NOTAS DE FÍSICA

VOLUME XVIII

Nº 20

SUR QUELQUES ASPECTS RÉCENTS DE L'HOLOMORPHIE EN DIMENSION INFINIE

par

Leopoldo Nachbin

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71 - Botafogo - ZC-82

RIO DE JANEIRO - BRAZIL

1972

Notas de Física - Volume XVIII - Nº 20

SUR QUELQUES ASPECTS RÉCENTS DE L'HOLOMORPHIE EN DIMENSION INFINIE

par

Leopoldo Nachbin

(Reçu le 11 Septembre, 1972)

Indiquons par E et F deux espaces de Banach complexes, par U une partie ouverte non-vide de E et par $\mathcal{H}(U;F)$ l'espace vectoriel des applications holomorphes définies dans U à valeurs dans F.

On dit qu'une partie X de U est $\mathcal{H}(U;\mathbb{C})$ - bornante si toute $f \in \mathcal{H}(U;\mathbb{C})$ est bornée sur X.

Supposons que, de toute suite bornée de l'espace dual E' on puisse extraire une sous-suite laquelle converge pour la topologie faible $\sigma(E',E)$, en particulier que E soit séparable ou reflexive. Alors toute partie fermée et $\mathcal{H}(E;\mathbb{C})$ - bornante de E doit être compacte.

Ce résultat a été démontré indépendamment par Dineen [9] et Hirschowitz [19]; il avait été remarqué pour les espaces d'Hilbert par Alexander [1] et Dineen [10].

Il y a un exemple construit par Dineen [11] d'une partie fermée et $\mathcal{H}(E;\mathbb{C})$ - bornante laquelle n'est pas compacte, lorsque E est l'espace de Banach ℓ^∞ des suites bornées.

Une partie X de U est dite U - <u>bornée</u> si X est bornée dans E et si la distance de X à la frontière de U est strictement positive.

Une application holomorphe $f:U \to F$ est dite du type borné si f est bornée sur toute partie U - bornée de U. Indiquons par $\mathcal{H}_b(U;F)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(U;F)$ de telles applications du type borné.

C'est clair que $\mathcal{H}_b(U;F) = \mathcal{H}(U;F)$ si E est de dimension finie, ou bien si $F = 0$.

On conjecture que, réciproquement, $\mathcal{H}_b(U;F) \neq \mathcal{H}(U;F)$ si E est de dimension infinie et $F \neq 0$. Comme Dineen l'a remarqué [9], c'est en fait le cas s'il existe une suite dans E' laquelle est convergente pour la topologie faible $\sigma(E',E)$, mais n'est pas convergente pour la topologie de la norme, et si en plus $F \neq 0$ (en particulier, si E est de dimension infinie, séparable ou reflexive, et si en plus $F \neq 0$).

Du reste, on conjecture que, pour tout espace E de dimension infinie, il existe dans E' une suite convergente pour $\sigma(E',E)$, mais pas convergente pour la norme.

En dimension infinie, c'est pour l'espace $\mathcal{H}_b(U;F)$ qu'on connait le théorème du type Cartan-Thullen le plus simple, lequel a été remarqué indépendamment par Dineen [12] et Matos [22, 23].

En ce qui concerne, en dimension infinie et pour l'espace $\mathcal{H}(U;F)$, la question plus difficule d'un théorème du type Cartan-Thullen et d'autres aspects, nous citerons Coeuré [7], Dineen [13, 15], Hirschowitz [20], Noverraz [29] et Schottenloher [30] et les références y données.

Envisageons maintenant des propriétés topologiques des espaces d'applications holomorphes.

En ce qui concerne d'abord l'espace $\mathcal{H}_b(U;F)$, il s'agit d'un espace de Fréchet par rapport à la topologie $\mathcal{T}_b$ de la convergence uniforme des applications sur les parties U-bornées, c'est-à-dire aussi de la convergence uniforme des applications et toutes ses différentielles sur les parties U-bornées.

Sur l'espace $\mathcal{H}(U;F)$ on peut considerer naïvement la topologie $\mathcal{T}_o$ de la convergence uniforme des applications sur les parties compactes de U, ainsi que la topologie $\mathcal{T}_\infty$ de la convergence uniforme des applications et toutes ses différentielles sur les parties compactes de U.

