

VIBRACIONES DE CASCARAS REBAJADAS*

Edgardo Taroco

Raul A. Feijão

Laboratório de Cálculo/CBPF

Héctor A. Rojas

Luiz Bevilacqua

Programa de Engenharia Mecânica - COPPE/UFRJ

RESUMEN

Se analiza en este trabajo, la respuesta estática y frecuencias naturales de vibración de cáscaras rebajadas dentro de la primera aproximación de Love.

El tensor de deformación es obtenido a partir del gradiente del desplazamiento referido a la terna ortogonal intrínseca de la superficie media en la configuración inicial de la cáscara. En él se introducen las hipótesis simplificadoras de Kirschhoff-Love y de cáscaras rebajadas.

La ecuación del movimiento de la cáscara es obtenida mediante la aplicación del principio de Hamilton y la solución aproximada es determinada mediante el Método de Elementos Finitos.

Finalmente se presentan algunos resultados numéricos obtenidos en cáscaras cilíndricas circulares.

* Este trabajo fué financiado en parte por COPPETEC, OEA, FINEP y CNPq, contrato nº 2222.0712/76.

1. INTRODUCCIÓN

Estudiaremos en este trabajo el movimiento de una cáscara dentro de la primera aproximación de Love [1].

Designaremos con C a la cáscara material, C_t a la configuración de C en el instante t y $C_t(\cdot, t)$ al mapeamiento de puntos materiales X de C en puntos x de C_t .

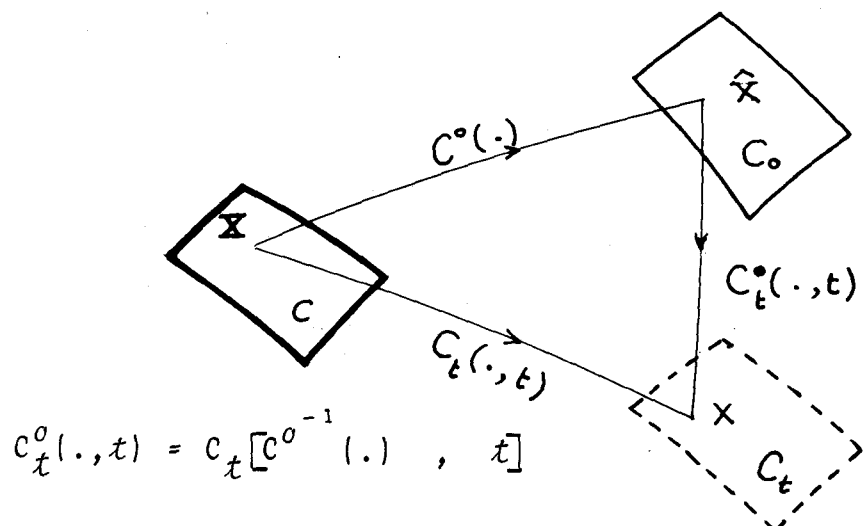
$$x = C_t(X, t) \quad \text{donde} \quad C_t : C \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Referiremos dicho movimiento a una configuración inicial C_0 que puede no pertenecer necesariamente a C_t , obteniendo de esta forma un mapeamiento de una región de \mathbb{R}^3 en otra región de \mathbb{R}^3 .

Denominaremos $C^0(\cdot)$ al mapeamiento de puntos materiales X de C en puntos \hat{x} de C_0 y $C_t^0(\cdot, t)$ al mapeamiento de puntos \hat{x} de C_0 en puntos x de C_t .

$$\hat{x} = C^0(X) \quad \text{donde} \quad C^0 : C \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x = C_t^0(\hat{x}, t) \quad \text{donde} \quad C_t^0 : C_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

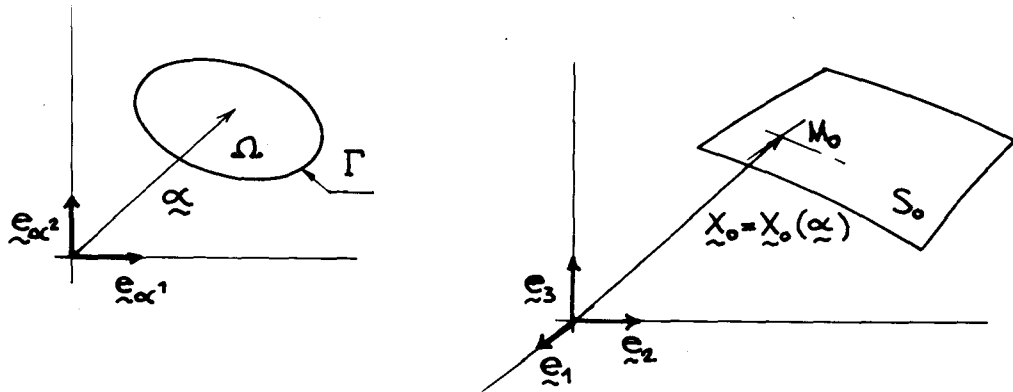


La configuración inicial C_0 que posteriormente admitiremos rebajada, será definida a partir de su superficie media S_0 y su espesor h_0 .

