Notas de Física - Volume XVI - Nº 20

APPLICATIONS HOLOMORPHES ET DOMAINES D'HOLOMORPHIE *

Mario C. Matos
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rio de Janeiro, Brazil

et

University of Rochester
Rochester, New York, U.S.A.

(Received March 12, 1971)

PREMIÈRE PARTIE: Sur les Applications Holomorphes Définies dans des Espaces Vectoriels Topologiques de Baire.

La caractérisation due à Zorn(1) des applications holomorphes entre des espaces de Banach est établie pour les applications d'un ouvert non-vide d'un espace vectoriel topologique de Baire (resp. métrisable de Baire) à valeurs dans un espace de Banach (resp. localement convexe). A partir de là d'autres résultats sont obtenus, entre eux une généralisation d'un théoreme classique de Hartogs(2).

Une application d'un espace topologique dans un autre espace topologique est dite B-continue si elle est continue en tout point sauf ceux d'une partie maigre.

Soit f une application d'un ouvert non-vide U d'un espace vectoriel topologique E dans un espace de Banach F.

Lemme - Si f est G-holomorphe et B-continue, alors pour tout $x \in U$ et tout $n \in N$, l'application $h \in E \to \delta^n f(x; h) \in F$ est B-continue.

* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 271, 1970, pages 599, 727-728, 1165-1166 et 1258-1259.

Il en résulte le théorème suivant:

THÉORÈME 1 (Zorn) - Si E est un espace de Baire, f est holomorphe si et seulement si elle est G-holomorphe et B-continue.

Ce théorème est utilisé dans la preuve du résultat suivant. Voir la thèse de Noverraz [3] quand E est métrisable complet.

THÉOREME 2 (Zorn) - Si E est un espace de Baire et f est G-holomorphe, l'ensemble des points de U où f est continue est à la fois ouvert et fermé dans U.

Soit f une application d'un ouvert non-vide U de l'espace $E_1 \times E_2$, où E_1 et E_2 sont des espaces vectoriels topologiques, dans F.

THÉORÈME 3 (Hartogs) - Si E_1 et E_2 sont des espaces de Baire, $E_1 \times E_2$ est un espace de Baire, E_1 est métrisable, alors f est holomorphe si et seulement si elle est séparément holomorphe.

Voir les travaux de Zorn [1] et la thèse de Alexander [4] pour le cas où E_1 et E_2 sont des espaces de Banach et la thèse de Noverraz[3] pour le cas où E_1 et E_2 sont métrisables complets.

Les théorèmes ci-dessus restent valables avec les modifications suivantes: E, E_1, et E_2 doivent être métrisables de Baire; F peut être localement convexe. Dans ce cas, l'holomorphie signifie la G-holomorphie et la continuité.

DEUXIÈME PARTIE: Sur l'enveloppe d'holomorphie des domaines de Riemann sur un produit dénombrable de droites.

Pour les domaines de Riemann sur $\underline{C}^{N}$, on caractérise les domaines d'holomorphie et on prouve l'existence de l'enveloppe d'holomorphie.

Soit E un espace localement convexe séparé tel que l'enveloppe convexe formée de tout compact est compacte. Considérons un domaine de Riemann $(\underline{U},\phi)$ étalé sur E par l'homéomorphisme local $\phi: \underline{U} \to E$. Sur l'algèbre $\mathcal{H}(\underline{U})$ des fonctions complexes holomorphes sur $\underline{U}$, on considère la topologie définie par les se mi-normes d'algèbre p portées par des compacts de $\underline{U}$ [5]. Le spectre S(U), l'ensemble des homomorphismes continus de $\mathcal{H}(\underline{U})$ sur C, a la topologie engendrée par les ensembles N ci-dessous. Soient: (a) U un ouvert convexe disqué de E contenant 0; (b) $\underline{K} \subset \underline{U}$ compact tel que $\underline{K} + U \subset \underline{U}$ et $\underline{K} + L$ est compact pour tout compact $L \subset U$ [6]; (c) $h \in S(\underline{U})$ tel que $|h(f)| \leqslant \sup \{|f(\underline{u})|;\ \underline{u} \in \underline{K}\}$ pour toute $f \in \mathcal{H}(\underline{U})$. Alors N est l'ensemble des $h_u \in S(\underline{U})$, où $u \in U$, tels que