D'une façon plus raffinée [25, 26], on peut aussi considerer la topologie $\mathcal{T}_\omega$ définie par les semi-normes sur $\mathcal{H}(U;F)$ chacune desquelles est portée par quelque partie compacte de U. Rappelons qu'une semi-norme p sur $\mathcal{H}(U;F)$ est <u>portée</u> par une partie compacte K de U si, pour toute partie ouverte V de U contenant K, il y a un nombre réel c(V) > 0 tel que

$$p(f) \leq c(V)\cdot\sup_{x\in V}\|f(x)\| ,$$

inégalité valable pour toute $f \in \mathcal{H}(U;F)$.

On a

$$\mathcal{T}_o = \mathcal{T}_\infty = \mathcal{T}_\omega$$

si E est de dimension finie, ou bien si F = 0; et, d'autre part, on a

$$\mathcal{T}_o < \mathcal{T}_\infty < \mathcal{T}_\omega$$

si E est de dimension infinie et $F \neq 0$.

On voit tout de suite que $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_\infty$ et $\mathcal{T}_\omega$ on les mêmes parties bornées de $\mathcal{H}(U;F)$. On peut donc considerer la topologie localement convexe bornologique associée à n'importe quelle de ces trois topologies.

Le résultat important suivant est dû à Dineen[15]. Pour une classe assez vaste d'espaces de Banach séparables, à savoir les espaces de Banach E à base, et si U est ξ-equilibré par rapport à l'un des ses points (c'est-à-dire que $\xi \in U$ et en plus $x \in U$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq 1$ entraînent que $(1-\lambda)\xi + \lambda x \in U$), alors $\mathcal{T}_\omega$ est bornologique.

On conjecture que le résultat précedent est valable pour des espaces séparables arbitraires E et pour des ouverts non-vide arbitraires U.

D'autre part, Dineen [15] a montré par un exemple que $\mathcal{T}_\omega$ n'est pas bornologique sur $\mathcal{H}(E;\mathbb{C})$, où E est l'espace de Banach ℓ^∞ des suites bornées.

Un peu plus tard, Coeuré [8] a trouvé une autre situation où $\mathcal{T}_\omega$ est bornologique.

Des résultats sur la topologie bornologique associée à $\mathcal{T}_\omega$ ont été indiqués par Dineen [10], Hirschowitz [21], et Aron [2, 3].

Pour n'importe quelle partie compacte K de E, on a l'espace vectoriel $\mathcal{H}(K;F)$ des germes d'applications holomorphes au voisinages ouverts non-vides de K à valeurs dans F. Pour toute partie ouverte non-vide U de E contenant K, on a l'application linéaire canonique

$$\mathcal{H}(U;F) \longrightarrow \mathcal{H}(K;F) .$$

La topologie $\mathcal{T}_\omega$ sur $\mathcal{H}(K;F)$ est obtenue par n'importe quelle des limites inductives suivantes

$$\mathcal{H}(K;F) = \varinjlim_{U \supset K} \mathcal{H}_B(U;F)$$

$$= \varinjlim_{U \supset K} \mathcal{H}_b(U;F)$$

$$= \varinjlim_{U \supset K} \mathcal{H}(U;F)$$

où $\mathcal{H}_B(U;F)$ est l'espace de Banach des applications holomorphes bornées dans U à valeurs dans F, $\mathcal{H}_b(U;F)$ est muni de sa topologie de Fréchet $\mathcal{T}_b$ déjà indiquée et $\mathcal{H}(U;F)$ est muni de sa topologie $\mathcal{T}_\omega$ déjà définie.

On peut se poser la question de savoir si l'on a l'egalité suivante concernant la limite projective

$$\mathcal{H}(U;F) = \varprojlim_{K \subset U} \mathcal{H}(K;F)$$

où l'on suppose que $\mathcal{H}(U;F)$ et $\mathcal{H}(K;F)$ sont munis des topologies $\mathcal{T}_\omega$ correspondantes déjà citées. C'est le case si E est de dimension finie, ou bien si F = 0.

On conjecture que c'est toujours vrai.

