NOTAS DE FÍSICA

VOLUME X

Nº 14

RÉSULTATS RÉCENTS ET PROBLÈMES DE NATURE ALGÉBRIQUE EN THÉORIE DE L'APPROXIMATION

par

Leopoldo Nachbin

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71

RIO DE JANEIRO

1963

Notas de Física - Volume X - Nº 14

RÉSULTATS RÉCENTS ET PROBLÈMES DE NATURE ALGÉBRIQUE EN THÉORIE DE L'APPROXIMATION *

Leopoldo Nachbin **
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Universidade do Brasil, Rio de Janeiro

(Reçu le 4 Mars, 1963)

Nous discuterons dans cet exposé certains résultats connus et quelques problèmes ouverts de la théorie de l'approximation des fonctions réelles, continues ou différentiables, dans le cas des algèbres et modules de telles fonctions. Nous ferons cette étude soit du point de vue de la théorie de Weierstrass, donc pour la convergence uniforme sur tout compact, soit du point de vue plus général de la théorie de Bernstein, c'est à dire de la convergence uniforme ponderée sur des parties non nécessairement compactes.

---

* À paraitre dans les Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Stockholm, 1962.

** À present à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

PARTIE I: Théorie de Weierstrass

La théorie de Weierstrass des fonctions réelles continues trouve son expression dans le théorème classique de Weierstrass-Stone sur la structure des sous-algèbres fermées de l'algèbre topologique $\mathscr{C}(E)$ des fonctions réelles continues sur un espace uniformisable séparé E, muni de la topologie compacte. Ce théorème entraîne des conséquences sur la nature des sous-espaces vectoriels fermés de $\mathscr{C}(E)$, qui sont des modules sur des sous-algèbres fermées de $\mathscr{C}(E)$; ou, plus généralement, sur la nature des sous-espaces vectoriels fermés des sommes continues d'espaces vectoriels topologiques réels localement convexes separés au dessus de E, qui sont des modules sur des sous-algèbres fermées de $\mathscr{C}(E)$. On est aussi amené aux résultats suivants de synthèse spectrale. Soit $\mathscr{W}$ un espace localement convexe réel. Considérons une algèbre commutative $\mathcal{A}$ d'opérateurs continus sur $\mathscr{W}$, contenant l'opérateur identité. Supposons que $\mathscr{W}$ soit localement convexe sous $\mathcal{A}$ par rapport à la catégorie $\{R\}$ des algèbres isomorphes à l'algèbre R des nombres réels (pour la terminologie voir Nachbin [11]) et que les opérateurs de $\mathcal{A}$ soient semblablement bornés (ce qui signifie que la topologie de $\mathscr{W}$ est déterminée par l'ensemble des semi-normes continues sur $\mathscr{W}$ par rapport à chacune desquelles tous les opérateurs de $\mathcal{A}$ sont bornés). Alors, tout sous-espace vectoriel fermé $\mathcal{A}$-invariant de $\mathscr{W}$ maximal est nécessairement de codimension 1. Tout sous-espace vectoriel fermé propre $\mathcal{A}$-invariant de $\mathscr{W}$ est contenu dans un sous-espace vectoriel fermé $\mathcal{A}$-invariant de $\mathscr{W}$ maximal; et, plus précisément, il est l'intersection de tels sous-espaces maximaux le contenant. De plus, $\mathcal{V}$ étant un sous-espace vectoriel $\mathcal{A}$-invariant de $\mathcal{W}$ et $\mathcal{A}'$ étant l'algèbre d'opérateurs induite par $\mathcal{A}$ sur l'espace localement convexe quotient $\mathcal{W}'=\mathcal{W}/\mathcal{V}$, $\mathcal{W}'$ est alors localement convexe sous $\mathcal{A}'$ par rapport à la catégorie $\{R\}$ et les opérateurs de $\mathcal{A}'$ sont semblablement bornés. Dans les propositions précédentes, les conclusions