

BASES MATHÉMATIQUES DES
METHODES D'ELEMENTS FINIS.

Applications aux problèmes elliptiques du 2^{eme} et
4^{eme} ordre et au système de l'élasticité.

- Ch.0 Notations
- Ch.I M.E.F. mixtes pour les problèmes elliptiques
 du 2^d ordre.
- Ch.II M.E.F. hybrides pour les problèmes ellipti -
 ques du 2^d ordre.
- Ch.III M.E.F. mixtes pour les problèmes elliptiques
 du 4^{eme} ordre.
- Ch.IV M.E.F. équilibre en élasticité linéaire.

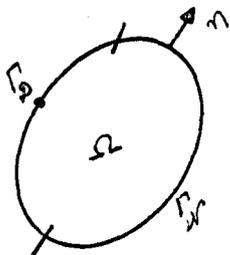
Jean-Marie THOMAS
Laboratoire d'Analyse Numérique, Tour 55
Université P. & M. Curie
4 Place Jussieu
F75230 PARIS CEDEX 05

et

Laboratório de Cálculo - CBPF
Av. Wenceslau Brás, 71
22290 - Rio de Janeiro, RJ

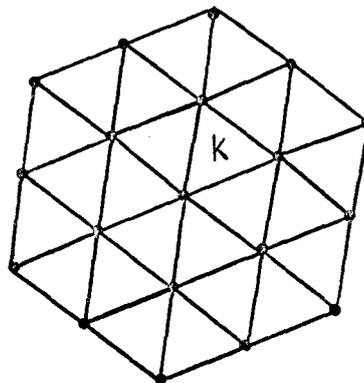
Ch.0 Notations

Le domaine Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 . La frontière $\Gamma = \partial\Omega$ est partitionnée en $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$; sur Γ_D seront données des conditions aux limites de type Dirichlet et sur Γ_N des conditions aux limites de type Neumann. On désigne par $n = (n_1, n_2)$ le vecteur unitaire de la normale extérieure à Ω .



$$\text{mes}(\Gamma_D) > 0.$$

Lors des exemples d'éléments finis, le domaine Ω est supposé polygonal et triangulé à l'aide de triangles K :



$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \tau_h} K$$

On désigne par ∂K la frontière du triangle K et par n^K le vecteur unitaire de la normale extérieure à K .

Les dérivées partielles sont notées ∂_i , $i = 1, 2$. La convention de sommation est utilisée. Ainsi si $p = (p_1, p_2)$ est une fonction vectorielle, $\partial_i p_i = \text{div } p$. □

Espaces fonctionnels utilisés:

$$L^2(\Omega) = \{ v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} v^2 dx < \infty \}$$

$$H^1(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega); \partial_i v \in L^2(\Omega) \quad i = 1, 2 \}$$

$$H^2(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega); \partial_{ij}^2 v \in L^2(\Omega) \quad i, j = 1, 2 \}$$

$$H(\text{div}, \Omega) = \{ q = (q_1, q_2) \in (L^2(\Omega))^2; \text{div } q \in L^2(\Omega) \}$$

Ces espaces sont des espaces de Hilbert pour les normes respectives:

$$\|v\|_{0,\Omega} = \left(\int_{\Omega} v^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\|v\|_{1,\Omega} = (\|v\|_{0,\Omega}^2 + \|\partial_1 v\|_{0,\Omega}^2 + \|\partial_2 v\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}$$

$$\|v\|_{2,\Omega} = (\|v\|_{1,\Omega}^2 + \|\partial_{11}^2 v\|_{0,\Omega}^2 + 2\|\partial_{12}^2 v\|_{0,\Omega}^2 + \|\partial_{22}^2 v\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}$$

$$\|q\|_{H(\text{div},\Omega)} = (\|q_1\|_{0,\Omega}^2 + \|q_2\|_{0,\Omega}^2 + \|\partial_i q_i\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}.$$

On désigne par $H^{1/2}(\partial\Omega)$ l'espace des traces des fonctions de $H^1(\Omega)$ et par $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ l'espace des traces normales $q_i n_i$ des fonctions vectorielles de $H(\text{div}; \Omega)$. On démontre que $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ est le dual topologique de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ et on a

$$H^{-1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega) \subset H^{1/2}(\partial\Omega)$$

Par abus de notations, on écrira simplement $\int \dots d\gamma$ pour marquer la dualité entre $H^{1/2}$ et $H^{-1/2}$. □

Enfin pour tout entier $k \geq 0$, P_k désigne l'espace des fonctions polynômiales de degré $\leq k$.

Les ordres d'erreur présentés dans les diverses méthodes sont ceux démontrés en supposant la solution régulière, la triangulation régulière (les angles des triangles sont minorés indépendamment de h où h désigne le plus grand des diamètres des triangles de la triangulation τ_h) et en ne prenant pas en compte les effets d'une intégration numérique éventuelle. □

Ch.I MÉTHODES D'ÉLÉMENTS FINIS MIXTES POUR LES PROBLÈMES ELLIPTIQUES DU 2nd ORDRE.

