

SOLUÇÕES APROXIMADAS PARA UMA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR DE EVOLUÇÃO: UM EXEMPLO \*

Carlos A. de Moura  
Laboratório de Cálculo  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
Av. Wenceslau Braz, 71-fundos  
20.000 Rio de Janeiro, RJ

A B S T R A C T

In this expository article, theoretical and experimental results obtained in the numerical study of the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation

$$u_t + \partial_x f(u) - \delta u_{xxt} = g(x,t)$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$u(x,0) = u(x,1)$$

are presented quite informally, in order to illustrate one of the numerical approaches to non-linear partial differential equations.

---

\* To appear in Atas do V Seminário Brasileiro de Análise, Universidade de Campinas, SP, May 1977.

## SOLUÇÕES APROXIMADAS PARA UMA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR DE EVOLUÇÃO: UM EXEMPLO

Carlos A. de Moura  
Laboratório de Cálculo  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
Av. Wenceslau Braz, 71-fundos  
20.000 Rio de Janeiro, RJ

### 1. INTRODUÇÃO

Pretendemos nesta palestra apresentar alguns resultados de caráter tanto teórico como experimental obtidos no estudo de soluções aproximadas da equação de BBM por uma equipe do Laboratório de Cálculo do CBPF. Tais resultados dão sequência a [1] e [2] e serão publicados em co-autoria com M.A. Raupp e J.C. Barbetta em [3].

Nosso objetivo é principalmente ilustrar as técnicas e preocupações quer de ordem matemática quer computacional que envolvem o estudo numérico de uma equação diferencial parcial não-linear. Em particular, enfatizamos o fato de que o ingrediente básico na análise teórica da equação, a obtenção de estimativas a priori, também aparece como "pièce de résistance" na discussão das equações discretizadas.

### 2. A INFLUÊNCIA DOS COMPUTADORES

O progresso alcançado pela tecnologia dos computado

res nas 3 últimas décadas:

- a) motivou o surgimento de disciplinas para-matemáticas geradas em função das próprias necessidades daquela tecnologia (teoria das linguagens, dos automatos, entre outras);
- b) possibilitou o desenvolvimento de outras disciplinas, como a teoria da otimização, desenvolvimento que não seria nem sequer cogitado se não se pudesse implementar os algoritmos que são o objetivo final daquela teoria.

Porém, o exemplo que, a nosso ver, melhor indica a influência do desenvolvimento tecnológico no progresso da matemática é dado pela salto qualitativo que a Análise Numérica experimentou nos últimos anos.

Em 1928, Courant, Friedrichs e Lewy em seu artigo pioneiro (vide Ref. [4]), apresentavam esquemas numéricos para algumas equações diferenciais parciais, incluindo um estudo relativamente aprofundado dos mesmos (no qual antecipavam, por exemplo, o conceito de estabilidade). Mas o seu interesse nestes esquemas era usá-los como instrumentos para obtenção de resultados de existência. E não poderia ser de outra forma, naquela época: por exemplo, a discretização mais simples da equação de Poisson no cubo  $0 \leq x_i \leq 1$  do  $\mathbb{R}^3$  com  $\Delta x_i = 1/11$  já nos conduz a um sistema algébrico linear com 1000 equações. Sua resolução com lápis e papel é praticamente inviável.

Nos dias atuais, a solução de problemas como este foi reduzida a simples rotina. Mais ainda, soluções numéricas são obtidas com tal margem de exatidão que permitem ao matemático utilizar o computador como um "instrumento de laboratório":

êle pode inspirar resultados gerais, ajudando-nos a fortalecer a intuição através do exame de casos particulares representativos (coisa que, aliás, Gauss fazia à exaustão, só que de uma forma muito menos indolor).

Um exemplo da utilização de métodos numéricos como guia em pesquisas teóricas é a descoberta por Kruskal e Zabusky de soluções da equação de KdV na forma de ondas solitárias, cf. [5].

Por outro lado, a possibilidade de abordar numericamente (com sucesso) modelos não-lineares influencia a própria construção destes modelos. Já não necessitamos seguir o caminho clássico: introduzir certas simplificações justamente com o fim de chegar a um problema matemático cujas soluções possam ser encontradas de forma explícita. No dizer de Peter D. Lax [5], podemos "deixar à teoria o que é da teoria e ao computador o que é do computador". (E, de mais a mais, observemos "en passant", nem sempre fórmulas explícitas dão origem a algoritmos computacionalmente eficientes.)

### 3. A EQUAÇÃO DE BBM GENERALIZADA

Consideremos, para  $t \geq 0$  e  $0 \leq x \leq 1$ , a equação

$$(1) \quad u_t + \partial_x f(u) - \delta u_{xxt} = g(x,t)$$

com  $u = u(x,t)$  sujeita às condições

$$(2) \quad u(x,0) = u_0(x)$$

$$(3) \quad u(0,t) = u(1,t).$$

Suporemos que  $g(0,t) = g(1,t)$ , que  $f$  e  $g$  são suficientemente regulares e que  $\delta > 0$  é uma constante arbitrária.

Esta é uma generalização da equação introduzida por Benjamin, Bona e Mahony em [5], onde  $f(s) := \gamma s^2 + \beta s$ , como um modelo não-linear para propagação de ondas com dispersão.

No meio matemático brasileiro, coube ao Prof. L. Adauto Medeiros chamar a atenção para o estudo desta equação, do que resultou uma série de pesquisas realizadas na UFRJ (vide bibliografia em [6], onde podem ser encontrados resultados de existência, unicidade e regularidade, que estaremos usando, sem enunciá-los explicitamente).