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^2 de contorno Γ . La superficie media S_0 puede definirse por la aplicación:

$$\underline{X}_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 ; \quad \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$$

$$S_0 = \{ \underline{X}_0 \in \mathbb{R}^3 ; \underline{X}_0 = \underline{X}_0(\underline{\alpha}) , \underline{\alpha} \in \bar{\Omega} \}$$



donde:

$$\underline{\alpha} = \alpha^1 \underline{e}_{\alpha^1} + \alpha^2 \underline{e}_{\alpha^2} \quad \left\| \underline{e}_{\alpha^i} \right\| = 1 , \quad i = 1, 2$$

$$\underline{X}_0 = X_0^1(\underline{\alpha}) \underline{e}_1 + X_0^2(\underline{\alpha}) \underline{e}_2 + X_0^3(\underline{\alpha}) \underline{e}_3 , \quad \left\| \underline{e}_\gamma \right\| = 1 , \quad \gamma = 1, 2, 3.$$

α^1 , α^2 coordenadas curvilíneas de la superficie S_0 .

El espesor h de la configuración C_0 puede definirse por la aplicación:

$h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^+$ (\mathbb{R}^+ = conjunto de números reales positivos).

$$h_0 = \{h \in \mathbb{R}^+ ; h = h(\underline{\alpha}) , \underline{\alpha} \in \bar{\Omega}\}.$$

Luego la configuración C_0 queda definida por la aplicación:

$$\underline{X} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$C_0 = \{ \underline{X} \in \mathbb{R}^3 ; \underline{X} = \underline{X}(\alpha^1, \alpha^2, \zeta) = \underline{X}_0(\underline{\alpha}) + \zeta \underline{n}(\underline{\alpha}), \alpha \in \bar{\Omega} \quad |\zeta| \leq \leq h(\underline{\alpha})/2 \}$$

donde $\underline{n}(\underline{\alpha})$ es el vector unitario normal a S_0 en el punto

$$\underline{X}_0 = \underline{X}_0(\underline{\alpha}).$$

2. GEOMETRIA DE LA SUPERFICIE MEDIA

El movimiento C_t^0 de la cáscara será referido a la terna intrínseca de S_0 . Para ello definiremos previamente dicha terna y las magnitudes de la primera y segunda forma fundamental de la superficie media [2].

De las derivadas $\underline{X}_{0,i}, \underline{X}_{0,ij}$ ($i, j=1, 2$) del vector posición $\underline{X}_0 = \underline{X}_0(\underline{\alpha})$ se obtiene:

i) magnitudes de la primera forma fundamental g_{11}, g_{22}, g_{12} definidas por:

$$g_{ij} = \underline{X}_{0,i} \cdot \underline{X}_{0,j} \quad (i, j=1, 2)$$

Si $\underline{X}_{0,1}$ y $\underline{X}_{0,2}$ son ortogonales $\rightarrow g_{12} = 0$, en este

caso es usual emplear la siguiente notación para designar a los módulos de $X_{\sim 0,1}$ y $X_{\sim 0,2}$.

$$A_1 = \|X_{\sim 0,1}\| = \sqrt{g_{11}} ; A_2 = \|X_{\sim 0,2}\| = \sqrt{g_{22}}$$

ii) Vectores unitarios del triedro intrínseco de la superficie S_0 ; $t_{\sim 1}$, $t_{\sim 2}$, n definidos por:

$$t_{\sim i} = \frac{X_{\sim 0,i}}{\|X_{\sim 0,i}\|} = \frac{1}{A_i} X_{\sim 0,i} \quad (i=1,2)$$

$$n = t_{\sim 1} \times t_{\sim 2} = \frac{1}{A_1 A_2} X_{\sim 0,1} \times X_{\sim 0,2}$$

Nótese que $t_{\sim i}$ es el vector unitario tangente a la dirección α^i , y que estamos admitiendo que α^1, α^2 son direcciones ortogonales.

iii) magnitudes de la segunda fôrma fundamental L_{11}, L_{22}, L_{12} definidas por:

$$L_{ij} = \frac{A_i A_j}{R_{ij}} = -n \cdot X_{\sim 0,ij}$$

R_{ij} ($i, j=1,2$) son los radios de curvatura de la superficie S_0 en el punto $X_0 = X_0(\underline{\alpha})$ correspondientes a las direcciones α^i, α^j .

