CBPF
CENTRO BRASILEIRO
DE PESQUISAS FÍSICAS

A0019/76
JUL,1976

SOLUÇÕES FRACAS PARA UM PROBLEMA DE VISCO-ELASTICIDADE

M.A. Raupp

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

RIO DE JANEIRO
BRASIL

SOLUÇÕES FRACAS PARA UM PROBLEMA DE VISCO-ELASTICIDADE

M.A. Raupp
Laboratório de Cálculo
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Av. Wenceslau Brás, 71 - Rio de Janeiro - Brasil

ABSTRACT

As ground preparation for the analysis of numerical algorithms to compute solutions of

$$u_{tt} = \sigma'(u_x)u_{xx} + u_{xtx} + f(x,t) \quad , \quad x\varepsilon(0,1), \quad t > 0 \quad ,$$

the problem of existence and uniqueness of weak solutions is discussed via semi-discretized Galerkin approximations and compacity arguments.

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentaremos um estudo do problema de valor inicial e na fronteira

(1.1) $\qquad u_{tt} = \sigma'(u_x)u_{xx} + u_{xtx} + f(x,t), \quad x\varepsilon(0,1), \quad t > 0,$

(1.2) $\qquad u(0,t) = u(1,t) = 0 \; , \quad t > 0 \; ,$

(1.3) $\qquad u(x,0) = u_0(x) \; , \quad x\varepsilon[0,1] \; ,$

(1.4) $\qquad u_t(x,0) = u_1(x) \; , \quad x\varepsilon[0,1] \; ,$

onde $u_0(x)$, $u_1(x)$ e $f(x,t)$ são dados.

No caso em que a função σ satisfaz as condições

(1.5) $\sigma(0) = 0$, $\sigma'(\zeta) > 0$, $\zeta \in R$,

$u(x,t)$ pode representar o campo de deslocamentos lingitudinais de uma barra, presa pelas extremidades, que apresente um comportamento elástico não linear, dado por $\sigma(u_x)$, e um comportamento visco-elástico linear dado por $(u_x)_t$. Este é um problema que aparece em visco-elasticidade de materiais com "memória curta", conforme Duvaut-Lions [2].

Tal problema já foi considerado por Greenberg , MacCamy e Mizel [3], que demonstraram a existência de solução clássica e respectiva estabilidade. Nós, em princípio, estamos interessados em aproximações numéricas de soluções de (1.1)-(1.4). E é para definirmos um quadro teórico mais de acordo com este objetivo que rediscutiremos o problema da existência de soluções, agora "soluções fracas", via aproximações semi-discretizadas de Galerkin e argumentos de compacidade. Num próximo trabalho [6] desenharemos e analisaremos um algoritimo para o cálculo efetivo destas soluções. Isto será feito tendo em mente o caso $\sigma(\zeta) = a_1\zeta + \frac{a_2}{3}\zeta^3$, onde a_1 e a_2 são constantes positivas, que representaria o comportamento de um "sólido de Kelvin".

Para definirmos precisamente as tais soluções fracas de que estamos falando é necessário introduzir alguma notação. Para um inteiro m não-negativo, representamos por $H^m(0,1)$ o espaço de Sobolev usual de ordem m. Quando $m = 0$, $H^0(0,1)$ é o $L^2(0,1)$ com produto interno $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ e norma $\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$. O produto interno e norma de $H^m(0,1)$ serão indicados por:

$$<f,g>_m = \sum_{j=0}^{m} <D^j f,\ D^j g> \quad ,$$

$$||f||_m = \sqrt{<f,f>_m} \ .$$

Um sub-espaço de $H^1(0,1)$ que aparecerá com frequência é o $H_0^1(0,1)$, definido como o fecho de $C_0^\infty(0,1)$, que é o espaço das funções indefinidamente deriváveis com suporte compacto em $(0,1)$, relativamente à norma $||.||_1$.

