Notas de Física Nº 18

EQUAÇÃO DE PROCA EM COORDENADAS ESFÉRICAS*

Samuel Wallace Mac-Dowell
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

2 de Outubro de 1954

Introdução

O problema das partículas de "spin" 1 no campo central, tem sido tratado por diversos autores. As equações de Proca para estas partículas, escritas sob a forma "hamiltoniana", foram estudadas por Gunn,[1] que procurou resolve-las para o potencial central.

A separação da equação em coordenadas esféricas, pode ser obtida, em princípio, por diferentes processos indicados por Gunn:

a) Exprimindo todos os operadores, inclusive os de "spin", em coordenadas esféricas.

b) Determinando as auto-funções do momento angular total e a representação dos operadores da "hamiltoniana" com estas auto-funções.

c) Utilizando um método operacional semelhante ao de Dirac para as partículas de "spin" 1/2.

O método adotado por Gunn foi uma combinação do segundo e terceiro indicados.

No presente trabalho mostraremos como obter a separação da

---

*Trabalho realizado com auxílio do Conselho Nacional de Pesquisas.

equação, por um método exclusivamente operacional, isto é, pelo método c) indicado por Gunn. Êste modo de proceder apresenta a vantagem de ser muito simplificado em comparação com os anteriores e conduzir diretamente a uma forma operacional e compacta da equação.

Campo Central

A equação das partículas de "spin" 1 no campo central pode ser escrita:[2]

$$\rho_1\left(i\frac{\partial}{\partial t}-eA_0\right)\psi=\left\{m+\frac{p^2}{2m}-\frac{\rho_3}{2m}\left[p^2-2(\vec{S}\cdot\vec{p})^2\right]\right\}\psi \qquad (1)$$

adotando um sistema de unidades com: $\hbar=c=1$, e $r_0=\frac{\hbar^2}{me^2}=1$

A função de onda ψ, tem seis componentes e ρ_1, ρ_2, ρ_3, são matrizes de Pauli; o potencial A_0 é uma função de r apenas; as componentes de $\vec{S}$ são os operadores de momento angular para "spin" 1. Para maior simplicidade das demonstrações, usaremos para $\vec{S}$ a seguinte representação:

$$S_k=\begin{pmatrix} S_{ij} & 0 \\ 0 & S_{ij}\end{pmatrix} \qquad (i,j,k=(1,2,3))$$

com:

$$S_{ij}=i(t_{ji}-t_{ij}) \qquad (2)$$

As matrizes t_{ij} tem os elementos (rs) dados por:

$$(t_{ij})_{rs}=\delta_{ir}\delta_{js} \qquad r,s=1,2,3 \qquad (3)$$

e possuem as seguintes propriedades:

$$t_{ij}t_{kl}=\delta_{jk}t_{il} \qquad (4)$$

Os auto-valores da energia são determinados pela equação:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi$$

No campo central o momento angular total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, é constante de movimento:

$$J^2\psi = j(j+1)\psi$$

Consideremos separadamente os diversos casos possíveis.

-1) j = 0

Investiguemos primeiramente êste caso particular que não apresenta nenhuma dificuldade pois também $L^2 = S^2 = 2$ é constante de movimento.

Teremos então:

$$\vec{S}\cdot\vec{p} = \vec{J}\cdot\vec{p} - \vec{L}\cdot\vec{p} = -\vec{r}\wedge\vec{p}\cdot\vec{p} = 0$$

A equação reduz-se a:

$$\rho_1(E - eA_0)\psi = \left[m + \frac{p^2}{2m}(1-\rho_3)\right]\psi$$

Pondo $\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ e eliminando ψ_1, obtem-se:

$$(E - eA_0)^2\psi_2 = (m^2 + p^2)\psi_2$$

que é a equação de Klein-Gordon para o campo central.

-2) j ≠ 0.