3. GRADIENTE DEL DESPLAZAMIENTO

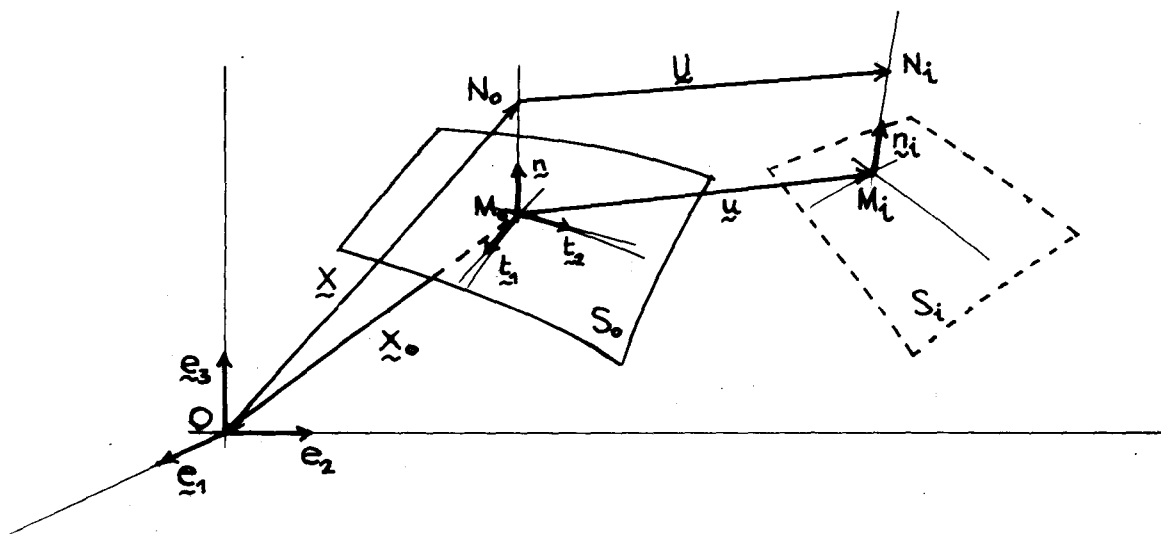
Sean M_0 y N_0 dos puntos pertenecientes a la configuración inicial C_0 de una cáscara. M_0 contenido en la superficie media S_0 y N_0 sobre la normal en M_0 a S_0 .

$$M_0 \in S_0 \quad \underline{OM}_0 = \underline{x}_0 = \underline{x}_0(\underline{\alpha})$$

$$N_0 \in C_0 \quad \underline{ON}_0 = \underline{x} = \underline{x}_0(\underline{\alpha}) + \zeta \underline{n}(\underline{\alpha})$$

y sea N_i la imagen de N_0 bajo la transformación C_t^0 . Designando con $\underline{u} = N_0 N_i$ al desplazamiento de N_0 al pasar de C_0 a C_i , resulta:

$$\underline{x}_i = \underline{x} + \underline{u}$$



El gradiente de \underline{u} , referido a la terna intrínseca $\underline{t}_1, \underline{t}_2, \underline{n}$, está dado por [3].

$$\nabla \underline{u} \Big|_{\underline{t}_1, \underline{t}_2, \underline{n}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_1} I_{11} \underline{u} ; & \frac{1}{\rho_2} I_{12} \underline{u} ; & \partial u^1 / \partial \zeta \\ \frac{1}{\rho_1} I_{21} \underline{u} ; & \frac{1}{\rho_2} I_{22} \underline{u} ; & \partial u^2 / \partial \zeta \\ \frac{1}{\rho_1} I_{31} \underline{u} ; & \frac{1}{\rho_2} I_{32} \underline{u} ; & \partial u^3 / \partial \zeta \end{bmatrix}$$

donde:

I_{ij} son operadores diferenciales que dependen de la geometría de la superficie media S_0 .

$$I_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \cdot}{\partial \alpha^1}, \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha^2}, \frac{1}{R_{11}} ; \quad I_{21} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \cdot}{\partial \alpha^2}, - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha^1}, \frac{1}{R_{12}}$$

$$I_{21} = - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha^2}, \frac{1}{A_1} \frac{\partial \cdot}{\partial \alpha^1}, \frac{1}{R_{12}} ; \quad I_{22} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha^1}, \frac{1}{A_2} \frac{\partial \cdot}{\partial \alpha^2}, \frac{1}{R_{22}}$$

$$I_{31} = - \frac{1}{R_{11}}, - \frac{1}{R_{12}}, \frac{1}{A_1} \frac{\partial \cdot}{\partial \alpha^1} ; \quad I_{32} = - \frac{1}{R_{12}}, - \frac{1}{R_{22}}, \frac{1}{A_2} \frac{\partial \cdot}{\partial \alpha^2}$$

$$\rho_1 = 1 + \frac{\zeta}{R_{11}} ; \quad \rho_2 = 1 + \frac{\zeta}{R_{22}}$$

$$\underline{u} = (u^1, u^2, u^3)$$

4. PRIMERA APROXIMACIÓN DE LOVE

Las ecuaciones básicas que describen el comportamiento de cáscaras delgadas fueron derivadas originalmente por Love [4,5], quién extendió a cáscaras, los postulados simplificadores empleados por Kirchhoff en la teoría de placas.