Se E é um espaço de Banach, T é um número real positivo e $1 \leq p \leq +\infty$, representaremos por $L^p(0,T;E)$ o espaço de Banach de todas as funções mensuráveis

$$u:(0,T) \to E$$

tais que $\| u(t)\|_E \ \varepsilon L^p(0,T)$, com a norma

$$\| u\|^p_{L^p(0,T;E)} = \int_0^T \|u(t)\|_E^p \, dt, \quad \text{se} \quad 1 \leq p < \infty \ ,$$

e

$$\| u\|_{L^\infty(0,T;E)} = \operatorname*{ess\ sup}_{0<t<T} \ \| u(t)\|_E \ .$$

Com isto, uma solução fraca u de (1.1)-(1.4) no domínio $Q_T = (0,1) \times (0,T)$ é definida pelas condições

(1.6) $\qquad u \ \varepsilon \ L^2(0,T;\ H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1))$,

(1.7) $\qquad \frac{du}{dt} \ \varepsilon \ L^2(0,T;\ H_0^1(0,1))$,

(1.8) $\qquad \frac{d^2}{dt^2} <u(t),v> + <\sigma(Du(t)),\ Dv>$

$$+ \frac{d}{dt} <Du(t),Dv> = <f(t),v> \quad , \quad v \varepsilon H_0^1(0,1) \quad ,$$

(1.9) $\qquad u(0) = u_0$,

(1.10) $\frac{du}{dt}(0) = u_1$.

Supõe-se que $u_0 \varepsilon H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$, $u_1 \varepsilon H_0^1(0,1)$ e $f \varepsilon L^2(0,T; L^2(0,1))$.

As derivadas em t são tomadas no sentido das distribuições sobre (0,T), e o termo $<\sigma(Du),Dv>$ é bem definido em virtude do seguinte lema, conhecido da teoria dos espaços de Sobolev [7]:

<u>Lema 1.1</u> (i) Se $u \varepsilon H^1(0,1)$, existe uma constante $c > 0$, independente de u, tal que

$$|u|_\infty := \sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| \leq c\|u\|^{1/2}(\|u\|+\|Du\|)^{1/2} \quad ;$$

(ii) Suponhamos que $\sigma \varepsilon C^k(R)$, $k \geq 1$, e $\sigma(0) = 0$. Se $u \varepsilon L^\infty(o,T; H^k(0,1))$ então $\sigma(u) \varepsilon L^\infty(0,T; H^k(0,1))$ e

$$\|\sigma(u(t))\|_1 \leq M\|u(t)\|_1$$

ou

$$\|\sigma(u(t))\|_k \leq C_k(1+\|u(t)\|_{k-1}^{k-1})\|u(t)\|_k$$

se $k \geq 2$, onde M e C_k são constantes.

O sentido em que (1.9) e (1.10) são satisfeitas ficará claro na demonstração da existência de solução fraca, na próxima secção.

Precisamente, o Teorema que anunciamos neste trabalho é o que segue.

<u>Teorema 1.1</u> Dados $u_0 \varepsilon H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$, $u_1 \varepsilon H_0^1(0,1)$, $f \varepsilon L^2(0,\infty; L^2(0,1)) \cap L^1(0,\infty; L^2(0,1))$ e $\sigma \varepsilon C^1(R)$, com $\sigma(0) = 0$ e $\sigma'(\zeta) > 0$, $\zeta \varepsilon R$, existe uma única $u(x,t)$, $x \varepsilon [0,1]$, $t \varepsilon [0,T]$, para qualquer $T > 0$ dado, satisfazendo (1.6)-(1.10). Além disso,

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t)\| = \lim_{t\to\infty}\|u_t(t)\| = 0 \quad ,$$

o que quer dizer que o movimento representado pela solução fraca tende ao repouso com o correr do tempo.

2. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.1

A demonstração se desenvolverá pelas quatro etapas seguintes:

(i) construção de soluções "aproximadas" de (1.8);

(ii) estabelecimento de estimativas a priori para tais soluções "aproximadas";

(iii) passagem ao limite na sequência das "aproximações" e obtenção de uma solução única;

(iv) verificação da convergência para o repouso quando $t\to\infty$.