Poderemos por, neste caso:

$$L^2 = (j+\eta)(j+\eta+1) = j(j+1) + (2j+1)\eta + \eta^2 \tag{5}$$

sendo η um operador com auto-valores 0, $\pm$ 1 que satisfaz a equação

$$\eta^3 - \eta = 0 \tag{6}$$

Por outro lado:

$$j(j+1) = L^2 + 2\vec{S}\cdot\vec{L} + 2 \tag{7}$$

logo

$$\vec{S}\cdot\vec{L} + 1 = -\left(j + \frac{1}{2}\right)\eta - \frac{1}{2}\eta^2 \tag{8}$$

Como a "hamiltoniana" é uma função par de $\vec{r}$ e $\vec{p}$, então o operador P, de inversão dos eixos espaciais é constante de movimento. Porém, êste operador pode ser representado do seguinte modo:

$$P = \cos(j+\eta)\pi = (-1)^j \cos\eta\pi$$

de acôrdo com as conhecidas propriedades dos esféricos harmônicos.

Desenvolvendo o $\cos\eta\pi$ em série de potência e considerando a relação (6) obtem-se:

$$P = (-1)^j(1 - 2\eta^2)$$

Então η^2 é constante de movimento com auto-valores 0 e 1.

-a) $\eta^2 = 0$.

Então a relação (8) fica:

$$\vec{S}\cdot\vec{L} + 1 = 0.$$

Porém considerando que

$$p^2 - 2(\vec{S}\cdot\vec{p})^2 = -p^2 + 2t_{ij}p_ip_j$$

e

$$S\cdot L = i\left(t_{ij} - t_{ji}\right)x_j\, p_i$$

onde a repetição de um índice i, significa soma para i=1,2,3, pode-se verificar sem dificuldade que

$$\left[\, p^2 - 2\left(\vec{S}\cdot\vec{p}\right)^2, \left(\vec{S}\cdot\vec{L} + \frac{3}{2}\right)\right]_+ = p^2 \qquad (9)$$

sendo:

$$\left[A, B\right]_\pm = AB \pm BA$$

Então no sub-espaço onde estamos operando tem-se:

$$p^2 - 2\left(\vec{S}\cdot\vec{p}\right)^2 = -p^2$$

A equação (1) fica:

$$\rho_1\left(E - eA_0\right)\Psi = \left[m + \frac{p^2}{2m}\left(1 + \rho_3\right)\right]\Psi$$

Procedendo como no caso em que j = 0, recairemos novamente na equação de Klein-Gordon para a determinação dos níveis de energia.

-b) $\eta^2 = 1$

Para estudar êste caso, teremos que encontrar a representação do operador $\left[\, p^2 - 2(\vec{S}\cdot\vec{p}\,)^2\right]$ que aparece na equação (1).

Notemos inicialmente:

$$\left[S\cdot r, p^2\right]_- = 2i\left(\vec{S}\cdot\vec{p}\right) \text{ logo } \left[\left[(\vec{S}\cdot\vec{r})^2, p^2\right]_-, p^2\right]_- = -8\left(\vec{S}\cdot\vec{p}\right)^2$$

Anàlogamente

$$\left[\left[r^2, p^2\right]_-, p^2\right]_- = -8p^2$$

Portanto:

$$p^2 - 2(\vec{S}\cdot\vec{p})^2 = -\frac{1}{8}\left[\left[r^2 - 2(\vec{S}\cdot\vec{r})^2, p^2\right]_-, p^2\right]_- \qquad (10)$$

e assim o problema reduz-se a encontrar a representação dos operadores $[r^2 - 2(\vec{S}\cdot\vec{r})^2]$ e η que satisfazem as seguintes propriedades fundamentais:

$$\eta^2 = 1 \qquad (11a)$$

$$\left[r^2 - 2(\vec{S}\cdot\vec{r})^2\right]^2 = r^4 \qquad (11b)$$

$$\left[r^2 - 2(\vec{S}\cdot\vec{r})^2, (j+\tfrac{1}{2})\eta\right]_+ = r^2 \qquad (11c)$$

A propriedade (11a) é verdadeira no sub-espaço em que estamos operando. A propriedade (11b) é uma consequência da regra mais geral:

$$(\vec{S}\cdot\vec{u})^3 = (\vec{S}\cdot\vec{u})u^2$$

sempre que

$$[u_i, u_j]_- = 0, \quad [u_i, S_j]_- = 0 \qquad (12)$$

e a propriedade (11c) é análoga à (9), considerando que no caso presente (8) fica:

$$-\left(\vec{S}\cdot\vec{L} + \frac{3}{2}\right) = \left(j + \frac{1}{2}\right)\eta$$

Poderemos então escolher uma representação em que

$$r^2 - 2(\vec{S}\cdot\vec{r})^2 = \sigma_3 r^2 \qquad (13)$$

e

$$\eta = \frac{1}{2j+1}\left(\sigma_3 + 2\sqrt{j(j+1)}\,\sigma_1\right) \tag{14}$$

compactível com as propriedades (11), sendo σ_1, σ_2, σ_3, as matrizes de Pauli.