Seja  $W \subset H^1(0,1)$  o subespaço das funções  $\psi$  para as quais  $\psi(0) = \psi(1)$ . A fórmula variacional de (1) é:

$$\langle u_t, \psi \rangle - \langle f(u), \psi_x \rangle + \delta \langle u_{tx}, \psi_x \rangle = \langle g, \psi \rangle,$$

para toda  $\psi \in W$ , ou

$$(4) \quad (u_t | \psi) = \langle f(u), \psi_x \rangle + \langle g, \psi \rangle,$$

onde usamos a notação

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u(x) v(x) dx,$$

$$(u | v) := \langle u, v \rangle + \delta \langle u_x, v_x \rangle.$$

4. DISCRETIZAÇÃO

A fim de obtermos uma forma discreta para este problema, efetuamos 2 passagens: semi-discretização na variável  $x$ , seguida da discretização no tempo.

a) Aproximamos o espaço  $W$  por  $W_h \subset W$ , um espaço de dimensão finita  $N = N(h)$  e nele tomamos a "equação aproximada"

$$(1') \quad (u_t^{(h)} | \psi_j) - \langle f(u^{(h)}), \psi_j' \rangle = \langle g, \psi_j \rangle ,$$

$$(2') \quad \langle u^{(h)}(0), \psi_j \rangle = \langle u_0, \psi_j \rangle ,$$

para  $j = 1, 2, \dots, N$ , onde  $\{\psi_j\} = \{\psi_j^{(h)}\}$  é uma base de  $W_h$ .

Isto equivale a aproximar o nosso problema por outro, cuja resolução se reduz à de um sistema de N equações diferenciais ordinárias não-lineares nos coeficientes de  $u^{(h)}$  com relação à base  $\{\psi_j\}$ . As soluções  $u^{(h)}$  são conhecidas como aproximações de Galerkin.

b) Para chegar a um algoritmo composto de um número finito de passos envolvendo apenas as 4 operações aritméticas, como sói exigirmos de qualquer procedimento a ser implementado num computador digital, substituímos as derivadas no tempo por quocientes de diferenças. Uma possibilidade é:

$$(4') \quad \left( \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} | \psi_j \right) = \langle f(v^n), \psi_j' \rangle + \langle g_{n+\frac{1}{2}}, \psi_j \rangle ,$$

onde  $v^m$  são elementos de  $W_h$  que devem aproximar  $u_m := u(., m\Delta t)$ ,

e denotamos  $g(\cdot, s\Delta t)$  por  $g_s$ , notação que será usada no que se segue.

Observemos:

- (i) Resolver (4'), para cada nível  $m\Delta t$ , significa resolver um sistema linear algébrico onde as  $N = N(h)$  incógnitas são os coeficientes de  $V^m$  com relação à base  $\{\psi_j\}$ . A matriz deste sistema é positiva definida e é independente do nível  $m\Delta t$  considerado, o que implica em substancial economia computacional.
- (ii) O 1º membro de (4') simula a derivada  $\partial_t u_{n+\frac{1}{2}}$  com uma precisão da ordem de  $\Delta t^2$ , enquanto a 1ª parcela do 2º membro aproxima  $f(u_{n+\frac{1}{2}})$  com um erro da ordem de  $\Delta t$ . Para garantir a convergência quadrática no tempo, tomamos em lugar de (4') o esquema tipo "predictor-corrector" definido por

$$(5) \quad \langle U^0, \psi_j \rangle = \langle u_0, \psi_j \rangle ,$$

$$(6) \quad \left( \frac{V^{n+1} - U^n}{\Delta t} \mid \psi_j \right) = \langle f(U^n), \psi_j' \rangle + \langle g_{n+\frac{1}{2}}, \psi_j \rangle ,$$

$$(7) \quad \left( \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \mid \psi_j \right) = \langle f\left(\frac{V^{n+1} + U^n}{2}\right), \psi_j' \rangle + \langle g_{n+\frac{1}{2}}, \psi_j \rangle ,$$

para  $j = 1, 2, \dots, N$  e  $n = 0, 1, \dots, T/\Delta t$ , sendo  $[0, T]$  o intervalo de tempo que estamos considerando.

## 5. PROBLEMAS PRÁTICOS

As equações (5), (6) e (7) dão origem ao algoritmo que vamos analisar. Para avançar cada nível de tempo, devemos resolver 2 sistemas lineares algébricos (sempre com os mesmos coeficientes), e a qualquer instante não necessitamos manter simultaneamente armazenados mais que 2 vetores ( $U^n$  e  $V^{n+1}$  ou  $U^n$  e  $U^{n+1}$ ).

Trata-se agora da escolha de  $W_h$  e das bases  $\{\psi_j^{(h)}\}$ . A primeira influencia a qualidade da aproximação com relação à variável  $x$ , enquanto a segunda determina as propriedades do sistema a ser resolvido.

Por exemplo, se tomarmos uma base ortogonal em  $H^1$ , obtemos um sistema diagonal, para cuja solução existe problema de propagação de erro de "round-off" e necessitamos apenas  $N(h)$  multiplicações (em lugar das  $N^2/2$  exigidas por um sistema já triangularizado).

Mas, em contrapartida, já que o 2º membro de (7) é em geral obtido por integração numérica, um vínculo de caráter prático é imposto às derivadas da  $\psi_j$ . Em particular, uma base de senos e co-senos é desaconselhável já que, neste caso, temos

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{d^k}{dx^k} \psi_j(x) \right| = (j\pi)^k$$

Em geral, tomamos as  $\psi_j$  de modo a formarem uma base "aproximadamente ortogonal", no seguinte sentido:



$$(\psi_i | \psi_j) = 0 \quad \text{se} \quad |i-j| \geq p.$$

A matriz do sistema é então do tipo matriz de banda, o que diminui sensivelmente o volume de cálculos a efetuar.

#### 6. ANÁLISE TEÓRICA DO ALGORÍTMO: ESTABILIDADE

De maneira pouco precisa, podemos dizer que substituímos a equação  $Lu = g$  pela forma discreta  $L_\Delta U_\Delta = G_\Delta$ , tendo escolhido os operadores discretos  $L_\Delta$  e as aproximações  $G_\Delta$  de forma a:

$$(8) \quad L\phi - L_\Delta \phi \rightarrow 0 ,$$

$$(9) \quad G_\Delta - g \rightarrow 0 ,$$

se  $\Delta t \rightarrow 0$  e  $h \rightarrow 0$ . (Um esquema que satisfaz (8) é dito consistente). As aproximações  $U_\Delta$  são definidas por  $U_\Delta := L_\Delta^{-1} G_\Delta$  e coloca-se a questão: tem-se

$$(10) \quad U_\Delta - u \rightarrow 0$$

se  $\Delta t \rightarrow 0$  e  $h \rightarrow 0$ ? (Quando a condição (10) é satisfeita, o esquema é dito convergente.)