$$h_u(f) = \sum_{n=0}^{\infty} h\left[\frac{1}{n!}\ \hat{d}^n f(.)\ (u)\right]$$

pour toute $f \in \mathcal{H}(\underline{U})$. On a l'homéomorphisme local π: $h \in S(\underline{U}) \to a_h \in E$, où $h(T \circ \phi) = T(a_h)$ pour toute $T \in E'$. Supposons désormais que $\mathcal{H}(\underline{U})$ sépare les points de $\underline{U}$. Si $i(\underline{u}) \in S(\underline{U})$ est l'homomorphisme ponctuel associé à $\underline{u} \in \underline{U}$, alors $i: \underline{U} \to S(\underline{U})$ est un bi-holomorphisme de $\underline{U}$ sur un ouvert connexe $\underline{U}_s$ de $S(\underline{U})$. Soit $(E(\underline{U}), \pi)$ le domaine de Riemann sur E où $E(\underline{U})$ est la composante connexe de $S(\underline{U})$ contenant $\underline{U}_s$. Si $f \in \mathcal{H}(\underline{U})$, on définit son extension $\bar{f} \in \mathcal{H}(E(U))$ par $\bar{f}(h) = h(f)$ pour toute $h \in E(\underline{U})$. Alors $(E(\underline{U}), \underline{U})$ est un couple de prolongement [7].

<u>THÉORÈME 1</u> - On a: (I) $\mathcal{H}(E(\underline{U}))$ sépare les points de $E(\underline{U})$; (2) $(E(\underline{U}), \underline{U})$ est un couple normal de prolongement. En plus, $(E(\underline{U}), \underline{U})$ est maximum par rapport aux propriétés ci-dessus.

Prenons dorénavant $E = \underline{C}^N$. $(\underline{U}, \phi)$ est un domaine d'holomorphie s'il existe $f \in \mathcal{H}(\underline{U})$ sans prolongement $f' \in \mathcal{H}(\underline{U}')$ pour tout domaine de Riemann $(\underline{U}', \phi')$ prolongeant $(\underline{U}, \phi)$ proprement. $(\underline{U}, \phi)$ est pseudoconvexe si, pour tout U et $\underline{K}$ satisfaisant aux conditions (a) et (b) ci-dessus, on a $\hat{\underline{K}}_U + U \subset \underline{U}$, où $\hat{\underline{K}}_U$ est L'ensemble des $\underline{u} \in \underline{U}$ tels que

$$|f(\underline{u})| \leqslant \sup \{|f(\underline{t})| ; \underline{t} \in \underline{K}\}$$

pour toute $f \in \mathcal{H}(\underline{U})$. $(\underline{U}, \phi)$ est localement pseudo-convexe si $(\underline{U}_V, \phi)$ est pseudo-convexe, où $\underline{U}_V = \phi^{-1}[\phi(\underline{U}) \cap V]$, pour toute variété affine V de dimension 2 de $\underline{C}^N$. $(\underline{U}, \phi)$ est d'ordre n dans $\underline{u} \in \underline{U}$ si $n \in \underline{N}$ est le plus petit entier tel qu'il y a un polydisque ouvert $B \subset \pi_n(\underline{C}^N)$ de centre 0 pour lequel $\underline{u} + \nu \in \underline{U}$ pour tout $\nu \in \pi_n^{-1}(B)$, où $\pi_n : \underline{C}^N \to \underline{C}^N$ est la projection annulant les coordennées d'indice $j \geqslant n$.

