NOTAS DE FÍSICA

VOLUME X

Nº 13

SUR L'ABONDANCE DES POINTS EXTRÉMAUX D'UN ENSEMBLE CONVEXE BORNÉ ET FERMÉ

par

Leopoldo Nachbin

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71

RIO DE JANEIRO

1963

Notas de Física - Volume X - Nº 13

SUR L'ABONDANCE DES POINTS EXTRÉMAUX D'UN ENSEMBLE CONVEXE BORNÉ ET FERMÉ *

Leopoldo Nachbin
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Universidade do Brasil, Rio de Janeiro

(Reçu le 4 Mars, 1963)

1. Étant donnée une collection $\mathcal{A}$ d'ensembles, on dit que $\mathcal{A}$ a la propriété d'intersection binaire s'il n'existe aucune sous-collection non vide $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ telle que l'intersection de $\mathcal{B}$ soit vide et l'intersection de deux éléments arbitraires de $\mathcal{B}$ soit non vide (voir [6] et [7, p. 30]). L'exemple typique est celui de la collection des intervalles fermés non vides $[a, b] = \{x; a \leq x \leq b\}$ d'un ensemble complètement réticulé, c'est-à-dire d'un ensemble ordonné où toute partie non vide majorée, resp. minorée, admet une borne supérieure, resp. inférieure (comparer avec [7, Lemme 3, p. 37]).

On explicitera, dans la présente note, une démonstration du résultat suivant, conjecturé pour la première fois dans [6] e [7, p. 28 et (1), p. 45]. Ce théorème se trouve énoncé dans [8, (1), p. 346].

---

* À paraitre aux ANAIS DA ACADEMIA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS.

** Actuellement professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

THÉORÈME. $\mathcal{E}$ étant un espace vectoriel topologique réel localement convexe séparé, si A est une partie convexe bornée et fermée de $\mathcal{E}$ telle que la collection des $\lambda A + x$, pour $\lambda > 0$ réel et $x \in \mathcal{E}$, ait la propriété d'intersection binaire, alors A est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses points extrémaux.

2. Avant d'indiquer la démonstration de ce théorème, rappelons deux résultats connus qu'on utilisera.

(α) Pour qu'un espace vectoriel normé réel $\mathcal{F}$ soit isomorphe au sens vectoriel normé à l espace de Banach $\mathcal{C}(X)$ des fonctions réelles continues sur un espace compact et stonien X, il faut et il suffit que la collection des boules fermées de $\mathcal{F}$ ait la propriété d'intersection binaire, un espace stonien, ou extrêmement disconnexe, étant un espace uniformisable séparé tel que l'ensemble ordonné des fonctions réelles continues sur lui soit complètement réticulé (voir [10] et [4]). Les étapes de la démonstration connue de cette proposition sont les suivantes. Si X est un espace compact et stonien, la collection des boules fermées de $\mathcal{C}(X)$ a la propriété d'intersection binaire, d'après l'exemple typique ci-dessus. Réciproquement, si la collection des boules fermées de $\mathcal{F}$ a la propriété d'intersection binaire, alors, d'après [1, Theorem 2, §4, p. 430], chaque boule fermée de $\mathcal{F}$ possède au moins un point extrémal. Donc [7, Theorem 4, p. 43] entraîne que $\mathcal{F}$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{C}(X)$ sur un espace compact et stonien X. On pourrait, aussi, établir cette réciproque en remarquant que, d'après [7, Theorem 1, p. 30], $\mathcal{F}$ possède la propriété d'extension, donc, en vue de [5, Theorem, p. 323], $\mathcal{Y}$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{C}(X)$ sur un espace compact et stonien X.

(β) Pour que toute boule fermée de l'espace de Banach $\mathcal{C}(X)$ des fonctions réelles continues sur un espace compact X soit l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses points extrémaux, il faut et il suffit que X soit totalement disconnexe, c'est-à-dire que les parties simultanément ouvertes et fermées de X forment une base de sa topologie. La démonstration de cette assertion est classique et facile.

Passons, après ces préliminaires, à la preuve du théorème indiqué. Soient $\mathcal{E}$ et A satisfaisant aux conditions imposées dans sons énoncé. Nous pouvons supposer A non vide. Il en résulte que A possède un centre de symétrie. En fait, envisageons les deux collections suivantes

$$\{A+x;\ x\in A\}\ ,\quad \{\lambda A+x;\ \lambda\in R,\ \lambda>0,\ x\in\mathcal{E}\},$$

dont la première est une sous-collection de la deuxième. Deux éléments arbitraires de cette sous-collection ont une intersection non vide, comme il résulte de

$$x_2+x_1 = x_1+x_2\in(A+x_1)\cap(A+x_2)\quad \text{pour}\ x_1,\ x_2\in A.$$

Donc, d'après la propriété d'intersection binaire pour la deuxième collection, la sous-collection indiquée a une intersection non vide, ce qui signifie qu'il existe t tel que $t\in A+x$ pour tout $x\in A$ et, par suite, t/2 est un centre de symétrie de A (du fait que A est bornée, il en résulte que t est unique, mais nous n'aurons pas à utiliser ceci). Cette remarque nous permet de limiter nos consi dérations au cas où l'origine est un centre de symétrie de A. Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ engendré par A et normé de façon que A soit sa boule fermée de centre à l'origine et rayon unité, ce qui est possible d'une façon unique parce que A engendre $\mathcal{F}$ et est convexe, symétrique par rapport à l'origine, bornée et fermée dans $\mathcal{E}$. On peut, alors, appliquer le résultat (α) ci-dessus et dire que $\mathcal{F}$ est isomorphe au sens vectoriel normé à l'espace de Banach $\mathcal{C}(X)$ sur un espace compact et stonien X, lequel, par suite, est totalemente disconnexe. Il ne reste qu'à appliquer le résultat (β) ci-dessus pour terminer la démonstration du théorème, parce que, A étant bornée dans $\mathcal{E}$, la topologie induite sur $\mathcal{F}$ par $\mathcal{E}$ est moins fine que celle de la norme de $\mathcal{F}$, et, d'autre part, A est fermée dans $\mathcal{E}$.

