p(f) \leq c(\alpha) \sup \{|f(x)| \,;\, x \in E,\ \alpha(x) \leq 1\}$$

pour toute $f \in \mathcal{H}(E;C)$ et toute $\alpha$. Pour prouver ceci, on ira envisager deux cas. Considérons d'abord le cas où $f$ est constante modulo $\alpha^{-1}(0)$, c'est-à-dire que $f(x+t) = f(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $t \in \alpha^{-1}(0)$. En indiquant par $E/\alpha$ l'espace normé de dimension finie quotient de $E_\alpha$ par $\alpha^{-1}(0)$, alors $f = g \circ \pi$, où $\pi : E \longrightarrow E/\alpha$ est l'application canonique et $g \in \mathcal{H}(E/\alpha;C)$. On aura $df(0) = dg(0) \circ \pi \in (E_\alpha)'$, donc $\gamma[f(0)] \leq c(\alpha)\cdot \alpha[df(0)] = c(\alpha)\cdot\alpha[dg(0)]$. D'après l'inégalité de Cauchy,

$$\alpha[dg(0)] \leq \sup\{|g(y)| ;\ y \in E/\alpha,\ \alpha(y) \leq 1\}$$
$$= \sup\{|f(x)| ;\ x \in E,\ \alpha(x) \leq 1\},$$

ce qui prouve (2) dans ce cas. Considérons en suite le cas où $f$ n'est pas constante modulo $\alpha^{-1}(0)$, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in E$ et $t_0 \in \alpha^{-1}(0)$ tels que $f(x_0+t_0) \neq f(x_0)$; d'après l'unicité du prolongement holomorphe, nous pouvons supposer en plus que $\alpha(x_0) \leq 1$. Alors la fonction $t \in \alpha^{-1}(0) \longmapsto f(x_0+t) \in C$ est holomorphe, mais elle n'est pas constante; d'après le théorème de Liouville, cette fonction n'est pas bornée sur $\alpha^{-1}(0)$. Or $\alpha(x_0+t) = \alpha(x_0) \leq 1$ si $t \in \alpha^{-1}(0)$. Il en résulte que

$$\sup\{|f(x)| ;\ x \in E,\ \alpha(x) \leq 1\} = +\infty,$$

ce qui prouve (2) dans ce cas. À ce moment-là, (2) montre que $p$ est portée par $\{0\}$, donc continue pour $\mathcal{J}_\omega$.

Malgré le fait que $\mathfrak{X}$ soit bornée pour $\mathfrak{T}_0$, on voit qu'elle ne l'est pas pour $\mathfrak{T}_\omega$. CQFD

Il y a aussi des situations intéressantes qui échappent à l'hypothèse de la Proposition 5, mais où la conclusion de cette proposition reste valable de même; voir l'Exemple 5 ci-dessous. Ceci suggère la possibilité de résultats plus généraux que cet exemple, éventuelment contenant aussi la Proposition 5.

EXEMPLE 5. On prendra $E = C^I$ et $F = C$, où $I$ est un ensemble. Remarquons que $C^I$ est métrisable si et seulement si $I$ est fini ou infini dénombrable; c'est alors que l'hypothèse de la Proposition 5 s'applique. Nous allons voir que, en tout cas, la conclusion de cette proposition reste valable pour $I$ quelconque et $U = E$, c'est-à-dire qu'une partie $\mathfrak{X}$ de $\mathcal{H}(E;C)$ est bornée pour $\mathfrak{T}_\omega$ si et seulement si elle est bornée pour $\mathfrak{T}_0$. Quelle que soit la partie $J$ de $I$, on a la projection canonique $C^I \longrightarrow C^J$, d'où il en résulte l'isomorphisme canonique $\mathcal{H}(C^J;C) \longrightarrow \mathcal{H}(C^I;C)$. Indiquons par $\mathcal{H}(C^{I,J};C)$ l'image de $\mathcal{H}(C^J;C)$ dans $\mathcal{H}(C^I;C)$ par cet isomorphisme. Nous allons utiliser la remarque classique suivante