ETAPA (i) - Consideremos uma aproximação convergente (V_h, p_h, r_h) de $H_0^1(0,1)$ associada à base de Galerkin $\phi_j(x) = \text{sen} j\pi x$, $j = 1,2,\ldots,N$, qual seja,

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \text{(i)} & h = \frac{1}{N} \quad , \quad V_h = R^N \\ \text{(ii)} & p_h : V_h \longrightarrow H_0^1(0,1) \\ & \qquad v_h \longrightarrow \sum_{j=1}^{N} v_h^j \ \phi_j(x) \\ \text{(iii)} & r_h : H_0^1(0,1) \longrightarrow V_h \\ & \qquad v \longrightarrow (\langle v, \phi_j \rangle) \end{cases}$$

onde N é um inteiro positivo. É sabido, veja Ciarlet, Schultz e Varga [1], que $p_h r_h v$ realmente aproxima $v \in H_0^1(0,1)$. Precisamente, para $v \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$,

$$(2.2) \qquad \|v-p_h r_h v\|_1 = O(\tfrac{1}{N}) \quad \text{e} \quad \|D^2(v-p_h r_h v)\| = \mathcal{O}(\tfrac{1}{N}) .$$

As soluções "aproximadas" de (1.8) que construiremos serão aplicações u_h: $[0,T] \to V_h$ caracterizadas pelas condições

$$(2.3) \qquad \langle p_h \ddot{u}_h, \phi_j \rangle + \langle \sigma(Dp_h u_h), \; D\phi_j \rangle$$

$$+ \langle Dp_h \dot{u}_h, D\phi_j \rangle = \langle f(t), \phi_j \rangle \quad , \quad j = 1,2,\ldots,N \quad ,$$

$$(2.4) \qquad u_h(0) = r_h u_o \quad ,$$

$$(2.5) \qquad \dot{u}_h(0) = r_h u_1 \quad ,$$

onde $\dot{v}(t) = \frac{dv}{dt}(t)$ e $\ddot{v}(t) = \frac{d^2v}{dt^2}(t)$.

Em vista da ortogonalidade da família $\{\cos j\pi x, \operatorname{sen} j\pi x \mid j = 0,1,2,\ldots\}$, estas condições são equivalentes a um sistema de equações ordinárias

$$\begin{cases} \ddot{u}_h + A_h \dot{u}_h + F_h(u_h) = 0 \quad , \\ u_h(0) = r_h u_o \quad , \quad \dot{u}_h(0) = r_h u_1 \quad , \end{cases}$$

onde

$$A_h = \pi^2 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 \ddots & 0 \\ 0 & & N \end{bmatrix}^2 ,$$

e F_h: $V_h \to V_h$ é uma função tão regular quanto σ.

Tal sistema admite sempre uma solução local a qual, devido à limitação para $u_h(t)$ e $\dot{u}_h(t)$ em $[0,\infty)$ que docorrerá das estimativas a priori a serem demonstradas a seguir , poderá sempre ser estendida para o intervalo que se quizer .

Dado h pois, as aproximações $u_h(t)$ são bem definidas.

ETAPA (ii) - Agora estabeleceremos as três estimativas básicas para o estudo do problema. As duas primeiras são essencialmente devidas a Greenberg, MacCamy e Mizel [3].

Multiplicando (2.3) por $\dot{u}_h^j$ e somando em j, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| p_h\dot{u}_h\|^2 + <\sigma(Dp_h u_h), Dp_h\dot{u}_h>$$

$$+ \|Dp_h\dot{u}_h\|^2 = <f(t), p_h\dot{u}_h> .$$

Integrando de 0 a t e mudando variáveis na segunda parcela :

$$\|p_h\dot{u}_h\|^2(t) - \|p_h r_h u_1\|^2 + 2\int_0^1\int_{Dp_h r_h u_0}^{Dp_h u_h(t)} \sigma(\lambda)d\lambda dx$$

$$+ 2\int_0^t \|Dp_h\dot{u}_h\|^2(\tau)d\tau = 2\int_0^t <f,p_h\dot{u}_h>(\tau)d\tau \quad ,$$

ou seja,

$$(2.6)\qquad \|p_h\dot{u}_h\|^2(t)+2\int_0^1\int_0^{Dp_h u_h(t)}\sigma(\lambda)d\lambda dx+2\int_0^t \|Dp_h\dot{u}_h\|^2(\tau)d\tau$$

$$= \|p_h r_h u_1\|^2 + 2\int_0^1\int_0^{Dp_h r_h u_0}\sigma(\lambda)d\lambda dx+2\int_0^t <f,p_h\dot{u}_h>(\tau)d\tau \quad ,$$

equação que nos dá o balanço da energia do sistema.