Las suposiciones básicas de esta aproximación consisten en admitir que:

- i) La cáscara es delgada. O sea que el espesor h es pequeño comparado con el menor radio de curvatura de la superficie media ($h/R_{\min} \ll 1$), por tanto dicho cociente es despreciado frente a la unidad.
- ii) Las deformaciones y los desplazamientos referidos a la configuración inicial, son suficientemente pequeños. Lo anterior permite despreciar en las ecuaciones cinemáticas los términos de orden superior al primero. O sea se considera solamente la parte lineal del tensor de deformación $\underline{\underline{\varepsilon}}$, como en la teoría clásica de la Elasticidad:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T + \nabla \underline{u}^T \nabla \underline{u}) \approx \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T) = \underline{\underline{e}}$$

Por lo que el equilibrio de las fuerzas que actúan en el movimiento de la cáscara puede ser realizado en la configuración de referencia C_0 .

- iii) La componente σ_{nn} del tensor de tensiones $\underline{\underline{\sigma}}$ referido al triedro intrínseco, es pequeña comparada con las otras componentes. Por lo tanto σ_{nn} puede ser despreciada en las ecuaciones constitutivas.
- iv) Las normales a la superficie media S_0 en la configuración inicial permanecen normales a la superficie media S_i de la configuración C_i y la distancia entre puntos sobre una misma normal permanece constante al pasar de C_0 a C_i . Lo anterior implica que el desplazamiento de un punto cualquiera de la configuración C_0 no contenido en S_0 , puede ser expresado en función del desplazamiento de su correspondiente en la superficie media S_0 y de la distancia entre ambos que permanece fija:

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}} + \zeta(\underline{\underline{n}}_i - \underline{\underline{n}})$$

donde:

$\underline{\underline{n}}, \underline{\underline{n}}_i$ normales respectivamente a la superficie media S_0 en $M_0 \in S_0$ en S_i en $M_i \in S_i$

$\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{u}}$ desplazamiento de un punto $M_0 \in S_0$ y de un punto $N_0 \in C_0$ situado sobre la normal en M_0 a S_0 .

$\zeta = \|M_0 N_0\|$ distancia entre M_0 y N_0 .

Nótese que para giros pequeños [$tg(\underline{\underline{n}}_i, \underline{\underline{n}}) \approx 0$] la componente según $\underline{\underline{n}}$ del vector $\zeta(\underline{\underline{n}}_i - \underline{\underline{n}})$ es despreciable frente a las componentes según t_1 y t_2 .

Por lo tanto, refiriendo \underline{u} al triedro intrínseco en M_0 se tiene:

$$\underline{u} \cdot \underline{t}_1 = u^1 = u^1 + \zeta(n_{\underline{i}} - \underline{n}) \cdot \underline{t}_1 = u^1 + \zeta\beta_1$$

$$\underline{u} \cdot \underline{t}_2 = u^2 = u^2 + \zeta(n_{\underline{i}} - \underline{n}) \cdot \underline{t}_2 = u^2 + \zeta\beta_2$$

$$\underline{u} \cdot \underline{n} = u^3 = u^3 + \zeta(n_{\underline{i}} - \underline{n}) \cdot \underline{n} \approx u^3$$

Introduciendo $\underline{u} = \underline{u} + \zeta\underline{\beta}$, donde $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, 0)$, en la expresión de $\left. \nabla \underline{u} \right|_{\underline{t}_1, \underline{t}_2, \underline{n}}$, teniendo en cuenta que:

$$\partial u^1 / \partial \zeta = \beta_1 \quad ; \quad \partial u^2 / \partial \zeta = \beta_2 \quad \partial u^3 / \partial \zeta = 0$$

y admitiendo que la cáscara es delgada, se obtiene el gradiente del desplazamiento \underline{u} para la primera aproximación de Love:

$$\left. \nabla \underline{u} \right|_{\underline{t}_1, \underline{t}_2, \underline{n}} = \begin{bmatrix} I_{11}\underline{u} + \zeta I_{11}\underline{\beta} & ; & I_{12}\underline{u} + \zeta I_{12}\underline{\beta} & \beta_1 \\ I_{21}\underline{u} + \zeta I_{21}\underline{\beta} & ; & I_{22}\underline{u} + \zeta I_{22}\underline{\beta} & \beta_2 \\ I_{31}\underline{u} + \zeta I_{31}\underline{\beta} & ; & I_{32}\underline{u} + \zeta I_{32}\underline{\beta} & 0 \end{bmatrix}$$

De la condición de que las normales a la superficie media se mantienen normales ($e_{13} = e_{23} = 0$) se sigue que:

$$\beta_i = -I_{3i}\underline{u} \quad (i=1,2)$$

por tanto el tensor de deformación referido a la terna intrínseca se reduce a:

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u}^T + \nabla \underline{u}) = \underline{\underline{e}}_0 + \zeta \underline{\underline{k}} =$$

donde:

$$\underline{\underline{e}}_0 = \begin{bmatrix} I_{11} \underline{u}; \frac{1}{2} (I_{21} + I_{12}) \underline{u} \\ \text{Sim.} & I_{22} \underline{u} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{k}} = \begin{bmatrix} I_{11} \underline{\beta}; \frac{1}{2} (I_{21} + I_{12}) \underline{\beta} \\ \text{Sim.} & I_{22} \underline{\beta} \end{bmatrix}$$