THÉORÈME 2 - Les proprietés suivantes sont équivalentes: (1) $(\underline{U}, \phi)$ est un domaine d'holomorphie; (2) $(E(\underline{U}), \pi)$ s'identifie canoniquement à $(\underline{U}, \phi)$; (3) $(\underline{U}, \phi)$ est pseudo-convexe; (4) $(\underline{U}, \phi)$ est localement pseudo-convexe; (5) Il existe $n \in \underline{N}$ tel que $(\underline{U}, \phi)$ est d'ordre n dans tout $\underline{u} \in \underline{U}$ et $(\underline{U}_n, \phi_n)$ est d'holomorphie, où $\underline{U}_n = \phi^{-1}\{\pi_n[\phi(\underline{U})]\}$ et $\phi_n = \phi|\underline{U}_n$.

Le théorème 2 a été prouvé par Hirschowitz [8] pour les ouverts de $\underline{C}^N$. Remarquons que les implications (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) sont valables pour tout E.

TROISIÈME PARTIE: Sur les ouverts de τ-holomorphie dans les espaces de Banach séparables.

Nous indiquerons un théorème du type Cartan-Thullen pour les ouverts d'un espace de Banach complexe séparable E.

Soit τ une fonction réelle strictement positive semi-continue inférieurement sur l'ouvert non vide U de E, telle qu'on ait pour tout $x \in U$:

$$\tau(x) \leqslant d(x, \partial U)$$

(distance de x à la frontière ∂U). Soit $\mathcal{B}_\tau(U)$ la collection des réunions finies des boules fermées de centre $x \in U$ et rayon strictement inférieur à $\tau(x)$.

Indiquons par $\mathcal{H}_\tau(U)$ l'algèbre des fonctions complexes holomorphes dans U et bornées sur tout ensemble appartenant à $\mathcal{B}_\tau(U)$ munie de la topologie de Fréchet de la convergence uniforme sur les éléments de $\mathcal{B}_\tau(U)$ (9). Remarquons que l'algèbre $\mathcal{H}(U)$ des fonctions complexes holomorphes dans U est la réunion filtrante des $\mathcal{H}_\tau(U)$ pour toute fonction τ. Nous dirons que U est un ouvert de τ-holomorphie s'il est impossible de trouver deux ouverts connexes U_1 et U_2 de E tels que

$$U \cap U_1 \supset U_2 \qquad U_2 \neq \emptyset \ , \quad U_1 \not\subset U$$

et que pour toute $f \in \mathcal{H}_\tau(U)$ il existe $f_1 \in \mathcal{H}(U_1)$ satisfaisant $f = f_1$ sur U_2.
Si $X \subset U$, nous indiquerons par $\hat{X}_U^\tau$ l'ensemble des $x \in U$ tels que

$$|f(x)| \leqslant \sup \{|f(t)| ; t \in X\}$$

pour toute $f \in \mathcal{H}_\tau(U)$.

Proposition - Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) U est un ouvert de τ-holomorphie.

(2) Si $A \in \mathcal{B}_\tau(U)$, alors $\hat{A}_U^\tau$ est bornée dans E et sa distance à ∂U est strictement positive.

(3) Il existe $f \in \mathcal{H}_\tau(U)$ pour laquelle il est impossible de trouver deux ouverts connexes U_1 et U_2 de E tels que

$$U \cap U_1 \supset U_2 \qquad U_2 \neq \emptyset \qquad U_1 \not\subset U$$

et qu'il existe $f_1 \in \mathcal{H}(U_1)$ satisfaisant $f = f_1$ sur U_2.

Un résultat analogue à la proposition ci-dessus a été prouvé par Dineen(10), avec le cas du type borné $\mathcal{H}_b(U)$ à la place de $\mathcal{H}_\tau(U)$.

QUATRIÈME PARTIE: Sur le théorème d'approximation et d'existence de Malgrange-Gupta.

Soit E un espace localement convexe séparé, dont le dual fort E' est métrisable. Nous prouvons des résultats d'approximation et d'existence pour un opérateur de convolution $\mathcal{O}$ sur l'espace $H_{N,b}(E)$ des fonctions complexes entières nucléaires de type borné sur E [11].