Sob a hipótese de linearidade dos operadores considerados, temos:

$$\begin{aligned}
\|U_{\Delta} - u\| &= \|L_{\Delta}^{-1} L_{\Delta} (u - U_{\Delta})\| \leq \\
&\leq \|L_{\Delta}^{-1}\| \cdot \|(L_{\Delta} u - Lu) + (Lu - L_{\Delta} U_{\Delta})\| \\
&\leq \|L_{\Delta}^{-1}\| (\|L_{\Delta} u - Lu\| + \|g - G_{\Delta}\|).
\end{aligned}$$

As condições (8) e (9) implicam (10) se  $L_{\Delta}$  satisfi-  
zer

$$(11) \quad \|L_{\Delta}^{-1}\| \leq C,$$

com a constante  $C$  independente de  $\Delta t$  e de  $h$ . (Um esquema para o qual (11) é válida é dito estável.)

Portanto, no caso linear, para esquemas consistentes, estabilidade implica convergência. (De fato, vale a recíproca: este é o Teorema da Equivalência de Lax, cf. [7].)

A estimativa (11) garante que não teremos "estouro", isto é, erros introduzidos não serão amplificados, não importa quão pequenos sejam  $h$  e  $\Delta t$  considerados. Ela é fundamental também no caso não-linear, como veremos a seguir.

Se em (6) tomarmos  $v^{n+1} + U^n$  em lugar de  $\psi^j$ , obtemos, usando a notação  $\|v\| := \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$ ,  $\|v\|_1 := (v|v)^{\frac{1}{2}}$ ,

$$\begin{aligned}
\|v^{n+1}\|_1^2 - \|U^n\|_1^2 &\leq \Delta t \{ (\|f(U^n)\| + \|g_{n+\frac{1}{2}}\|) (\|v^{n+1}\| + \|U^n\|) \\
&\leq \Delta t \{ \|f(U^n)\|^2 + \|g_{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|v^{n+1}\|^2 + \|U^n\|^2 \}
\end{aligned}$$

$$\leq \Delta t \{C(f) \|U^n\|_1^2 + \|g_{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|V^{n+1}\|_1^2 + \|U^n\|_1^2\} .$$

(Aplicamos sucessivamente: desigualdade de Schwarz,  $2ab \leq a^2 + b^2$ ,  $\|v\| \leq \|v\|_1$  e  $\|f(v)\|_1 \leq C(f) \|v\|_1$  para  $f$  regular, nula na origem.)

Consequentemente, se  $\Delta t < 1$ , vem:

$$(12) \quad \|V^{n+1}\|_1^2 \leq A + B \|U^n\|_1^2$$

onde  $A = A(g)$  e  $B = B(f)$  são independentes de  $n$ .

De maneira análoga, usando (12), segue de (7) que

$$\|U^{n+1}\|_1^2 - \|U^n\|_1^2 \leq \Delta t \{C + \|U^{n+1}\|_1^2 + D \|U^n\|_1^2\} ,$$

onde as constantes  $C$  e  $D$  são funções de  $f$  e  $g$  mas independentes de  $n$ . Somando para  $n = 0, 1, \dots, m-1$ , resulta

$$\|U^m\|_1^2 - \|U^0\|_1^2 \leq CT + (1+D) \sum_{j=0}^m \|U^j\|_1^2 \Delta t ,$$

do que concluímos, fazendo uso da desigualdade de Gromwall discreta, que para todo  $m$

$$\|U^m\|_1^2 \leq (\|U^0\|_1^2 + CT) \exp(1+D)T ,$$

ou

$$(13) \quad \|U^m\|_1^2 \leq \alpha ,$$

onde  $\alpha = \alpha(f, g, u_0, T)$  independe de  $m$ ,  $\Delta t$  ou  $h$ .

Vale a pena observar a analogia entre os argumentos acima apresentados e aqueles usados no estudo teórico da equação (1).

Por exemplo, tomando  $\psi := u$  em (4), obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_1^2 \leq \|f(u)\| \|u_x\| + \|g\| \|u\| \leq \\ \{C(f) \|u\|_1^2 + \|u_x\|^2 + \|g\|^2 + \|u\|^2\} / 2 ,$$

donde

$$\|u(t)\|_1^2 \leq \|g\|^2 + A \|u\|_1^2 ,$$

do que segue, por integração

$$\|u(t)\|_1^2 \leq \|u(0)\|_1^2 + T \|g\|^2 + A \int_0^t \|u(\tau)\|_1^2 d\tau .$$

Usando o lema de Gromwall, vem

$$(13') \quad \|u(t)\|_1^2 \leq \beta \exp At$$

onde  $\beta = \beta(u_0, g)$ , sendo  $\beta = 0$  para  $u_0 = g = 0$ .

A desigualdade (13') nos garante, por exemplo, a unicidade da solução de (1), (2) e (3).

## 7. CONVERGÊNCIA

Na demonstração de (13) a escolha de  $W_h$  é irrelevante: este é um esquema incondicionalmente estável, na terminolo

gia de Lions [8]. É de se esperar, porém, que para obter resultados de convergência temos de conhecer a ordem da aproximação fornecida por  $W_h$ .

Como já notamos, a equação (7) é uma simulação de (4) para  $t = (n + \frac{1}{2})\Delta t$ , o que nos dá uma aproximação quadrática no tempo (esta é a chamada discretização de Crank-Nicholson). Por seu turno, a solução exata de (4) é uma solução aproximada de (7):

$$(7') \quad \left( \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} \mid \psi \right) = \left\langle f \left( \frac{u_{n+1} + u_n}{2} \right), \psi' \right\rangle + \left\langle g_{n+\frac{1}{2}}, \psi \right\rangle + \left\langle A_n, \psi \right\rangle$$

onde  $A_n = O(\Delta t^2)$ , se  $u$  é regular.