5. CÁSCARA REBAJADA

Si el ángulo ϕ que forman las normales en dos puntos arbitrarios P_0 y Q_0 pertenecientes a la superficie media de la configuración inicial es tal que:

$$(\text{tg } \phi)^2 \ll 1$$

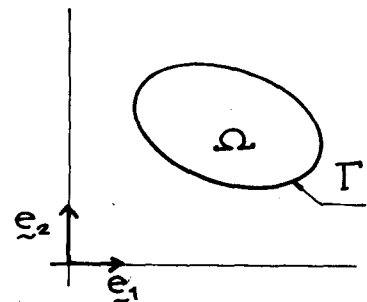
se dice que C_0 es rebajada.

En el desarrollo de la teoría de cáscaras cuya configuración inicial cumple esta condición conviene definir la región Ω en el plano x^1, x^2 .

$$x^1 \equiv \alpha^1 \quad x^2 \equiv \alpha^2$$

son las nuevas coordenadas curvilineas de la superficie S_0 .

Los vectores posición estarán dados por:



$$\underline{\alpha} = \underline{x} = x^1 \underline{e}_1 + x^2 \underline{e}_2$$

$$\underline{x}_0 = \underline{x} + Z(x^1, x^2) \underline{e}_3 = x^1 \underline{e}_1 + x^2 \underline{e}_2 + Z(x^1, x^2) \underline{e}_3$$

y la condición de rebajamiento por:

$$Z_{,i} Z_{,j} \ll 1 \quad , \quad (i, j=1, 2)$$

Particularizando para este caso los parámetros geométricos A_i , y los vectores unitarios del triedro intrínseco $\underline{t}_i, \underline{n}$, tendremos:

$$A_i^2 = g_{ii} = 1 + Z_{,i}^2 \approx 1 \quad \underline{t}_i = \underline{e}_i + Z_{,i} \underline{e}_3$$

$$g_{12} = Z_{,1} Z_{,2} \quad \underline{n} = -Z_{,1} \underline{e}_1 - Z_{,2} \underline{e}_2 + \underline{e}_3$$

Nótese que:

La ortogonalidad de las direcciones x^1 e x^2 se verifica en forma aproximada excepto en los puntos donde por lo menos una de las derivadas $Z_{,1}$ o $Z_{,2}$ se anula.

Los módulos de los vectores $\underline{t}_i, \underline{n}$ son aproximadamente unitarios $|\underline{t}_i|, |\underline{n}| \approx 1$ y la igualdad se verifica cuando se anulan las derivadas $Z_{,1}, Z_{,2}$.

Las magnitudes de la segunda forma fundamental resultan:

$$L_{ij} = \frac{1}{R_{ij}} = -Z_{,ij}$$

y el tensor de deformación en un punto distante ζ de la superficie media de C_0 , supuesta rebajada dentro de la primera aproximación de Love se reduce a:

$$\underline{e} \approx \underline{e}_{\approx 0} + \zeta \underline{k}$$

donde

$$\underline{e}_{\approx 0} = \begin{bmatrix} u_{,1} - wZ_{,11} & \frac{1}{2}(u_{,2} + v_{,1} - 2wZ_{,12}) \\ \text{Sim.} & v_{,2} - wZ_{,22} \end{bmatrix}$$

$$\underline{k} \approx \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \frac{1}{2}(\beta_{1,2} + \beta_{2,1}) \\ \text{Sim.} & \beta_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 = -(w_{,1} + uZ_{,11} + vZ_{,12})$$

$$\beta_2 = -(w_{,2} + vZ_{,22} + uZ_{,12})$$

$$\underline{u} = (u, v, w)$$

Si admitimos además que:

$$u \frac{Z_{,1i}}{w_{,i}}, v \frac{Z_{,2i}}{w_{,i}} \ll 1 \quad (i=1,2)$$

es posible despreciar la contribución de los desplazamientos planos u, v en el cálculo de los giros β_i (Hipótesis simplificadoras introducidas por Mushtari y Vlazov en el análisis de cáscaras rebajadas) [6].

Con esta simplificación adicional se obtiene:

$$\beta_1 = -w_{,1}, \quad \beta_2 = -w_{,2}$$

$$k \approx \begin{bmatrix} -w_{,11} & -w_{,12} \\ \text{Sim.} & -w_{,22} \end{bmatrix}$$

6. ECUACION DEL MOVIMIENTO

La ecuación del movimiento de la cáscara será obtenida aplicando el principio de Hamilton [7]. Sean C_1 y C_2 dos configuraciones del movimiento de C en los instantes t_1 y t_2 .