sont fausses si l'on omet l'hypothèse que les opérateurs de $\mathcal{A}$ sont semblablement bornés. La recherche d'une hypothèse plus générale que celle ci, pour que ces propositions restent vraies, nous amène à la théorie de Bernstein. On obtient aussi des résultats analogues dans le cas des algèbres topologiques réelles localement convexes par rapport à la catégorie $\{R\}$. La théorie de Weierstrass des fonctions réelles continûement différentiables n'est pas encore achevée même sur R^n, la différence entre ce cas et celui des variétés différentiables étant banale. D'autre part, on ne voit pas encore clairement la forme que prendra cette théorie sur des espaces différentiables, généralisant les variétés différentiables et R^n en ce même sens où les espaces uniformisables séparés généralisent les variétés topologiques et R^n. Finalement, la forme de la théorie en termes de synthèse spectrale des algèbres commutatives d'opérateurs continus sur des espaces localement convexes et de synthèse spectrale des algèbres topologiques localement convexes n'est pas non plus éclaircie. Rappelons des résultats connus et quelques problèmes. Plaçons nous sur R^n, pour simplifier l'exposé. Soit $\mathcal{E}^m(R^n)$ l'algèbre topologique des fonctions réelles m-fois continûement différentiables sur R^n, munie de la topologie compacte d'ordre m, où $0 \leqslant m < \infty$ (les modifications à introduire dans le cas $m = \infty$ étant évidentes). La structure des idéaux fermés de $\mathcal{E}^m(R^n)$ est connue (voir Whitney [18]; voir aussi Schwartz [17]). On peut en formuler les résultats sous plusieurs formes. Disons que f, $g \in \mathcal{E}^m(R^n)$ sont m-tangentes au point $x \in R^n$ si leurs derivées d'ordre $\leqslant m$ au point x sont égales. $\mathcal{J}$ étant un idéal et f un élément de $\mathcal{E}^m(R^n)$, pour que f soit adhérent à $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{E}^m(R^n)$ il faut et il suffit que, pour tout $x \in R^n$, il existe $g \in \mathcal{J}$, m-tangente à f au point x. Ceci se reformule comme suit. Pour tout $x \in R^n$, soit $\mathcal{J}_x^{m+1}$ l'idéal fermé de $\mathcal{E}^m(R^n)$ des fonctions m-plates au point x, c'est à dire m-tangentes à la fonction 0 au point x. L'adhérence d'un idéal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{E}^m(R^n)$ est l'intersection des idéaux fermés $\mathcal{J} + \mathcal{J}_x^{m+1}$ pour $x \in R^n$. En introduisant sur $\mathcal{E}^m(R^n)$ la topologie simple d'ordre m, on voit que tout idéal fermé pour la topologie compacte d'ordre m est aussi fermé pour la topologie simple d'ordre m. C'est clair que tout idéal fermé maximal est de la forme $\mathcal{J}_x = \{f \in \mathcal{E}^m(R^n);\ f(x) = 0\}$, pour un $x \in R^n$ unique, donc de codimension 1. Tout idéal fermé propre de $\mathcal{E}^m(R^n)$ est contenu dans un idéal fermé maximal; et, plus précisement, il est l'intersection des idéaux fermés élémentaires le contenant (Un idéal fermé propre $\mathcal{J}$ est dit élémentaire si l'ensemble ordonné des idéaux fermés contenant $\mathcal{J}$ strictement a un plus petit élément: le successeur de $\mathcal{J}$). Un idéal fermé élémentaire est toujours primaire (Un idéal fermé propre $\mathcal{J}$ est dit primaire si l(ensemble ordonné des idéaux fermés propres contenant $\mathcal{J}$ a un plus grand élément: l'unique idéal fermé maximal contenant $\mathcal{J}$). Un idéal fermé élémentaire $\mathcal{J}$ satisfait à $\mathcal{J}_x^{m+1} \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{J}_x$ pour un $x \in R^n$ unique. Tout idéal fermé élémentaire étant de codimension finie bornée par une valeur c(m, n), on en déduit que tout idéal fermé de $\mathcal{E}^m(R^n)$ est l'intersection des idéaux fermés le contenant et de codimension au plus égale à $c(m,n)$. Un autre résultat intéressant et plus récent, obtenu à partir de l'analyse des idéaux fermés de $\mathcal{E}^m(R^n)$, est celui d'après lequel, pour $m=\infty$, donc pour $\mathcal{E}(R^n)$ muni de la topologie compacte d'ordre infini, tout idéal engendré par un nombre fini de fonctions analytiques-réelles est nécessairement fermé (voir Łojasiewicz [4]; voir aussi Malgrange [5]). La nature des sous-algèbres denses de $\mathcal{E}^m(R^n)$ est connue (voir Nachbin [10]; voir aussi Mirkil [11]). Pour qu'une partie $\mathfrak{X}$ de $\mathcal{E}^m(R^n)$ engendre une sous-algèbre dense de $\mathcal{E}^m(R^n)$, il faut et il suffit que: (1) si $x, y \in R^n$, $x \neq y$, il existe $f \in \mathfrak{X}$ telle que $f(x) \neq f(y)$; (2) si $x \in R^n$, il existe $f \in \mathfrak{X}$ telle que $f(x) \neq 0$; (3) si $x \in R^n$ et $\nu \in R^n$, $\nu \neq 0$, il existe $f \in \mathfrak{X}$ telle que $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) \neq 0$ (Pour $m=0$, la troisième condition est à omettre. Pour $m \geqslant 1$, ces conditions de densité sont indépendantes de m). On peut reformuler ce résultat de plusieurs façons. $\mathcal{A}$ étant une sous-algèbre de $\mathcal{E}^m(R^n)$, pour que $\mathcal{A}$ soit dense dans $\mathcal{E}^m(R^n)$ il faut et il suffit que $\mathcal{A}$ vérifie la condition biponctuelle suivante: si $f \in \mathcal{E}^m(R^n)$, x, $y \in R^n$, il existe $g \in \mathcal{A}$, m-tangente à f aux points x et y. Une sous-algèbre de $\mathcal{E}^m(R^n)$ est dense pour la topologie compacte d'ordre m si et seulement si elle l'est pour la topologie simple d'ordre m; ceci malgré le fait qu'il soit faux que toute sous-algèbre de $\mathcal{E}^m(R^n)$ fermée pour la topologie compacte d'ordre m est nécessairement fermée pour la topologie simple d'ordre m. Les sous-algèbres fermées maximales de $\mathcal{E}^m(R^n)$ sont soit de la forme $\mathcal{A}_{xy} = \{f \in \mathcal{E}^m(R^n);\ f(x) = f(y)\}$ pour x, $y \in R^n$, $x \neq y$; soit de la forme $\mathcal{A}_x = \{f \in \mathcal{E}^m(R^n);\ f(x) = 0\}$ pour $x \in R^n$; soit de la forme $\mathcal{A}_{x\nu} = \{f \in \mathcal{E}^m(R^n);\ \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) = 0\}$ pour $x \in R^n$ et $\nu \in R^n$, $\nu \neq 0$ (pourvu que $m \geqslant 1$ dans ce dernier cas). Elles sont toutes de codimension 1 et leur forme est indépendante de m, si $m \geqslant 1$. Toute sous-algèbre fermée propre est contenue dans une sous-algèbre fermée maximale. Il est faux que toute sous-algèbre fermée soit l'intersection des sous-algèbres fermées de codimension finie la contenant, parce que toute sous-algèbre fermée de codimension finie est aussi fermée pour la topologie simple d'ordre m. Seules les sous-algèbres simplement fermées d'ordre m sont effectivement de telles intersections. À partir de ces résultats, $\mathcal{A}$ étant une sous-algèbre de $\mathcal{E}^m(R^n)$ contenant l'unité et $\mathcal{W}$ étant un $\mathcal{A}$-sous module de $\mathcal{E}^m(R^n)$, on se demande si l'adhérence de $\mathcal{W}$ pour la topologie compacte d'ordre m est identique à son adhérence pour la topologie compacte d'ordre m seulement sur les parties compactes de R^n sur chacune desquelles