Subtraindo (7) de (7'), chega-se à seguinte equação para o erro  $e_n$ :

$$\left( \frac{e_{n+1} - e_n}{\Delta t}, \psi \right) = \left\langle f'(\xi_n) (\hat{e}_{n+1} + e_n), \psi \right\rangle = \left\langle B_n, \psi \right\rangle,$$

onde  $e_n := u_n - U^n$ ,  $\hat{e}_n := u_n - V^n$ ,  $B_n = O(\Delta t^2)$  e  $\xi_n$  está no intervalo de extremos  $(u_{n+1} + u_n)/2$  e  $(V^{n+1} + U^n)/2$ .

Observe que, para estimar  $e_n$ , não podemos seguir o caminho da demonstração anterior, escolhendo  $\psi := e_{n+1} + e_n$ , pois, em geral,  $e_n \notin W_h$ . É neste ponto que está envolvida a "qualidade da aproximação" dada pelos espaços  $W_h$ , bem como as propriedades de regularidade da solução.

Suponhamos que existem, associados aos espaços  $W_h$ , operadores de projeção  $\theta_h : W \rightarrow W_h$  de tal forma que, se  $v \in W$ ,

$$\|\theta_h v - v\|_1 = O(h^p), \text{ para } h \rightarrow 0.$$

Temos então que a função  $e_n + (\theta_h u_n - u_n) \in W_h$  e pode ser tomada como função-teste  $\psi$  em (7'). Assim, obtemos estimativas de  $e_n$  através de manipulações não muito distintas das que efetuamos acima. (Tais cálculos são análogos aos expostos em [1].)

Resta a questão da existência de tais espaços aproximativos  $W_h$  e operadores de projeção  $\theta_h$

Para  $r, \ell$  e  $N$  inteiros, com  $0 < r < \ell - 1$  e  $h := 1/(N+1)$ , consideremos o espaço  $S_h^{\ell, r} \subset W$  das funções  $\psi$  polinomiais por partes, de classe  $C^r$  e satisfazendo:

- a)  $\psi^{(j)}(0) = \psi^{(j)}(1), \quad j = 0, 1, \dots, r,$
- b) em cada intervalo  $[jh, (j+1)h], \quad j = 0, 1, \dots, N,$   $\psi$  coincide com um polinômio de grau  $\leq \ell - 1$ .

Nestes espaços, o operador de interpolação satisfaz (vide [10]):

$$\|v - \theta_h v\|_1 = O(h^\ell).$$

Conclui-se daí o seguinte:

Teorema: O esquema numérico definido por (5), (6) e (7) com  $W_h = S_h^{\ell, r}$  é convergente. Mais precisamente, existem constantes  $\tau > 0$  e  $C$  (que dependem apenas de  $f$ , de  $g$  e de  $u_0$ ) tais que, se  $\Delta t < \tau$  tem-se:

$$(14) \quad \sup_n \|U^n - u_n\|_1 \leq C [h^{\ell-1} + \Delta t^2].$$

Como  $\|v\|_{\infty} \leq K \|v\|_1$ , para  $v \in H^1(0,1)$ , a desigualdade (14) nos garante a convergência uniforme:

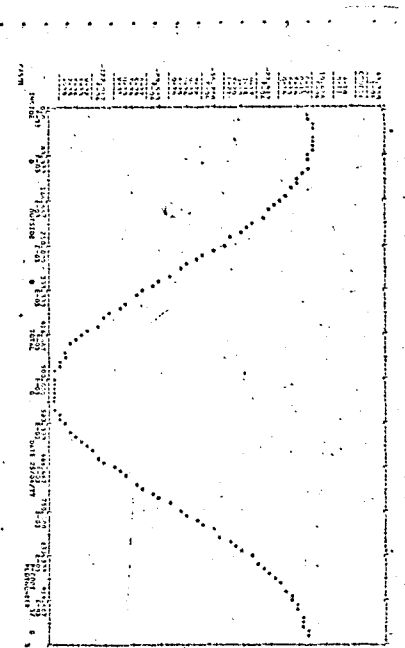
$$\sup_{\substack{0 \leq n \leq T/\Delta t \\ 0 \leq x \leq 1}} |U^n(x) - u_n(x)| \leq C [h^{\ell-1} + \Delta t^2].$$

### 8. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

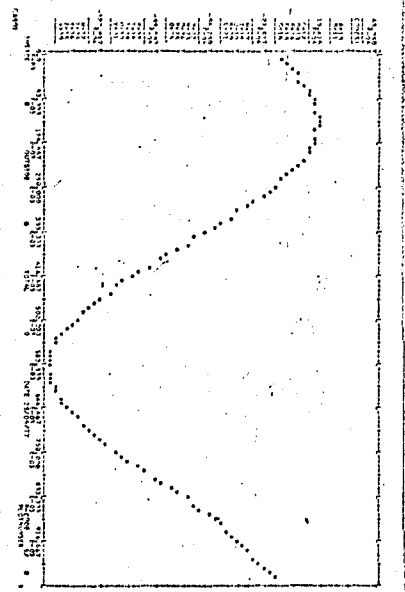
No caso em  $r = 2$  e  $\ell = 3$ ,  $S_h^{\ell,r}$  é o espaço dos splines cúbicos. Efetuamos um estudo experimental da equação com estes espaços de aproximação, obtendo os resultados que se seguem.

Os gráficos abaixo descrevem a evolução no tempo da solução aproximada que calculamos com os seguintes dados:

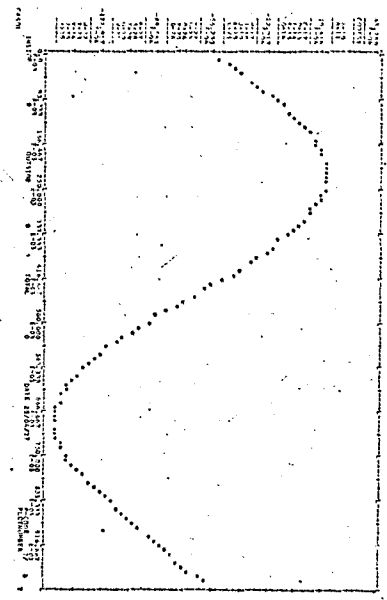
$$\begin{aligned} u_0(x) &:= (x(x-1))^3 \\ f(s) &:= s + 3s^2/4 + s^3/20 \\ g &:= 0 \\ \delta &:= 1/6 \\ h &:= 1/20 \\ \Delta t &:= 1/25 \end{aligned}$$



