

NOTAS DE FÍSICA

VOLUME IV

Nº 17

DISTRIBUIÇÃO ANGULAR EM PROCESSOS DE REMOÇÃO DE UM NEUTRON  
DO Be<sup>9</sup> A BAIXAS ENERGIAS

by

A. G. DE PINHO FILHO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71

RIO DE JANEIRO

1958

DISTRIBUIÇÃO ANGULAR EM PROCESSOS DE REMOÇÃO DE UM NEUTRON  
DO  $\text{Be}^9$  A BAIXAS ENERGIAS

A. G. de Pinho Filho

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, D. F.

(Recebido em 29 de setembro de 1958)

I. INTRODUÇÃO

Um modelo de dois corpos tem sido usado com sucesso para o  $\text{Be}^9$ . Após algumas tentativas prévias<sup>1</sup> de êxito relativo, Guth e Mullin<sup>2</sup> explicaram satisfatoriamente o comportamento das seções de choque para eletro e foto-desintegração em baixas energias. Uberall<sup>3</sup> procurou estender o cálculo às altas energias, mas seus resultados não concordam com os dados experimentais<sup>4</sup> o que aliás devia ser esperado a priori pela própria natureza do modelo adotado.

O uso de tal modelo baseia-se no fato de possuir o  $\text{Be}^9$  um neutron muito pouco ligado (energia de ligação de 1,667 Mev<sup>5</sup>, cinco a seis vezes menor que a energia de ligação média por nucleon). Este fato sugere naturalmente um modelo em que o neutron pouco ligado se

move em um poço de potencial criado pelo restante do núcleo. Se o modelo é insuficiente para descrever, por exemplo, o momento magnético (o modelo " $2\alpha + n$ " é preferível)<sup>6</sup> ou reações a altas energias, onde se deve considerar a possível participação dos demais nucleons, deve-se, no entanto, esperar que seja uma boa aproximação para processos de desintegração em que condições energéticas permitem apenas a remoção do neutron pouco ligado<sup>7</sup>. Apesar da grande instabilidade do núcleo residual, o  $\text{Be}^8(8)$ , a sua vida média é ainda muito grande comparada com o tempo de remoção do neutron.

A interação entre o  $\text{Be}^8$  e o neutron será descrita por forças não tensoriais e independentes do spin de modo que se pode usar um potencial central tipo poço quadrado definido por dois parâmetros, o raio  $r_0$  e a profundidade  $V$ . Guth e Mullin<sup>2</sup> tiveram de introduzir forças de Majorana, um potencial dependente da paridade do estado, de modo a disporem de mais um parâmetro para ajustar as curvas teóricas com os dados experimentais.

Para o estado fundamental, um estado  $p\ 3/2$ , obtemos:

$$r_0 = 5 \times 10^{-13} \text{cm}$$

$$|\epsilon| = 1,667 \text{ Mev}$$

$$V_{8-n}(r_n) = -V \text{ para } r \leq r_0 \quad (1)$$

$$V = 12,04 \text{ Mev}$$

onde  $\epsilon$  é a energia de ligação do neutron<sup>9</sup>.

Para um potencial central, a função de onda que descreve o sistema pode ser escrita como o produto de uma função radial por uma função das coordenadas angulares e de spin.

No estado fundamental temos:

$$\Psi_9 (l = 1, j = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}; m_j) = R_{1,3/2}(r_n) \mathcal{Y}_{1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^{m_j}(\theta_n, \varphi_n, \sigma_n)$$

sendo

$$R_{1,3/2}(r_n) = A j_1(\beta r_n) \text{ para } r_n \leq r_0$$

$$R_{1,3/2}(r_n) = B h_1^{(1)}(i\alpha r_n) \text{ para } r_n \geq r_0$$

$$\mathcal{Y}_{1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^{m_j}(\theta_n, \varphi_n, \sigma_n) = \sum_{m_l} (l \frac{1}{2} m_l m_{s_n} | l \frac{1}{2} \frac{3}{2} m_j) Y_l^{m_l}(\theta_n, \varphi_n) \cdot \delta(\sigma_n, m_{s_n})$$

com

$$\alpha^2 = 2 M_{8-n} |\epsilon| / \hbar^2 ; \beta^2 = 2 M_{8-n} (V - |\epsilon|) / \hbar^2$$

$$|A|^2 = \frac{(2\beta^3) (\beta r_0)}{\sin^2 \beta r_0 \left[ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 (2 + \alpha r_0) + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 (1 + \alpha r_0) - 1 \right] + (\beta r_0)^2}$$

$$B = -A \sin \beta r_0$$

onde  $\vec{r}_n (r_n, \theta_n, \varphi_n)$  é o vetor de posição do neutron em relação ao  $\text{Be}^8$ ,  $j_1$  é uma função de Bessel esférica,  $h_1^{(1)}$  é uma função de Hankel esférica,  $Y_l^{m_l}$  é um harmônico esférico,  $\delta(\sigma, m_s)$  é uma função de spin dos nucleons tal que  $\delta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  significa spin paralelo ao eixo dos z e  $\delta(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  significa spin antiparalelo,

$(l \frac{1}{2} m_l m_{s_n} | l \frac{1}{2} \frac{3}{2} m_j)$  é um coeficiente de Clebsh-Gordan e  $M_{8-n}$  a massa reduzida do sistema  $\text{Be}^8 + n$ .

## II. SEÇÃO DE CHOQUE DIFERENCIAL PARA A REAÇÃO $\text{Be}^9(p,d)$

A reação  $\text{Be}^9(p,d)$  será considerada como um processo de "pick-up". O neutron pouco ligado é removido pelo proton incidente por uma interação direta, formando-se um dêuteron. A seção de choque diferencial é obtida pela teoria geral das colisões com rearranjo de partículas<sup>10</sup> desprezando-se o efeito do campo coulombiano.

Desejamos resolver a equação de Schrödinger:

$$(H - E)\psi = 0 \quad (3)$$

onde o operador hamiltoniano pode ser escrito como:

$$H = H_{9-p} + H'_{9-p}$$

ou como:

$$H = H_{8-d} + H'_{8-d}$$

Os operadores hamiltonianos não perturbados para os sistemas inicial e final são:

$$H_{9-p} = H_9 + T_{9-p}$$

$$H_{8-d} = H_8 + H_d + T_{8-d}$$

e os termos de perturbação são:

$$H'_{9-p} = V_{9-p} = V_{8-p} + V_{n-p}$$

$$H'_{8-d} = V_{8-d} = V_{8-p} + V_{8-n}$$

$H_9$ ,  $H_8$  e  $H_d$  são respectivamente os operadores hamiltonianos internos dos núcleos  $\text{Be}^9$ ,  $\text{Be}^8$  e  $\text{H}^2$ , os  $H'$  são os operadores de energia potencial de interação e os  $T$  operadores de energia cinética do movimento relativo. Chamemos as funções de onda que descrevem os estados não perturbados dos núcleos de  $\text{Be}^9$ ,  $\text{Be}^8$  e  $\text{H}^2$ , respectivamente nos estados  $x, y$  e  $z$  de  $U_{9,x}(X)$ ,  $U_{8,j}(Y)$  e  $U_{d,z}(Z)$  onde  $X, Y$  e  $Z$  representam tôdas as coordenadas internas.

