NOTAS DE FÍSICA

VOLUME V

Nº 16

ALGUNS RESULTADOS RECENTES SÔBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES DE COEFICIENTES CONSTANTES

by

Leopoldo Nachbin

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
Av. Wenceslau Braz, 71
RIO DE JANEIRO

1959

Notas de Física - Volume V - Nº 16

ALGUNS RESULTADOS RECENTES SÔBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES DE COEFICIENTES CONSTANTES*

Leopoldo Nachbin
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

A teoria das equações diferenciais realizou vários progressos importantes, nos últimos quinze anos, em virtude de influxo de novos métodos e idéias. Uma bôa parte do avanço verificado tem girado em tôrno dos trabalhos de Garding, Leray, Schwartz e sua escola. Na presente exposição, abordaremos apenas alguns aspectos que se caracterizam pelo emprego sistemático da Análise Funcional e, mais particularmente, dos espaços vetoriais topológicos, das distribuições e da análise harmônica. Limitar-nos-emos às equações diferenciais parciais lineares de coeficientes constantes no R^n, muito embora os resultados sôbre os quais iremos discorrer sejam em parte conhecidos ou se possa naturalmente conjecturar a sua extensão a equações diferenciais parciais mais gerais, lineares de coeficientes variáveis ou não lineares, no R^n ou em variedades diferenciáveis, ou

* Exposição feita no "Tercer Simpósio sôbre Algunos Problemas Matemáticos que se están estudiando en Latino America", Universidade de Buenos Aires, Julho de 1959.

às equações de convolução, ou às equações diferenciais parciais em uma infinidade de variáveis, ou aos sistemas de equações, ou à análise harmônica.

Indicaremos com $\mathcal{E}$ a álgebra topológica das funções complexas infinitamente diferenciáveis no R^n. Representaremos com $\mathcal{D}$ a álgebra topológica das funções complexas infinitamente diferenciáveis no R^n de suportes compactos. Notemos que $\mathcal{D}$ é uma subálgebra de $\mathcal{E}$ mas não uma subálgebra topológica. Indicaremos com $\mathcal{D}'$ o espaço vetorial topológico das distribuições em R^n, ou seja o dual topológico de $\mathcal{D}$. Consideremos, também, o dual topológico $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$, que será identificado naturalmente como espaço vetorial ao espaço vetorial das distribuições de suportes compactos em R^n. Finalmente, seja $\mathcal{S}$ a álgebra topológica das funções complexas infinitamente diferenciáveis e rapidamente decrescentes no infinito em R^n. Designaremos com $\mathcal{S}'$ o dual topológico de $\mathcal{S}$, que será identificado naturalmente como espaço vetorial a um certo espaço vetorial de distribuições em R^n, que são ditas distribuições temperadas.

Consideremos um operador diferencial parcial $\mathcal{O} = \sum a_p D^p$, onde $p = (p_1,\ldots,p_n)$ é uma sequência de inteiros positivos,

$$D^p = \partial^{p_1+\ldots+p_n}/\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_n^{p_n}$$

e o somatório é finito. $\mathcal{O}$ opera sôbre os espaços de funções ou de distribuições. Suporemos $\mathcal{O} \neq 0$.

$\mathcal{O}$ aplica $\mathcal{E}$ sôbre $\mathcal{E}$ como uma aplicação contínua e aberta.

Em virtude da teoria das equações lineares nos espaços vetoriais topológicos e da teoria da dualidade, essa asserção equivale a dizer-se que $\mathcal{O}$ aplica $\mathcal{E}'$ homeomorficamente sôbre o subespaço vetorial fechado $\mathcal{O}(\mathcal{E}')$ de $\mathcal{E}'$. Esses resultados foram estabelecidos por Malgrande (1954) e, independentemente, por Ehrenpreis (1954).

$\mathcal{O}$ aplica $\mathcal{D}'$ sôbre $\mathcal{D}'$ como uma aplicação contínua e aberta. Em virtude da teoria das equações lineares nos espaços vetoriais topológicos e da teoria da dualidade, tal asserção é equivalente a afirmar-se que $\mathcal{O}$ aplica $\mathcal{D}$ homeomorficamente sôbre o subespaço vetorial fechado $\mathcal{O}(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$. Esses resultados, conjecturados por Schwartz e Malgrange, foram demonstrados por Ehrenpreis (1955).

Chama-se solução elementar de $\mathcal{O}$ a toda distribuição E no R^n tal que $\mathcal{O}(E) = \delta$, sendo δ a medida de Dirac. $\mathcal{O}$ tem ao menos uma solução elementar. Tal fato resulta imediatamente do teorema de Ehrenpreis segundo o qual $\mathcal{O}$ aplica $\mathcal{D}'$ sôbre $\mathcal{D}'$, mas uma demonstração direta muito simples já havia sido dada anteriormente por Malgrange (1953); cfr Ehrenpreis (1954). Vários resultados parciais, devidos principalmente a Malgrange, relativos ao comportamento local ou global de uma solução elementar são conhecidos.