Como

$$\int_0^t <f,p_h\dot{u}_h>d\tau \leq \int_0^t \|f\|\,\|p_h\dot{u}_h\|d\tau$$

$$\leq \|p_h\dot{u}_h\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(0,1))}\|f\|_{L^1(0,\infty;L^2(0,1))}$$

$$\leq \varepsilon\|p_h\dot{u}_h\|^2_{L^\infty(0,\infty;L^2(0,1))} + C(\varepsilon)\|f\|^2_{L^1(0,\infty;L^2(0,1))} \quad ,$$

para $\varepsilon > 0$ arbitrário, e, pela monotonicidade de σ,

$$\int_0^1 \int_0^{Dp_h u_h(t)} \sigma(\lambda)d\lambda dx \geq 0 \quad ,$$

concluimos que

$$\|p_h\dot{u}_h\|^2(t) + 2\int_0^t \|Dp_h\dot{u}_h\|^2(\tau)d\tau$$

$$\leq \|p_h r_h u_1\|^2 + 2\int_0^1 \int_0^{Dp_h r_h u_o} \sigma(\lambda)d\lambda dx + C(\varepsilon)\|f\|^2_{L^1(0,\infty;L^2(0,1))}$$

$$+ \varepsilon\|p_h\dot{u}_h\|^2_{L^\infty(0,\infty;L^2(0,1))} .$$

Daí, escolhendo ε convenientemente,

$$\|p_h\dot{u}_h\|^2_{L^\infty(0,\infty;L^2(0,1))} + \|Dp_h\dot{u}_h\|^2_{L^2(0,\infty;L^2(0,1))} \tag{2.7}$$

$$\leq C\left\{\|p_h r_h u_1\|^2 + \int_0^1 \int_0^{Dp_h r_h u_o} \sigma(\lambda)d\lambda dx + \|f\|^2_{L^1(0,\infty;L^2(0,1))}\right\}.$$

Observemos que o lado direito desta desigualdade pode ser estimado por um valor independente de h, já que , por (2.2) e o lema 1.1, $p_h r_h u_1 \to u_1$ e $Dp_h r_h u_o \to Du_o$ pontualmente.

Para obtermos uma estimativa para $D^2 p_h u_h$, nós primeiramente multiplicamos (2.3) por $-j^2\pi^2 u_h^j$ e somamos em j:

$$<p_h\ddot{u}_h, D^2 p_h u_h> + <\sigma(Dp_h u_h), D^3 p_h u_h> + <Dp_h\dot{u}_h, D^3 p_h u_h> =$$

$$= <f(t), D^2 p_h u_h> \quad .$$

Tendo em vista que $D^k p_h u_h(0,t) = D^k p_h u_h(1,t) = 0$ para $k = 0,2,4,\ldots$ e qualquer t,

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|D^2 p_h u_h\|^2 - \int_0^1 \sigma'(Dp_h u_h)\left[D^2 p_h u_h\right]^2 dx$$

$$+ <p_h\ddot{u}_h, D^2 p_h u_h> = <f(t), D^2 p_h u_h> \quad .$$

Então, integrando 0 a t, obtemos a identidade

$$(2.8) \qquad \|D^2 p_h u_h\|^2(t) + 2\int_0^t\int_0^1 \sigma'(Dp_h u_h)\left[D^2 p_h u_h\right]^2 d\tau dx$$

$$= \|D^2 p_h r_h u_o\|^2 - 2\int_0^t <f(\tau), D^2 p_h u_h> d\tau$$

$$+ 2\int_0^1 \left[D^2 p_h u_h(t).p_h\dot{u}_h(t) - D^2 p_h r_h u_o . p_h r_h u_1\right] dx$$

$$+ 2\int_0^t \|Dp_h\dot{u}_h\|^2 d\tau .$$

Pelas hipóteses sobre σ e a desigualdade de Cauchy, a (2.8) implica

$$\|D^2 p_h \dot{u}_h\|^2(t) \leq \|D^2 p_h r_h u_o\|^2 + 3\varepsilon\|D^2 p_h u_h\|^2_{L^\infty(0,\infty;L^2(0,1))}$$

$$+ C_1(\varepsilon)\|f\|^2_{L^1(0,\infty;L^2(0,1))} +$$

$$+ C_2(\varepsilon)\|p_h\dot{u}_h\|^2_{L^\infty(0,\infty);L^2(0,1))} + \|D^2 p_h r_h u_o\| \, \|p_h r_h u_1\| +$$

$$+ 2\|Dp_h\dot{u}_h\|^2_{L^2(0,\infty;L^2(0,1))} ,$$

para $\varepsilon > 0$ arbitrário. Escolhendo ε convenientemente e levando em conta (2.7),

$$\|D^2 p_h u_h\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(0,1))} \le C . \tag{2.9}$$