toutes les fonctions de $\mathcal{A}$ sont des constantes. Ceci équivaut à l'assertion suivante. Si $f \in \mathcal{E}^m(R^n)$ et si pour tout $\varepsilon > 0$ et toute partie compacte $K \subset R^n$ sur laquelle les fonctions de $\mathcal{A}$ sont des constantes, il existe $g \in \mathcal{W}$ telle que $|D^\alpha(f-g)(x)| < \varepsilon$ quels que soient $x \in K$ et l'ordre de dérivation $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ plus petit que m, donc $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqslant m$, alors f appartient à l'adhérence de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{E}^m(R^n)$. Bien sur, ces enoncés restent vrais pour $m = 0$; et pour $m \geqslant 0$ ils contiennent comme cas particuliers le théorème sur la structure des idéaux fermés, le théorème sur la nature des sous-algèbres denses, et la forme probable du théorème analogue au théorème de Weierstrass-Stone pour $\mathcal{E}^m(R^n)$. Il faut aussi analyser les résultats analogues à ceux déjà connus sur R^n, mais cette fois ci relatifs aux fonctions réelles continûment différentiables sur des espaces différentiables plus généraux que ceux qui sont localement difféomorphes à R^n: citons les variétés différentiables de dimension infinie (voir par exemple Lang [3]), les sous-ensembles assez généraux de R^n (voir Glaeser [1]). On n'a pas une étude assez complète de certaines algèbres topologiques de même nature que celles des fonctions différentiables (voir Mirkil [9], Glaeser [1], Neumark [14], Rickart [16]), soit, par exemple, celles des fonctions lipschitziennes. Quant à la forme de ces résultats en termes de synthèse spectrale d'une algèbre commutative $\mathcal{A}$ d'opérateurs continues sur un espace vectoriel topologique réel localement convexe $\mathcal{W}$, contenant l'opérateur identité, on est assez loin de la formulation et de la démonstration de résultats généraux. Nous conjecturons le résultat suivant, contenant les théorèmes des idéaux fermés et des sous algèbres fermées sur R^n comme des cas particuliers. Soit $\mathcal{D}_{m+1}$ la catégorie des algèbres (sans topologies) réelles commutatives à élément unité, pures, séparées, semi-locales et d'ordre différentiel $\leq m+1$ (au sens de Nachbin [11]). Si $\mathcal{W}$ est localement convexe sous $\mathcal{A}$ par rapport à $\mathcal{D}_{m+1}$ et si les opérateurs de $\mathcal{A}$ sont semblablement bornés, alors, $\mathcal{V}$ étant un sous-espace vectoriel $\mathcal{A}$-invariant de $\mathcal{W}$, $\mathcal{A}'$ l'algèbre d'opérateurs induite par $\mathcal{A}$ sur l'espace localement convexe quotient $\mathcal{W}' = \mathcal{W}/\mathcal{V}$, $\mathcal{W}'$ sera localement convexe sous $\mathcal{A}'$ par rapport à la catégorie $\mathcal{D}_{m+1}$ et les opérateurs de $\mathcal{A}'$ seront semblablement bornés. En particulier, si l'algèbre topologique réelle commutative $\mathcal{A}$, à élément unité, est localement convexe par rapport à $\mathcal{D}_{m+1}$, alors toute algèbre topologique quotiente de $\mathcal{A}$ l'est aussi (dans ce cas $\mathcal{W}=\mathcal{A}$). Il peut se faire bien sur que la validité de ces résultats de stabilité par passage au quotient reste, sous cette forme, conditionée par des hypothèses supplémentaires, telles que celle de dimension bornée pour les espaces vectoriels des formes linéaires continues m-tangentes à $\mathcal{W}$ en chaque homomorphisme unitaire de $\mathcal{A}$ dans R. Quoi qu'il en soit, il y a là des problèmes intéressants à élucider.