Recentemente, Hormander (1958) demonstrou uma conjectura natural de Schwartz, segundo a qual $\mathcal{O}$ admite sempre ao menos uma solução elementar temperada. De um modo mai geral, $\mathcal{O}$ aplica $\mathcal{S}'$ sôbre $\mathcal{S}'$ como uma aplicação contínua e aberta. Pela teoria das equações lineares nos espaços vetoriais topológicos e a teoria da dualidade, essa asserção equivale a dizer-se que $\mathcal{O}$ aplica $\mathcal{S}$ homeomorficamente sôbre o subespaço vetorial fechado $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ de $\mathcal{S}$.

Tais resultados de Ehrenpreis, Hormander e Malgrange são, através da transformação de Fourier, caso particular do chamado problema da divisão de distribuições, correspondendo à divisão de uma distribuição por um polinômio. Mais recentemente, Lojasiewicz (1958), generalizando resultados prévios de Schwartz e estabelecendo uma conjectura do próprio Schwartz, demonstrou que a divisão de uma distribuição por uma função analítica real é sempre possivel, isto é a equação $T = \varphi S$ admite sempre uma solução S, quaisquer que sejam a distribuição T e a função analitica real φ não identicamente nula.

A teoria clássica das equações elíticas teve um dos seus aspetos fundamentais extendido de uma maneira importante por Hormander (1955). Classicamente, se o operador fôr de segunda ordem, isto é $\mathcal{O} = \sum a_{ij}\, \partial^2/\partial x_i\, \partial x_j$ mais têrmos de grau 1 e 0, e se os coeficientes forem reais, então $\mathcal{O}$ é dito elítico quando a fórma quadrática $\sum a_{ij}t_i t_j$ fôr definida (por exemplo positiva), ou seja

$$\sum a_{ij}t_i t_j \geqslant 0$$

qualquer que seja $\{t_i\}$ e $\sum a_{ij}t_i t_j = 0$ implicar $\{t_i\} = 0$. De um modo mais geral, retomando o caso de $\mathcal{O}$ de ordem qualquer m e de coeficientes complexos, a definição apropriada de eliticidade consiste em requerer que

$$\sum_{|p| = m} a_p t^p \neq 0 \quad \text{se } t \neq 0 \ ,$$

onde $|p| = p_1 + \dots + p_n$ se $p = (p_1, \dots, p_n)$ e $t^p = t_1^{p_1} \dots t_n^{p_n}$ se $t = (t_1, \dots, t_n)$. Os operadores elíticos têm uma propriedade fundamental, que não é característica apenas dêsses operadores mas sim de uma classe mais ampla, que passaremos a definir.

$\mathcal{O}$ é dito hipo-elítico se, toda vez que $\mathcal{O}(S) = T$, onde S

e T são distribuições no R^n e T fôr uma função infinitamente diferenciável num aberto do R^n, então S será também uma função infinitamente diferenciável nêsse mesmo aberto. Um teorema básico, que remonta a Serge Bernstein, sendo um ingrediente fundamental do chamado método da projeção ortogonal de Weyl, afirma-nos que todo operador elítico é hipo-elítico.

Se E fôr uma solução elementar de $\mathcal{O}$ e êsse operador fôr hipo-elítico, como $\delta = 0$ no complementar da origem, então E será infinitamente diferenciável no complementar da origem. Reciprocamente, se $\mathcal{O}$ admitir uma solução elementar que seja infinitamente diferenciável no complementar da origem, então $\mathcal{O}$ será hipo-elítico. E' dessa forma que constatamos que alguns operadores clássicos são hipo-elíticos, através de uma solução elementar conhecida.

A caracterização direta dos operadores hipo-elíticos foi conseguida por Hormander. Seja p o polinômio em n variáveis tal que

$$\mathcal{O} = p\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

onde o denominador i é incluido por conveniência. Então

$$\Lambda(p) = \{ s \in R^n ;\ p(x+s) = p(x) \text{ qualquer que seja } x \in R^n \}$$

é um subespaço vetorial de R^n. O polinômio p é dito completo quando $\Lambda(p) = 0$, o que significa que, em têrmos de qualquer base em R^n, o polinômio sempre depende de todas as variáveis. Para que $\mathcal{O}$ seja hipo-elítico é necessário e suficiente que p seja completo e que sejam satisfeitas as duas condições equivalentes seguintes:

(1) se $\xi, \eta \in R^n$, então $p(\xi + i\eta) \rightarrow \infty$ quando $\xi \longrightarrow \infty$ e η permanece fixo.

(2) dado $A \geqslant 0$, existe $k \geqslant 0$ tal que $p(\xi + i\eta) \neq 0$ desde que $\xi, \eta \in R^n$, $|\eta| \leqslant A$ e $|\xi| > k$.

