

NOTAS DE FÍSICA

VOLUME VIII

Nº 13

BEUGUNGSTHEORIE UND n -KÖRPERPROBLEM

von

Guido Beck

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71

RIO DE JANEIRO

1961

BEUGUNGSTHEORIE UND n -KÖRPERPROBLEM

Guido Beck

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, Brasilien

(Received September 4, 1961)

ZUSAMMENFASSUNG: Die vor Kurzem entwickelte Methode zur Behandlung von Beugungsproblemen¹ wird auf den Fall eines Mehrkörperproblems mit Wechselwirkungskräften beschränkter Reichweite angewandt und führt zu einem Formalismus der eine direkte Verallgemeinerung des Falles von einem Teilchen in einem äusseren Potentialfeld darstellt. Den gebeugten Wellen entspricht in diesem Falle die Gesamtheit der energetisch erlaubten elastischen und unelastischen Prozesse. Daneben ergeben sich noch Konfigurationen, welche abklingenden Wellen eines Teilchens und angeregten Zuständen des Restsystems entsprechen und welche für die Struktur des Oberflächengebiets des Systems massgebend sind. Es wird kurz auf die Analogie hingewiesen, welche zwischen der Oberflächenstruktur eines n -Körperproblems und der Aussenstruktur eines quantentheoretischen Eigenfeldes besteht.

1. EINLEITUNG.

Eine Methode zur Behandlung von Beugungserscheinungen wurde vor Kurzem von H. M. Nussenzweig¹ entwickelt und im Falle des in Fig. 1 dargestellten Doppelkeils im Einzelnen durchgeführt.

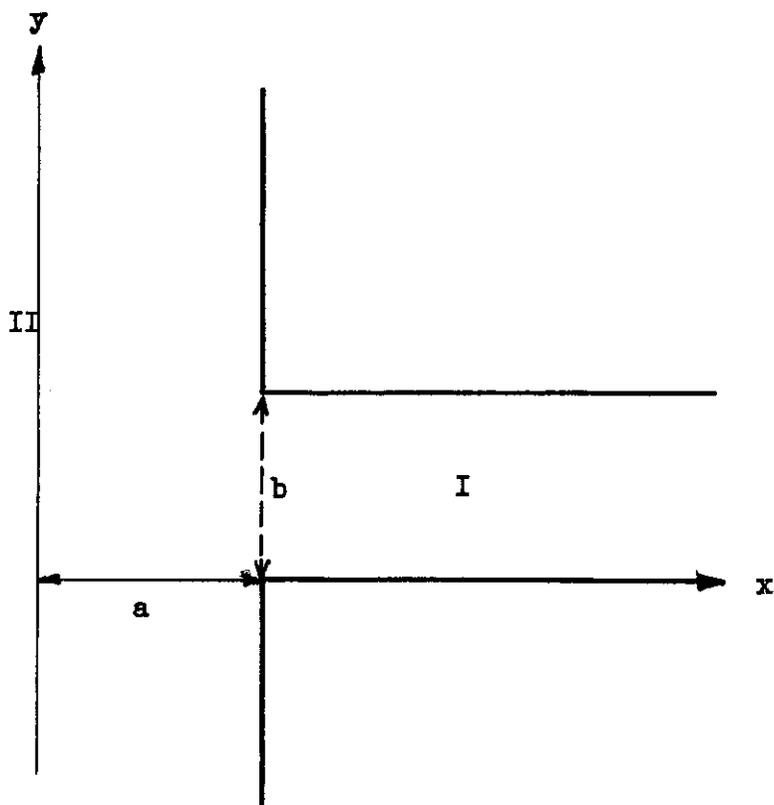


Fig. 1

Der Doppelkeil

Eine Welle fällt im Gebiet I von rechts ein, wird an der Fläche $x=a$ teils reflektiert, teils in den Halbraum II gebeugt und hat, ausser der Schwingungsgleichung

$$\Delta \psi + k_0^2 \psi = 0 \quad (1)$$

an den angegebenen Begrenzungsflächen geeignete Randbedingungen, z. B. $\psi = 0$ zu erfüllen. Unter Beachtung der geforderten

Grenzbedingungen für $x = \pm \infty$ (Ausstrahlungsbedingung) können wir direkt setzen

$$\psi_I(x,y) = \sum_m \left\{ \delta_{ms} \cdot \exp(-i\kappa_m x) + a_m \cdot \exp(i\kappa_m x) \right\} \sin k_m y \quad (2)$$

$$\psi_{II}(x,y) = \int_0^{\infty} A(k) \cdot \exp(-i\kappa x) \cdot \sin ky \cdot dk$$

wobei $\sin k_m b = 0$ und

$$\kappa_m = (k_0^2 - k_m^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{Im}(\kappa_m) \geq 0; \quad \kappa = (k_0^2 - k^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{Im}(\kappa) \geq 0$$

Der Index s bezeichnet die von rechts einfallende Welle, a_m sind die Amplituden der reflektierten, bzw. nach rechts exponentiell abklingenden Partialwellen. $A(k)$ sind die Amplituden der nach links auslaufenden gebeugten, bzw. nach links exponentiell abklingenden Partialwellen.

Die gesuchten Koeffizienten $A(k)$ und a_m sind nun durch die Grenzbedingungen

$$\psi_{II}(a,y) = \psi_I(a,y), \quad \psi'_{II}(a,y) = \psi'_I(a,y), \quad \psi' = \partial\psi/\partial x \quad (3)$$

bestimmt. Setzen wir (2) in (3) ein und berücksichtigen wir den Umstand, dass $\sin ky$ und $\sin k_m y$ in ihrem Definitionsbereich vollständige orthogonale Systeme sind, erhalten wir durch Integration über y die Beziehungen

$$A(k) = \sum_m \left[L_{km} / \exp(-i\kappa a) \right] \cdot \left[\delta_{ms} \cdot \exp(-i\kappa_m a) + a_m \cdot \exp(i\kappa_m a) \right] \quad (4)$$

$$L_{km} = (2/\pi) \cdot (-1)^m \cdot k_m \cdot \sin kb / (k^2 - k_m^2)$$

und

$$\delta_{ms} \cdot \exp(-i\kappa_m a) - a_m \cdot \exp(i\kappa_m a) = \int L_{mk} \cdot A(k) \cdot \exp(-i\kappa a) \cdot dk \quad (4')$$

$$L_{mk} = (2\kappa/\kappa_m b) \cdot (-1)^m \cdot k_m \cdot \sin kb / (k^2 - k_m^2)$$