§1. Position du problème

On considère le système du premier ordre

$$(1) \begin{cases} u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; u = 0 \text{ sur } \Gamma_D ; \\ p = (p_1, p_2): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 ; \partial_i p_i + f = 0 \text{ dans } \Omega ; p_i n_i = 0 \text{ sur } \Gamma_N ; \\ p_i = a_{ij} \partial_j u, i = 1, 2 \end{cases}$$

où f est une fonction donnée et les coefficients $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ vérifient l'hypothèse d'ellipticité:

$$(2) \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \quad a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha(\xi_1^2 + \xi_2^2).$$

Alors la matrice de coefficients a_{ij} est inversible; soit A_{ij} les coefficients de la matrice inverse. Alors

$$(3) \quad (p_i = a_{ij} \partial_j u \text{ pour } i=1,2) \iff (\partial_i u = A_{ij} p_j, \text{ pour } i = 1,2).$$

On connaît de nombreux exemples de problèmes physiques pouvant se modéliser sous la forme (1). En particulier en thermique où u représente la température et p le flux de chaleur, en mécanique des fluides où u est la fonction courant et p la vitesse. Pour des raisons historiques nous adopterons le vocabulaire de la mécanique des solides:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \text{ est le déplacement} \\ p \text{ les contraintes} \\ \partial_i p_i + f = 0 \\ p_i = a_{ij} \partial_j u \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{la relation d'équilibre} \\ \text{la loi constitutive.} \end{array} \quad \square$$

2 Formulation variationnelle "standard"

Soit V l'espace de Sobolev

$$(4) \quad V = \{v \in H^1(\Omega) ; v|_{\Gamma_D} = 0\}$$

On considère le problème variationnel

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in V; \\ \forall v \in V, \int_{\Omega} a_{ij} \partial_j u \partial_i v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \end{array} \right.$$

A l'aide des théorèmes de trace dans $H^1(\Omega)$, de l'inégalité de Friedrichs - Poincaré et du théorème de Lax-Milgram, on démontre que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, le problème (5) admet une solution u et une seule.

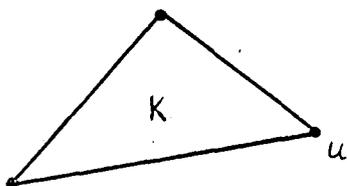
Basées sur cette formulation, les méthodes conformes consistent à se donner un sous-espace V_h de V de dimension finie et à calculer la solution du problème

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_h \in V_h; \\ \forall v_h \in V_h, \int_{\Omega} a_{ij} \partial_j u_h \partial_i v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx \end{array} \right.$$

Le problème (6) admet pour tout choix de $V_h \subset V$ une solution u_h et une seule obtenue numériquement par la résolution d'un système linéaire.

Exemple le plus classique de M.E.F.

$$(7) \quad V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}); v|_K \in P_1 \quad \forall K \in \tau_h; v|_{\Gamma_D} = 0\}.$$



Les degrés de liberté sont les déplacements aux sommets des triangles.

On démontre $\|u - u_h\|_{1,\Omega} = O(h)$.

Pour une étude mathématique complète, Cf. par exemple le livre de P.G. CIARLET "The F.E.M. for Elliptic Problems", North-Holland, 1978.

□

§3 Formulation variationnelle duale

On introduit la variété affine

$$(8) \quad W^f = \{q = (q_1, q_2) \in H(\text{div}; \Omega); \partial_i q_i + f = 0 \text{ dans } \Omega; q_i n_i = 0 \text{ sur } \Gamma_N\}$$

L'espace vectoriel associé est noté W^0 .

On considère alors le problème variationnel

$$(9) \quad \left[\begin{array}{l} p = (p_1, p_2) \in W^f; \\ \forall q = (q_1, q_2) \in W^0, \int_{\Omega} A_{ij} p_j q_i \, dx = 0 \end{array} \right.$$

On démontre que le problème (9) admet une solution p et une seule et en outre que p est lié à la solution u de (5) par les relations $p_i = a_{ij} \partial_j u$. La solution de (9) est donc bien les contraintes intervenant dans la formulation (1).

▣

Remarque

Dans le cas particulier où $a_{12} = a_{21}$, on sait que (5) équivaut à la minimisation de l'énergie

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{ij} \partial_j v \partial_i v \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx$$

$$(6 \text{ bis}) \quad J(u) = \inf_{v \in V} J(v).$$

Puisque $(a_{12} = a_{21}) \iff (A_{12} = A_{21})$, alors (9) équivaut à la minimisation de la fonctionnelle

$$K(q) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} A_{ij} q_j q_i dx$$

$$(9 \text{ bis}) \quad K(p) = \inf_{q \in W^f} K(q).$$

On vérifie la relation

$$(10) \quad J(u) + K(p) = 0.$$

C'est pourquoi (9 bis) est connu comme principe de l'énergie complémentaire en mécanique des solides, analogue au principe de Kelvin en mécanique des fluides.

Pour calculer directement une approximation de p , on devrait construire une sous-variété W_h^f de W^f et considérer le problème

$$(11) \quad \begin{cases} p_h \in W_h^f ; \\ \forall q_h \in W_h^0, \int_{\Omega} A_{ij} (p_h)_j (q_h)_i dx = 0 \end{cases}$$

A ce stade ceci reste théorique car on ne sait pas construire de façon élémentaire des exemples de W_h^f .

Cette difficulté fondamentale sera levée en utilisant des multiplicateurs de Lagrange soit pour dualiser la contrainte $\partial_i p_i + f = 0$ dans Ω soit pour dualiser le raccord des tractions $p_i \Big|_K n_i^K$ sur les interfaces.

Les méthodes mixtes (Cf. Ch.1, §4) et équilibre (Cf. Ch.2, §4) conduisent à une approximation p_h solution de (11) avec $W_h^0 \subset W_h$. Elles sont donc "conformes en la variable duale p ".

Les méthodes hybrides duales (Cf. Ch.2, §3) conduisent à une approximation p_h solution de (11) avec $W_h^0 \subset W_h$, les tractions n'étant pas continues aux interfaces.