A parte espacial dessas funções são auto-funções das hamiltonianas internas pertencentes aos auto valores  $\epsilon$ ,  $E_{\beta,y}$  e  $E_{d,z}$ .

Podemos expandir a solução exata em termos do conjunto ortonormal completo das funções  $U_{\beta,y}(Y)$   $U_{d,z}(Z)$  sendo os coeficientes de expansão funções  $\omega_{yz}(\vec{r}_d)$  das coordenadas relativas dos dois núcleos que constituem o sistema final. Esses coeficientes satisfazem à equação

$$(\nabla_{\beta-d}^2 + k_{\beta-d}^2) \omega_{yz}(\vec{r}_d) = \frac{2M_{\beta-d}}{\hbar^2} \iint U_{\beta,y}(Y) U_{d,z}^+(Z) (V_{\beta-n} + V_{\beta-p}) \psi^d \tau_y d\tau_z \quad (4)$$

onde  $k_{\beta-d}^2 = \frac{2M_{\beta-d}}{\hbar^2} (E - E_{\beta-y} - E_{d,z})$  a cruz representa o transposto conjugado e as integrais são sobre todas as coordenadas espaciais. O momentum relativo do sistema final é  $\hbar \vec{k}_{\beta-d}$ .

Devemos calcular os coeficientes  $\omega_{yz}(\vec{r}_d)$  de modo que correspondam aos núcleos finais nos estados y e z e que derivam do estado inicial não perturbado  $\psi_0$ . É claro que:

$$\psi_0 = U_{\beta,x}(X) \delta(\sigma_p, m_{s_p}) \exp(i \vec{k}_{\beta-p} \cdot \vec{r}_p) \quad (5)$$

onde  $\vec{r}_p$  é o vetor de posição do proton em relação ao  $e^+$  e  $\hbar \vec{k}_{\beta-p}$  é o momentum do movimento relativo do sistema inicial.

Usando o método de Green, a forma assintótica dos coeficientes é

$$\omega_{yz}(\vec{r}_d) \xrightarrow{r_d \rightarrow \infty} f_{yz}(\theta) \frac{\exp(i k_{\beta-d} r_d)}{r_d} \quad (6)$$

onde  $f_{yz}(\theta) = -\frac{M_{\beta-d}}{2\pi\hbar^2} \iiint U_{\beta,y}^+(Y) U_{d,z}^+(Z) \exp(-i \vec{k}_{\beta-d} \cdot \vec{r}_d)$

$$(V_{\beta-n} + V_{\beta-p}) \psi^d \vec{r}_d d\tau_y d\tau_z$$

A normalização é tal que para  $\psi_0$  o fluxo incidente de núcleos

do sistema é igual à velocidade relativa inicial:

$\hbar k_{9-p}/M_{9-p}$  e para  $\psi$  o fluxo radial emergente de núcleos do sistema final, por ângulo sólido unitário, é igual a  $|f_{y,z}(\theta)|^2$  sendo a velocidade relativa final  $\hbar k_{8-d}/M_{8-d}$ .

A secção de choque diferencial no sistema do centro de massa é, depois de somarmos sobre os spins finais e tomarmos a média sobre os spins iniciais, dada pela seguinte expressão:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{9}{200} \frac{M^2}{(\pi \hbar^2)^2} \frac{k_{8-d}}{k_{9-p}} \sum_{m_{s_p}} \sum_{m_j} \sum_{m_{j_d}} |\mathcal{M}|^2 \quad (7)$$

onde  $M$  é a massa média de um nucleon e

$$\mathcal{M} = \iiint U_8^+(Y) U_{d,m_{j_d}}^+(Z) \exp(-i \vec{k}_{8-d} \cdot \vec{r}_d) (v_{e-n} + v_{e-p}) \psi d\vec{r}_d d\tau_Y d\tau_Z$$

Consideramos todos os núcleos envolvidos no estado fundamental de modo que podemos pôr para os índices x, y e z apenas as possíveis orientações dos vetores de spin. As terceiras componentes dos vetores de spin são  $m_j$  no  $Be^9$ , 0 no  $Be^8$  (que tem spin zero) e  $m_{j_d}$  no dêuteron.

A única aproximação feita foi a não consideração do efeito coulombiano. Introduzimos, agora, duas aproximações, a correspondente à "aproximação de stripping" e a aproximação de Born.

A primeira consiste, em nosso caso, em considerar que o proton incidente interage exclusivamente com o neutron pouco ligado do  $Be^9$ . Isto equivale a dizer que desprezamos a contribuição do elemento de matriz de  $V_{8-p}$ , o que implica em considerar muito pequena a probabilidade da presença do proton na zona de ação do potencial do  $Be^8$ . A repulsão coulombiana do proton justifica, em parte, essa aproximação em baixas energias.

A aproximação de Born consiste na substituição de  $\psi$  pela onda

plana  $\psi_0$  no elemento da matriz que aparece na eq. (7). Isto equivale a desprezar o efeito de tôdas as reações, inclusive a reação estudada. Uma justificativa teórica dessa aproximação, nas energias usuais em que se processam as reações de "stripping" e "pick-up, é difícil de ser encontrada; no entanto, ela tem sido usada com êxito para descrever o comportamento da distribuição angular.

Mais adiante serão analisadas essas aproximações.

Usando as equações (2) para escrever  $U_{9,m_j}(\chi)$  e integrando em  $d\mathcal{Z}_Y$  obtemos para o elemento de matriz  $\mathcal{M}$  a seguinte expressão:

$$\mathcal{M} = \iint U_{d,j_d}^+(z) R_{1,3/2}(r_n) v_{8-n}(r_n) \exp(-i\vec{k}_{8-d} \cdot \vec{r}_d) \cdot \\ \cdot \exp(i\vec{k}_{9-p} \cdot \vec{r}_p) \delta(\sigma_p, m_{s_p}) \mathcal{Y}_{1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^{m_j}(\theta_n, \varphi_n) dr_d^3 d\tau_z \quad (8)$$

Considerando que:

$$\vec{r}_p = \frac{8}{9} \vec{r}_n - \vec{p}$$

$$\vec{r}_d = \vec{r}_n - \frac{1}{2} \vec{p}$$

onde  $\vec{p}$  é o vetor que liga o proton ao neutron,

e definindo

$$\vec{K} = \frac{8}{9} \vec{k}_{9-p} - \vec{k}_{8-d}$$

$$\vec{k} = \frac{1}{2} \vec{k}_{8-d} - \vec{k}_{9-p}$$

podemos escrever

$$\exp(-i\vec{k}_{8-d} \cdot \vec{r}_d) \exp(i\vec{k}_{9-p} \cdot \vec{r}_p) = \exp(i\vec{K} \cdot \vec{r}_n) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{p})$$

e integrar em  $d\vec{r}_n$  e  $d\vec{p}$ .