Aqui C é uma constante dependendo somente dos dados u_1, Du_o, D^2u_o e f.

Finalmente, uma última estimativa para $p_h\ddot{u}_h$. Multiplicamos (2.3) por $\ddot{u}_h^j$ e somamos em j, para obter

$$\|p_h\ddot{u}_h\|^2(t) + <\sigma(Dp_h u_h),Dp_h\ddot{u}_h>$$

$$+ <Dp_h\dot{u}_h,Dp_h\ddot{u}_h> = <f(t),p_h\ddot{u}_h> .$$

Integrando por partes em x onde apropriado e tudo de 0 até t:

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{d\tau}\|Dp_h\dot{u}_h\|^2(\tau)d\tau + \int_0^t\|p_h\ddot{u}_h\|^2(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t\int_0^1 \sigma'(Dp_h u_h)D^2p_h u_h\cdot p_h\ddot{u}_h d\tau dx + \int_0^t <f(\tau),p_h\ddot{u}_h> d\tau .$$

Como, por (2.9) e lema 1.1,

$$\sup_{t\ge 0}\ \sup_{0\le x\le 1} |Dp_h u_h(x,t)| \le \text{const} , \tag{2.10}$$

$\sup_\lambda \sigma'(\lambda)$ é uma constante finita, e então

$$\|Dp_h\dot{u}_h\|^2(t) + 2\int_0^t \|p_h\ddot{u}_h\|^2(\tau)d\tau$$

$$\leq 2\varepsilon \int_0^t \|p_h\ddot{u}_h\|^2(\tau)d\tau + C(\varepsilon)\int_0^t \|D^2p_hu_h\|^2(\tau)d\tau$$

$$+ C_1(\varepsilon)\int_0^t \|f\|^2(\tau)d\tau + \|Dp_hr_hu_1\|^2 \quad ,$$

para $\varepsilon > 0$ arbitrário. Observamos que de (2.8),(2.7),(2.9), lema 1.1 e (2.10), conclui-se também que $\inf_\lambda \sigma'(\lambda) > 0$ e

$$(2.11) \qquad \int_0^t \|D^2p_hu_h\|^2\, d\tau \leq \frac{\text{const}}{2\inf\sigma'(\lambda)} \quad , \quad t \geq 0 \, .$$

Daí, escolhendo ε convenientemente,

$$(2.12) \qquad \|Dp_h\dot{u}_h\|^2(t) + \int_0^t \|p_h\ddot{u}_h\|^2 d\tau \leq C \quad , \quad t \geq 0 \quad ,$$

onde C é uma constante dependendo somente de u_1, Du_1, Du_o, D^2u_o e f.

Resumindo:

$$(2.13) \qquad \|p_hu_h\|_{L^\infty(0,\infty;H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1))} \leq \text{const.} \quad ,$$

$$(2.14) \qquad \|p_hu_h\|_{L^2(0,\infty;H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1))} \leq \text{const.} \quad ,$$

$$(2.15) \qquad \|p_h\dot{u}_h\|_{L^\infty(0,\infty;H_0^1(0,1))} \leq \text{const.} \quad ,$$

$$(2.16) \qquad \|p_h\dot{u}_h\|_{L^2(0,\infty;H_0^1(0,1))} \leq \text{const.} \quad ,$$

$$(2.17) \qquad \|p_h\ddot{u}_h\|_{L^2(0,\infty;L^2(0,1))} \leq \text{const.} \quad ,$$

onde estas constantes são independentes de h.