Soit $P_N(^nE)$ l'espace de Fréchet les polynômes complexes n-homogenes nucléaires sur E. Rappelons que sa topologie est définie par la famille de semi-normes

$$P \to \|P\|_{N,q} \ ,$$

où q est une semi-norme continue arbitraire sur E', telle que:

1º L'espace vectoriel $P_f(^nE)$ des polynômes complexes n-homogènes continus de type fini sur E (c'est-à-dire, qui sont des sommes finies des ϕ^n, où $\phi \in E'$), est dense dans $P_N(^nE)$;

2º Si $P \in P_f(^nE)$, alors $\|P\|_{N,q}$ est l'infinum des sommes

$$\sum_{j=1}^{m} |q(\phi_j)|^n$$

pour toute expression

$$P = \sum_{j=1}^{m} (\phi_j)^n, \quad \phi_j \in E' \quad (j = 1, \ldots, m) \ .$$

Considérons l'espace de Fréchet $H_{N,b}(E)$ des fonctions complexes f sur E, pour chacune desquelles il existe $P_n \in P_N(^nE)$ (n = 0, I, ...) tels que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \qquad \text{pour tout } x \in E \ ,$$

$$\|f\|_{N,q,\rho} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \|P_n\|_{N,q} < + \infty,$$

pour toute q et tout $\rho > 0$. La topologie de $H_{N,b}(E)$ est définie par les semi-normes

$$f \to \|f\|_{N,q,\rho}.$$

Soit $\mathcal{O}$ un opérateur de convolution dans $H_{N,b}(E)$, c'est-à-dire une application linéaire continue de cet espace dans lui-même commutant avec les translations par les éléments de E.

Proposition 1 - Le sous-espace vectoriel des sommes finies des P exp ϕ, où $P \in P_N({}^nE)$, $n = 0, 1, \ldots$, $\phi \in E'$, $\mathcal{O}(P \exp\phi) = 0$, est dense dans $\mathcal{O}^{-1}(0)$.

Proposition 2 - Si $\mathcal{O} \neq 0$, alors $\mathcal{O}[H_{N,b}(E)] = H_{N,b}(E)$.

* * *

REFERENCES

1. M. A. Zorn, Annals of Mathematics, 46, 1945, p. 585-593; Duke Mathematical Journal, 12, 1945, p. 579-583.

2. Tous les espaces vectoriels topologiques considérés dans cette note sont complexes et séparés.

3. Ph. Noverraz, Annales d l'Institut Fourier, 19, 1970, p. 419-493.

4. H. Alexander, Analytic functions on Banach spaces, Thesis, University of California, Berkeley, 1968.

5. Les notations et la terminologie sont celles de L. Nachbin, Topology on spaces of holomorphic mappings; Springer-Verlag, 1969 et J. A. Barroso, Topologias nos espaços de aplicações holomorfas entre espaços localmente convexos. Tese, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1970.

6. Les additions en question sont prises au sens de H. Alexander, Analytic functions on Banach spaces, Thesis, University of California, Berkeley, 1968.

7. Voir les notions de "extension pair" et de "normal extension pair" dans la thèse d'Alexander, loc. cit.

8. Voir A. Hirschowitz, Annales de l'Institut Fourier, t. 19, 1969, p. 219-229.

9. Cet espace a été considéré par G. Coeuré, Ann. Inst. Fourier, 20, 1970, p. 361-432.

10. Voir S. Dineen, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (à paraitre).

11. C. P. Gupta, Malgrange's theorem for nuclearly entire functions of bounded type on a Banach space (Thesis, University of Rochester, 1966, Notas de Matemática, No. 37, Rio de Janeiro, 1968); On the Malgrange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on a Banach space (Indagationes Mathematicae) (à paraitre); L. Nachbin, Convolution operators in spaces of nuclearly entire functions on a Banach space, Functional Analysis and Related Fields (edited by F. E. Browder), Springer-Verlag, 1970, p. 167-171.