Ersetzen wir schliesslich in (4') $A(k)$ durch seinen Ausdruck (4), so erhalten wir für die Amplituden a_m ein unendliches System inhomogener linearer Gleichungen

$$\sum_m a_m \cdot (K_{nm} + \delta_{nm}) \cdot \exp(i\kappa_m a) + (K_{ns} - \delta_{ns}) \cdot \exp(-i\kappa_s a) = 0 \quad (5)$$

wobei

$$K_{nm} = \int L_{nk} \cdot L_{km} \cdot dk \quad (6)$$

Die Lösung von (5) bestimmt, nach (2), die Funktion $\psi_I(x, y)$ und, auf Grund von (4), die Funktion $\psi_{II}(x, y)$.

Nussenzweig, l.c., konnte nun zeigen, dass das Gleichungssystem (5) tatsächlich gelöst und der physikalischen Diskussion des Problems zugänglich gemacht werden kann. Dieser Erfolg ist auf zwei Umstände zurückzuführen:

Einerseits kennen wir die beiden wesentlichen Grenzfälle unseres Problems. Im Falle sehr hoher Frequenzen k_0 ist die Lösung direkt durch die geometrische Optik angebar. Setzen wir in (4) $a_m = 0$ (Abwesenheit reflektierter Wellen wie in der geometrischen Optik) so ergibt sich im linken Halbraum direkt die Kirchhoffsche Näherung des Beugungsproblems. Weiter ist das Verhalten einer im rechten Halbraum einfallenden kritischen Welle bekannt: $a_m = -\delta_{ms}$. Dieses Verhalten bestimmt die Verhältnisse bei niedrigen Frequenzen. Tatsächlich liefern die Gleichungen (5) in diesem Bereich in erster

Näherung die Lösungen die bereits von Lord Rayleigh und später von J. Schwinger angegeben wurden.

Andererseits wissen wir, dass die Fourierkomponenten hoher Ordnung, $m \gg 1$, $k \gg k_0$ im Wesentlichen das singuläre Verhalten der Wellenfunktion an den Kanten der Begrenzungsflächen darzustellen haben. Da aber das Verhalten der Wellenfunktion an den Kanten seit Maxwell und Sommerfeld bekannt kennen wir auch das asymptotische Verhalten der Amplituden a_m und $A(k)$ für hohe Werte von m und k . Dieser zweite Umstand hat zur Folge, dass das unendliche Gleichungssystem (5) sich durch ein endliches Gleichungssystem annähern lässt.

2. DAS BEGRIFFLICHE SCHEMA DER BEUGUNGSTHEORIE.

Bevor wir zu den beabsichtigten Anwendungen der Methode übergehen, wollen wir zunächst das eben angegebene Schema mit der üblichen Terminologie der Quantentheorie vergleichen.

Im Sinne der Quantentheorie bestimmt die Lösung unseres Randwertproblems die Eigenfunktion eines Quantenzustandes eines Teilchens. Das übliche Verfahren besteht nun darin die gesuchte Eigenfunktion als eine Summe orthogonaler Funktionen, welche keine Lösungen des vorgegebenen Problems sind, darzustellen. Der Vorteil welchen wir damit gewinnen besteht in der Möglichkeit mit leicht zu handhabenden Orthogonalsystemen rechnen zu können. Der Nachteil besteht in der Notwendigkeit aus der gegebenen Hamiltonfunktion einen Teil, oft recht künstlich, als Störungsenergie abzusondern.

Die oben skizzierte Beugungstheorie hingegen, versucht die

gesuchte Eigenfunktion aus Partiaillösungen, welche kein Orthogonal-system bilden, welche aber innerhalb ihres Definitionsbereichs strenge Lösungen des betrachteten Problems darstellen, zusammensetzen. Der Begriff einer Störungsenergie ist diesem Schema fremd. An seine Stelle treten Kopplungen zwischen den einzelnen Partiaillösungen welche durch die Art der Zusammensetzung, also im Wesentlichen durch die vorgegebene Differentialgleichung bestimmt werden.

Die Anwendbarkeit unserer Methode hängt nun von der Möglichkeit ab den verwendeten Partiaillösungen einen einfachen physikalischen Sinn zuzuschreiben.

Wir betrachten nun im oben erwähnten Beispiel zwei Partial-lösungen

$$\psi_k = \exp(-ikx) \cdot \sin ky \quad \text{und} \quad \psi_m = \exp(ik_m x) \cdot \sin k_m y \quad (7)$$

und stellen zunächst fest, dass beide Lösungen (7) in zwei verschiedene Gruppen zerfallen, nämlich in fortschreitende Wellen für $k, k_m < k_0$ und in exponentiell in der x-Richtung abklingende Wellen für $k, k_m > k_0$.

Die Frage wie weit wir den einzelnen Partiaillösungen Zustandscharakter, d.h. additive Besetzungswahrscheinlichkeiten zubilligen können, hängt wesentlich von ihren Orthogonalitätseigenschaften ab. In Fällen in welchen wir mit orthogonalen Partialwellen arbeiten können, werden wir im Folgenden von Teilzuständen sprechen, um sie von den eigentlichen Zuständen zu unterscheiden.

Die Funktionen $\psi_k(x,y)$ und $\psi_m(x,y)$ sind untereinander orthogonal, da sie zu verschiedenen Halbräumen gehören. Ebenso

sind alle Funktionen (7) in der y -Richtung orthogonal. Dagegen sind zwei Funktionen, welche zum selben Wert von k_m oder k aber zu verschiedenen Werten von k_0 gehören, nicht orthogonal. Wir können daher von Teilzuständen nur dann sprechen, wenn wir uns auf eine Lösung vorgegebener Frequenz oder Energie beschränken. Bei einem vorgegebenen k_0 , hingegen, sind die Partiaillösungen orthogonal und wir können ihnen additive Wahrscheinlichkeiten zuschreiben.