Para o dêuteron no estado fundamental, vamos ignorar a presença



de forças tensoriais e considerar um estado S puro, escrevendo para a parte espacial uma função de Hulthén.

$$U_{d, m_{j_d}}(Z) = \sum_{m_{s_n}} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_{s_n} m_{s_p} \mid \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 m_{j_d} \right) \delta(\sigma_n, m_{s_n})$$

$$\delta(\sigma_p, m_{s_p}) \left[ \frac{\gamma}{2\pi(1-\gamma a)} \right]^{1/2} \left[ \frac{\exp(-\gamma\rho) - \exp(-\Gamma\rho)}{\rho} \right]$$

onde  $\gamma^2 = M \mid \epsilon_d \mid / \hbar^2$ , sendo  $\epsilon_d$  a energia de ligação do dêuteron.

Usamos, como Chew e Goldberger<sup>10</sup>,  $\Gamma \approx 7\gamma$ ;  $a$  é o alcance efetivo de força neutron-proton no estado triplet e se relaciona com os parâmetros  $\gamma$  e  $\Gamma$  através da relação  $a = \frac{4}{\gamma+\Gamma} - \frac{1}{\Gamma}$  logo  $a \approx 5/14\gamma$ .

Obtemos finalmente para a seção do choque diferencial no sistema do centro de massa:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{144}{25} \left( \frac{MV}{\hbar^2} \right)^2 C f_1 f_2 f_3 \quad (9)$$

onde  $C$  é uma constante adimensional;

$$C = \frac{\gamma}{\beta(1-\gamma a)} \cdot \frac{\beta r_0}{\sin^2 \beta r_0 \left[ \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^4 (2 + \alpha r_0) + \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 (1 + \alpha r_0) - 1 \right] + (\beta r_0)^2}$$

e as  $f$  são as seguintes funções:

$$f_1 = \frac{\eta}{k^4 K^2}$$

$$f_2 = \left\{ \frac{\left( \frac{\Gamma}{K} \right)^2 - \left( \frac{\gamma}{K} \right)^2}{\left[ 1 + \left( \frac{\Gamma}{K} \right)^2 \right] \left[ 1 + \left( \frac{\gamma}{K} \right)^2 \right]} \right\}^2$$

$$f_3 = \left\{ \frac{\beta}{\beta+k} \sin(\beta+K)r_0 + \frac{\beta}{\beta-K} \sin(\beta-K)r_0 + \frac{1}{Kr_0} \left[ \cos(\beta+K)r_0 - \right. \right.$$

$$- \cos (\beta - K) r_0 \left. \right\}^2$$

sendo:

$$\eta^2 = \frac{10}{9} \frac{Q}{E_p} + 1$$

$$K^2 = \frac{8}{25} \frac{ME_p}{h^2} (4 - 12\eta \cos \theta + 9\eta^2)$$

$$k^2 = \frac{9}{50} \frac{ME_p}{h^2} (9 - 12\eta \cos \theta + 4\eta^2)$$

com

$$Q = \left[ (M_g + M_p) - (M_g + M_d) \right] c^2$$

$E_p$  = energia cinética do proton incidente no sistema de laboratório.

No intervalo  $0 \leq \theta \leq 180$ ,  $K$  e  $k$  são funções crescentes de  $\theta$  de modo que  $f_1$  deve decrescer rapidamente, à medida que cresce o ângulo de emissão do dêuteron. Isto significa que o proton incidente captura com mais facilidade neutrons que têm um momentum interno tal que o dêuteron resultante saia numa direção não muito diferente da direção do proton incidente. Esta função dá o andamento geral da distribuição angular. O produto  $f_2 f_3$  tem como efeito, de um modo geral, uma modulação da função  $f_1$  tornando menos pronunciado o pico que aparece na direção de incidência do proton.

Para obter a seção de choque diferencial no sistema de laboratório devemos multiplicar o resultado da equação (9) pelo fator

$$\frac{1}{36\eta^2} \cdot \frac{(36\eta^2 + 12\eta \cos \theta + 1)^{3/2}}{6\eta + \cos \theta}$$

A relação entre os ângulos de emissão do dêuteron nos dois sistemas é dada por:

$$t_g \theta_L = \frac{6\eta \sin \theta}{1 + 6\eta \cos \theta}$$

### III. DISCUSSÃO DAS APROXIMAÇÕES FEITAS

#### III - 1 - Efeito do campo coulombiano.

Para levar em conta a presença do campo eletrostático devemos a) substituir a onda plana do movimento relativo do sistema  $Be^9-p$  por uma função de onda coulombiana (a onda plana correspondente multiplicada por um fator de distorsão); b) substituir a onda plana do movimento relativo do sistema  $Be^8-d$  por uma função de onda coulombiana (a onda plana correspondente multiplicada por um fator de distorção para um proton em  $\vec{r}_p' = \vec{r}_p + \frac{1}{9} \cdot \vec{r}_n$  com a velocidade do dêuteron); c) considerar a polarização coulombiana do dêuteron.

Este último efeito é desprezível sempre que a energia cinética do movimento relativo é maior que a diferença entre a altura da barreira coulombiana e a energia de ligação do dêuteron<sup>11</sup>. Essa condição se cumpre em todos os casos experimentais que iremos comparar com as curvas teóricas.

Se substituirmos no elemento de matriz as ondas planas por funções de onda coulombianas, as integrais ficam extremamente complicadas. Vamos nos limitar a avaliar, aproximadamente, a redução no valor absoluto da seção de choque diferencial. A aproximação a ser feita consiste em multiplicarmos o resultado da equação (9) pelo quadrado do módulo dos fatores de normalização das funções de onda coulombianas. Isto é equivalente a dizer que consideramos o valor da função hipergeométrica confluyente na origem; o fator de correção é igual ao produto das relações entre os quadrados dos módulos das fun-

ções de onda coulombianas e das ondas planas correspondentes na origem<sup>12</sup>. Assim, o fator de redução é:

$$F_c = \left[ \Gamma(1 + i n_p) \exp\left(-\frac{\pi}{2} n_p\right) \right]^2 \left[ \Gamma(1 + i n_d) \exp\left(-\frac{\pi}{2} n_d\right) \right]^2$$

$$= \frac{2\pi^2 n_p n_d \exp[-\pi(n_p + n_d)]}{\cos h[\pi(n_p + n_d)] - \cos h[\pi(n_p - n_d)]}$$

onde:

$$n_p = \frac{18 M e^2}{5 \hbar^2 k_{9-p}} ; \quad n_d = \frac{32 M e^2}{5 \hbar^2 k_{8-d}}$$

Com essa aproximação o valor da seção de choque diferencial fica reduzido pelo mesmo fator para todos os ângulos; assim não se altera a distribuição angular. Contudo, Yoccez<sup>13</sup> mostrou que a presença de campo eletrostático produz um certo achatamento na distribuição angular, aumentando a largura dos picos. Um tal efeito pode ser previsto com argumentos puramente qualitativos.