Les méthodes hybrides primales (Cf. Ch.2, §1 et 2) conduisent à une approximation u_h solution de (6) avec $V_h \subset V$, les déplacements n'étant pas continus aux interfaces. ▣

Remarque (suite)

Lorsque $a_{12} = a_{21}$, on a pour une méthode conforme en les déplacements

$$-K(p) = J(u) \leq J(u_h)$$

et pour une méthode conforme en contraintes

$$-K(p_h) \leq -K(p) = J(u)$$

Le modèle est donc systématiquement trop rigide (resp^t trop flexible).
On ne peut rien affirmer de tel pour les méthodes non conformes. ▣

§4 Formulation mixte

Soit W l'espace

$$(12) \quad W = \{q = (q_1, q_2) \in H(\text{div}, \Omega); q_i n_i = 0 \text{ sur } \Gamma_N\}$$

On considère la formulation mixte:

$$(13) \quad \left[\begin{array}{l} (p, u) \in W \times L^2(\Omega); \\ \forall q \in W, \int_{\Omega} A_{ij} p_j q_i \, dx + \int_{\Omega} u \partial_i q_i \, dx = 0 \\ \forall v \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} v \partial_i p_i \, dx = - \int_{\Omega} f v \, dx. \end{array} \right.$$

On vérifie que (13) admet une solution unique; en outre p est la solution de (9) et u la solution de (5).

Aproximation mixte: on se donne un sous-espace W_h de W de dimension finie et un sous-espace M_h de $L^2(\Omega)$ de dimension finie. On considère alors le problème

$$(14) \quad \left[\begin{array}{l} (p_h, u_h) \in W_h \times M_h; \\ \forall q_h \in W_h, \int_{\Omega} A_{ij} (p_h)_j (q_h)_i \, dx + \int_{\Omega} u_h \partial_i (q_h)_i \, dx = 0 \\ \forall v_h \in M_h, \int_{\Omega} v_h \partial_i (p_h)_i \, dx = - \int_{\Omega} f v_h \, dx \end{array} \right.$$

... en général, ce problème (14) est mal posé: ni existence, ni unicité.
Les choix des espaces W_h et M_h doivent être compatibles. Plus précisément, on suppose:

$$(15) \quad \left[\begin{array}{l} v_h \in M_h \\ \int_{\Omega} v_h \partial_i (q_h)_i \, dx = 0 \quad \forall q_h \in W_h \end{array} \right] \implies v_h = 0$$

Alors le problème (14) admet une solution et une seule.

On remarque que p_h est solution de (11) en prenant pour définition de W_h^f :

$$(16) \quad W_h^f = \{ q_h \in W_h; \int_{\Omega} v_h \partial_i (q_h)_i dx = \int_{\Omega} f v_h dx, \forall v_h \in M_h \}$$

Ainsi dès que $\text{div}(W_h) \subset M_h$, on a $W_h^0 \subset W^0$. ▣

Exemple de M.E.F. mixte

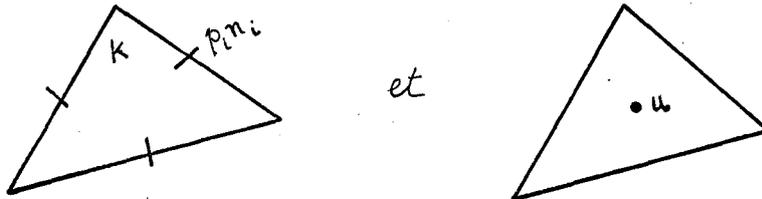
Pour espace W_h , on choisit des fonctions q localement de la forme

$$q_1 = a_1 + x_1 a_0$$

$$q_2 = a_2 + x_2 a_0$$

Pour assurer les raccords, on choisit pour degrés de liberté les trac-tions (constantes sur chaque côté).

Pour espace M_h , on choisit des fonctions v constantes par triangles.



On démontre

$$\| p - p_h \|_{H(\text{div}; \Omega)} + \| u - u_h \|_{0, \Omega} = 0 (h).$$

Références: RAVIART & THOMAS, Rome Déc. 75, Lecture Notes in Math. ,
606, Springer-Verlag. ▣

Ch.II-MÉTHODES D'ÉLÉMENTS FINIS HYBRIDES POUR LES PROBLÈMES ELLIPTIQUES DU 2nd ORDRE.

On décrit de nouvelles méthodes d'éléments finis pour approcher la solution du problème (I.1). Ces méthodes sont basées sur des formulations de (I.1) qui dépendent de la triangulation τ_h de Ω .

§1 Méthode hybride primale

On introduit les espaces suivants:

$$(1) \quad X = \{v \in L^2(\Omega); v|_K \in H^1(K), \forall K \in \tau_h\}$$

et

$$(2) \quad \Omega = \{\mu = (\mu^K)_{K \in \tau_h} \in \prod_{K \in \tau_h} H^{-1/2}(\partial K);$$

$$\mu^{K_1} + \mu^{K_2} = 0$$

sur tout côté $K_1 \cap K_2$

$$\mu^K = 0$$

sur tout côté de K situé sur Γ_N

Ainsi défini, X est un espace isomorphe à $\prod_{K \in \tau_h} H^1(K)$.

On considère alors la formulation hybride primale:

$$(3) \quad \left[\begin{array}{l} (u, \lambda) \in X \times \Omega; \\ \forall v \in X, \quad \sum_{K \in \tau_h} \int_K a_{ij} \partial_j u \partial_i v \, dx - \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} v|_K \lambda^K \, d\gamma = \int_{\Omega} f v \, dx; \\ \forall \mu \in \Omega, \quad - \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} u|_K \mu^K \, d\gamma = 0 \end{array} \right.$$

La dernière équation traduit l'appartenance de u à l'espace $H^1(\Omega)$.