Wir können nun das oben betrachtete Beugungsproblem so beschreiben, dass wir sagen, dass das von rechts einfallende Teilchen zur Partialwelle s gehört, sich also im s -ten einfallenden Teilzustand befindet. An der von uns gewählten Trennungsfläche $x = a$ besitzt nun das Teilchen eine, durch den Koeffizienten L_{ks} in (4) bestimmte, Wahrscheinlichkeit in die Partialwelle ψ_k überzutreten, von wo es wiederum mit einer durch L_{mk} bestimmten Wahrscheinlichkeit in eine Partialwelle ψ_m übergehen kann. Die Koeffizienten L_{km} und L_{nk} spielen somit in der Beugungstheorie eine ähnliche Rolle, wie die Matrixelemente in der Quantentheorie. Die Gleichung (5) ist die Stationaritätsbedingung, nach welcher sich die verschiedenen Uebergangswahrscheinlichkeiten ins Gleichgewicht setzen. Die Koeffizienten K_{nm} in (6) entsprechen Doppelübergängen aus dem Teilzustand m in der Teilzustand n über irgendeinen Zwischenteilzustand k .

Da die Uebergangskoeffizienten auf der Trennungsfläche $x = a$ definiert sind, müssen wir sagen, dass die Uebergänge auf der Trennungsfläche stattfinden. Dies bedeutet jedoch keinesfalls, dass diese Trennungsfläche sich physikalisch von irgendeiner anderen wählbaren Trennungsfläche unterscheidet, es bedeutet lediglich, dass

wir übereingekommen sind hinter dieser Trennungsfläche eine neue Beschreibungsweise des Phänomens einzuführen.

Auch die Uebergänge welche in der Quantenmechanik im Falle eines zeitabhängigen äusseren Potentials betrachtet werden, sind Uebergänge zwischen Teilzuständen, nicht zwischen Zuständen. Die beiden Teilstände zwischen welchen ein Uebergang stattfindet sind in diesem Falle nicht räumlich sondern zeitlich getrennt: $\psi_I(x,y,z, t < t_1)$ und $\psi_{II}(x,y,z, t > t_2)$, wenn das Potential im Zeitintervall $t_1 < t < t_2$ variiert. Der Bohrsche Begriff des nicht näher beschreibbaren elementaren Quantenübergangs ist nur an solchen Stellen der Theorie unerlässlich, an welchen wir den differentiellen Zusammenhang noch nicht kennen, wie z.B. beim Ausstrahlungsprozess oder bei der Erzeugung von Paaren, und bei welchen die noch unbekannte Dynamik der Eigenfelder in Erscheinung tritt.

Wenn wir nach der Wahrscheinlichkeit der betrachteten Uebergänge fragen, müssen wir zwei verschiedene Fragestellungen unterscheiden. Da die Gleichung (1) einen Stromvektor zu bilden gestattet, können wir zunächst nach der Wahrscheinlichkeit des einfallender Teilchens fragen, in eine bestimmte Richtung gebeugt oder reflektiert zu werden. Das Gesetz der Stromerhaltung drückt sich dann durch die Beziehung

$$b \kappa_s = \pi \int_0^{k_0} \kappa |A(k)|^2 \cdot dk + b \sum_{k_m < k_0} \kappa_m \cdot |a_m|^2 \quad (8)$$

aus. Die einzelnen Terme auf der rechten Seite entsprechen den relativen Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen möglichen Prozesse. Da die exponentiell abklingenden Partillösungen zum Gesamtstrom nicht beitragen, sind sowohl die Summe als auch das Integral nur

Über die fortschreitenden Wellen zu erstrecken.

Wir wollen nun nach der Wahrscheinlichkeit fragen, ein Teilchen im rechten Halbraum, im Intervall dx zu finden,

$$W(x).dx = \int |\psi_I|^2 \cdot dy \cdot dx \quad (9)$$

Auf Grund von (2) ergibt sich

$$W(x).dx = \frac{1}{2} b \left\{ 1 + \sum_{k_m < k_0} |a_m|^2 + \sum_{k_m > k_0} |a_m|^2 \cdot \exp(-2|\kappa_m|x) + \right. \\ \left. + 2|a_s| \cdot \cos(2\kappa_s x + \delta_s) \right\} dx \quad (10)$$

Der letzte, oscillierende Term in (10) beschreibt lokale Interferenzen zwischen der einfallenden und der elastisch reflektierten Welle und ist für uns ohne Interesse. Die beiden ersten Terme zeigen, dass die fortschreitenden Wellen mit konstanter Dichte über x verteilt sind. Der vorletzte Term, dagegen, repräsentiert den Einfluss der exponentiell abklingenden Wellen. Dieser Einfluss verschwindet in grösser Entfernung, wird jedoch umso grösser je mehr wir uns der Fläche $x = a$ nähern.

Während in der Strombilanz (8) die abklingenden Wellen überhaupt nicht vorkommen, führen sie in der Verteilungsdichte der Teilchen zu einer Vergrösserung in der Nähe der Kanten. Dies entspricht einer charakteristischen Aufstauung, welche bei allen Beugungsproblemen eintritt. Wir können also sagen, dass bei einem Beugungsvorgang ein gewisser Bruchteil der einfallenden Teilchen in exponentiell abklingenden Teilzuständen gebunden wird.

Es ist nun berechtigt nach der Ursache dieser Intensitätsaufstauungen in der Nähe von Kanten zu fragen. Die Antwort auf diese

Frage wurde in anderem Zusammenhang gegeben ²). Wenn wir die Wellengleichung in der Nähe einer gekrümmten Fläche lösen und die Randbedingungen auf der Fläche befriedigen wollen, sind wir gezwungen der Fläche angepasste krummlinige Koordinaten und damit Trägheitskräfte einzuführen, welche die Wellenausbreitung beeinflussen und zu Aufstauungen Anlass geben. Beugungserscheinungen an gekrümmten Flächen können somit als Trägheitseffekte angesehen werden. Das Aufstauungsphänomen tritt besonders stark in der Nähe der Oberfläche einer Antenne auf und wurde darum in der zitierten Arbeit als Antenneneffekt bezeichnet. In der hier gewählten Darstellung, welche die Einführung krummliniger Koordinaten vermeidet, erscheint das Phänomen in der Gestalt von Teilzuständen mit exponentiell abklingenden Wellenfunktionen.