### III - 2 Aproximação de "pick-up".

A aproximação de "pick-up" é inteiramente análoga à aproximação de "stripping" em reações (d,p) ou (d,n) a qual consiste em desprezar-se a interação entre o núcleo alvo e o núcleon do deuteron incidente que é liberado. A consideração desse efeito de interação reduz o valor absoluto da seção de choque diferencial e atua na distribuição angular de modo a reduzir a largura dos picos<sup>14,15,16,17</sup>. Tobocman e Kalos<sup>17</sup> calcularam o efeito combinado da interação de ambos os núcleons do deuteron com o núcleo alvo em uma reação (d, p) ou (d, n) com a interação coulombiana e mostraram que desvios importantes podem ocorrer. Para o fator de redução do valor absoluto de seção de choque diferencial, Horowitz e Messiah<sup>15</sup> calcularam, com a hipótese de um potencial de esfera dura para des-

crever a interação entre o nucleon emergente e o núcleo alvo em uma reação de stripping, um valor que no caso de  $l = 1$ , vai de 1,30 na reação  $O^{16} (d,p) O^{17*}$  a 3,27 na reação  $Be^9 (d,n)B^{10*}$

### III - 3 Aproximação de Born.

Como foi dito em (II) uma justificativa para o uso da aproximação de Born nas reações de "stripping" e "pick-up", nas energias em que elas são geralmente estudadas, só pode ser encontrada nos resultados obtidos e não em qualquer suporte teórico. O uso da aproximação de Born no tratamento das reações de "stripping" foi introduzido por Bathia et. al.<sup>18</sup>.

O tratamento por êsse tipo de reações que então se dispunha era devido a Butler<sup>19</sup>. Butler não usa um método de perturbações e parece melhor justificado teoricamente. No entanto, pode mostrar-se<sup>20,21</sup> que os dois tratamentos conduzem a resultados muito semelhantes.

Para poder realizar as integrações que aparecem no elemento de matriz, Bathia é obrigado a fazer nova aproximação. Esta aproximação consiste em supor que o processo de captura de um dos nucleons do dêuteron tem lugar em uma estreita camada que envolve a superfície nuclear onde a atração que o núcleo alvo exerce sôbre a partícula a ser capturada é contrabalançada pela atração que sôbre ela exerce o outro nucleon do dêuteron. Isto equivale a substituir na onda incidente o módulo do vetor de posição da partícula que vai ser capturada por um valor constante, aproximadamente igual à soma do raio nuclear com o alcance das forças nucleares.

Com o modelo para o  $Be^9$  usado neste trabalho, as integrais são calculadas completamente sem a aproximação adicional de Bathia. Porém,

a possibilidade mesma do uso de um modelo de dois corpos para o  $\text{Be}^9$  é um argumento importante contra o uso da aproximação de Born. Realmente, o uso de tal modelo se baseia na pequena energia de ligação do neutron que vai ser removido. Na aproximação de Born apenas se considera a parte de  $\Psi$  que é uma onda plana de protons,  $\Psi_0$ . Assim, despreza-se o efeito de todas as reações inclusive os efeitos da própria reação (p,d). Mas se a energia de ligação do neutron é pequena, o neutron tem uma grande probabilidade (calculada em cerca de 40% de estar fora do poço e, dê-se modo, a interação que conduz ao 'pick-up' é bastante provável e a função está na realidade fortemente perturbada.

Horowitz e Messiah<sup>15</sup> argumentaram que a reação de espalhamento elástico de protons é o efeito mais importante e mesmo quanto todas as demais reações puderem ser esquecidas devemos substituir a  $\Psi$  pela  $\Psi_0$  mais uma onda de protons espalhadas elásticamente. O efeito é calculado por aqueles autores considerando espalhamento por esfera rígida.

#### IV. SEÇÃO DE CHOQUE DIFERENCIAL PARA A REAÇÃO $\text{Be}^9 (d,t) \text{Be}^8$ .

Procedendo de modo totalmente análogo ao que foi feito em (II), obtemos:

$$\frac{d\sigma'}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi\hbar^2)^2} M_{9-d} M_{8-t} \frac{k_{8-t}}{k_{9-d}} \frac{1}{12} \sum_{m_{j_d}} \sum_{m_j} \sum_{m_{j_t}} |\mathcal{M}'|^2 \quad (10)$$

onde

$$\mathcal{M}' = \iiint U_8^+(Y) U_{t, m_{j_t}}^+(T) \exp(-i \vec{k}_{8-t} \cdot \vec{r}_t) V_{8-n}(r_n) U_{9, m_j}(X) U_{d, m_{j_d}}(Z) \exp(i \vec{k}_{9-d} \cdot \vec{r}'_d) d\vec{r}_t d\tau_Y d\tau_T$$

sendo  $\hbar \cdot \vec{k}_{9-d}$  e  $\hbar \cdot \vec{k}_{8-t}$  os momentos dos movimentos relativos nos siste-

mas inicial e final (cuas massas reduzidas são respectivamente  $M_{9-d}$  e  $M_{8-t}$ ),  $\vec{r}_t$  e  $\vec{r}_d$  os vetores que unem os centros de massa nos núcleos  $\text{Be}^8 - \text{H}^3$  e  $\text{Be}^9 - \text{H}^2$  respectivamente,  $U_{t,m_j t}$  (T) é a função da onda interna do tritium no estado fundamental, sendo T um símbolo para tôdas as coordenadas internas. As integrais em  $d\zeta_y$  e  $d\zeta_T$  são sôbre as coordenadas espaciais internas do  $\text{Be}^8$  e do  $\text{H}^3$ . É claro que a aproximação de "pick-up" (que consiste aqui em pôr  $V_{8-d} = 0$ ) não é muito satisfatória devido à grande extensão de dêuteron que tem assim uma probabilidade de interagir com o  $\text{Be}^8$  maior que o proton na reação anterior.

Newns<sup>22</sup> calculou a distribuição angular para esta reação na aproximação de Born-Bathia e pôde concluir que a forma da função da onda interna do  $\text{H}^3$  no estado fundamental não é crítica para a determinação da distribuição angular. Para facilitar o trabalho de integração, usaremos, como êle, para a parte espacial, a função normalizada:

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right)^{3/2} \lambda^3 \exp \left[-\lambda^2 (r_{ij}^2 + r_{jk}^2 + r_{ik}^2)\right]$$

onde i, j, k representam os três nucleons. O estado fundamental do  $\text{H}^3$  é um estado S com spin total 1/2, de modo que a parte de spin da função da onda é:

$$\chi_{\frac{1}{2}}^{m_{j_t}} = \delta(\sigma_p, m_{j_t}) \sum_{m_{s_n}} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} - m_{s_n} m_{s_n} \mid \frac{1}{2} \frac{1}{2} 00\right) \delta(\sigma_n, m_{s_n}) \delta(\sigma_p, m_{s_p})$$

Usaremos como coordenadas o vetor  $\vec{r}$  que define a posição de um dos neutrons do  $\text{H}^3$  em relação ao proton e o vetor  $\vec{t}$  que liga o ponto médio de  $\vec{r}$  ao outro neutron do  $\text{H}^3$ , de modo que, como

$$\vec{r}_t = \vec{r}_n - \frac{2}{3} \vec{t}$$

$$\vec{r}'_d = \frac{8}{9} \vec{r}_n - \vec{t}$$

e definindo

$$\vec{K}' = \frac{8}{9} \vec{k}_{9-d} - \vec{k}_{8-t}$$

$$\vec{k}' = \frac{2}{3} \vec{k}_{8-t} - \vec{k}_{9-d}$$

podemos escrever:

$$\exp(-i \vec{k}_{8-t} \cdot \vec{r}_t) \exp(i \vec{k}_{9-d} \cdot \vec{r}'_d) = \exp(i \vec{K}' \cdot \vec{r}_n) \exp(i \vec{k}' \cdot \vec{t})$$

e integrar sobre  $d\vec{\rho}$ ,  $d\vec{t}$  e  $d\vec{r}_n$ .