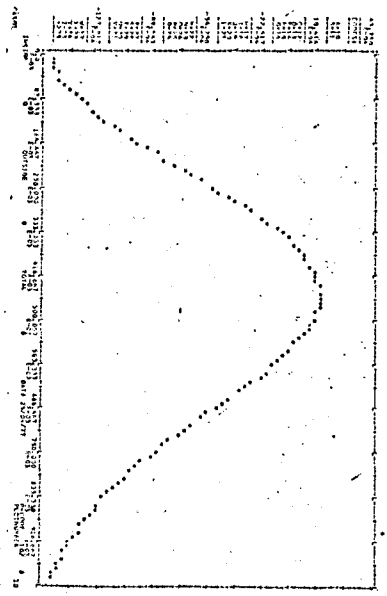
$t = 0$  seg



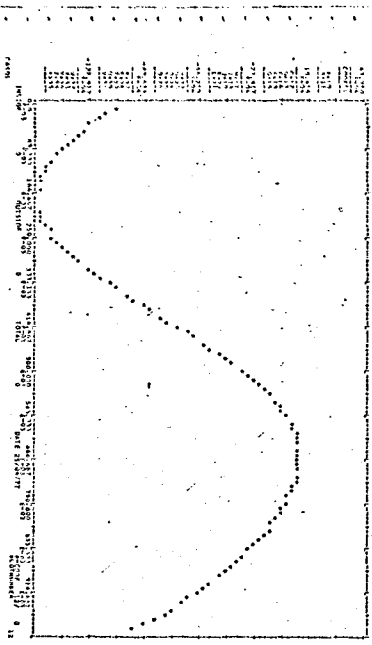
$t = 0,8$  seg



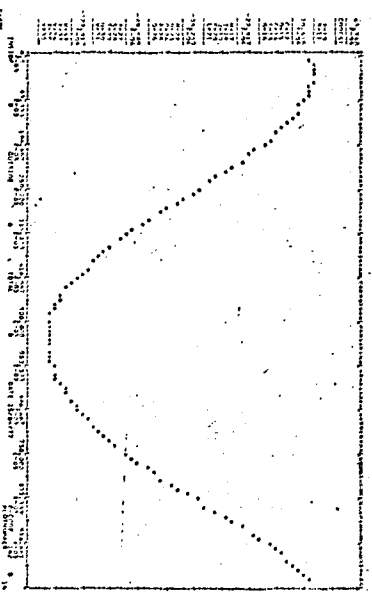
$t = 1,6$  seg



$t = 2,8$  seg



$t = 5,2$  seg



$t = 8$  seg



Tomando  $u(x,t) := \text{sen}(2\pi(x-t))/50$ ,  $f(s) := s+3s^2/4$ ,  $\delta := 1/6$ , ob-  
tivemos aproximações coerentes com as estimativas teóricas, co-  
mo pode ser visto nas tabelas que se seguem:

h:=1/10 Δt:=1/5			h:= 1/10 Δt:= 1/50		
TEMPO	ERRO MAX ABSOLUTO	ERRO RELATIVO	ERRO MAX ABSOLUTO	ERRO RELATIVO	ERRO RELATIVO
0.000000E+00	-4.5165269E-06	-2.3744786E-04	-4.5165269E-06	-2.3744786E-04	-2.3744786E-04
2.000000E-01	-1.1560011E-03	-1.0787083E-01	4.9499728E-04	2.5198160E-04	2.5198160E-04
4.000000E-01	-1.9741138E-03	-1.0908792E-01	5.3407383E-06	3.4657034E-04	3.4657034E-04
6.000000E-01	-2.2162930E-03	-1.1103375E-01	6.3477568E-06	3.7590602E-04	3.7590602E-04
8.000000E-01	-1.8195427E-03	-1.1245391E-01	7.1506419E-06	3.9513870E-04	3.9513870E-04
1.000000E+00	8.9935969E-04	1.0561343E-01	8.3485233E-06	7.7903183E-04	7.7903183E-04
1.200000E+00	-2.8600266E-04	-2.2774230E-01	9.5538559E-06	7.4941132E-04	7.4941132E-04
1.400000E+00	-1.3920371E-03	-1.0919235E-01	1.0699652E-05	6.9432012E-04	6.9432012E-04
1.600000E+00	-2.0930311E-03	-1.1003714E-01	1.1668876E-05	6.9101585E-04	6.9101585E-04
1.800000E+00	2.1845862E-03	1.1277228E-01	1.2561901E-05	1.4751657E-03	1.4751657E-03
2.000000E+00	1.6431143E-03	1.1270140E-01	1.3924622E-05	1.2993584E-03	1.2993584E-03
2.200000E+00	-6.3183531E-04	-1.0223350E-01	1.5207594E-05	1.1107777E-03	1.1107777E-03
2.400000E+00	-5.6786373E-04	-1.1417061E-01	1.6379571E-05	1.0629000E-03	1.0629000E-03
2.600000E+00	-1.5980761E-03	-1.0961202E-01	1.7362620E-05	1.0281917E-03	1.0281917E-03
2.800000E+00	2.1725281E-03	1.1214975E-01	1.8138647E-05	1.0023267E-03	1.0023267E-03
3.000000E+00	2.1152899E-03	1.1120743E-01	1.8692814E-05	9.8273932E-04	9.8273932E-04
3.200000E+00	-1.4445972E-03	-1.1331551E-01	-1.9544160E-05	-1.4275252E-03	-1.4275252E-03
3.400000E+00	-3.5451598E-04	-1.4143153E-01	-2.0774383E-05	-1.3480876E-03	-1.3480876E-03
3.600000E+00	-8.3871349E-04	-9.8491091E-02	-2.1814570E-05	-1.2918306E-03	-1.2918306E-03
3.800000E+00	1.7824573E-03	1.1016175E-01	-2.2646834E-05	-1.2514456E-03	-1.2514456E-03
4.000000E+00	-2.2111176E-03	-1.1143454E-01	-2.3256521E-05	-1.2226677E-03	-1.2226677E-03
4.200000E+00	-2.0070858E-03	-1.1091004E-01	-2.3632436E-05	-1.2029290E-03	-1.2029290E-03
4.400000E+00	-1.2168133E-03	-1.1354585E-01	-2.3767021E-05	-1.1907006E-03	-1.1907006E-03
4.600000E+00	-6.9735427E-05	-2.7819429E-02	-2.3739881E-05	-1.4058450E-03	-1.4058450E-03
4.800000E+00	1.0983003E-03	1.0248607E-01	-2.4663511E-05	-1.3628855E-03	-1.3628855E-03
5.000000E+00	-1.9412744E-03	-1.1076437E-01	-2.5363905E-05	-1.3334595E-03	-1.3334595E-03
5.200000E+00	-2.2224244E-03	-1.1134095E-01	-2.5829823E-05	-1.3147796E-03	-1.3147796E-03
5.400000E+00	1.8609547E-03	-1.1020353E-01	-2.6053660E-05	-1.2952586E-03	-1.2952586E-03
5.600000E+00	-9.6230797E-04	-1.1300626E-01	-2.6031564E-05	-1.3041516E-03	-1.3041516E-03
5.800000E+00	-2.1856380E-04	-3.0489433E+03	-2.5763498E-05	-1.3114034E-03	-1.3114034E-03
6.000000E+00	-1.3404491E-03	-1.1402483E-01	-2.5253238E-05	-1.3276412E-03	-1.3276412E-03
6.200000E+00	-2.0717767E-03	-1.1141246E-01	-2.4921901E-05	-1.2685649E-03	-1.2685649E-03
6.400000E+00	-2.1980187E-03	-1.1188277E-01	-2.5240628E-05	-1.2645267E-03	-1.2645267E-03
6.600000E+00	1.6888968E-03	1.1584198E-01	-2.5313550E-05	-1.2681799E-03	-1.2681799E-03
6.800000E+00	-6.9576872E-04	-1.1257909E-01	-2.5140598E-05	-1.2796968E-03	-1.2796968E-03
7.000000E+00	-5.0255227E-04	-1.0103827E-01	-2.4725518E-05	-1.2998974E-03	-1.2998974E-03
7.200000E+00	-1.5549200E-03	-1.1357238E-01	-2.4075815E-05	-1.3304097E-03	-1.3304097E-03
7.400000E+00	2.1595422E-03	1.1147931E-01	-2.3202634E-05	-1.3740297E-03	-1.3740297E-03
7.600000E+00	2.1391899E-03	1.1246404E-01	-2.2120591E-05	-1.4354451E-03	-1.4354451E-03
7.800000E+00	-1.4947902E-03	-1.1725306E-01	2.1621891E-05	1.1005890E-03	1.1005890E-03
8.000000E+00	-4.2113213E-04	-1.6801189E-01	-2.1282094E-05	-1.1188661E-03	-1.1188661E-03
8.200000E+00	-7.7770218E-04	-1.0562899E-01	-2.0710638E-05	-1.1444531E-03	-1.1444531E-03
8.400000E+00	1.7420103E-03	1.1304171E-01	-1.9916587E-05	-1.1794347E-03	-1.1794347E-03
8.600000E+00	2.2092740E-03	1.1134159E-01	-1.8914516E-05	-1.2273977E-03	-1.2273977E-03
8.800000E+00	-2.0370503E-03	-1.1256600E-01	-1.7722243E-05	-1.2944510E-03	-1.2944510E-03
9.000000E+00	-1.2745967E-03	-1.1893846E-01	-1.6360557E-05	-1.3917132E-03	-1.3917132E-03
9.200000E+00	-1.3816847E-04	-1.1001309E-01	1.5412920E-05	8.5170539E-04	8.5170539E-04
9.400000E+00	1.0399066E-03	1.0792812E-01	1.4653826E-05	8.6778059E-04	8.6778059E-04
9.600000E+00	1.9086745E-03	1.0890413E-01	1.3688480E-05	8.8827045E-04	8.8827045E-04
9.800000E+00	-2.2247318E-03	-1.1123659E-01	1.2543593E-05	9.8392881E-04	9.8392881E-04
1.000000E+01	-1.9010270E-03	-1.1257680E-01	1.1338391E-05	1.0580261E-03	1.0580261E-03