$$\mathcal{H}(C^I;C) = \bigcup \mathcal{H}(C^{I,J};C),$$

la réunion étant prise par rapport aux parties finies $J$

de I. Remarquons que $\mathfrak{T}_\omega$ et $\mathfrak{T}_0$ induisent la même topologie sur chaque $\mathcal{H}(C^{I,J};C)$ pour $J \subset I$ finie. C'est clair que, si $\mathfrak{X}$ est bornée pour $\mathfrak{T}_\omega$, alors $\mathfrak{X}$ est bornée pour $\mathfrak{T}_0$. En vue d'établir la réciproque, nous commencerons par montrer que, si $\mathfrak{X}$ n'est pas contenue dans aucun $\mathcal{H}(C^{I,J};C)$ où $J \subset I$ est finie, alors $\mathfrak{X}$ n'est pas bornée pour $\mathfrak{T}_0$. Pour cela, nous utiliserons la remarque initiale suivante, qui résulte de l'unicité du prolongement holomorphe et du théorème de Liouville: pour des entiers $p > n \geq 1$, si $g \in \mathcal{H}(C^p;C)$ mais $g$ n'appartient pas à l'image de $\mathcal{H}(C^n;C)$ dans $\mathcal{H}(C^p;C)$ d'après l'isomorphisme $\mathcal{H}(C^n;C) \longrightarrow \mathcal{H}(C^p;C)$ associé à la projection $(z_1,\ldots,z_n,z_{n+1},\ldots,z_p) \in C^p \mapsto (z_1,\ldots,z_n) \in C^n$, alors $g$ n'est pas bornée sur toute partie de $C^p$ définie par des conditions $|z_1| \leq c_1$ ,..., $|z_n| \leq c_n$, $z_{n+1} \in C$, ..., $z_p \in C$, où les nombres réels $c_1,\ldots,c_n > 0$ sont fixés. Cette remarque initiale étant admise, raisonnons par récurrence. Définissons $J_0 = \emptyset$. Supposons qu'une partie finie $J_n$ de I a été définie pour un $n \in \mathbb{N}$ et qu'on a fixé un nombre réel $c(i) > 0$ pour tout $i \in J_n$. Or, $\mathfrak{X}$ n'étant pas contenue dans $\mathcal{H}(C^{I,J_n};C)$, il existe $f_n \in \mathfrak{X}$ telle que $f_n \notin \mathcal{H}(C^{I,J_n};C)$. D'autre part, il existe une partie $J_{n+1}$ de I telle que $f_n \in \mathcal{H}(C^{I,J_{n+1}};C)$; c'est clair que $J_n \neq J_{n+1}$ et que nous pouvons admettre que $J_n \subset J_{n+1}$. D'après la remarque initiale admise, nous pouvons fixer un nombre réel $c(i) > 0$ pour tout $i \in J_{n+1}$, $i \notin J_n$, de façon que le supremum de $|f_n(x)|$ pour tout $x = (x_i)_{i\in I} \in C^I$ tel que $|x_i| \leq c_i$ quel que soit $i \in J_{n+1}$ soit plus grand que $n$. De cette façon, on définit $c(i)$ pour tout $i \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$; définissons le nombre réel $c(i) \geq 0$ d'une façon arbitraire, par exemple en mettant $c(i) = 0$, pour les autres $i \in I$. Soit $K$ la partie compacte de $C^I$ formée des points $(x_i)_{i\in I}$ tels que $|x_i| \leq c_i$ pour tout $i \in I$. Alors

$$\sup \{|f_n(x)| \,;\, x \in K\} > n, \quad n \in \mathbb{N},$$

et par suite $\mathfrak{X}$ n'est pas bornée pour $\mathfrak{J}_0$. Il en résulte que, si $\mathfrak{X}$ est bornée pour $\mathfrak{J}_0$, alors $\mathfrak{X} \subset \mathcal{H}(C^{I,J};C)$ pour une partie finie $J$ de $I$; donc $\mathfrak{X}$ est aussi bornée pour $\mathfrak{J}_\omega$. <u>CQFD</u>

<u>REMARQUE 4</u>. Sur $\mathcal{H}(C^I;C)$, c'est connu qu'on a $\mathfrak{J}_0 = \mathfrak{J}_\omega$ si $I$ est fini ou infini dénombrable et que $\mathfrak{J}_0 < \mathfrak{J}_\omega$ si $I$ est infini non dénombrable; voir [1], Théorème 2.2, Chapitre II et [2], Proposition 2.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] J. A. BARROSO, Topologias nos espaços de aplicações holomorfas entre espaços localmente convexos, Tese, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Guanabara, Brasil, 1970; Anais da Academia Brasileira de Ciências, v. 43, 1971.

[2] J. A. BARROSO, Topologies sur les espaces d'applications holomorphes entre des espaces localement convexes, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 271, p. 264-265, 1970.

[3] S. DINEEN, Unbounded holomorphic functions on a Banach space, Journal of the London Mathematical Society, à paraître.

[4] A. HIRSCHOWITZ, Sur le non-plongement des variétés analytiques banachiques réelles, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 269, p. 844-846, 1969.

[5] L. NACHBIN, Topology on spaces of holomorphic mappings, Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete, Bd. 47, Springer-Verlag, 1969.

[6] L. NACHBIN, Sur les espaces vectoriels topologiques d'applications continues, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 271, p. 596-598, 1970.