obtemos finalmente

$$\frac{d\sigma'}{d\Omega'} = \frac{384\pi}{121} \left(\frac{Mv}{\hbar c}\right)^2 C' f_3' f_4' \quad (11)$$

onde  $C'$  é uma constante

$$C' = \frac{\gamma^3 \exp\left(\frac{2\gamma}{\sqrt{3}\lambda}\right)^2}{\beta \lambda^6 (1-\gamma\alpha)} \left\{ \left[ \text{Erf}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}\lambda}\right) - 1 \right] + \frac{\gamma}{\lambda} \exp\left[\frac{\gamma^2 - \lambda^2}{3\lambda^2}\right] \right\}$$

$$\left[ \text{Erf}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}\lambda}\right) - 1 \right]^2 \left\{ \frac{\beta r_0}{\sin^2 \beta r_0 \left[ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 (2 + \alpha r_0) + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 (1 + \alpha r_0) - 1 \right] + (\beta r_0)^2} \right\}$$

e as  $f$  são as seguintes funções;

$$f_4 = \frac{\eta' \exp[-(k'/2\lambda)^2]}{K'^2}$$

$$f_3' = \left\{ \frac{\beta}{\beta + K'} \sin(\beta + K')r_0 + \frac{\beta}{\beta - K'} \sin(\beta - K')r_0 + \frac{1}{K' r_0} \left[ \cos(\beta + K')r_0 - \cos(\beta - K')r_0 \right] \right\}^2$$



sendo

$$\eta'^2 = \frac{11}{2} \frac{Q'}{E_d} + 1$$

$$K'^2 = \frac{576}{121} \frac{ME_d}{\hbar^2} \left( \frac{3}{4} \eta'^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \eta' \cos \theta' + \frac{4}{9} \right)$$

$$k'^2 = \frac{144}{121} \frac{ME_d}{\hbar^2} \left( \frac{4}{3} \eta'^2 - 2 \sqrt{3} \eta' \cos \theta' + \frac{9}{4} \right)$$

com

$$Q' = \left[ (M_g + M_d) - (M_g + M_t) \right] c^2$$

$E_d$  = energia cinética do dêuteron incidente no sistema de laboratório.

Como  $K'$  e  $k'$  crescem com o ângulo  $\theta$  entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , vemos que  $f_4$  é uma função de  $\theta$  rapidamente decrescente. Esta função vai determinar o andamento geral da distribuição angular.

Para obter a seção de choque diferencial no sistema de laboratório, devemos multiplicar o resultado da equação (11) pelo fator

$$\frac{1}{36 \eta'^2} = \frac{(36\eta'^2 + 12\sqrt{3}\eta' \cos \theta' + 3)^{3/2}}{6\eta' + \sqrt{3} \cos \theta'}$$

A relação entre os ângulos de emissão do tritium nos dois sistemas é dada por:

$$\tan \theta'_L = \frac{6\eta' \sin \theta'}{\sqrt{3} + 6\eta' \cos \theta'}$$

O fator coulombiano para redução do valor absoluto das seções de choque diferenciais calculado dentro da aproximação discutida em III-1 é:

$$F'_0 = \frac{2\pi^2 n'_d n'_t \exp[-\pi(n'_d + n'_t)]}{\cos h[\pi(n'_d + n'_t)] - \cos h[\pi(n'_d - n'_t)]}$$

onde

$$n'_d = \frac{72 Me^2}{11 \hbar^2 k_{g-d}} ; n'_t = \frac{96 Me^2}{11 \hbar^2 k_{g-t}}$$

## V. COMPARAÇÃO COM OS DADOS EXPERIMENTAIS

- 1: Reação  $\text{Be}^9$  (p,d)

Para os cálculos numéricos usaremos os valores apresentados em (1) e ainda:

$$\begin{aligned} |\epsilon_d| &= 2,227 \text{ Mev} \\ &= 0,560 \text{ Mev} \end{aligned} \quad (5)$$

As curvas calculadas serão comparadas com os valores experimentais de Cohen e col. (22 Mev) (23), Reynolds e Standing (16,5 Mev) (24) e Harvey (5a 8 Mev) (25).

Um fato notado por Cohen e confirmado por Standing e Reynolds é a constância da forma da distribuição angular em um intervalo da energia que vai de 5 até 22 Mev. Usando o método de Butler para calcular curvas que concordam com os dados experimentais temos que variar o raio  $r_0$  de tal modo que

$$r_0 = 2,5 \times 10^{-13} \text{cm} \text{ para } \epsilon_p = 22 \text{ Mev.}$$

$$r_0 = 3,0 \times 10^{-13} \text{cm} \text{ para } \epsilon_p = 16,5 \text{ Mev.}$$

$$r_0 = 6,0 \times 10^{-13} \text{cm} \text{ para } \epsilon_p = 5 \text{ Mev.}$$

Esta grande variação do parâmetro  $r_0$  não é usual e se torna necessária neste caso uma vez que o método de Butler pressupõe um raio nuclear bem definido o que não acontece em um núcleo que tem um nucleon fracamente ligado e, portanto, com uma grande probabilidade de ser encontrado fora do poço de potencial. Realmente, na teoria de Butler devíamos ter, para  $r_n > r_0$ , apenas ondas planas de protons incidentes e ondas emergentes de dêuterons livres mas, na realidade, temos, além disso, uma contribuição importante de função de onda do neutron ligado no  $\text{Be}^9$  nessa região do espaço.

Mesmo com a aproximação de Born usada, não podemos ter, a rigor, em  $r_0$  independente da energia se queremos usar corretamente a aproximação de "pick-up". Isto porque Horowitz e Messiah<sup>15</sup> mostraram que o efeito da interação do proton incidente com o  $\text{Be}^8$  pode ser representado formalmente com uma variação do raio nuclear.

Reynolds e Standing<sup>38</sup> determinam o valor absoluto da seção de choque no sistema do centro da massa obtendo  $11 \pm 2 \text{ mb/sterad}$  em  $\theta = 23^\circ$ . O valor obtido nos cálculos é  $121 \text{ mb/sterad}$ . Diferenças no valor absoluto das seções de choque são usuais nos cálculos das reações de "stripping" e "pick-up" conduzindo a erros consideráveis no cálculo das larguras reduzidas, como mostra Bowcock<sup>26</sup>. Uma redução no valor calculado pode ser obtida, por exemplo, com o método de Horowitz e Messiah que, no entanto, não pode ser aplicado com a aproximação de Born.

Uma melhor concordância com os dados experimentais deve ser esperada se levarmos em conta várias correções (p.ex.: efeito coulombiano, interação da partícula incidente com o  $\text{Be}^8$ , interação da partícula emergente com o núcleo residual, efeitos de núcleo composto, ..) e se usarmos um potencial  $V_{g-n}(r_n)$  mais realista. Estas correções são introduzidas de modo mais simples na aproximação de Born que na de Butler. Toboeman e Kalos<sup>17</sup>, calculando com uma I.B.M. alguns exemplos, mostraram que elas podem ter efeitos importantes.