Tabela 1

$\Delta t := 1/15$   
 $h := 1/10$

$\Delta t := 1/25$   
 $h := 1/20$

TEMPO	ERRO MAX ABSOLUTO	ERRO RELATIVO	ERRO MAX ABSOLUTO	ERRO RELATIVO
0.0000000E+00	-4.5165269E-06	-2.3744786E-04	-2.7679579E-07	-1.3839789E-05
6.6666667E-02	4.4958039E-05	7.7773510E-03	9.4037884E-06	2.5092650E-03
1.3333333E-01	-8.5226601E-05	-2.0495895E-02	-1.8672914E-05	-4.9826057E-03
2.0000000E-01	-1.2715444E-04	-1.1865261E-02	2.7706036E-05	3.7631331E-03
2.6666667E-01	-1.5826838E-04	-9.9348692E-03	-3.6429291E-05	-4.9479609E-03
3.3333333E-01	-1.9223633E-04	-1.2933977E-02	-4.4753197E-05	-3.9810121E-03
4.0000000E-01	-2.1540404E-04	-1.1583647E-02	-5.2439608E-05	-4.6647553E-03
4.6666667E-01	-2.2885800E-04	-1.2775205E-02	-5.9720727E-05	-4.2228941E-03
5.3333333E-01	-2.4292238E-04	-1.2213023E-02	-6.5903646E-05	-4.5203359E-03
6.0000000E-01	-2.3859926E-04	-1.2316921E-02	-7.1848778E-05	-4.2547917E-03
6.6666667E-01	-2.3531333E-04	-1.1932803E-02	-7.6209409E-05	-4.3483303E-03
7.3333333E-01	-2.2122188E-04	-1.2772250E-02	-8.0556696E-05	-4.3320466E-03
8.0000000E-01	1.9503475E-04	1.0777461E-02	-8.3082731E-05	-4.2290447E-03
8.6666667E-01	1.7149915E-04	1.2255837E-02	-8.5360512E-05	-4.3449874E-03
9.3333333E-01	1.3451621E-04	9.1451731E-02	-8.6059519E-05	-4.3029759E-03
1.0000000E+00	9.8193077E-05	1.1627667E-03	-8.6105173E-05	-4.3320466E-03
1.0666667E+00	-5.6696229E-05	-1.9405565E-02	-8.4947121E-05	-4.3521703E-03
1.1333333E+00	-1.4106219E-05	-2.0234327E-03	-8.2696842E-05	-4.2368798E-03
1.2000000E+00	-3.1931279E-05	-1.2738584E-02	-7.9730212E-05	-4.4058258E-03
1.2666667E+00	-7.6088990E-05	-1.0914374E-02	-7.5392780E-05	-4.1861429E-03
1.3333333E+00	-1.1322725E-04	-8.6641896E-03	-7.0734034E-05	-4.3716034E-03
1.4000000E+00	-1.5285025E-04	-1.3002212E-02	6.4550684E-05	4.0846856E-03
1.4666667E+00	-1.8374034E-04	-1.1029872E-02	5.8340483E-05	4.2612479E-03
1.5333333E+00	-2.0684963E-04	-1.3197096E-02	5.0785151E-05	4.7389541E-03
1.6000000E+00	-2.2958471E-04	-1.2075238E-02	4.3175447E-05	4.2408600E-03
1.6666667E+00	-2.3505751E-04	-1.1755453E-02	3.4634294E-05	5.1122593E-03
1.7333333E+00	2.4274670E-04	1.2147990E-02	-2.5970044E-05	-3.8333601E-03
1.8000000E+00	2.3805264E-04	1.2515171E-02	-1.6803002E-05	-6.7033644E-03
1.8666667E+00	2.2171047E-04	1.1386366E-02	-7.5946820E-06	-3.0298111E-03
1.9333333E+00	2.0709165E-04	1.1956448E-02	-1.9795619E-06	-3.1511213E-03
2.0000000E+00	1.7664456E-04	1.3856143E-02	-1.1266122E-05	-2.5822722E-03
2.0666667E+00	-1.4664367E-04	-1.0479601E-02	-2.0610581E-05	-4.7240861E-03
2.1333333E+00	-1.0960114E-04	-1.3473270E-02	-2.9478254E-05	-3.7112407E-03
2.2000000E+00	-6.7735921E-05	-7.0301566E-03	-3.8281132E-05	-4.4954161E-03
2.2666667E+00	-2.6501015E-05	-1.5835389E-02	-4.6341635E-05	-3.9420528E-03
2.3333333E+00	-2.1149510E-05	-1.2637313E-02	-5.4078834E-05	-4.6002179E-03
2.4000000E+00	-6.2469491E-05	-6.4935390E-03	-6.1028512E-05	-4.0679635E-03
2.4666667E+00	-1.0496121E-04	-1.2902817E-02	-6.7279047E-05	-4.4846040E-03
2.5333333E+00	-1.4221607E-04	-1.0163168E-02	-7.2839229E-05	-4.2311871E-03
2.6000000E+00	-1.7335139E-04	-1.3597791E-02	-7.7208057E-05	-4.4053092E-03
2.6666667E+00	-2.0396434E-04	-1.1775879E-02	-8.1155913E-05	-4.2656182E-03
2.7333333E+00	2.1907880E-04	1.1251205E-02	-8.3450230E-05	-4.3450363E-03
2.8000000E+00	2.3738808E-04	1.2480224E-02	-8.5628470E-05	-4.3154519E-03
2.8666667E+00	2.4246803E-04	1.2134046E-02	-8.5854697E-05	-4.2948542E-03
2.9333333E+00	2.3639589E-04	1.1830171E-02	8.6004301E-05	4.3087175E-03
3.0000000E+00	2.3143336E-04	1.2167178E-02	8.4368302E-05	4.3552440E-03

Tabela 2

Verifica-se que o seguinte algoritmo de passo duplo tem o mesmo grau de precisão que (14):

$$\begin{aligned}
 Y^0 &:= U^0 \\
 Y^1 &:= U^1 \\
 \left( \frac{Y^{n+1} - Y^n}{\Delta t}, \psi \right) &= \left\langle f \left( \frac{3}{2} Y^n - \frac{1}{2} Y^{n-1} \right), \psi' \right\rangle + \langle g, \psi \rangle,
 \end{aligned}$$

$n \geq 2$ ,  $\psi \in W_h$ . Computacionalmente, êle é mais econômico, pois envolve a resolução de apenas um sistema por passo. Sua performance é sensivelmente inferior à do algoritmo "predictor-corrector", como é ilustrado pela Tabela 3, que foi obtida com o algoritmo de passo duplo, nas mesmas condições da Tabela 2.