3. DER RECHTWINKLIGE WELLENLEITER.

Nach dieser Vorbereitung wollen wir nun unser Verfahren auf den in Fig. 2 dargestellten rechtwinkligen Wellenleiter anwenden, auf dessen Bedeutung als Modell für Kernreaktionen mich Herr F. Beck (Frankfurt) aufmerksam gemacht hat.

Wir zerlegen wiederum das Gebiet, wie angegeben, in zwei Teilgebiete und haben dann, wie in (2), zu setzen

$$\psi_I(x,y) = \sum_m \left[\delta_{ms} \cdot \exp(-i\kappa_m x) + a_m \cdot \exp(i\kappa_m x) \right] \sin k_m y \quad (11)$$

$$\psi_{II}(x,y) = \int_0^{\infty} A(k) \cdot \sin \kappa x \cdot \sin ky \cdot dk.$$

Durch den Ansatz (11) garantieren wir zunächst die Erfüllung der

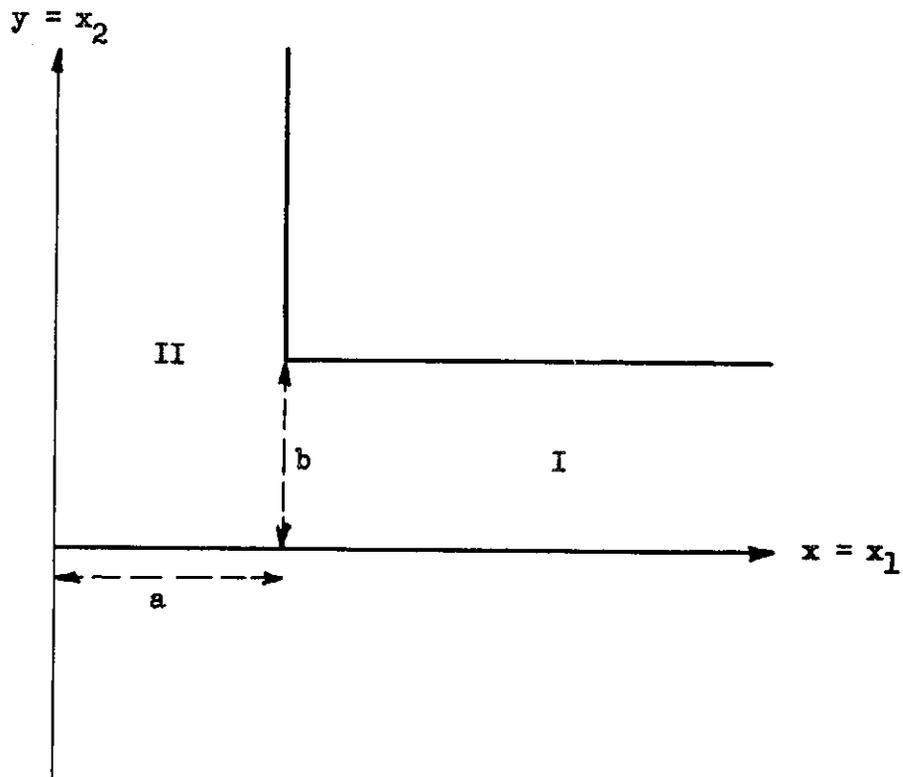


Fig. 2

Der rechtwinklige Wellenleiter

Randbedingungen an den Begrenzungsflächen des Gebietes I und an der Fläche $x = 0$. Die Randbedingung auf der Fläche $x = a$ wird durch die Zusammensetzungsvorschrift zu erfüllen sein. Auf die Erfüllung der Ausstrahlungsbedingung im Gebiet II haben wir vorläufig zu verzichten; die Möglichkeit diese Bedingung zu erfüllen wird sich erst weiter unten ergeben.

Die Zusammensetzungsbedingungen lauten nun

$$\psi_{II}(a, y < b) = \psi_I(a, y), \quad \psi_{II}(a, y > b) = 0, \quad \psi'_{II}(a, y < b) = \psi'_I(a, y) \quad (12)$$

und führen in diesem Falle zu den Beziehungen

$$A(k) = \sum_m (L_{km} / \sin \kappa_m a) \cdot \left[\delta_{ms} \cdot \exp(-i \kappa_m a) + a_m \cdot \exp(i \kappa_m a) \right] \quad (13)$$

$$\delta_{ms} \cdot \exp(-i\kappa_m a) - a_m \cdot \exp(i\kappa_m a) = i \int L_{mk} \cdot A(k) \cdot \cos \kappa a \cdot dk \quad (13')$$

und

$$\sum_m (K'_{nm} + \delta_{nm}) \cdot a_m \cdot \exp(i\kappa_m a) + (K'_{ns} - \delta_{ns}) \cdot \exp(-i\kappa_s a) = 0 \quad (13'')$$

wobei die Koeffizienten L_{km} und L_{mk} in (4) und (4') gegeben sind und

$$K'_{nm} = i \int L_{nk} L_{km} \cdot (\cos \kappa a / \sin \kappa a) \cdot dk \quad (14)$$

Wesentlich ist nun für uns das analytische Verhalten von $A(k)$ als Funktion von k . Wegen $\kappa = (k_0^2 - k^2)^{\frac{1}{2}}$ besitzt die Funktion $A(k)$ nach (13) Verzweigungspunkte bei $k = \pm k_0$ und eine unendliche Anzahl von einfachen Polen an den Nullstellen $\sin \kappa a = 0$. Nennen wir diese Nullstellen $\kappa = \bar{\kappa}_n$ so ergibt sich für sie in der komplexen k -Ebene

$$k = (k_0^2 - \bar{\kappa}_n^2)^{\frac{1}{2}} = \bar{\kappa}_n$$

In Fig. 3 sind die Pole und die gewählten Verzweigungsschnitte der Funktion $A(k)$ eingetragen.