Nas figuras 1, 2 e 3 são comparadas as curvas obtidas com a aproximação de Born e o modelo usado para o  $\text{Be}^9$  com os dados experimentais. Pontos experimentais para ângulos pequenos (inferiores a aproximadamente  $10^\circ$ ), ainda não são conhecidos.

V-2: Reação  $\text{Be}^9(d,t)$

Os dados experimentais usados são os de Holt e Marshan (7,7

Mev)<sup>27</sup> que completam os resultados anteriores de El Bedewi<sup>28</sup> na mesma energia (Figura 4). São usados os seguintes valores para os parâmetros:

$$\lambda = 2,5 \times 10^{12} \text{ cm}^{-1}$$

$$Q' = 4,60 \text{ Mev}^{29}$$

A concordância é agora muito mais precária que no caso anterior; isto principalmente porque a aproximação de "pick-up" é muito mais arbitrária em virtude da grande extensão do dêuteron. Um valor de  $r_0$  maior que o usado daria uma distribuição angular mais próxima de experimental, em concordância com o efeito predito por Horowitz e Messiah. News<sup>22</sup> compara os mesmos dados com as curvas de Butler e de Bathia sendo da mesma forma obrigado a cortar a integral em um raio maior que o usual.

## VI. AGRADECIMENTOS

O autor deseja agradecer ao Professor J. Leite Lopes pela sugestão do problema e por seu constante interesse.

Nota: Quando já estava o trabalho praticamente terminado, o Professor Leite Lopes chamou nossa atenção para duas publicações de J. Dabrowski e J. Sawicki (Acta Physica Polônica, vol. XIV, 143 e 407) onde o mesmo problema é resolvido também com a aproximação de Born e o modelo de dois corpos. Os nossos resultados concordam com os desses autores.

## RESUMÉ

The use of a two-body model for beryllium-9, permits, within Born's approximation, complete calculation of differential cross-section for reaction  $\text{Be}^9(p,d)$  and  $\text{Be}^9(d,t)$ . The reactions are considered as "pick-up" processes and the influence of the coulomb field

in the angular distribution is not considered. The results are compared with experimental data.

1. V. I. Mamasachlisov, J. Phys. USSR, 7, 239 (1943), Physik Z. Sow. 10, 214 (1936); P. Caldirola; J. Phys. et Radium 8, 155 (1947), Nuovo Cimento 4, 39 (1947); A. Borsellino, Nuovo Cimento 5, 263 (1948). F. Schlögl, Zeits. f. Naturforsch 3a, 229, (1949).
2. E. Guth and C. J. Mullin, Phys. Rev. 76, 234 (1949).
3. H. Uberall, Zeits, f. Naturforsch 8a, 142 (1953).
4. L. W. Jones and K. M. Terwilliger, Phys. Rev. 91, 669 (1953).
5. Collins, McKenzie and Ramm, Proc. Roy. Soc. (London) A216 242 (1953); Noyes, Van Hoomissen, Miller and Waldman, Technical Report No. 3, University of Notre Dame (November, 1953).
6. E. Feenberg and E. Wigner - Phys. Rev. 51, 95 (1937), M. E. Rose and H. A. Bethe Phys. Rev. 51, 205, (1937); R. G. Sachs, Phys. Rev. 55, 825, (1939).
7. E. Guth, Phys. Rev. 55, 411, 1939; E. Guth and C. J. Mullin, Phys. Rev. 74, 832, 1948.
8. T. Teichmann and E. P. Wigner, Phys. Rev. 87, 123 (1952); P. B. Treacy, Proc. Phys. Soc. (London) 68A, 204, 1955.
9. Os índices 8 e 9 que aparecem em qualquer grandeza referem-se respectivamente ao  $\text{Be}^8$  e ao  $\text{Be}^9$ . Assim, por exemplo:  $V_{8-n}$  é o potencial de interação entre e  $\text{Be}^8$  e o neutrón.
10. N. F. Mott and H. S. W. Massey, The Theory of Atomic Collisions, (Clarendon Press, 1933), Chap. VIII.
11. G. F. Chew and M. L. Goldberger, Phys. Rev. 77, 470 (1950).
12. J. R. Oppenheimer and M. Phillips, Phys. Rev. 18, 500 (1935); G. M. Volkoff, Phys. Rev. 57, 866 (1940).
13. L. I. Schiff, Quantum Mechanics (McGraw-Hill Book Company, 1955), pg. 114.
14. J. Yoccoz, Proc. Phys. Soc. (London) 67A, 813 (1954).
15. I. P. Grant, Proc. Phys. Soc. (London) 67A, 981 (1954); 68A, 244 (1955).
16. J. Horowitz et A. L. Messiah, J. Phys. et Radium 14, 695 (1953).
17. W. Toboeman - Phys. Rev. 91, 645 (1953).
18. W. Toboeman and M. H. Kalos, Phys. Rev. 97, 132 (1955).

19. A. B. Bathia, K. Huang, R. Huby and H.C. Newns - Phil. Mag. 43, 485 (1952).
20. S. T. Butler - Proc. Roy. Soc. (London) A-208, 559 (1951)
21. P. B. Ditch and J. B. French, Phys. Rev. 87, 900 (1952).
22. E. Gerjuoy, Phys. Rev. 91, 645 (1953).
23. H. G. Newns, Proc. Phys. Soc. (London) 65A, 916 (1952).
24. Cohn, Newman, Handley and Timnick, Phys. Rev. 90, 323 (1953).
25. J. B. Reynolds, and K. G. Standing, Phys. Rev. 101 158 (1956).
26. J. A. Harvey, Phys. Rev. 82, 298 (1951).
27. J. E. Bowcock, Proc. Phys. Soc. 68A, 512 (1955).
28. J. R. Holt and T. N. Marshan, Proc. Phys. Soc. 66A, 1032 (1953).
29. F.A. El Bedewi, Proc. Phys. Soc. 64A, 947 (1951).
30. Catala, Selent and Casanova - Anales real Soc. Espan. fis. quim. (Madrid) 48A, 323 (1952).