$\Delta t := 1/15$   
 $h := 1/10$

$\Delta t := 1/25$   
 $h := 1/20$

TEMPO	ERRO MAX ABSOLUTO	ERRO RELATIVO	ERRO MAX ABSOLUTO	ERRO RELATIVO
0.000000E+00	-4.5165269E-06	-2.3744786E-04	-2.7679579E-07	-1.3839789E-05
6.666667E-02	4.4958039E-05	7.7773510E-03	9.4037884E-06	2.5092650E-03
1.333333E-01	1.7350835E-04	3.2260235E-02	-3.8142641E-05	-8.7425795E-03
2.000000E-01	-3.0473723E-04	-2.8436181E-02	-6.6582215E-05	-9.0434423E-03
2.666667E-01	-4.1681324E-04	-2.7530782E-02	-9.4082959E-05	-1.1048332E-02
3.333333E-01	-5.2351034E-04	-3.3400204E-02	-1.2070766E-04	-1.0737527E-02
4.000000E-01	-6.1010888E-04	-3.2809441E-02	-1.4552264E-04	-1.1871514E-02
4.666667E-01	-6.6971319E-04	-3.5457962E-02	-1.6913099E-04	-1.1959370E-02
5.333333E-01	-7.2181842E-04	-3.6289721E-02	-1.9006323E-04	-1.2333550E-02
6.000000E-01	-7.3497590E-04	-3.7040873E-02	-2.0955133E-04	-1.2409359E-02
6.666667E-01	-7.3362983E-04	-3.7676957E-02	-2.2566769E-04	-1.2470213E-02
7.333333E-01	-7.0734905E-04	-3.9485303E-02	-2.3994662E-04	-1.2751171E-02
8.000000E-01	-6.4929937E-04	-4.0128905E-02	-2.5065602E-04	-1.2842081E-02
8.666667E-01	-5.8297673E-04	-4.1661228E-02	-2.5898740E-04	-1.3110786E-02
9.333333E-01	-4.8640919E-04	-4.6948292E-02	-2.6381323E-04	-1.3190661E-02
1.000000E+00	-3.7937731E-04	-4.4550992E-02	-2.6570558E-04	-1.3311546E-02
1.066667E+00	-2.5917723E-04	-6.2328866E-02	-2.6446288E-04	-1.3549459E-02
1.133333E+00	1.2794285E-04	5.1200191E-02	-2.5982307E-04	-1.3528312E-02
1.200000E+00	-8.3426136E-06	-4.3859709E-04	-2.5256897E-04	-1.3760157E-02
1.266667E+00	1.4058034E-04	2.0165139E-02	-2.4165902E-04	-1.3788495E-02
1.333333E+00	2.6530596E-04	2.3970883E-02	-2.2864134E-04	-1.4130811E-02
1.400000E+00	3.8882183E-04	3.3075128E-02	-2.1207421E-04	-1.4136186E-02
1.466667E+00	4.9550975E-04	3.1104260E-02	-1.9374494E-04	-1.4648529E-02
1.533333E+00	-5.8189749E-04	-3.4014593E-02	-1.7246358E-04	-1.5341472E-02
1.600000E+00	-6.6145200E-04	-3.4774584E-02	-1.4966086E-04	-1.4700278E-02
1.666667E+00	-7.0475294E-04	-3.5361664E-02	-1.2466614E-04	-1.6932630E-02
1.733333E+00	-7.3545156E-04	-3.6804861E-02	-9.8467346E-05	-1.5932382E-02
1.800000E+00	-7.4034075E-04	-3.8217729E-02	-7.0913113E-05	-2.2665529E-02
1.866667E+00	-7.1185394E-04	-3.7974391E-02	4.2723343E-05	2.2699103E-02
1.933333E+00	-6.7421401E-04	-4.0472887E-02	1.3950345E-05	1.1108581E-02
2.000000E+00	-6.0185409E-04	-4.3960078E-02	1.5164164E-05	4.0463241E-03
2.066667E+00	-5.1566169E-04	-4.2644995E-02	4.4061939E-05	8.8587886E-03
2.133333E+00	-4.1295066E-04	-5.0764030E-02	7.2186704E-05	9.8046406E-03
2.200000E+00	2.9144097E-04	4.7156277E-02	9.9709174E-05	1.1709004E-02
2.266667E+00	1.6832306E-04	1.0057919E-01	1.2577857E-04	1.1188592E-02
2.333333E+00	3.4198289E-05	4.4124943E-03	1.5052212E-04	1.2279348E-02
2.400000E+00	1.0125853E-04	1.0509342E-02	1.7339569E-04	1.1893212E-02
2.466667E+00	2.3361324E-04	2.8717910E-02	1.9406760E-04	1.2593390E-02
2.533333E+00	3.5582291E-04	2.7227665E-02	-2.1286761E-04	-1.2365352E-02
2.600000E+00	4.6314393E-04	3.3828443E-02	-2.2860443E-04	-1.2632490E-02
2.666667E+00	-5.6522026E-04	-3.2632987E-02	-2.4243892E-04	-1.2745767E-02
2.733333E+00	-6.3623220E-04	-3.3229360E-02	-2.5249318E-04	-1.2936203E-02
2.800000E+00	-6.9808289E-04	-3.6036274E-02	-2.6051792E-04	-1.3129425E-02
2.866667E+00	-7.3271153E-04	-3.6657743E-02	-2.6446651E-04	-1.3223326E-02
2.933333E+00	-7.3581716E-04	-3.7189828E-02	-2.6614123E-04	-1.3366382E-02
3.000000E+00	-7.2868657E-04	-3.8309343E-02	-2.6391326E-04	-1.3521303E-02

Tabela 3

9. REFERÊNCIAS

- [1] Raupp, M.A. - *Galerkin Methods applied to the Benjamin-Bona-Mahony equation*, Bol. da SBM, vol. 6 nº 1, (1977).
- [2] Moura, C.A. & Raupp, M.A. - *Esquemas numéricos do tipo Galerkin para uma equação não-linear de propagação com dispersão*, Atas do 4º Semin.Bras.de Análise, Brasília, set. 1976.
- [3] Moura, C.A.; Raupp, M.A. & Barbetta, J.C. - *Experimentos numéricos com a equação de BBM, a aparecer em: Relatórios do CBPF, Série A.*
- [4] Courant, R.; Friedrichs, K.O. & Lewy, H. - *Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik*, Math. Ann., vol. 100, p.32-74 (1928). Versão inglesa em: IBM Journal, March, 1967.
- [5] Lax, P.D. - *The impact of computers on mathematics.*
- [6] Benjamin, T.B.; Bona, J.L. & Mahony J.J. - *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems*, Phil.Trans.Roy. Soc. of London, p. 47-78 (1972).
- [7] Medeiros, L.A. - *Alguns métodos matemáticos para o estudo da equação de Benjamin-Bona-Mahony*. Tese apresentada ao Inst.de Matemática da UFRJ, Rio de Janeiro, (1976).
- [8] Richtmeyer, R.D. & Morton, K.W. - *Difference Methods for Initial-value problems*, Wiley, N.York, (1967).
- [9] Lions, J.L. - *Cours d'Analyse Numérique*, Hermann, Paris (1974).
- [10] Oden, J.T. & Redy, J.N. - *An Introduction to the mathematical theory of finite elements*, Wiley, N.York (1976).