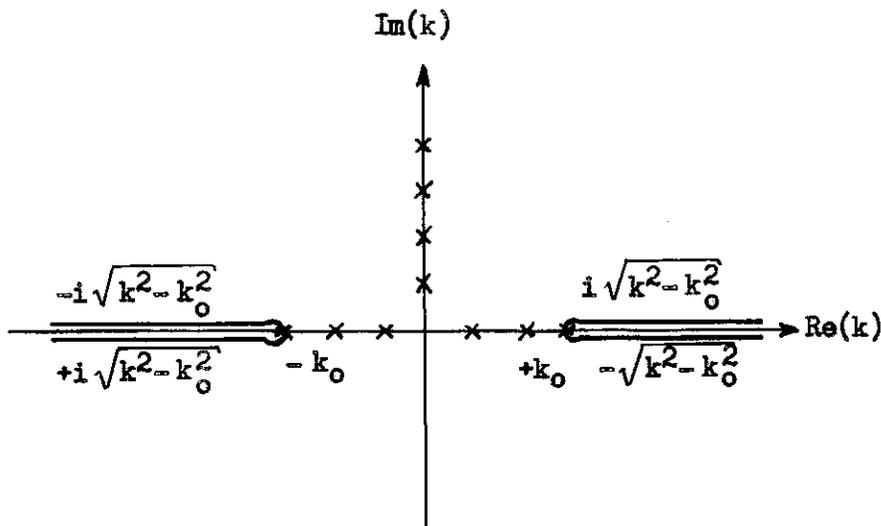


Fig. 3

Die komplexe k -Ebene:

Da $A(k)$ auf der reellen Achse von k Pole und Verzweigungspunkte besitzt, werden zunächst die Integrale (11), (13') und (14) unbestimmt und erfordern die Festlegung eines komplexen Integrationsweges. Diese Unbestimmtheit erlaubt uns nun die geforderte Ausstrahlungsbedingung im Gebiet II zu erfüllen.

Um den zu wählenden Integrationsweg zu bestimmen, setzen wir

(13) in (11) ein

$$\psi_{II}(x,y) = \int_0^{+\infty} A(k) \cdot \sin kx \cdot \sin ky \cdot dk = (1/2i) \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \cdot \sin kx \cdot \exp(iky) \cdot dk \quad (15)$$

wobei wir davon Gebrauch machen, dass der Integrand von (15) nicht mehr verzweigt ist und dass L_{km} eine ungerade Funktion von k ist. (15) reduziert sich somit auf ein Integral mit einfachen Polen.

Für $y > b$ kann nun das Integral (15) mit (13) und (4) in der oberen Halbebene geschlossen und liefert auf Grund des CAUCHYschen Satzes eine Summe von zu den einzelnen Polen gehörigen Termen

$$\psi_{II}(x,y > b) = \sum_n b_n \cdot \sin \bar{k}_n x \cdot \exp(i\bar{k}_n y) \quad (16)$$

wobei nun die b_n lineare Funktionen der a_m sind. Die Pole auf der imaginären k - Achse entsprechen dann exponentiell in der y -Richtung abklingenden Wellen, während die Pole auf der reellen k - Achse fortschreitende Wellen darstellen. Die Ausstrahlungsbedingung erfordert nun, dass alle energetisch möglichen auslaufenden Wellen eingeschlossen werden und dass keine einlaufende Welle vorkomme, wie bereits in (16) angenommen wurde. Der in Fig. 4 angegebene Integrationsweg erfüllt die gewünschten Bedingungen.

Nachdem nun der Integrationsweg festgelegt ist, kann nun aus (11)

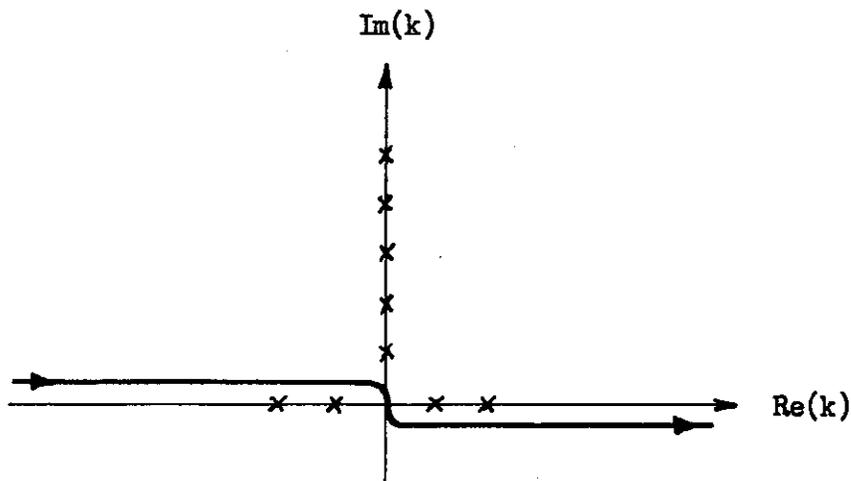


Fig. 4

Der Integrationsweg

auch $\psi_{II}(x, y < b)$ bestimmt werden und auch die Integrationen in (13') und (14) sind nun wohldefiniert. Setzen wir die aus (14) folgenden Koeffizienten K_{nm}' in (13'') ein, so gewinnen wir ein unendliches lineares Gleichungssystem, welches ebenso wie oben (5) die Amplituden a_m festlegt.

Die explizite Lösung von (13'') ist eine schwierige mathematische Aufgabe, welche jedoch ebenso wie die von Nussenzweig behandelte Gleichung (5) gelöst werden kann. Die Einzelheiten der Lösung, welche sich auf ein sehr spezielles Modell beziehen, sind jedoch für unsere Zwecke von geringem Interesse und sollen hier nicht näher untersucht werden. Wir begnügen uns mit der Feststellung, dass nach der Beugungstheorie $\psi_I(x, y)$ durch (11) und $\psi_{II}(x, y > b)$ durch (16) dargestellt sind und dass ein lineares Gleichungssystem (13'') existiert, welches die darin vorkommenden Koeffizienten bestimmt.