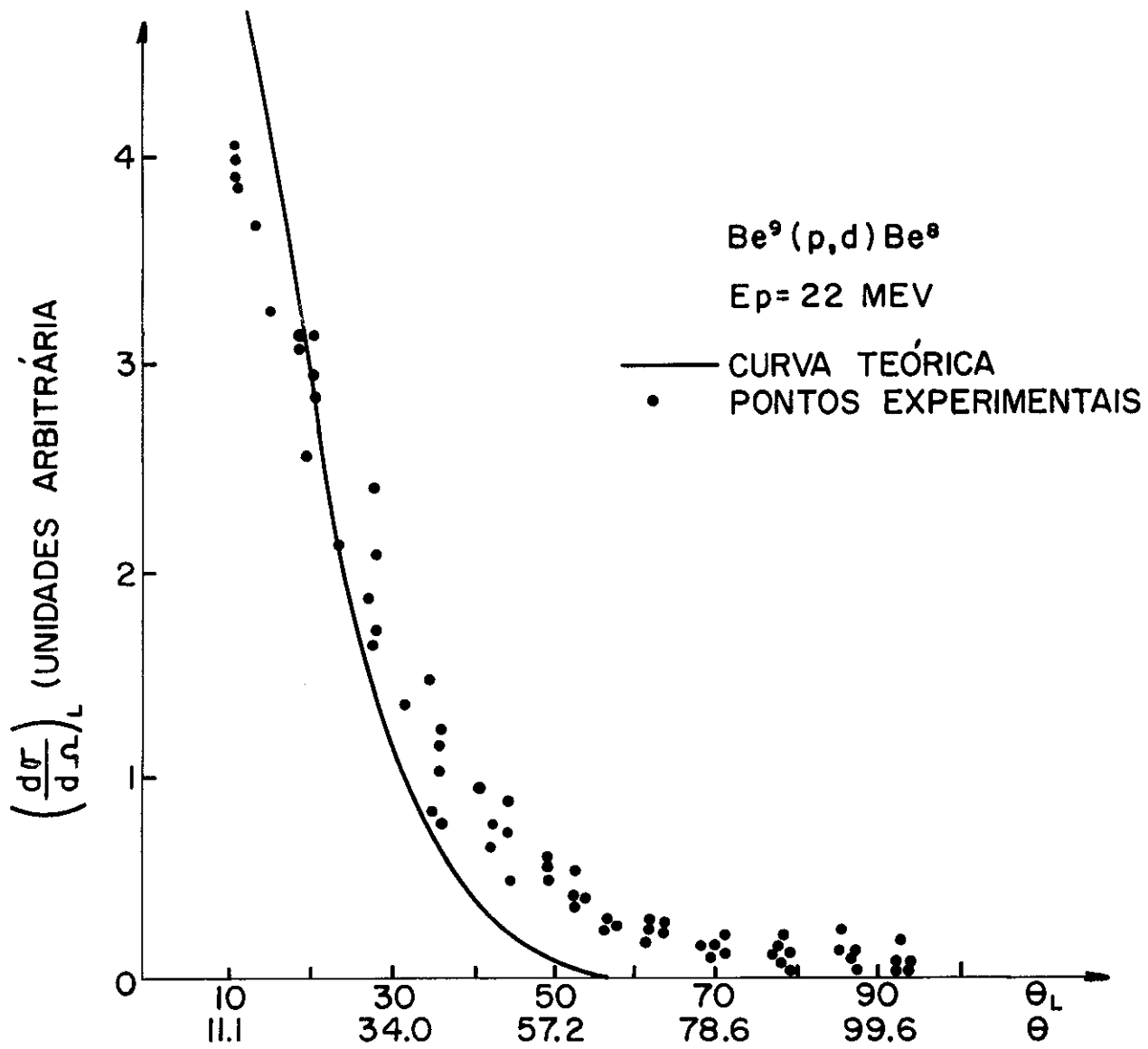


FIG. 1

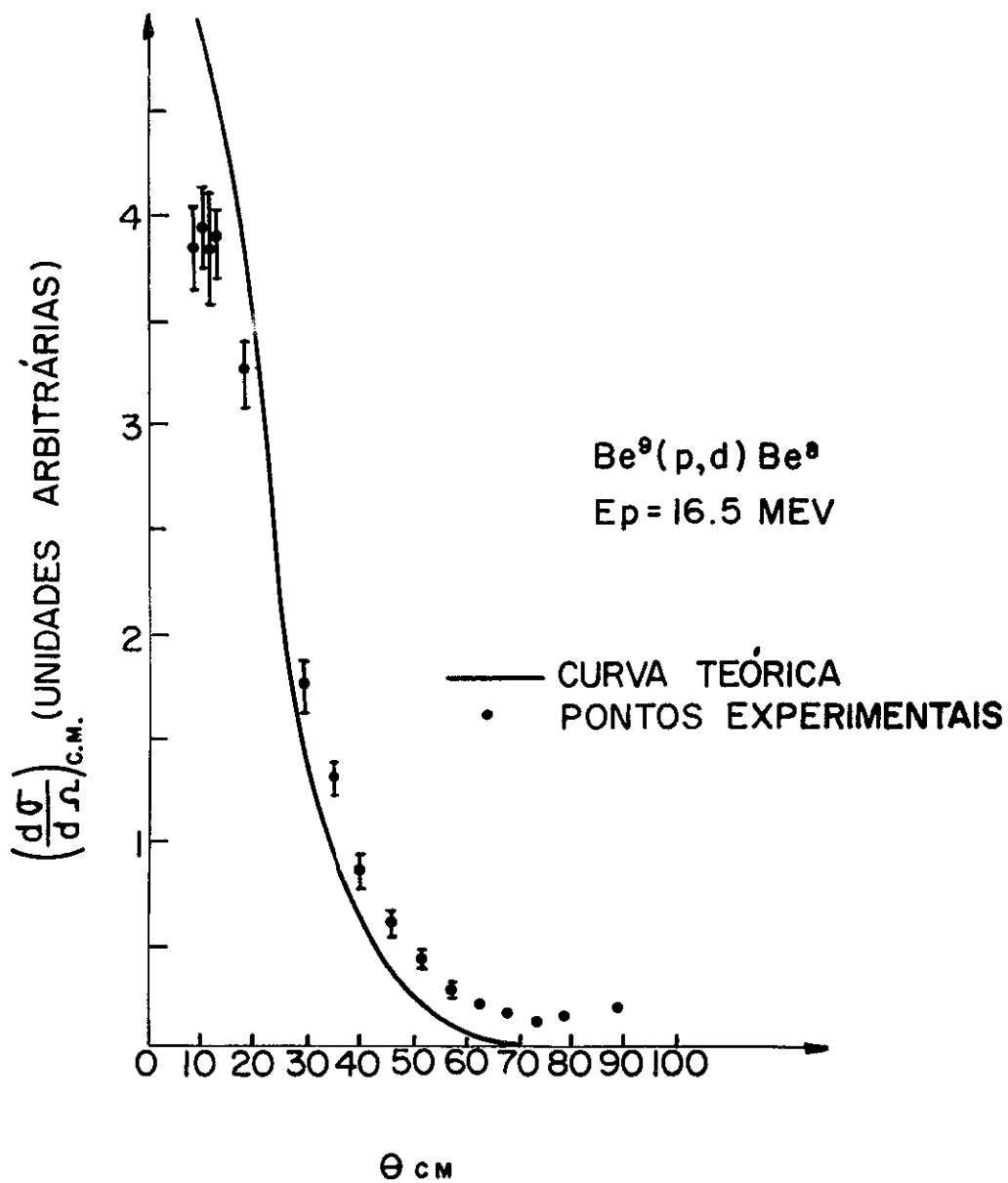


FIG. 2



$\text{Be}^9(p,d)\text{Be}^8$