ETAPA (iii) - As estimativas (2.13)-(2.17) nos dizem, entre outras coisas, que quando $h \to 0$, as $p_h u_h$ ficam num conjunto limitado de

$$H^2(Q_T) = \left\{ f \varepsilon L^2(Q_T) \;\middle|\; \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial t^j} \varepsilon L^2(Q_T),\quad i + j \leq 2 \right\},$$

para qualquer $T > 0$ dado. Daí, pelo teorema 3.6 (Rellich) de Lions [4], podemos extrair uma subsequência $p_{h_k} u_{h_k}$ que converge em $H^1(Q_T)$ para uma função u. Vamos mostrar que u é a solução do problema (1.6)-(1.10).

Na realidade $u \varepsilon H^2(Q_T)$, visto que

$$(D^2 u, \phi) = -(Du, D\phi) = \lim_{k\to\infty} \int_{Q_T} D^2 p_{h_k} u_{h_k} \, \phi \, dx\, dt, \quad \phi \varepsilon \mathcal{D}(Q_T),$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} u, \phi\right) = -\left(\frac{du}{dt}, \frac{d\phi}{dt}\right) = \lim_{k\to\infty} \int_{Q_T} p_{h_k} \ddot{u}_{h_k} \, \phi \, dxdt, \phi \varepsilon \mathcal{D}(Q_T),$$

$$\left(\frac{d}{dt} Du, \phi\right) = -\left(Du, \frac{d\phi}{dt}\right) = \lim_{k\to\infty} \int_{Q_T} Dp_{h_k} \dot{u}_{h_k} \, \phi \, dxdt, \quad \phi \varepsilon \mathcal{D}(Q_T),$$

onde $\mathcal{D}(Q_T)$ é o espaço das funções teste para distribuições em Q_T e $(.,.)$ representa a dualidade $(\mathcal{D}', \mathcal{D})$. Decorre daí, por (2.14), (2.17) e (2.16), respectivamente,

$$|(D^2 u, \phi)| \leq \text{const.} \|\phi\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}, \phi \varepsilon \mathcal{D}(Q_T),$$

$$\left|\left(\frac{d^2 u}{dt^2}, \phi\right)\right| \leq \text{const.} \|\phi\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}, \phi \varepsilon \mathcal{D}(Q_T),$$

$$\left|\left(\frac{d}{dt} Du, \phi\right)\right| \leq \text{const.} \|\phi\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}, \phi \varepsilon \mathcal{D}(Q_T),$$

que são as condições para D^2u, $\frac{d^2u}{dt^2}$ e $\frac{d}{dt}$ Du estarem em $L^2(Q_T) = L^2(0,T;L^2(0,1))$. Deve-se mencionar também que, devido ao teorema 3.4 de Lions [4], $u:Q_T \to R$ é contínua.

Levando em conta a definição das $p_{h_k}u_{h_k}$, é óbvio que u satisfaz (1.6) e (1.7). Tomando o limite $k\to\infty$ na equação (2.3) e tendo em vista que σ é contínua e $\bigcup_h p_h V_h$ é densa em $H_0^1(0,1)$, conclui-se que u satisfaz (1.8). Falta provar (1.9), (1.10) e a unicidade.

Notemos que pelo lema 1.2 de Lions 5 , após modificação eventual num conjunto de medida zero,

$$u: [0,T] \to H_0^1(0,1) \quad e \quad \frac{du}{dt}: [0,T] \to H_0^1(0,1)$$

são contínuas, o que dá um sentido preciso a (1.9) e (1.10).

Sabemos que

$$\int_0^T \langle p_{h_k}u_{h_k}, v \rangle \, dt \to \int_0^T \langle u,v\rangle \, dt \tag{2.18}$$

e

$$\int_0^T \langle p_{h_k}\dot{u}_{h_k}, v\rangle \to \int_0^T \langle \frac{du}{dt}, v\rangle \, dt \quad , \tag{2.19}$$

para $v\varepsilon\ L^2(0,T;L^2(0,1)), k\to\infty$. Daí, tomando $v = \theta w$ em (2.19) e $v = \theta' w$ em (2.18), com $w\varepsilon\ L^2(0,1)$ e $\theta\ \varepsilon\ C^1(0,T)$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$, temos, por um lado,

$$\int_0^T \langle p_{h_k}u_{h_k}, \theta' w\rangle dt + \int_0^T \langle p_{h_k}\dot{u}_{h_k}, \theta w\rangle dt$$

$$= - \langle p_{h_k}u_{h_k}(0), w\rangle = - \langle p_{h_k}r_{h_k}u_o, w\rangle$$

$$+ \int_0^T <u,\theta' w>dt + \int_0^T <\frac{du}{dt}, \theta w>dt$$

$$= - <u(0),w> \quad , \quad \forall w \varepsilon L^2(0,1) \; ,$$

e por outro lado, por (2.2),

$$p_{h_k} r_{h_k} u_o \to u_o \quad \text{em } H_o^1(0,1),$$

o que mostra (1.9).