Si el sistema de fuerzas en el movimiento de C es conservativo de todas las trayectorias posibles de t_1 a t_2 , la real $\tau = \{(\underline{X}, t); \underline{X} \in C_t, t_1 \leq t \leq t_2\}$ es la que hace estacionaria la integral:

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} (T - V + W) dt$$

donde:

T energía cinética, V energía interna de deformación y W trabajo de las cargas exteriores.

O sea,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V - \delta W) dt = 0$$

donde:

$$\delta T = \int_{C_0} \rho \delta \underline{\dot{u}} \cdot \underline{\dot{u}} dC_0$$

$$\delta V = \int_{C_0} \delta \underline{e} \cdot \underline{\sigma} dC_0$$

$$\delta W = \int_{C_0} \delta \underline{u} \cdot \underline{b} dC_0 + \int_{\partial C_0} \delta u \cdot \underline{d} d\partial C_0$$

$$\underline{\dot{u}} = \frac{\partial \underline{u}(\underline{X}, t)}{\partial t}$$

\underline{b} fuerza por unidad de volúmen en C_0 , \underline{d} fuerza por unidad de contorno de C_0 .

ρ masa específica.

Substituyendo el producto escalar de los tensores $\underline{\sigma}$ y $\underline{\delta e}$ por el de los vectores $\underline{\sigma}$ y $\underline{\delta e}$,

$$\underline{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}) \quad \text{y} \quad \underline{\delta e} = (\delta e_{11}, \delta e_{22}, 2\delta e_{12})$$

Admitiendo material hookeano, cuya ecuación constitutiva está dada por:

$$\underline{\sigma} = D \underline{e}$$

donde:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Reescribiendo \underline{e} a efecto de poner en evidencia las deformaciones en el plano, las deformaciones que dependen de la geometría de S_0 y las que dependen de los cambios de curvatura, en la siguiente forma:

$$\underline{e} = \underline{e}_p + \underline{e}_g + z \underline{k}$$

donde:

$$\underline{e}_p = (u_{,1}, v_{,2}, v_{,1} + u_{,2})$$

$$\underline{e}_g = -(z_{,11}, z_{,22}, 2z_{,12}) w$$

$$\underline{k} = - (w_{,11}, w_{,22}, 2w_{,12})$$

Integrando las expresiones de δT , δV y δW según el espe

se obtiene: [8,9].

$$\delta T = - \int_{\Omega} h\rho (\delta \underline{u} \cdot \ddot{\underline{u}} + \frac{h^2}{12} \delta \underline{\beta} \cdot \ddot{\underline{\beta}}) d\Omega$$

$$\delta V = \int_{\Omega} (\delta \underline{e}_p \cdot \mathcal{D} \underline{e}_p + \delta \underline{e}_g \cdot \mathcal{D} \underline{e}_g + \delta \underline{e}_p \cdot \mathcal{D} \underline{e}_g + \delta \underline{e}_g \cdot \mathcal{D} \underline{e}_p + \frac{h^2}{12} \delta \underline{k} \cdot \mathcal{D} \underline{k}) h d\Omega$$

$$\delta W = \int_{\Omega} \delta \underline{u} \cdot \underline{q} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \underline{u} \cdot \underline{N} d\Gamma_{\sigma}$$

donde:

\underline{q} y \underline{N} son las fuerzas exteriores equivalentes por unidad de área Ω y contorno Γ_{σ} .

Introduciendo δT , δV y δW así como la relación de las deformaciones \underline{e}_p , \underline{e}_g y \underline{k} con los desplazamientos u , v y w , en $\delta \int_t^{t_2} L dt = 0$, es posible obtener la ecuación del movimiento y las condiciones de contorno del problema planteado, en función de \underline{u} .

7. SOLUCION APROXIMADA

La solución aproximada de nuestro problema será obtenida mediante el método de elementos finitos. Subdividiremos la región total Ω en E subregiones Ω_e y aproximaremos el campo de desplazamientos $u = (u, v, w)^T$ en cada una de ellas, separando la parte plana u, v de la deflexión w .

$$(u, v)^T = \Phi \underline{u}_p^N \quad w = \psi^T \underline{u}_b^N$$

donde:

$\Phi = \Phi(x^1, x^2)$ matriz de interpolación del campo de desplazamientos u, v .

$\Psi = \Psi(x^1, x^2)$ vector de interpolación del campo de desplazamiento w .

$\underline{u}_p^N = \underline{u}_p^N(x)$ desplazamientos nodales de membrana.

$\underline{u}_b^N = \underline{u}_b^N(x)$ desplazamientos nodales de flexión..