Le problème (3) admet une solution (u, d) unique; on vérifie à l'aide de la formule de Green que l'on a

$$(4) \quad \lambda^K = p_i n_i^K \quad \text{sur tout } \partial K, K \in \tau_h$$

□

Approximation hybride primale: on se donne deux sous-espaces de dimension finie X_h et Λ_h de X et de Λ respectivement. On considère le problème

$$(5) \quad \left[\begin{array}{l} (u_h, \lambda_h) \in X_h \times \Lambda_h; \\ \forall v_h \in X_h, \quad \sum_{K \in \tau_h} \int_K a_{ij} \partial_j u_h \partial_i v_h \, dx - \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} v_h|_K \lambda_h^K \, d\gamma = \int_{\Omega} f v_h \, dx; \\ \forall \mu_h \in \Lambda_h, \quad - \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} u_h|_K \mu_h^K \, d\gamma = 0 \end{array} \right.$$

On suppose les choix des sous-espaces tels que

$$(6) \quad \left. \begin{array}{l} v_h \in X_h, \quad v_h|_K = \text{constante } \forall K \in \tau_h \\ \forall \mu_h \in \Lambda_h, \quad \sum_K \int_{\partial K} v_h|_K \mu_h^K d\gamma = 0 \end{array} \right\} \implies v_h = 0$$

et

$$(7) \quad \left. \begin{array}{l} \mu_h \in \Lambda_h \\ \forall v_h \in X_h, \quad \sum_K \int_{\partial K} v_h|_K \mu_h^K d\gamma = 0 \end{array} \right\} \implies \mu_h = 0$$

Alors le problème (5) admet une solution et une seule. Dans les exemples, (6) est satisfait de façon évidente; (7) traduit la compatibilité des choix de X_h et M_h . □

Exemple de M.E.F. Hybride Primale

Pour espace X_h on choisit des fonctions affines par triangle (sans aucun raccord) et pour espace M_h des fonctions constantes par côté.



On démontre

$$\left(\sum_K \|u - u_h\|_{1,K}^2 \right)^{1/2} = o(h)$$

On a également une majoration de l'erreur $\lambda - \lambda_h$ dans la norme de Λ . □

§2 Méthodes d'éléments finis non-conformes

Soit V_h le sous-espace de X_h défini par

$$(8) \quad V_h = \{v_h \in X_h; \forall \mu_h \in \Lambda_h, \sum_K \int_{\partial K} v_h|_K \mu_h^K d\gamma = 0\}$$

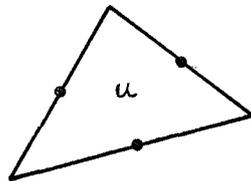
Alors le premier argument u_h de la solution (u_h, λ_h) de (5) est solution du problème

$$(9) \quad \left[\begin{array}{l} \forall v_h \in V_h, \quad \sum_{K \in \tau_h} \int_K a_{ij} \partial_j u_h \partial_i v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx. \\ u_h \in V_h; \end{array} \right.$$

Lorsqu'on sait exhiber de façon simple une base de V_h , on peut résoudre directement (9). On obtient alors une méthode d'éléments finis non conformes car $V_h \not\subset V$. ▣

Exemple de M.E.F. Non-Conforme

L'exemple précédent d'hybrides primaux conduit pour espace V_h à l'espace des fonctions affines par triangle K , continues (seulement) aux milieux des côtés intérieurs et nulles aux milieux des côtés situés sur Γ_D .



§3 Méthode hybride duale

Soit

$$(10) \quad Y^f = \{q = (q_1, q_2) \in (L_2(\Omega))^2; \partial_i q_i + f = 0 \text{ dans chaque } K \in \tau_h\}$$

et

$$(11) \quad \Phi = \{\phi = (\phi^K)_{K \in \tau_h} \in \prod_{K \in \tau_h} H^{1/2}(\partial K);$$

$$\phi^{K_1} = \phi^{K_2}$$

sur tout côté $K_1 \quad K_2$;

$$\phi^K = 0$$

sur tout côté de K situé dans Γ_D }

On considère alors la formulation hybride duale:

$$(12) \quad \left[\begin{array}{l} (p, \phi) \in Y^f \times \Phi \\ \forall q \in Y^0, \quad \int_{\Omega} A_{ij} p_j q_i \, dx - \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} \phi^K q_j n_j^K \, d\gamma = 0; \\ \forall \psi \in \Phi, \quad - \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} \psi^K p_j n_j^K \, d\gamma = 0. \end{array} \right.$$

La dernière équation de (12) implique l'appartenance de p à la variété affine W^f définie en (I.8.).

Le problème (12) admet une solution (p, ϕ) unique; on vérifie qu'on a

$$(13) \quad \phi^K = u|_{\partial K} \quad \forall K \in \tau_h.$$

Aproximation hybride duale: on se donne deux sous-espaces de dimension finie Y_h et Φ_h de Y et de Φ respectivement, où

$$(14) \quad Y = \{q \in (L^2(\Omega))^2; \partial_i q_i \in L_2(K), \quad \forall K \in \tau_h\}.$$

Soit

$$(15) \quad Y_h^f = \{p_h \in Y_h; \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\operatorname{div} p_h + f) \operatorname{div} q_h \, dx = 0, \quad \forall q_h \in Y_h\}$$

On considère le problème

$$(16) \quad \left[\begin{array}{l} (p_h, \phi_h) \in Y_h^f \times \Phi_h; \\ \forall q_h \in Y_h^0, \quad \int_{\Omega} A_{ij} (p_h)_j (q_h)_i \, dx - \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} \phi_h^K (q_h)_i n_i^K \, d\gamma = 0; \\ \forall q_h \in \Phi_h, \quad - \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} \psi_h^K (p_h)_i n_i^K \, d\gamma = 0. \end{array} \right.$$