PARTIE II: Théorie de Bernstein

La théorie de l'approximation de Serge Bernstein est celle de l'approximation polynomiale pondérée. Soient E un espace uniformisable séparé et N une partie fermée de E. Indiquons par $\mathcal{X}$ un ensemble de fonctions réelles positives, définies et semi-continues supérieurement sur le complémentaire $\complement N$ de N dans E. Indiquons par $\mathcal{C}\mathcal{X}_N(E)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur E, donc sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(E)$, des f telles que, quels que soient la fonction $\sigma \in \mathcal{X}$ et le compact $K \subset E$, on ait $f(x)\,\sigma(x) \longrightarrow 0$ si $x \longrightarrow a$, $x \in K \cap \complement N$, pour tout point $a \in K \cap N$. Nous munirons cet espace vectoriel de la topologie définie par la famille des semi-normes

$$f \longrightarrow \|f\|_{\sigma K} = \sup \left\{ |f(x)|\sigma(x) ;\ x \in K \cap \complement N \right\} .$$

On dira que $\mathcal{C}\mathcal{X}_N(E)$ est un espace vectoriel topologique pondéré de fonctions réelles continues. Remarquons que le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}\mathcal{X}_N(E)$, formé des fonctions nulles aux voisinages de N, est dense dans $\mathcal{C}\mathcal{X}_N(E)$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre, contenant l'unité, de l'algèbre $\mathcal{C}(\complement N)$ des fonctions réelles continues sur l'ouvert complémentaire de N dans E; et $\mathcal{W}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}\mathcal{X}_N(E)$ tel que l'espace vectoriel $\mathcal{W}|\complement N$, restriction de $\mathcal{W}$ à $\complement N$, soit un $\mathcal{A}$-module, ce qu'on exprimera en disant tout simplement que $\mathcal{W}$ est un $\mathcal{A}$-module. Le problème de Bernstein consiste à chercher, sous de telles conditions, une description de l'adhérence de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{C}\mathcal{X}_N(E)$. On appelera problème de Weierstrass le cas particulier où N est vide et $\mathcal{X}$ est réduit à la fonction constante 1; ou même, plus généralement, le cas où N est vide et $\mathcal{X}$ est arbitraire. On dira que $\mathcal{W}$ est de type fini sous $\mathcal{A}$ si l'adhérence de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{C}\mathcal{X}_N(E)$ coincide avec son adhérence pour la topologie sur $\mathcal{C}\mathcal{X}_N(E)$ définie par les semi-normes $f \longrightarrow \|f\|_{\sigma K}$ pour $\sigma \in \mathcal{X}$ et $K \subset E$ compact tel que les fonctions de $\mathcal{A}$ soient constantes sur $K \cap \complement N$. Ceci équivaut à la condition suivante. Si $f \in \mathcal{C}\mathcal{X}_N(E)$ et si, pour tout $\varepsilon > 0$, pour toute $\sigma \in \mathcal{X}$ et pour toute partie compacte $K \subset E$ telle que les fonctions de $\mathcal{A}$ soient des constantes sur $K \cap \complement N$, il existe $g \in \mathcal{W}$ telle que $|f(x) - g(x)|\sigma(x) < \varepsilon$ quel que soit $x \in K \cap \complement N$, alors f appartient à l'adhérence de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{C}\mathcal{X}_N(E)$. Si N est vide, c'est à dire pour le problème de Weierstrass, $\mathcal{W}$ est toujours de type fini sous $\mathcal{A}$. On peut se poser le problème de Bernstein strict, consistant à trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on ait la condition de type fini. Bien que le problème de Weierstrass soit complètement résolu par le théorème de Weierstrass-Stone, le problème de Bernstein général ou strict reste ouvert en dehors de quelques cas particuliers, parce qu'il donne lieu à des questions analytiques plus fines et difficiles que celles posées par le problème de Weierstrass. Ce problème strict est déjà résolu dans des situations telles que celle où E est la droite réelle R compactifié par l'adjonction du point à l'infini et N est réduit au point à l'infini, $\mathcal{A}$ étant l'algèbre des polynômes réels sur R et $\mathcal{W}$ ayant un générateur, en tant que $\mathcal{A}$-module, réel continu partout non nul (voir Pollard [15] ; voir aussi Mandelbrojt [7], Horvart [2] et Mergelyan [8] pour les questions classiques). Des conditions suffisantes générales sont connues (voir Malliavin [6], Nachbin [12], [13]). Citons le résultat suivant, lequel reflète les liens entre le problème de Bernstein dont nous nous occupons, les fonctions quasi-analytiques et le théorème de Denjoy-Carleman. Supposons que, pour toute semi-norme continue α sur $\mathcal{C}\mathfrak{X}_N(E)$, $\mathcal{W}$ soit contenu dans l'adhérence dans $\mathcal{C}\mathfrak{X}_N(E)$ du $\mathcal{A}$-module engendré par l'ensemble des $w \in \mathcal{W}$ tels que $\mathcal{A}$ soit contenue dans l'adhérence dans $\mathcal{C}(\complement N)$, muni de la topologie compacte, de l'algèbre engendrée par les $f \in \mathcal{A}$ vérifiant la condition