4. INTERPRETATION DURCH EIN ZWEIKÖRPERPROBLEM.

Das in 3. untersuchte einfache Modell eines rechtwinkligen Wellenleiters kann nun in bekannter Weise als ein Problem von zwei in einem äusseren Potentialfeld befindlichen, nichtrelativistischen Teilchen, welche sich nur in einer einzigen Dimension bewegen können, interpretiert werden, wenn wir $x = x_1$ und $y = x_2$ als Koordinaten von zwei Massenpunkten betrachten. Da die potentielle Energie unseres Systems nicht additiv aus den potentiellen Energien der beiden Teilchen zusammengesetzt werden kann, enthält sie ausserdem noch eine, im vorliegenden Falle abstossende, Wechselwirkungsenergie. Das äussere Feld verhindert, dass unser Problem durch Einführung von Relativkoordinaten auf den Fall eines Einkörperproblems zurückgeführt werden kann. Unser Zweikörperproblem zeigt aus diesem Grunde bereits alle wesentlichen Züge des n-Körperproblems.

Wir bemerken zunächst, dass sich die Begriffe der Beugungstheorie ohne Weiteres auf das mechanische Problem übertragen lassen. Den Kanten eines Wellenleiters entsprechen hinreichend stark abfallenden Wechselwirkungspotentialen endlicher Reichweite, und diese bewirken wiederum Aufstauungen des Wellenfeldes welche Trägheitswirkungen im Konfigurationsraum entsprechen.

Wir wollen nun die drei Teilgebiete

$$Z: x_1 < a, x_2 < b$$

$$S: x_1 > a, x_2 < b$$

$$R: x_1 < a, x_2 > b$$

gesondert betrachten.

Z wollen wir als das Zentralgebiet des Systems bezeichnen. In

ihm befinden sich beide Teilchen so nahe voneinander, dass die Wechselwirkungskräfte zwischen ihnen wirksam sind. Ihm entspricht eine Wellenfunktion $\psi_Z = \psi_{II}(x_1, x_2 < b)$ welche wir zwar im Falle unseres schematischen Modells bestimmen können, welche aber im Allgemeinen stark von der Art der Wechselwirkungskräfte abhängen wird.

S soll das Streugebiet des Systems genannt werden. Seine Wellenfunktion $\psi_S = \psi_I(x_1, x_2)$ ist durch (11) gegeben. Das Streugebiet enthält ein kräftefreies Teilchen x_1 und ein gebundenes Teilchen x_2 dessen Eigenfunktionen von den wirkenden äusseren Kräften abhängen. Die Wellenfunktion ψ_S setzt sich aus Partialwellen zusammen, von welchen eine, die s-te, das einfallende Teilchen in seinem Teilzustand beschreibt, während die übrigen, soweit sie fortschreitende Wellen enthalten, den elastischen und unelastischen Streuungen des einfallenden Teilchens, zusammen mit den zugehörigen Zustandsänderungen des gebundenen Teilchens entsprechen. Dazu treten noch, als wesentlich neue Erscheinung, die Teilzustände mit exponentiell abklingenden Wellen des gestreuten Teilchens, welche wir als kräftefrei, aber gebunden bezeichnen müssen.

Wesentlich für die Teilzustände des Gebietes S ist es, dass ihre Partialwellen separierbar sind. Dies kommt davon her, dass sich im Streugebiet die gestreuten Teilchen ausserhalb der Reichweite der Wechselwirkungskräfte befinden und sich somit wie kräftefreie Teilchen verhalten. Ihre Wellenfunktion tritt lediglich als Faktor $\exp(i\kappa_m x_1)$ in der Partialwelle auf. Der zweite Faktor beschreibt das Restsystem und stellt eine eigentliche Eigenfunktion eines Zustands dar.

Für die zu fortschreitenden Wellen gehörigen Streuprozesse ist das geschilderte Verhalten ohne Weiteres anschaulich zu verstehen. Die vorgegebene Gesamtenergie des Systems teilt sich nach dem Stoss in geeigneter Weise neu zwischen gestossenem System und gestreutem Teilchen auf. Die exponentiell abklingenden Teilzustände hingegen sind dadurch charakterisiert, dass das gestossene System mehr Energie aufnimmt als der kinetischen Energie des freien, einfallenden Teilchens entspricht. Es entsteht so ein Teilzustand in welchem das gestreute Teilchen negative kinetische Energie besitzt. Das ist ein reiner Quanteneffekt, ähnlich dem Eindringen eines Teilchens in eine Potentialwand mit negativer kinetischer Energie.

R soll, schliesslich, als Reaktionsgebiet bezeichnet werden, $\psi_R = \psi_{II}(x_1, x_2 > b)$. R unterscheidet sich, gemäss (16) von S nur insofern, als in ihm keine einlaufenden Wellen vorkommen und dass in ihm nun x_1 gebunden, x_2 aber kräftefrei ist.

Es ist nach dem Gesagten ohne Weiteres klar, dass die oben geschilderten Verhältnisse, welche an sich kaum irgendwie überraschen können, durch vollständige Orthogonalsysteme und Zustände nicht rationell beschrieben werden können und die Einführung des Begriffs der Teilzustände unerlässlich machen.

5. VERGLEICH MIT DEM EINKÖRPERPROBLEM.

Wir betrachten nun, von dem oben gewonnenen Standpunkt, den einfachen Fall eines Teilchens in einer Potentialmulde. Ein Reaktionsgebiet kommt in diesem Falle nicht vor. Dem Zentralgebiet entspricht der Teil der Eigenfunktion in welchem sich das Teilchen

im Bereich der Potentialmulde befindet. Das Streugebiet ist der Aussenraum der Potentialmulde, in welchem sich das Teilchen kräftefrei verhält. Auch in diesem Falle treten fortschreitende und exponentiell abklingende Partiaillösungen auf. Die fortschreitenden Wellen gehören zu den Zuständen des kontinuierlichen Spektrums, die exponentiell abklingenden zu den diskreten, gebundenen Zuständen. Unelastische Streuwellen kommen in diesem Falle nicht vor.