A partir de la aproximación de \underline{u} , obtenemos las respectivas aproximaciones de $\underline{e}_p, \underline{e}_g, \underline{k}$ y $\underline{\beta}$.

$$\underline{e}_p = H_1 (u, v)^T = H_1 \Phi \underline{u}_p^N = B_p \underline{u}_p^N$$

$$\underline{e}_g = -(H_2 Z) w = -(H_2 Z) \psi^T \underline{u}_b^N = B_g \underline{u}_b^N$$

$$\underline{k} = -H_2 w = -H_2 \psi^T \underline{u}_b^N = B_b \underline{u}_b^N$$

$$\underline{\beta} = -H_3 w = -H_3 \psi^T \underline{u}_b^N = B \underline{u}_b^N$$

donde:

$$H_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial x^1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \cdot}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial x^2} & \frac{\partial \cdot}{\partial x^1} \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^1 \partial x^1} \\ \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2 \partial x^2} \\ \frac{2\partial^2 \cdot}{\partial x^1 \partial x^2} \end{bmatrix}, \quad H_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

$$B_p = H_1 \Phi, \quad B_g = -(H_2 Z) \psi^T, \quad B_b = -H_2 \psi^T, \quad B = -H_3 \psi^T$$

Introduciendo las aproximaciones de \underline{u} y \underline{e} en

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0,$$

a nivel de elementos se obtiene:

$$M^e \ddot{\underline{u}}^N + K^e \underline{u}^N = \underline{f}^e$$

donde:

$$M^e = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 + M_3 \end{bmatrix}, \quad K^e = \begin{bmatrix} K_1 & K_4 \\ K_4^T & K_2 + K_3 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \int_{\Omega} h \rho \Phi^T \Phi d\Omega, \quad K_1 = \int_{\Omega} h B_p^T D B_p d\Omega$$

$$M_2 = \int_{\Omega} h \rho \psi \psi^T d\Omega$$

$$K_2 = \int_{\Omega} h^3 B_b^T \mathcal{D} B_b d\Omega$$

$$M_3 = \frac{1}{12} \int_{\Omega} h^3 \rho B^T B d\Omega$$

$$K_3 = \int_{\Omega} h B_g^T \mathcal{D} B_g d\Omega$$

$$K_4 = \int_{\Omega} h B_p^T \mathcal{D} B_g d\Omega$$

$$\underline{u}^N = \begin{pmatrix} \underline{u}_p^N \\ \underline{u}_b^N \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{d}}^e = \begin{pmatrix} \underline{\underline{d}}_p \\ \underline{\underline{d}}_b \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{d}}_p = \int_{\Omega} \Phi^T \underline{q}_p d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \Phi^T \underline{N}_p d\Gamma_{\sigma}$$

$$\underline{\underline{d}}_b = \int_{\Omega} \psi \underline{q}_b d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \psi N_b d\Gamma_{\sigma}$$

$\underline{q}_p = (q_1, q_2)^T$, $q_b = q_3$ fuerzas por unidad de área Ω^e

$\underline{N}_p = (N_1, N_2)^T$, $N_b = N_3$ fuerzas por unidad de contorno Γ_{σ}^e

Ensamblando adecuadamente los E elementos finitos Ω_e arribamos a:

$$M \ddot{\underline{u}}^N + K \underline{u}^N = \underline{f}$$

En el caso estático habrá que resolver el sistema

$$K \underline{u}^N = \underline{f}$$

y en el caso en que $\underline{f} \equiv 0$, el sistema

$$M \ddot{\underline{u}}^N + K \underline{u}^N = 0$$

permite determinar las vibraciones libres no amortiguadas de la cáscara, que se reduce al problema de autovalores generalizados:

$$(K - \omega^2 M) \underline{u}^N = 0$$

8. APLICACIONES NUMERICAS

La teoría anterior se aplicó a la determinación de la respuesta estática, frecuencias naturales y modos de vibración de cáscaras cilíndricas rebajadas.

Fuë empleado un elemento rectangular de 4 nudos y 6 grados de libertad por nudo, u^N , v^N correspondientes a desplazamientos planos y w^N , $w_{,1}^N$, $w_{,2}^N$, $w_{,12}^N$ correspondientes a flexión.

i) Respuesta estática

Se determinó la deflexión en el centro de una cáscara ci

lindrica empotrada en sus cuatro bordes, sometida a carga normal uniforme, de dimensiones:

$$a = 20 \text{ in} \quad , \quad b = 20 \text{ in} \quad , \quad h = 0.125 \text{ in}$$

y propiedades elásticas:

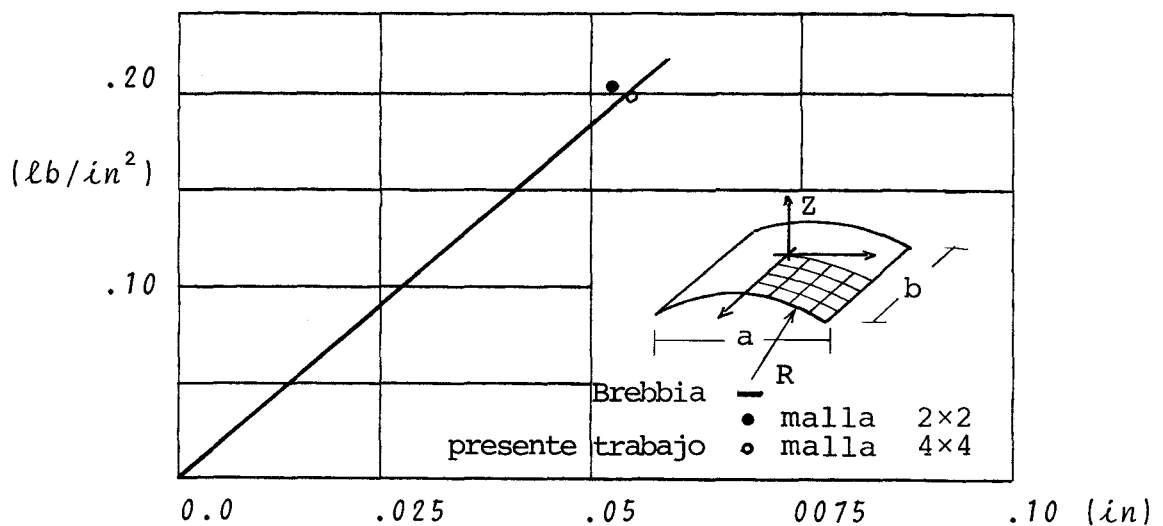
$$E = 450000. \text{ lb/in}^2 \quad \nu = 0.3$$

Dada la simetría se estudió la cuarta parte de la cáscara, la cual fué particionada en 4 elementos de $5 \times 5 \text{ in}^2$ y 16 elementos de $2.5 \times 2.5 \text{ in}^2$.

El análisis se realizó para tres valores de $1/R$.

$1/R \text{ (in}^{-1}\text{)}$		0.00	0.005	0.01
$w_0 \text{ (in)}$	2×2	0.5029	0.1693	0.0523
	4×4	0.5030	0.1757	0.0553

En la figura se comparan los resultados de este trabajo para $1/R = 0.01 \text{ in}^{-1}$ con los obtenidos por Brebbia empleando un elemento rectangular de 5 grados de libertad por nudo [10].



Flecha en el centro de cáscara con carga uniforme

ii) frecuencias naturales y modos de vibración. Se determinaron las primeras siete frecuencias y sus correspondientes modos de vibración de una cáscara cilíndrica, con cuatro bordes empotrados de dimensiones:

$$a = 4 \text{ in} \quad , \quad b = 3 \text{ in} \quad , \quad h = 0.013 \text{ in} \quad R = 30 \text{ in}$$

y propiedades:

$$E = 10^7 \text{ lb/in}^2 \quad , \quad \nu = 0.33 \quad , \quad \rho = 2.48 \times 10^{-4} \text{ lb s}^2/\text{in}^4$$

Se estudió una cuarta parte de la cáscara, combinando condiciones de contorno simétricas y antisimétricas en los ejes de simetria, dadas por

$$S \rightarrow u = w_{,1} = 0 \quad A \rightarrow u = w = 0$$

$$S \rightarrow v = w_{,2} = 0 \quad A \rightarrow v = w = 0$$

Los resultados que se dan corresponden a una partición en 16 elementos de $0.5 \times 0.375 \text{ in}^2$ y se comparan con los obtenidos por Petyt [11] empleando los métodos de Rayleigh - Ritz y Elementos Finitos.

Frecuencias (Hz) de cáscara cilíndrica rebajada con bordes
emprotados.

pres.trabajo			Petyt	
Modo	m.n	F.E.M.	Rayleigh-Ritz	F.E.M.
AS	1.2		870	890
SS	1.3	984	958	973
SS	1.3	1334	1288	1311
SA	2.1	1366	1364	1371
AA	2.2	1575	1440	1454
SA	2.3	1798	1753	1775
AS	1.4	1858	1975	1816

BIBLIOGRAFIA

1. Love, A.E.H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Dover Publications, (1944).
2. Stoker, J.J., "Differential Geometry", John Wiley & Sons, N. York, (1969).
3. Bevilacqua, L.; Taroco, E.; Feijóo, R, "Introducción a la teoría de Cáscaras", a ser publicado.
4. Kraus, H., "Thin Elastic Shells", Wiley, (1967).
5. Naghdi, P.M., "A Survey of recent progress in the theory of elastic shells", Appl.Mech. Revs, vol. 9, (1956).
6. Novozhilov, V.V., "Thin Shell Theory", P. Noordhoff Ltda., (1964).
7. Meirovitch, L., "Analytical Methods in Vibrations", McMillan, (1969).
8. Venancio Filho, F., "Vibration and dynamic analysis", The Finite Element Technique, edited by C.A. Brebbia and A.J. Ferrante. UFRGS, (1975).
9. Loula, A.; Galeão, A.C., "Vibração de Sistemas Elásticos Lineares", Publicação COPPE, UFRJ, (1976).
10. Brebbia, C., Connor, J., "Geometrically nonlinear finite element analysis", Proc. Am. Soc. Civ. Engrs., 95, EMI, (1969).
11. Petyt, M., "Vibration of curved plates", J. Sound Vib., Vol. 15, nº 3, (1971).