A demonstração de (1.10) é feita analogamente.

Para mostrar agora a unicidade, suponhamos que existissem duas soluções u e v, correspondentes aos mesmos dados. A função $w = u - v$ satisfaria então as condições

(2.19) $$w(0) = \frac{dw}{dt}(0) = 0$$

(2.20) $$<\frac{d^2w}{dt^2}, \phi> + <\frac{d}{dt} Dw, D\phi>$$

$$+ <\sigma(Du),D\phi> - <\sigma(Dv),D\phi> = 0 \; ,$$

$$\phi\varepsilon \; H_o^1(0,1) \quad , \quad t\varepsilon(0,T) \quad .$$

Escolhendo $\phi = \frac{dw}{dt}$ em (2.20), integrando de 0 a t e lembrando (2.19),

$$\|\frac{dw}{dt}\|^2(t) + 2 \int_o^t \|\frac{d}{d\tau}Dw\|^2(\tau)d\tau + 2 \int_o^1 \int_{Dv(t)}^{Du(t)} \sigma(\lambda)d\lambda dx = 0 \quad ,$$

isto é

(2.21) $$\|\frac{dw}{dt}\|^2(t) \leq 2 \int_o^1 \int_{Du(t)}^{Dv(t)} \sigma(\lambda)d\lambda dx$$

$$\leq \text{const.} \, \|Dw\|^2(t) \quad ,$$

por (2.13) e o lema 1.1.

Tomando agora $\phi = w$ em (2.20),

$$<\frac{d^2w}{dt^2}, w> + <\frac{d}{dt}\, Dw, Dw> +$$

$$+ <\sigma(Du) - \sigma(Dv), Dw> = 0 \quad ,$$

ou seja

$$<\frac{d^2w}{dt^2}, w> + \frac{1}{2}\, \frac{d}{dt}\, \|Dw\|^2 \leq 0 \quad ,$$

por (1.5). Como

$$<\frac{d^2w}{dt^2}, w> = \frac{1}{2}\, \frac{d^2}{dt^2}\, \|w\|^2 - \|\frac{dw}{dt}\|^2 \quad ,$$

a inequação acima fica, após uma integração e lembrando(2.19),

$$\text{(2.22)} \qquad \frac{d}{dt}\, \|w\|^2(t) + \|Dw\|^2(t) \leq 2 \int_0^t \|\frac{dw}{dt}\|^2(\tau)\, d\tau \quad .$$

Combinando (2.22) com (2.21), obtemos

$$\frac{d}{dt}\|w\|^2(t) + \|Dw\|^2(t) \leq \text{const.} \left\{ \|w\|^2(t) + \int_0^t \|Dw\|^2 d\tau \right\} \quad ,$$

inequação que dá, como única solução,

$$\|w\|^2(t) + \|Dw\|^2(t) = 0 \quad , \quad t \varepsilon [0,T] \quad ,$$

encerrando portanto a prova da unicidade.

<u>ETAPA IV</u> - Para concluir, mostremos que os deslocamentos $u(x,t)$ e as velocidades $\frac{du}{dt}(x,t)$ vão para zero quando $t \to \infty$. Isto já foi provado em [3] e colocamos a demonstração aqui em nome da completicidade do trabalho.