On suppose que les choix de Y_h et de Φ_h vérifient la condition de compatibilité suivante:

$$(17) \quad \left. \begin{array}{l} \psi_h \in \Phi_h \\ \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} \psi_h^K (q_h)_i n_i^K \, d\gamma = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \psi_h = 0$$

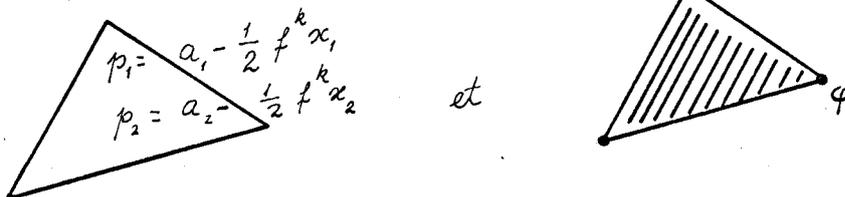
Alors le problème (16) admet une solution et une seule. □

Exemple de M.E.F. duale

Soit f^K la valeur moyenne de f sur chaque triangle K . On choisit pour espace Y_h les fonctions de la forme $q_1 = a_1 + a_0 x_1$, $q_2 = a_2 - a_0 x_2$ dans chaque triangle. Alors p_h est cherché de la forme

$$(p_h)_1 = a_1 - \frac{1}{2} f^K x_1, \quad (p_h)_2 = a_2 - \frac{1}{2} f^K x_2$$

et les fonctions test $q_h \in Y_h^0$ sont constantes par triangles. On choisit pour Φ_h des fonctions affines sur chaque ∂K ; l'appartenance de $\phi_h^K \in H^{1/2}(\partial K)$ implique la continuité de ϕ_h^K aux sommets de K .



On démontre

$$\|p - p_h\|_{0,\Omega} = O(h)$$

§4 Méthode équilibre ▣

Une variante de la méthode précédente consiste à choisir pour espace Φ_h un sous-espace de $\tilde{\Phi}$:

$$(18) \quad \tilde{\Phi} = \{ \phi = (\phi^K)_{K \in \mathcal{T}_h} \in \prod_{K \in \mathcal{T}_h} L^2(\partial K);$$

$$\phi^{K_1} = \phi^{K_2} \quad \text{sur tout côté } K_1 \cap K_2;$$

$$\phi^K = 0 \quad \text{sur tout côté de } K \text{ situé dans } \Gamma_D \}.$$

Si l'on définit l'espace W_h par

$$(19) \quad W_h = \{ q_h \in Y_h; \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (q_h)_i n_i^K \psi_h^K d\gamma = 0 \quad \forall \psi_h \in \Phi_h \}$$

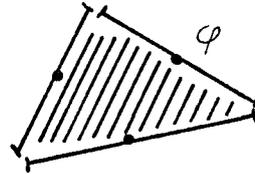
ceci permet d'obtenir pour W_h un sous-espace de W défini en (I.12) ce qui n'était pas le cas de la méthode précédente. ▣

Exemple de M.E.F. équilibre ▣

Même choix d'espace Y_h que précédemment et on choisit à présent pour Φ_h l'espace de $\tilde{\Phi}$ constantes par côté.

$$\begin{aligned}
 p_1 &= a_1 - \frac{1}{2} f^k x_1 \\
 p_2 &= a_2 - \frac{1}{2} f^k x_2
 \end{aligned}$$

et



On démontre encore

$$\| p - p_h \|_{0, \Omega} = O(h). \quad \square$$

§5 Implémentation

Lors de la résolution du système linéaire déduit de (16), on élimine a priori les inconnues relatives à p_h : dans les 2 exemples précédents ceci ne nécessite que l'inversion d'une matrice bloc-diagonale, les blocs étant de dimension 2×2 . On se ramène alors à un système linéaire en les inconnues relatives aux seuls ϕ_h .

Pour la méthode hybride duale, on est donc conduit à utiliser un "code déplacements conformes" et pour la méthode équilibre un "code déplacements non-conformes". □

Références: THOMAS, J.M., Thèse de Doctorat d'Etat, Université P. & M. Curie, Paris, 1977.

Ch.III-MÉTHODES D'ÉLÉMENTS FINIS MIXTES POUR LES PROBLÈMES ELLIPTIQUES DE 4^{ème} ORDRE.

§1 Position du problème

On se restreint ici à l'étude du problème modèle

$$(1) \quad \left[\begin{array}{l} u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; \\ \Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega ; \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$

où $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$ et $\frac{\partial u}{\partial n} = \text{grad } u \cdot n$.

L'étude de la flexion d'une plaque mince encastrée conduit à ce type de problème. Le problème de Stokes en mécanique des fluides en fournit un autre exemple, u est alors la fonction courant. ▣

§2 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle standard de (1) est

$$(2) \quad \begin{cases} u \in H_0^2(\Omega); \\ \forall v \in H_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \end{cases}$$

Les méthodes d'approximation conforme consistent à choisir un sous-espace V_h de $H_0^2(\Omega)$ de dimension finie et à résoudre

$$(3) \quad \begin{cases} u_h \in V_h; \\ \forall v_h \in V_h, \quad \int_{\Omega} \Delta u_h \Delta v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx. \end{cases}$$

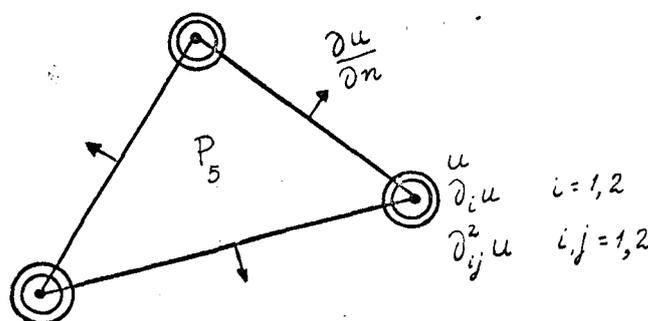
Le problème (3) admet une solution u_h et une seule.