Pour donner une réponse partielle, dû à Chae [5, 6], à la question posée, disons qu'une partie compacte K d'une partie ouverte non-vide U de E est U-Runge si l'image canonique de $\mathcal{H}(U;F)$ dans $\mathcal{H}(K;F)$ est dense dans $\mathcal{H}(K;F)$ pour $\mathcal{T}_\omega$.

Alors, si toute partie compacte de U est contenue dans une partie compacte U-Runge de U, c'est vrai qu'on a l'égalité précédante concernant la limite projective.

Du reste, on conjecture que c'est vrai que toute partie compacte de toute partie ouverte non-vide U est toujours contenue dans une partie compacte U-Runge de U. On sait le démontrer dans certains cas, en dimension finie ou infinie; mais il semble qu'on ne le sait pas prouver en général même si E est de dimension finie.

Passons à nous occuper des opérateurs de convolution.

Soit $\mathcal{P}_N(^mE;\mathbb{C})$ l'espace de Banach des polynômes m-homogènes complexes nucléaires sur E, muni de sa norme nucléaire.

Une fonction $f \in \mathcal{H}(E;\mathbb{C})$ est dite <u>nucléairement entière du type borné</u> si

$$\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_N(^mE;\mathbb{C})$$

pour m = 0, 1, 2, ..., où le premier membre indique la différentielle de f d'ordre m en tant que polynôme m-homogène continu, et si en plus

$$\left(\left\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(0) \right\|_N \right)^{1/m} \longrightarrow 0$$

pour $m \to +\infty$, où l'indice N désigne la norme nucléaire. Indiquons par $\mathcal{H}_{Nb}(E;\mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(E;\mathbb{C})$ de telles fonctions nucléairement entières du type borné. C'est un espace de Fréchet par rapport à la topologie $\mathcal{J}_{Nb}$ définie par la famille des semi-normes suivantes, où $r \geq 0$,

$$f \to \sum_{m=0}^{\infty} r^m \left\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(0) \right\|_N .$$

Un opérateur de <u>convolution</u> $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{H}_{Nb}(E;\mathbb{C})$ est une application linéaire continue de $\mathcal{H}_{Nb}(E;\mathbb{C})$ dans lui même commutant avec les translations par les éléments de E.

Une exponentielle-polynôme nucléaire c'est une fonction de la forme

$$p\, e^{\varphi} ,$$

où p est un polynôme complexe nucléaire sur E et $\varphi \in E'$.

Le théorème d'approximation et d'existence suivant, du type Malgrange, a été prouvé par Gupta [17, 18]. Si $\mathcal{O}$ est un opérateur de convolution sur $\mathcal{H}_{Nb}(E;\mathbb{C})$, alors le sous-espace vectoriel où $\mathcal{O}$ s'annule est l'adhérence de son sous-espace vectoriel formé par les sommes finies des exponentielles-polynômes nucléaires sur lesquelles $\mathcal{O}$ s'annule. En plus, si $\mathcal{O} \neq 0$,

$$\mathcal{O}[\mathcal{H}_{Nb}(E;\mathbb{C})] = \mathcal{H}_{Nb}(E;\mathbb{C}) .$$

On connait une extension de ce résultat au delà du cas du type borné [27].

D'autres études dans cette direction son dû à Boland [4], Dwyer [16] et Matos [24].

Dans ce aperçu, nous nous avons limité au cas des espaces de Banach. Il faut dire qu'il y a des aspects tout à fait nouveaux quand on se place dans le cadre des espaces localement convexes; citons, par exemple Dineen[14] et Noverraz [29], où l'on trouvera d'autres sources bibliographiques récentes. Voir aussi [28].

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Alexander, Analytic Functions on Banach Spaces, Thesis, University of California, Berkeley, 1968.

2. R. M. Aron, Sur la Topologie Bornologique Pour l'Espace d'Applications Holomorphes, Comptes Rendus, t. 272, 1971, pp. 872-873.

3. R. M. Aron, The Bornological Topology on the Space of Holomorphic Mappings on a Banach Space, Math. Annalen, à paraître.