Remarquons, en passant, que l'hypothèse que A soit fermée dans $\mathcal{E}$ ne découle pas des autres conditions imposées dans l'énoncé du théorème qu'on vient d'établir. Il suffit, pour le voir, de considérer un espace compact et stonien infini X, ainsi que la topologie faible sur $\mathcal{C}(X)$ définie par un sous-espace vectoriel séparant du dual de $\mathcal{C}(X)$ mais tel que les boules fermées de rayons strictement positifs de $\mathcal{C}(X)$ ne soient pas fermées pour cette topologie faible: $\mathcal{E}$ est alors $\mathcal{C}(X)$ muni de cette topologie faible et A est une boule fermée de $\mathcal{C}(X)$ de rayon strictement positif. Par contre, si A possède un intérieur non vide et satisfait aux conditions de l'énoncé du théorème, sauf éventuellement l'hypothèse d'être fermée, alors automatiquement $\mathcal{E}$ est un espace de Banach et A est fermée, comme il est aisé de le constater.

3. La propriété d'intersection binaire entraîne la propriété d'intersection finie. Comme il est classique, celle-ci signifie la chose suivante. Étant donnée une collection $\mathcal{A}$ d'ensembles, on dit que $\mathcal{A}$ a la propriété d'intersection finie s'il n'existe aucune sous-collection non vide $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ telle l'intersection de $\mathcal{B}$ soit vide et l'intersection de toute sous-collection finie non vide de $\mathcal{B}$ soit non vide. Or, l'analogie frappante entre le théorème de Krein-Milman [2] et le théorème ci-dessus nous amène à conjecturer l'existence d'un résultat plus général, contenant ces deux là comme des cas particuliers (voir [8, (1), p. 436]). Une forme précise de cette conjecture à examiner est la suivante: $\mathcal{E}$ étant un espace vectoriel topologique réel localement convexe séparé, si A est une partie convexe bornée et fermée, disons même complète, de $\mathcal{E}$, telle que la collection des $\lambda A + x$, pour $\lambda > 0$ réel et $x \in \mathcal{E}$, ait la propriété d'intersection finie, alors A est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses points extrémaux. À notre connaissance, la validité de cette conjecture reste à élucider. Une démonstration directe du théorème établit ci-dessus, suivant l'esprit de celles du théorème de Krein-Milman et de [1, Theorem 2, §4, p. 430], serait souhaitable au point de vue de l'établissement de la conjecture ci-dessus ou d'une de ses variantes plausibles. Remarquons que cette conjecture n'est pas sans rapport avec l'analogue de dimension infinie de [8, (8), p. 438]: en fait, si le résultat conjecturé est faux, il reste à examiner le même énoncé, avec la propriété d'intersection n-aire, pour en entier $n \geqslant 2$ donné, à la place de la propriété d'intersection finie.

D'autre part, quand $\mathcal{E}$ est de dimension finie, il est connu [7, Theorem 3, p. 43] que A satisfait aux conditions du théorème démontré dans cette note si et seulement si A est un parallélépipède. Or, Nagy [9, Satz, p. 170] a remarqué que ceci reste vrai si l'on se limite au cas $\lambda = 1$, c'est-à-dire si l'on suppose seulement que la collection des $A + x$, pour $x \in \mathcal{E}$, a la propriété d'intersection binaire, ce qui nous amène à examiner aussi la validité du théorème de cette note et de la conjecture ci-dessus en prenant $\lambda = 1$.

Finalement, il convient de dire que le théorème établit ici et la conjecture énoncée ne sont pas sans rapport avec les travaux de Choquet [3].

* * *

BIBLIOGRAPHIE

1. N. ARONSZAJN & P. PANITCHPAKDI, Extension of uniformly continuous transformation and hyperconvex metric spaces, Pacific Journal of Mathematics, vol. 6 (1956).
2. N. BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques, Chaps I & II, Paris (1953).
3. G. CHOQUET, Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes, Séminaire Bourbaki, 9e année (1956/1957).
4. J. DIXMIER, Sur certains espaces considérés par M. H. Stone, Summa Brasiliensis Mathematicae, vol. 2 (1951).
5. J. L. KELLEY, Banach spaces with the extension property, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 72 (1952).
6. L. NACHBIN, On the Hahn-Banach theorem, Anais da Academia Brasileira de Ciências, vol. 21 (1949).
7. L. NACHBIN, A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 68 (1950).
8. L. NACHBIN, Some problems in extending and lifting continuous linear transformations, Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces, 1960, Hebrew University of Jerusalem (1961).
9. B. Sz. NAGY, Ein Satz uber Parallelverschiebungen konvexer Korper, Acta Scientiarum Mathematicarum, vol. 15 (1953).
10. M. H. STONE, Boundedness properties in function-lattices, Canadian Journal of Mathematics, vol. 1 (1949).