L'inclusion $V_h \subset H_0^2(\Omega)$ implique que l'on travaille avec des fonctions test de classe C^1 . ▣

Exemple de M.E.F. conforme pour les problèmes d'ordre 4

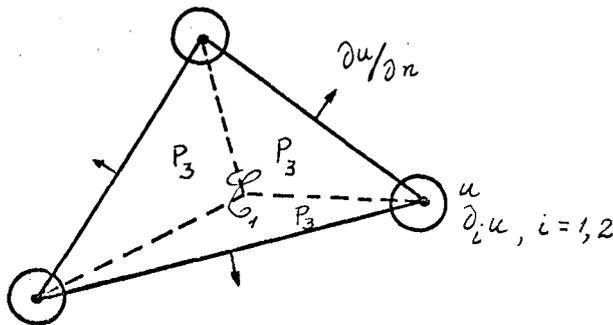
Le premier exemple en utilisant des espaces de polynômes complets est obtenu en prenant pour V_h des fonctions de degré < 5 .

Les degrés de liberté sont les valeurs de la fonction, de sa dérivée première et de sa dérivée seconde ($D^2 v = (\partial_{11}^2 v, \partial_{12}^2 v, \partial_{22}^2 v)$) aux sommets des triangles et les valeurs de la dérivée normale aux milieux des côtés.



On démontre $\|u - u_h\|_{2,\Omega} = O(h^4)$. ▣

Une autre possibilité consiste à utiliser des éléments assemblés. Exemple: le triangle K est subdivisé en 3 triangles K_1, K_2, K_3 , les fonctions test sont C^1 , cubiques dans chaque sous-triangle K :



(SANDER & DE VEUBEKE)

§3 Une formulation mixte

Elle est basée sur la formulation suivante du problème (1):

$$(4) \quad \begin{cases} (\omega, u) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega); \\ \forall \theta \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \omega \cdot \theta \, dx - \int_{\Omega} \text{grad} \theta \cdot \text{grad} u \, dx = 0; \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad - \int_{\Omega} \text{grad} \omega \cdot \text{grad} v \, dx = - \int_{\Omega} f v \, dx. \end{cases}$$

En supposant le domaine Ω polygonal convexe et la donnée f dans $L^2(\Omega)$, on sait (Théorème de régularité) que la solution u de (2) appartient à $H^3(\Omega)$. On vérifie immédiatement que le couple $(-\Delta u, u)$ est solution de (4). Comme (4) admet au plus une solution, on en déduit

$$(5) \quad \omega = -\Delta u. \quad \text{▣}$$

Approximation: Soit V_h et V_{0h} deux sous-espaces de dimension finie de $H^1(\Omega)$ et de $H_0^1(\Omega)$ respectivement. On considère le problème.

$$(6) \quad \begin{cases} (\omega_h, u_h) \in V_h \times V_{0h}; \\ \forall \theta_h \in V_h, \quad \int_{\Omega} \omega_h \theta_h \, dx - \int_{\Omega} \text{grad} \theta_h \cdot \text{grad} u_h \, dx = 0; \\ \forall v_h \in V_{0h}, \quad - \int_{\Omega} \text{grad} \omega_h \cdot \text{grad} v_h \, dx = - \int_{\Omega} f v_h \, dx \end{cases}$$

On suppose

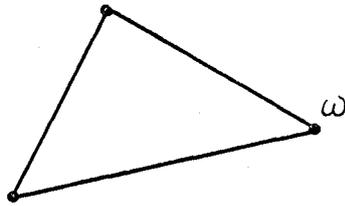
$$(7) \quad V_{0h} = V_h \cap H_0^1(\Omega)$$

alors le problème (6) admet une solution (ω_h, u_h) et une seule. ■

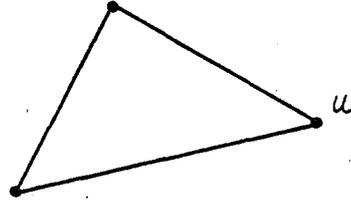
Exemple de M.E.F. mixte

$$(8) \quad V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}); v|_{\Gamma} = 0; v|_K \in P_k \quad \forall K \in \tau_h\}$$

Pour $k = 1$



et



La convergence est de démonstration délicate.

Références: SCHÖLZ, R.A.I.R.O., 12, (1978)

Pour $k \geq 2$, la convergence est démontrée dans CIARLET & RAVIART, Symposium on Math. Aspects of F.E. in P.D.E., (C. de Boor Ed.), Academic Press, New York, (1974). ■

§4 Une autre formulation mixte

Soit S l'espace défini par

$$(9) \quad S = \{s = (s_{ij})_{i,j=1,2} \in (H^1(\Omega))^4; s_{12} = s_{21}\}$$

On considère la formulation

$$(10) \quad \left[\begin{array}{l} (r, u) \in S \times H_0^1(\Omega); \\ \forall s \in S, \int_{\Omega} r_{ij} s_{ij} dx + \int_{\Omega} \partial_j s_{ij} \partial_i u dx = 0; \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \partial_j r_{ij} \partial_i v dx = - \int_{\Omega} f v dx. \end{array} \right.$$