4. P. J. Boland, Some Spaces of Entire and Nuclearly Entire Functions on a Banach Space, à paraître.

5. S. B. Chae, Sur les Espaces Localement convexes de Germes Holomorphes, Comptes Rendus, t. 271, 1970, pp. 990-991.

6. S. B. Chae, Holomorphic Germs on Banach Spaces, Ann. Inst. Fourier, t 21, 1971, pp. 107-144.

7. G. Coeuré, Fonctions Plurisousharmoniques sur les Espaces Vectoriels Topologiques et Applications à l'Étude des Fonctions Analytiques, Ann. Inst. Fourier, t. 20, 1970, pp. 361-432.

8. G. Coeuré, Fonctionnelles Analytiques sur Certains Espaces de Banach, Ann. Inst. Fourier, t. 21, 1971, pp. 15-21.

9. S. Dineen, Unbounded Holomorphic Functions on a Banach Space, J.London Math. Soc., vol. 43, 1972, pp. 461-465.

10. S. Dineen, Holomorphy types on a Banach Space, Studia Math., t. 39, 1971, pp. 241-288.

11. S. Dineen, Bouding Subsets of a Banach Space, Math. Annalen, Bd. 192, 1971, pp. 61-70.

12. S. Dineen, The Cartan-Thullen Theorem for Banach Spaces, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, t. 24, 1970, pp. 667-674.

13. S. Dineen, Topologie de Nachbin et Prolongement Analytique en Dimension Infinie, Comptes Rendus, t. 271, 1970, pp. 643-644.

14. S. Dineen, Holomorphic Functions on Locally Convex Topological Vector Spaces, Ann. Inst. Fourier, à Paraître.

15. S. Dineen, Holomorphic Functions on (C_o, X_b) - Modules, Math. Annalen, à paraître.

16. T. A. W. Dwyer, Partial Differential Equations in Fisher-Fock Spaces for the Hilbert-Schmidt Holomorphy Type, Bull. Amer. Math. Soc., v. 77, 1971, pp. 725-730.

17. C. P. Gupta, Malgrange Theorem for Nuclearly Entire Functions of Bounded Type on a Banach Space, Notas de Matemática, No. 37, 1968.

18. C. P. Gupta, On the Malgrange Theorem for Nuclearly Entire Functions of Bounded Type on a Banach Space, Indag. Math., vol. 32, 1970, pp. 356-358.

19. A. Hirschowitz, Sur le Non-Plongement des Variétés Analytiques Banachiques Réelles, Comptes Rendus, t. 269, 1969, pp. 844-846.

20. A. Hirschowitz, Prolongement Analytique en Dimension Infinie, Ann. Inst. Fourier, à paraître.

21. A. Hirschowitz, Bornologie des Espaces de Fonctions Analytiques en Dimension Infinie, Séminaire Pierre Lelong, Lecture Notes in Mathematics, Bd. 205, 1970, pp. 21-33.

22. M. C. Matos, Sur les Ouverts de τ-Holomorphie dans les Espaces de Banach Séparables, Comptes Rendus, t. 271, 1970, pp. 1165-1166.

23. M. C. Matos, Domains of τ-Holomorphy in a Separable Banach Space, Math. Annalen, à paraître.

24. M. C. Matos, Sur le Théorème d'Approximation et d'Existence de Malgrange-Gupta, Comptes Rendus, t. 271, 1970, pp. 1258-1259.

25. L. Nachbin, On the Topology of the Space of All Holomorphic Functions on a Given Open Subset, Indag. Math., vol. 29, 1967, pp. 366-368.

26. L. Nachbin, Topology on Spaces of Holomorphic Mappings, Ergebnisse der Math., Bd. 47, 1969.

27. L. Nachbin, Convolution operators in Spaces of Nuclearly Entire Functions on a Banach Space, Functional Analysis and Related Fields (Edited by F. E. Browder), Springer-Verlag, 1970.

28. L. Nachbin, Recent Developments in Infinite Dimensional Holomorphy, Bull., Amer. Math. Soc., à paraître.

29. P. Noverraz, Pseudo-Convexité et Domaines d'Holomorphie en Dimension Infinie, Notas de Matemática, North-Holland, à paraître.

30. M. Schottenloher, Analytische Fortsetzung in Banachräumen, Dissertation, Universität München, 1971.