Encontraremos então:

$$p^2 = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{L^2}{r^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[j(j+1) + (2j+1)\eta + 1\right]$$

e

$$p^2 - 2(\vec{S}\cdot\vec{p})^2 = -\frac{1}{8}\left[\left[\sigma_3 r^2, p^2\right]_-, p^2\right]_- =$$

$$= \sigma_3 p^2 - 2\sqrt{j(j+1)}\,\frac{i\sigma_2}{r^2}\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)\eta + \frac{1}{2} + \frac{\partial}{\partial r} r\right] \tag{15}$$

Com esta representação para os operadores da "hamiltoniana" a equação radial fica:

$$\rho_1(E - eA_0)\psi = \left\{m + (1-\rho_3\sigma_3)\frac{p^2}{2m} + \frac{i\sigma_2\sqrt{j(j+1)}}{r^2}\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)\eta + \frac{1}{2} + \frac{\partial}{\partial r} r\right]\frac{\rho_3}{m}\right\}\psi \tag{16}$$

que coincide com a obtida por Gunn.

Para passar à forma quadrática e reduzir o número de componentes é conveniente multiplicar ambos os membros da equação por:

$$m + \frac{p^2}{2m} - \frac{\rho_3}{2m}\left[p^2 - 2(S\cdot p)^2\right] \tag{17}$$

O segundo membro reduz-se simplesmente a:

$$(m^2 + p^2)\psi$$

enquanto que invertendo a órdem dos fatores no primeiro membro e tendo em conta a equação primitiva, ficaremos com:

$$\left\{(E-eA_0)^2+\frac{e}{2m}\rho_1\left[(1-\rho_3\sigma_3)A_0''+2\frac{A_0'}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\right)-\right.$$
$$\left.-2i\sigma\sqrt{j(j+1)}\,\rho_3\frac{A_0'}{r}\Big]\right\}\psi=(m^2+p^2)\psi \tag{18}$$

Tôdas as soluções da equação (16) são comuns à (18), porém nem tôdas as soluções desta satisfazem è primitiva.

Obtem-se um sistema de equações equivalente ao primitivo, combinando a segunda e terceira de (18) com a primeira e quarta de (16) que são:

$$(E-eA_0)\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_2\end{pmatrix}=\frac{1}{m}\left(m^2+\frac{j(j+1)}{r^2}\right)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_4\end{pmatrix}+\frac{1}{2m}\frac{\sqrt{j(j+1)}}{r^2}\left(1-\sigma_3+2\frac{\partial}{\partial r}r\right)\sigma_1\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

Pode-se então, eliminar $\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_4\end{pmatrix}$, resultando:

$$(E-eA_0)^2\varphi=\left\{m^2+p^2+\frac{2j(j+1)}{m^2r^2+j(j+1)}\left[\frac{m\sigma_1}{\sqrt{j(j+1)}}\left(E-eA_0-m\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{r^2}\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\psi+\frac{1}{2}+\frac{\partial}{\partial r}r\right)\right]+\frac{e}{m}\sqrt{j(j+1)}\,\sigma_1\frac{A_0'}{r}\right\}\varphi \tag{19}$$

sendo

$$\varphi=\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

Esta equação de segunda órdem, foi convenientemente examinada por Case[3], para um potencial coulombiano.

Ao professor J. Tiomno que nos orientou e estimulou neste trabalho, apresentando também valiosas sugestões, queremos manifestar o nosso sincero agradecimento. Tambem desejamos agradecer a Universidade do Recife sob cujos auspicios tivemos oportunidade de estagear no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.

1 J. C. Gunn - Proc. Roy. Soc., 193, 559 (1948)

2 J. J. Giambiagi and J. Tiomno - Non-Relativistic Equation for Particles with Spin 1. - Notas de Física Nº 14.
Êstes autores, tal como Case e outros usam uma representação diferente da que adotamos.

3 K. M. Case - Phys. Rev. 80,797 (1950).