Outras fórmas equivalentes dessas condições foram, tambem, indicadas por Hormander.

REFERÊNCIAS

BROWDER (F.), Regularity theorems for solutions of partial differential equations, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 43, pp. 234-236 (1956).

EHRENPREIS (L.), Solution of some problems of division, I, Amer. Journ. Math., vol. 76, pp. 883-903 (1954).

EHRENPREIS (L.), Solution of some problems of division, II, Amer. Journ. Math., vol. 77, pp. 286-292 (1955).

EHRENPREIS (L.), The division problem for distributions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 41, pp. 756-758 (1955).

EHRENPREIS (L.), Completely inversible operators, Proc. Nat. Acad. Sci, USA, vol. 41, pp. 945-946 (1955).

EHRENPREIS (L.), Solution of some problems of division, III, Amer. Journ. Math., vol. 78, pp. 685-715 (1956).

EHRENPREIS (L.), General theory of elliptic equations, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 42, pp. 39-41 (1956).

GARDING (L.) & MALGRANGE (B.), Opérateurs différentiels partiellement hypo-elliptiques, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, vol. 247, pp. 2083-2085 (1958).

HORMANDER (L.), On the theory of general partial differential operators, Acta Math., vol 94, pp. 161-248 (1955).

HORMANDER (L.), On the division of distributions by polynomials, Arkiv for Mathematik, vol. 3, pp. 555-568 (1958).

HORMANDER (L.), Differentiability properties of solutions of systems of differential equations , Arkiv for Mathematik, vol. 3, pp. 527-535 (1958).

HORMANDER (L.), On interior regularity of the solutions of partial differential equations, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 11, pp. 197- 218 (1958).

HORMANDER (L.), On the regularity of the solutions of boundary problems, Acta Math., vol. 99, pp. 225-264 (1958).

JOHN (F.), General properties of solutions of linear elliptic partial differential equations, Proc. Symp. Spectral Theory and Differential Problems, Oklahoma, pp. 113-175 (1951).

JOHN (F.), Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, New York (1955).

LAX (P. D.), On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 8, pp. 615-633 (1955).

LOJASIEWICZ (S.), Division d'une distribution par une fonction analytique de variables réelles, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, vol. 246, pp.683-686 (1958).

LOJASIEWICZ (S.), Sur le problème de la division, Studia Mathematica, vol. 18, pp. 87-136 (1959).

MALGRANGE (B.), Equations aux dérivées partielles à coeficients constants. 1. Solution elementaires. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, vol. 237, pp. 1620-1622 (1953).

MALGRANGE (B.), Equations aux dérivées partielles à coefficients constants. Equations avec second membre. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, vol. 238, pp. 196-198 (1954).

MALGRANGE (B.), Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Annales de l'Institut Fourier, vol. 6, pp. 271-355 (1956).

MALGRANGE (B.), Sur les systèmes d'équations elliptiques, Colloque sur la théorie des équations aux dérivées partielles, Nancy, pp. 139-143 (1956).

MALGRANGE (B.), Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques, Bull. Soc. Math. France, vol. 85, pp. 283-306 (1957).

MIZOHATA (S.), Hypo-éllipticité des opérateurs différentiels élliptiques, Colloque sur la théorie des équations aux dérivées partielles, Nancy, pp. 165-177 (1956).

MIZOHATA (S.), Hypo-éllipticité des équations paraboliques, Bull. Soc. Math. France vol. 85, pp. 15-50 (1957).

NIRENBERG (L.), Remarks on strongly elliptic partial differential equations, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol 8, pp. 648-674 (1955).

NIRENBERG (L.) & DOUGLIS (A.), Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 8, pp. 503-538 (1955).

ROSENBLOOM (P. C.), Linear partial differential equations, Surveys in Applied Mathematics, vol. 5, pp. 43-195 (1958).

ROSENBLOOM (P. C.), The inequalities of Ehrenpreis, Malgrange and Hormander, Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A (Math.), n. 250/31 (1958).

SCHWARTZ (L.), Théorie das distributions, Paris, vol. 1 (1950 e edição posterior), vol. 2 (1951).

SCHWARTZ (L.), Division par une fonction holomorphe sur une variété analytique, Summa Brasiliensis Mathematicae, vol. 3, pp. 181-209 (1955).

SCHWARTZ (L.), Equations aux dérivées partielles, Paris (1955).

SCHWARTZ (L.), Ecuaciones diferenciales parciales eliticas, Bogotá, (1956).

SCHWARTZ (L.), Su alcuni problemi della teoria delle equazioni differenziali lineari di tipo elliptico, Rendiconti del Seminario Matemático e Fisico di Milano, vol. 27, pp. 221-249 (1958).

TREVES (F.), Thése d'Hormander, I & II, Sérminaire Bourbaki, vol. 8, Exp. 130 & 135 (1955/56).