$$\sum_{m \geq 1} \frac{1}{\sqrt[m]{\alpha(f^m w)}} = +\infty .$$

Alors $\mathcal{W}$ est de type fini sous $\mathcal{A}$. On en déduit que, si $\mathcal{W}$ a un seul générateur w, en tant que $\mathcal{A}$-module, partout non nul, et si, pour ce w et pour toute semi-norme continue α sur $\mathcal{C}\mathfrak{X}_N(E)$, l'ensemble des $f \in \mathcal{A}$ satisfaisant à la condition de divergence ci-dessus est séparant sur E, alors $\mathcal{W}$ est dense dans $\mathcal{C}\mathfrak{X}_N(E)$. Remarquons qu'il suffit de faire toutes ces considérations dans le cas particulier où E est compact. Alors, en changeant de notation, c'est-à dire en appelant E l'espace localement compact $\complement N$, ce qui équivaut à reléguer N à l'infini, on peut reformuler les notions et résultats précédents sur un espace localement compact E, où sont définies toutes les fonctions de $\mathfrak{X}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{W}$, l'ensemble N disparraisant des considérations. Terminons avec le commentaire suivant. Les deux parties de cet exposé sont des cas particuliers d'une même question, à savoir le problème de Bernstein pour les fonctions continûement différentiables. Jusqu'au présent, très peu de choses ont été ecrites sur ce chapitre important de la théorie de l'approximation.

* * *

BIBLIOGRAPHIE

1. G. GLAESER, Étude de quelques algèbres tayloriennes, Journal d'Analyse Mathématiques, vol. 6 (1958).
2. J. HORVATH, Aproximación y funciones casi-analíticas, Publicaciones de la Facultad de Ciencias, Universidad de Madrid (1956).
3. S. LANG, Introduction to differentiable manifolds (1962).
4. S. ŁOJASIEWICZ, Sur le problème de la division, Studia Mathematica, t. 18 (1959).
5. B. MALGRANGE, Division des distributions, Séminaire Schwartz, Faculté des Sciences de Paris, 4e année (1959/1960).
6. P. MALLIAVIN, L'approximation polynomiale pondérée sur un espace localement compact, American Journal of Mathematics, vol. 81 (1959).
7. S. MANDELBROJT, General theorems of closure, The Rice Institute Pamphlet, Special Issue (1951).
8. S. N. MERGELYAN, Weighted approximation by polynomials, Uspehi Matematiceskih Nauk (NS), vol. 11 (1956); American Mathematical Society Translations (Series 2), vol. 10 (1958).
9. H. MIRKIL, The work of Silov on commutative semi-simple Banach algebras, University of Chicago (1951).
10. L. NACHBIN, Sur les algèbres denses de fonctions différentiables sur une variete, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 228 (1949).
11. L. NACHBIN, Algebras of finite differential order and the operational calculus, Annals of Mathematics, vol. 70 (1959).
12. L. NACHBIN, On the weighted polynomial approximation in a locally compact space, Proceedings of the National Academy of Sciences of USA, vol. 47 (1961).
13. L. NACHBIN, Sur l'approximation polynomiale pondérée des fonctions réelles continues, Volume des Comptes Rendus de la Deuxieme Réunion des Mathématiciens d'Expression Latine, Italie (1961).
14. M. A. NEUMARK, Normierte Algebren (1959).
15. H. POLLARD, The Bernstein approximation problem, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 6 (1955).
16. C. E. RICKART, General theory of Banach Algebras (1960).
17. L. SCHWARTZ, Les théorèmes de Whitney sur les fonctions différentiables, Séminaire Bourbaki, 3e année (1950/1951).
18. H. WHITNEY, On ideals of differentiable functions, American Journal of Mathematics, vol. 70 (1948).