Ora, por (2.16), $\|\frac{du}{dt}\|^2(t)$ é integrável em $[0,+\infty)$, de modo que $\lim_{t\to\infty}\|\frac{du}{dt}\|(t) = 0$ decorrerá do fato de $\|\frac{du}{dt}\|^2(t)$ ser uniformemente contínua em $[0,+\infty)$, que verificaremos a seguir. Escrevendo a equação (2.6) para u e instantes t_1 e t_2 no lugar de 0 e t, obtemos

$$(2.23) \qquad \left| \|\frac{du}{dt}\|^2(t_2) - \|\frac{du}{dt}\|^2(t_1) \right| \leq 2 \int_{t_1}^{t_2} \|\frac{d}{dt}Du\|^2 d\tau + \left| 2 \int_0^1 \int_{Du(x,t_1)}^{Du(x,t_2)} \sigma(\lambda)\, d\lambda\, dx \right| + \int_{t_1}^{t_2} \|\frac{du}{dt}\|^2 d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \|f\|^2 d\tau \; .$$

Por (2.16) e a hipótese sobre f, dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe um $\delta > 0$ tal que se $|t_1 - t_2| < \delta$ então

$$(2.24) \qquad 2 \int_{t_1}^{t_2} \|\frac{d}{dt}Du\|^2 d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \|\frac{du}{dt}\|^2 d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \|f\|^2 d\tau < \varepsilon \; .$$

Por outro lado, pelo lema 1.1 e a limitação uniforme de $\|Du\|(t)$,

$$(2.25)\qquad \left|2\int_0^1\int_{Du(x,t_1)}^{Du(x,t_2)}\sigma(\lambda)d\lambda dx\right| \le \text{const.}\left\{\int_{t_1}^{t_2}\|Du\|^2 d\tau +\right.$$

$$\left.+\int_{t_1}^{t_2}\|\tfrac{d}{dt}Du\|^2 d\tau\right\} < \text{const. } \varepsilon ,$$

para $|t_1-t_2|<\delta$. Combinando (2.23) com (2.24) e (2.25) temos a continuidade uniforme de $\frac{du}{dt}$.

Por (2.11), existe uma sequência de pontos $\{t_i | i = 1, 2, 3\ldots\}$ tais que $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = +\infty$ e $\lim\limits_{i\to\infty}\|D^2u\|^2(t_i)=0$. A identidade (2.8) escrita para u com t_i no lugar de $t = 0$ nos dá, para $t \ge t_i$,

$$\|D^2u\|^2(t) \le 2\int_{t_i}^{t}\|\tfrac{d}{dt}Du\|^2 d\tau + \|D^2u\|^2(t_i)$$

$$+\ 2\ \|D^2u\|(t)\ \|\tfrac{du}{dt}\|(t) + 2\ \|D^2u\|(t_i)\|\tfrac{du}{dt}\|(t_i)$$

$$+\int_{t_i}^{t}\|f\|^2 d\tau + \int_{t_i}^{t}\|D^2u\|^2 d\tau \quad .$$

A integrabilidade de $\|\frac{dDu}{dt}\|$, $\|f\|$, $\|D^2u\|$, e a limitação uniforme de $\|D^2u\|(t)$ implicam, pela desigualdade acima , $\lim\limits_{t\to\infty}\|D^2u\| = 0$. Como

$$\|u\|(t) \le \|Du\|(t) \le \|D^2u\|(t) \quad ,$$

o deslocamento $u(x,t)$ também vai para zero quando $t\to\infty$, completando a demonstração do Teorema 1.1.

REFERÊNCIAS

[1] P.G. Ciarlet, M.H. Schultz, and R.S. Varga, Numerical Methods of High-Order Accuracy for Nonlinear Boundary Value Problems, Numer. Math., 12, 266-279, (1968).

[2] G. Duvaut et J.L. Lions, Les Inequations en Mécanique et en Physique, Dunod, Paris (1972).

[3] J.M. Greenberg, R.C. MacCamy, and V.J. Mizel, On the Existence, Uniqueness, and Stability of Solutions of the Equation $\sigma'(u_x)u_{xx}+\lambda u_{xtx} = \rho_o u_{tt}$, J. Math. and Mech., vol. 17, Nº 7 (1968).

[4] J.L. Lions, Equations Differentielles Operationelles et Problémes aux Limites, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1961).

[5] J.L. Lions, Quelques Méthods de Résolution des Problémes aux Limites Nonlineaires, Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1969).

[6] M.A. Raupp, Computation of Longitudinal Motions of a Bar, por aparecer nos Relatórios do CBPF, série A.

[7] S.L. Sobolev, Sur les Equations aux Derivées Partielles Hyperboliques Nonlineaires, Edizione Cremonese, Roma (1961).