Auch bei gebundenen Zuständen des Zweikörperproblems treten nur exponentiell abklingende Teilzustände in R und S auf, allerdings jetzt in unendlicher Anzahl, entsprechend der Zahl der möglichen Anregungszustände des Restsystems.

Gehen wir nun zum kontinuierlichen Energiespektrum des Systems über, so finden wir unter den Teilzuständen auch fortschreitende Wellen aber gleichzeitig eine unendliche Anzahl exponentiell abklingender Wellen. Dies ist der wesentliche, qualitativ neue Zug der für das Mehrkörperproblem charakteristisch ist. Er entspricht dem Umstand, dass in den Teilzuständen einer Mehrkörpersystems jeweils sämtliche angeregten Zustände aller möglichen Restsysteme bereits mit wohldefinierter Wahrscheinlichkeit vorgebildet sind.

Schliesslich sehen wir noch, dass im Falle des Mehrkörperproblems in unserem Formalismus die Gesamtheit aller elastischer und unelastischer Prozesse als gleichberechtigte Partner erscheint. Die rein elastischen Prozesse sind nur insofern ausgezeichnet, als eine einfallende Welle vorhanden ist, welche mit der auslaufenden Streuwelle interferiert und dadurch zu den für die elastische

Streuung charakteristischen, wohlbekannten Erscheinungen führt. Dies scheint den tatsächlichen Verhältnissen bei Kernprozessen viel besser zu entsprechen als Potentialmodelle die stets die elastischen Prozesse auszeichnen. Eine Ausnahme bilden jedoch die bereits in 1. erwähnten, angenähert kritischen Wellen bei welchen die elastische Streuung überwiegt.

6. DAS n-KÖRPERPROBLEM.

Wenn wir nun, an Stelle des in 3. betrachteten zweidimensionalen rechtwinkligen Wellenleiter, einen n-dimensionalen Wellenleiter betrachten, so ändert sich an den oben besprochenen Verhältnissen kaum etwas Wesentliches. Jedes der n Teilchen kann aus dem Zentralgebiet austreten und gibt zu einem Streu- und n - 1 Reaktionsgebieten C_1, C_2, \dots, C_{n-1} Anlass. Jedes Streu- oder Reaktionsgebiet enthält nunmehr ein kräftefreies und n-1 gebundene Teilchen (Restsystem). Es besteht auch keinerlei Schwierigkeit einer eventuellen Statistik der Teilchen durch Symmetrieforderung Rechnung zu tragen.

Eine Verallgemeinerung unseres schematischen Modells ist jedoch wünschenswert. Unser Wellenleiter enthält unendlich hohe Potentialwände, so dass in Fig. 2 keine Teilchen ins Gebiet $x_1 > a, x_2 > b$ eindringen können. Es besteht keine prinzipielle Schwierigkeit ein analoges Modell mit endlich hohen Potentialwänden anzusetzen. In einem derartigen Modell treten dann noch Reaktionsgebiete hinzu in welchen zwei oder mehr Teilchen gleichzeitig das Zentralgebiet verlassen. Es ergeben sich jedoch wesentliche mathematische Schwierigkeiten sobald wir die ausgetretenen Teilchen nicht mehr als

kräftefrei ansehen dürfen und ihre Wechselwirkung mitberücksichtigen wollen.

Eine weitere Komplikation tritt dadurch ein, dass jedes Teilchen nicht durch eine, sondern durch drei Koordinaten (und durch eventuelle innere Variable) darzustellen ist.

Im Falle von mehr als zwei Körpern treten die besprochenen, charakteristischen Züge des Mehrkörperproblems auch dann zutage, wenn kein äusseres Feld vorhanden ist. Die Beschreibung erfordert dann die Abspaltung der Schwerpunktsbewegung und die Einführung von Relativkoordinaten. In den Streu- und Reaktionsgebieten ist es dann vorteilhaft die Relativkoordinaten für jedes Teilgebiet gesondert zu wählen. Es sei \vec{p}_1 die Schwerpunktskoordinate des Gesamtsystems. Wir führen dann im i -ten Teilgebiet $\vec{p}_{i2} = \vec{r}_i - \vec{R}_1$ ein, wobei \vec{r}_i sich auf das i -te Teilchen bezieht und \vec{R}_1 den Schwerpunkt des i -ten Restsystems beschreibt. Die übrigen Relativkoordinaten des i -ten Teilgebiets, $\vec{p}_i = (\vec{p}_{i3}, \vec{p}_{i4}, \dots, \vec{p}_{in})$ müssen dann im Einklang mit \vec{p}_{i2} gewählt werden, sind aber sonst willkürlich.

7. DIE OBERFLÄCHE EINES ATOMKERNS.

Wir betrachten nun ein System von $n \geq 3$ nichtrelativistischen Teilchen mit Wechselwirkungskräften kurzer Reichweite und nehmen an, dass dieses System auf ein begrenztes Raumgebiet beschränkt sei, wie etwa ein Atomkern. Wir können dann um den Schwerpunkt des Systems eine Kugel vom Radius R_0 legen, derart dass ein Teilchen innerhalb der Kugel Kräfte erfährt, ausserhalb der Kugel hingegen kräftefrei ist. Dabei ist, der Einfachheit halber, angenommen worden, dass der

Kern Kugelsymmetrie besitzt. Alle Konfigurationen in welchen sich alle n Teilchen innerhalb der Kugel R_0 befinden, bilden dann das Zentralgebiet Z und seien durch eine Wellenfunktion mit frei wählbaren Relativkoordinaten

$$\Phi(\vec{\rho}_2, \vec{\rho}_3, \dots, \vec{\rho}_n) \quad (17)$$

beschrieben.

Lassen wir nun $n-1$ Teilchen innerhalb der Kugel, entfernen aber das i -te Teilchen, $\rho_{i2} > R_0$, so gelangen wir ins i -te Teilgebiet. Die Partialwelle welche dieses Gebiet beschreibt ist von der Form

$$\sum_n \varphi_n(\vec{P}_i) \cdot Y(\theta_{i2}, \varphi_{i2}) \cdot x_n(\kappa_n \cdot \rho_{i2}) \quad (18)$$

$\varphi_n(\vec{P}_i)$ sind die Eigenfunktionen des i -ten Restkerns. $Y(\theta, \varphi)$ beschreibt den Drehimpuls des i -ten Teilchens und $x_n(\kappa \rho)$ sind sphärische Besselfunktionen reellen oder imaginären Arguments welche kräftefreie, fortschreitende oder exponentiell abklingende Kugelwellen darstellen. Die Summe ist über sämtliche Konfigurationen zu erstrecken, welche mit dem vorgegebenen Gesamtdrehimpuls des Systems verträglich sind.