Le problème (10) admet une solution et une seule. En outre u est la solution de (1) et on a

$$(11) \quad r_{ij} = \partial_{ij}^2 u \quad i, j = 1, 2.$$

Approximation: Soient S_h et V_{0h} deux sous-espaces de dimension finie de S et de $H_0^1(\Omega)$. On leur associe le problème

$$(12) \quad \left[\begin{array}{l} (r_h, u_h) \in S_h \times V_{0h}; \\ \forall s_h \in S_h, \quad \int_{\Omega} (r_h)_{ij} (s_h)_{ij} dx + \int_{\Omega} \partial_j (s_h)_{ij} \partial_i u_h dx = 0; \\ \forall v_h \in V_{0h}, \quad \int_{\Omega} \partial_j (r_h)_{ij} \partial_i v_h dx = - \int_{\Omega} f v_h dx \end{array} \right.$$

Soit V_h un sous-espace de $H^1(\Omega)$. On suppose les choix de S_h et de V_{0h} tels que

$$(13) \quad \begin{aligned} S_h &= \{s \in S; \quad s_{ij} \in V_h \quad i, j = 1, 2\}, \\ V_{0h} &= V_h \cap H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

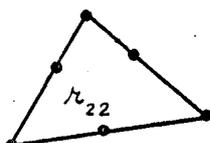
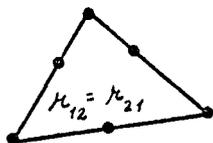
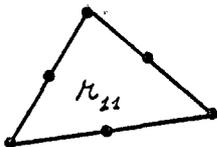
alors le problème (12) admet une solution (r_h, u_h) et une seule.

M.E.F. mixte

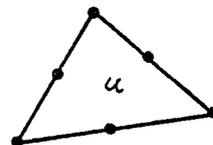
On choisit S_h et V_{0h} vérifiant (13) avec

$$V_h = \{v_k \in C^0(\bar{\Omega}); \quad v_h|_K \in P_k \quad \forall K \in \tau_h\}$$

On ne sait démontrer la convergence que pour $k \geq 2$. Le 1^{er} exemple est:



et



Références: HERRMANN, J. Eng. Mech. Div. ASCE EM5, 93, (1967); MIYOSHI, Kua-
moto J. Sci. (Math.), 9, (1973).

Ch.IV-UNE MÉTHODE ÉQUILIBRE EN ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

§1. Problème étudié.

Le système de l'élasticité linéaire 2-D consiste à chercher un champ de déplacements $u = (u_1, u_2)$, un champ de contraintes $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22})$ et un champ de déformations $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22})$ solution de:

$$(1) \quad \left[\begin{array}{l} u_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \quad i = 1, 2 ; \\ \partial_j \sigma_{ij} + f_i = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \sigma_{ij} n_j = g_i \text{ sur } \Gamma_N \quad i = 1, 2; \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad i, j = 1, 2; \\ \sigma_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad i, j = 1, 2; \end{array} \right.$$

On suppose les coefficients d'élasticité a_{ijkl} dans $L^\infty(\Omega)$, vérifiant l'hypothèse d'ellipticité

$$(2) \quad a_{ijkl} \xi_{ij} \xi_{kl} \geq \alpha \xi_{ij} \xi_{ij} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (\alpha > 0)$$

et les hypothèses de symétrie

$$(3) \quad a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jilk}$$

Il est évident que le tenseur des déformations est symétrique: $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$. A l'aide de (3) on en déduit la symétrie du tenseur des contraintes: $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. L'hypothèse d'ellipticité permet entre autres d'écrire la loi constitutive sous la forme

$$(4) \quad \varepsilon_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl} \quad i, j = 1, 2.$$

§2 Formulation variationnelle aux contraintes

On introduit la variété affine

$$W^{f,g} = \{ \sigma = (\sigma_{ij}) \in (L^2(\Omega))^{2 \times 2}; \sigma_{12} = \sigma_{21} ;$$

$$(5) \quad \left. \partial_j \sigma_{ij} + f_i = 0 \text{ dans } \Omega; \sigma_{ij} n_j = g_i \text{ sur } \Gamma_N \right\}.$$

Les contraintes sont solution du problème variationnel

$$(6) \quad \left[\begin{array}{l} \sigma \in W^{f,g} \\ \forall \tau \in W^{0,0}, \quad \int_{\Omega} A_{ijkl} \sigma_{ij} \tau_{kl} dx = 0. \end{array} \right. \quad \square$$

Il peut sembler naturel de chercher une approximation de $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{12}; \sigma_{21}, \sigma_{22})$ dans un produit de sous-espaces de $H(\text{div}; \Omega)$. La difficulté dans une telle approche provient du couplage par la relation de symétrie $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ alors que les espaces ne sont pas isotropes. Dans la méthode proposée ci-après cette relation de symétrie sera dualisée. □

Lorsque $f = 0$, une autre possibilité consiste à passer en fonction d'Airy:

$$\left. \begin{array}{l} \partial_j \sigma_{ij} = 0 \quad i = 1, 2 \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \\ \Omega \text{ simplement connexe} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \psi \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \partial_{22}^2 \psi \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = -\partial_{12}^2 \psi \\ \sigma_{22} = \partial_{11}^2 \psi \end{array} \right.$$

et ψ vérifie une équation aux dérivées partielles du 4^e ordre. On peut alors appliquer les méthodes du chapitre précédent pour approcher ψ . □

§3 Méthode équilibre

On suppose $f = 0$ pour simplifier mais ce n'est pas essentiel. Soient les espaces

$$(7) \quad X^0 = \{ \tau = (\tau_{ij}) \in (L^2(\Omega))^2; \partial_j \tau_{ij} = 0 \text{ dans } K, \tau_{ij} n_j \in L^2(\partial K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \}$$

$$(8) \quad N = \{ \mu = (\mu_i^K) \in \left(\prod_{K \in \mathcal{T}_h} L^2(\partial K) \right)^2; \mu_i^{K_1} = \mu_i^{K_2} \text{ sur tout } K_1 \cap K_2, \\ \mu_i^K = 0 \text{ sur tout côté de } K \subset \Gamma_D \}.$$