$E_p = 5 \text{ a } 8 \text{ MEV}$

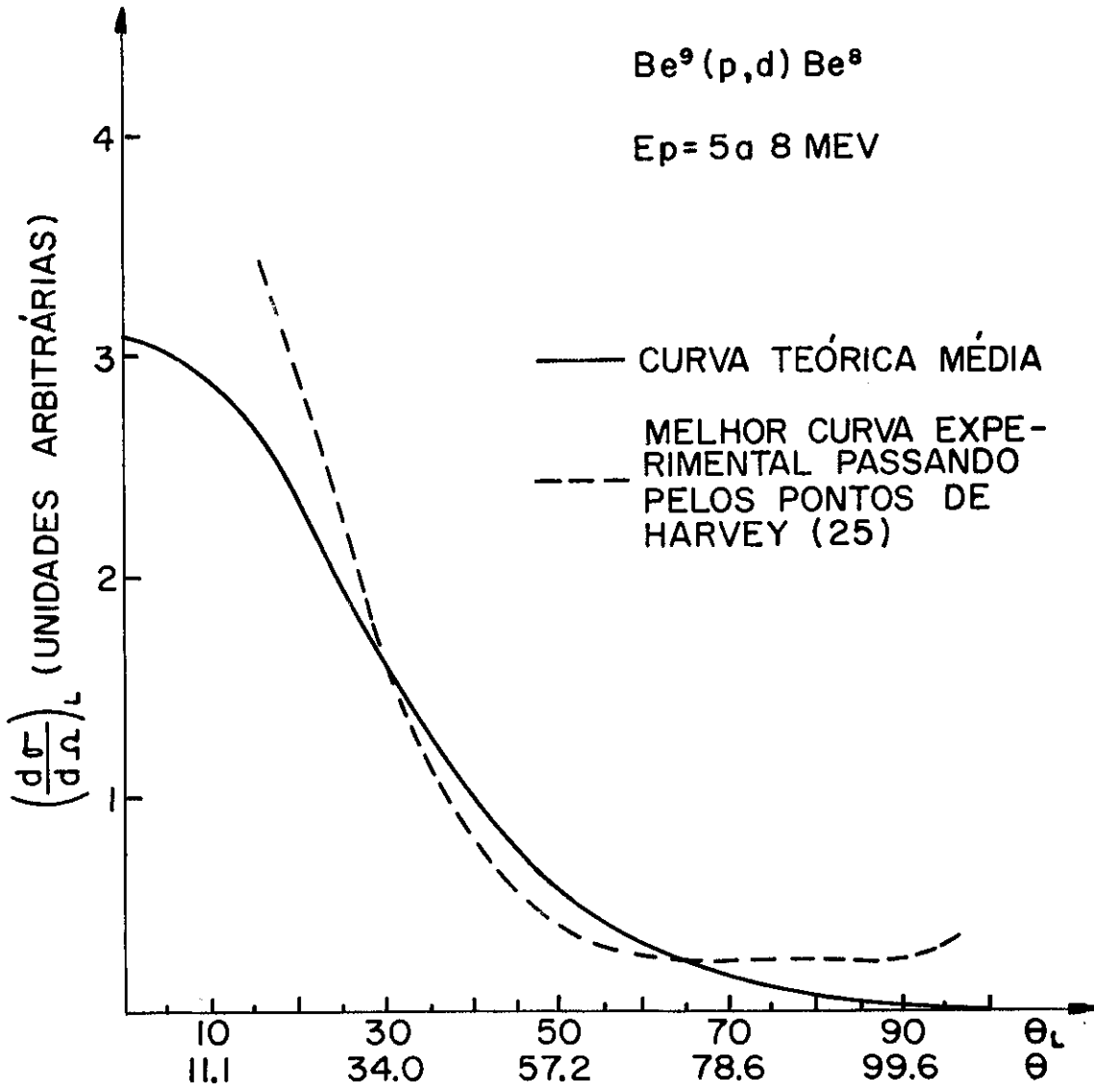


FIG. 3

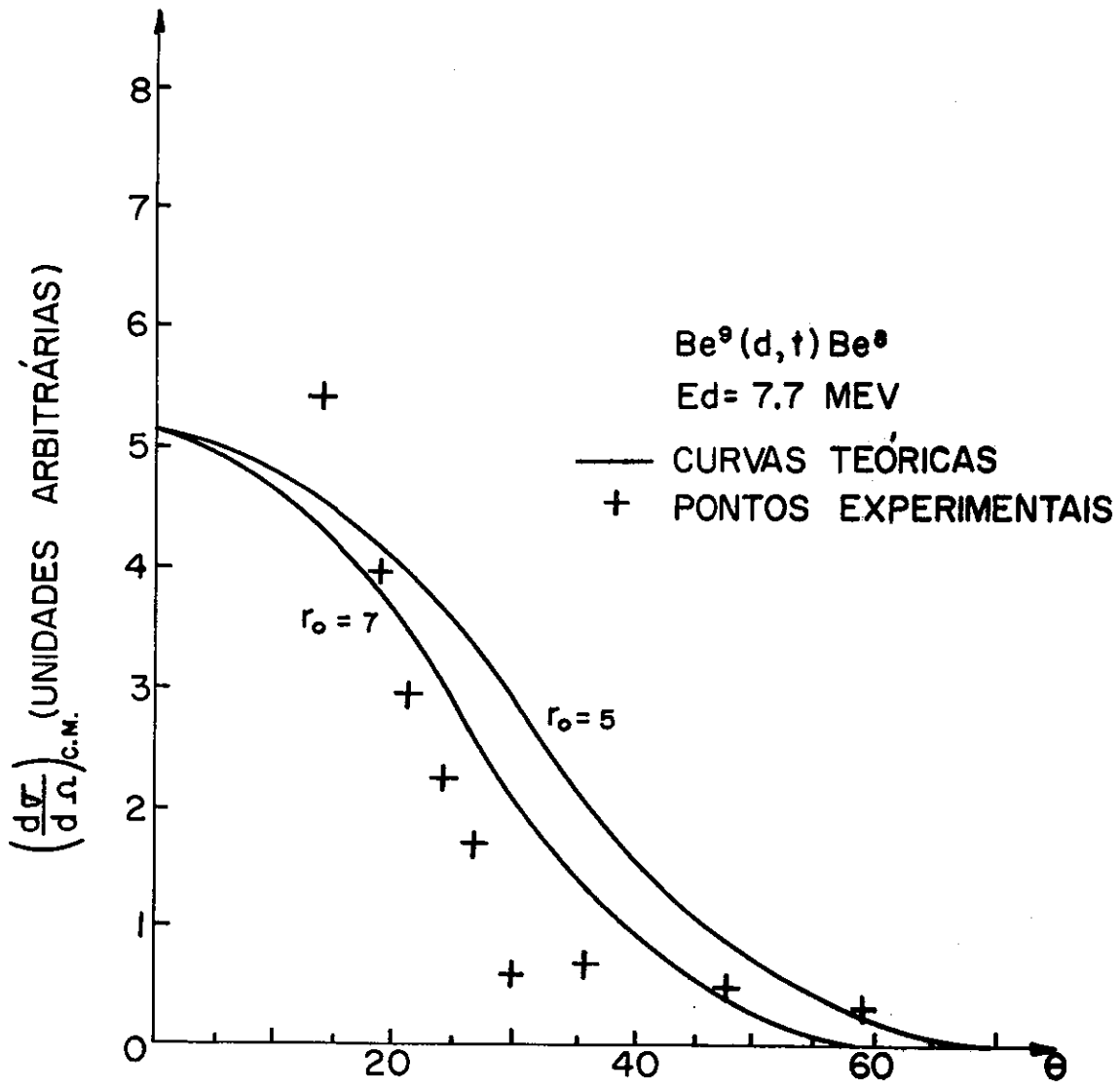


FIG. 4