Zu den in (17) und (18) angegebenen Konfigurationen treten nun weitere hinzu, welche zwei oder mehr Teilchen im Aussenraum beschreiben, sei es kräftefrei, sei es untereinander gebunden. Es werden also z.B. Reaktionsgebiete auftreten in welchen sich ganze α -Teilchen ausserhalb des Kerns befinden. Ebenso wird es Gebiete geben in welchen der Kern in zwei Teilkerne separiert erscheint. Jeder dieser Teilkerne erscheint dann nicht allein im Grundzustand sondern auch in allen angeregten Zuständen. Im Falle genügend hoher verfügbarer Energie führen diese Teilkonfigurationen zu fortschrei-

tenden Wellen und somit zu Kernspaltungen. Die meisten Partialwellen sind jedoch exponentiell abklingend und machen sich nur in der Nähe der Kernoberfläche bemerkbar. Das physikalische Phänomen, welches diese vielen Teilkonfigurationen zusammenhält ist dasselbe wie jenes, welches elektromagnetische Energie an die Oberfläche einer Antenne bindet.

Die Beugungstheorie liefert uns somit ein anschauliches, qualitatives Bild der Verhältnisse an der Oberfläche eines Atomkerns. Erscheinungen wie das Auftreten angeregter Zustände der Spaltprodukte bei Kernspaltungen ergeben sich qualitativ ohne Rechnung.

Auf Grund der Grösse der Bindungsenergien und der Nukleonenmasse können wir schliessen, dass die Randzone in welcher sich Protonen und Neutronen gemäss (18) aufhalten eine Breite von etwa 1 Fermi besitzt. Schwerere Komplexe sind, im Allgemeinen, näher am Rande konzentriert. (18) zeigt auch, wie das Verhalten der Randzone vom Energiespektrum der Restkerne abhängt.

Die Struktur der Randzone ist, im Prinzip, Beobachtungen durch Elektronenstreuung zugänglich. Wir können aber aus (18) noch einen weiteren Schluss ziehen. Wenn wir Kernstösse isolieren können welche in der Randzone lokalisierbar sind, so müssen wir Verhältnisse finden die denen beim Stripping des Deuterons ähnlich sind. Der Stoss kann in diesem Falle als Zweikörperproblem behandelt werden, an welchem nur das einfallende Teilchen und ein Teilchen der Randzone teilnehmen. Der Restkern ist bereits vorgebildet und wird beim Stoss als Ganzes freigesetzt.

8. DIE MÖGLICHKEIT EINER ANWENDUNG AUF DIE STRUKTUR VON ELEMENTAR- TEILCHEN.

Wenn unsere Vermutung zutrifft, dass ein Elementarteilchen andere Teilchen erzeugen kann, mit welchen es nur in einem sehr kleinen Gebiet oder in einem Punkt in Wechselwirkung steht, so ist für dieses Problem wiederum die Beugungstheorie zuständig, welche Begriffe wie Störungsenergie und Massenrenormalisierungen vermeidet. Eine vorgegebene Energie Mc^2 ist auf eine grosse Zahl kräftefreier, aber energetisch gebundener Teilchen aufzuteilen. Im Prinzip ist dies den Verhältnissen an einer Kernoberfläche sehr ähnlich.

Bestehend ist an dieser Möglichkeit vor allem die Tatsache, dass in diesem Falle das Verhalten der beteiligten Teilchen im überwiegenden Teil des Konfigurationsraums ausschliesslich durch die relativistische Kinematik kräftefreier Teilchen negativer kinetischer Energie bestimmt ist.

Nichtsdestoweniger stehen im Augenblick dieser Auffassungsweise noch grosse Schwierigkeiten im Wege. In den oben betrachteten Fällen handelte es sich um endlich viele nichtrelativistische Teilchen, hier haben wir mit unendlich vielen relativistischen Teilchen zu rechnen.

Nach der nichtrelativistischen Mechanik kann ein Restsystem dem ins Auge gefassten i -ten Teilchen eine beliebig hohe Energiemenge entziehen. Ein relativistisches Teilchen, hingegen kann nur eine beschränkte Energie, mc^2 , abgeben. An Stelle von Prozessen die höhere Energien erfordern treten nun Paarerzeugungen. Andererseits werden nun auch die Nukleonenpaare wiederum auf die Feldteilchen

wirken, so dass das Zentralgebiet nicht punktähnlich bleibt, sondern sich aus einer grossen Zahl enger Kanäle zusammensetzt. Dies führt zu sehr verwickelten geometrischen Bedingungen.

Andererseits können Teilzustände, welche für die Beugungstheorie unerlässlich sind, nicht mit Hilfe von orthogonalen Funktionensystemen behandelt werden. Dies schliesst die Methode der zweiten Quantelung zur Behandlung des Mehrkörperproblems aus und wir werden dazu gedrängt n Teilchen in einem $4.n$ -dimensionalen Raum mit n Zeitvariablen zu untersuchen. Erst wenn alle diese Schwierigkeiten überwunden sein werden, werden wir die Reaktionsgebiete eines Elementarteilchens abseparieren können und dann dem Problem der Struktur des Zentralgebiets gegenüberstehen.

Dem Brasilianischen Forschungsrat (Conselho Nacional de Pesquisas) danke ich für die Ermöglichung meines Aufenthalts in Europa, CERN für die mir gewährte Gastfreundschaft.

* * *

- 1 - H. M. Nussenzveig, Phil. Transactions Roy. Soc. (London), 252, 1-51 (1959).
- 2 - Vergl. G. Beck und H. M. Nussenzveig, N. Cim. 16, 435 ff. (1960).

* * *