On considère la formulation:

$$(9) \quad \left[\begin{array}{l} (\sigma, \lambda, \omega) \in X^0 \times N \times L^2(\Omega); \\ \forall \tau \in X^0, \quad \int_{\Omega} A_{ijkl} \sigma_{ij} \tau_{kl} dx - \sum_K \int_{\partial K} \lambda_i^K \tau_{ij} |_{K} n_j^K d\gamma + \int_{\Omega} \omega (\tau_{21} - \tau_{12}) dx = 0 \\ \forall \mu \in N, \quad - \sum_K \int_{\partial K} \mu_i^K \sigma_{ij} |_{K} n_j^K d\gamma = - \sum_K \int_{\partial K \cap \Gamma_N} g_i \mu_i^K d\gamma \\ \forall \theta \in L^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} \theta (\sigma_{21} - \sigma_{12}) dx. \end{array} \right.$$

qui admet pour solution unique:

(10) $\sigma =$ contraintes, $\lambda^K =$ déplacements sur $\partial K, \omega = \frac{1}{2} (\partial_2 u_1 - \partial_1 u_2)$. ▣

La méthode d'approximation associée consiste à résoudre un problème en $(\sigma_h, \lambda_h, \omega_h)$ analogue à (9) après les substitutions

$$(11) \quad X^0 \rightarrow X_h^0, \quad N \rightarrow N_h, \quad L^2(\Omega) \rightarrow M_h.$$

On pourra éliminer le multiplicateur ω_h en introduisant l'espace

$$(12) \quad Y_h^0 = \{ \sigma_h \in X_h^0; \forall \theta_h \in M_h, \int_{\Omega} \theta_h [(\sigma_h)_{12} - (\sigma_h)_{21}] dx = 0 \}$$

Il reste à résoudre le problème:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\sigma_h, \lambda_h) \in Y_h^0 \times N_h; \\ \forall \tau_h \in Y_h^0, \quad \int_{\Omega} A_{ijkl} (\sigma_h)_{ij} (\tau_h)_{kl} dx - \sum_K \int_{\Omega_K} (\lambda_h)_i^K (\tau_h)_{ij} n_j^K d\gamma = 0; \\ \forall \mu_h \in N_h, \quad - \sum_K \int_{\partial K} (\mu_h)_i^K (\tau_h)_{ij} n_j^K d\gamma = \\ = - \sum_K \int_{\partial K} g_i (\mu_h)_i^K d\gamma. \end{array} \right.$$
▣

M.E.F. équilibre 1.

On choisit pour espace X_h^0 des fonctions localement de la forme:

$$(14) \quad \left[\begin{array}{l} \sigma_{11} = a_1 + a_5 x_1 + a_2 x_2 \\ \sigma_{12} = a_3 + a_4 x_1 - a_5 x_2 \\ \sigma_{21} = b_1 + b_5 x_1 + b_2 x_2 \\ \sigma_{22} = b_3 + b_4 x_1 - b_5 x_2 \end{array} \right.$$

pour espace N_h des fonctions affines par côté (et connectées) et pour espace M_h des fonctions constantes par triangle.

On démontre que le problème associé admet une solution et une seule.

On a

$$\| \sigma - \sigma_h \|_{0, \Omega} = O(h).$$
▣

M.E.F. équilibre 2

Soit ψ^K la fonction cubique qui s'annule sur le bord de K et qui vaut 1 au centre de gravité de K: $\psi^K = 27 \chi_1 \chi_2 \chi_3$ si χ_j représente la j^{eme} coordonnée barycentrique dans K.

On choisit pour espace X_h^0 des fonctions localement de la forme

$$(15) \quad \begin{cases} \sigma_{11} = a_1 + a_5 x_1 + a_2 x_2 + a_6 \partial_2(\psi^K) \\ \sigma_{12} = a_3 + a_4 x_1 - a_5 x_2 - a_6 \partial_1(\psi^K) \\ \sigma_{21} = b_1 + b_5 x_1 + b_2 x_2 + b_6 \partial_2(\psi^K) \\ \sigma_{22} = b_3 + b_4 x_1 - b_5 x_2 - b_6 \partial_1(\psi^K) \end{cases}$$

pour espace N_h des fonctions affines par côté (et connectées) et pour espace M_h des fonctions affines par triangle (non connectées). Le problème associé admet encore une solution et une seule mais on a présent

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{0,\Omega} = 0 \quad (h^2).$$

□

Conclusion

Les espaces Y_h^0 définis par (12) sont de même dimension. En effet par triangle K , les fonctions de Y_h^0 sont dans un espace de dimension

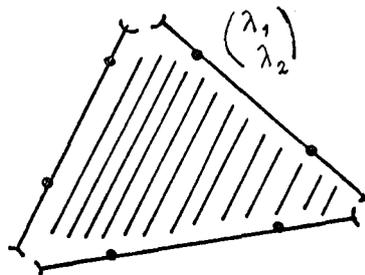
$$(2 \times 5) - 1 = 9$$

(Méthode 1)

$$(2 \times 6) - 3 = 9$$

(Méthode 2)

On résoud (13) en éliminant les inconnues σ_h à l'aide d'une inversion d'une matrice bloc-diagonale, les blocs étant 9×9 . Il reste à résoudre le système linéaire formé aux seules inconnues λ_h . On obtient une résolution analogue à celle des codes déplacements non conformes:



References: (avec essais numériques): AMARA & THOMAS, "Equilibrium F.E.M. for elasticity system, Num. Math., Springer-Verlag (à paraître). □