NOTAS DE FÍSICA

VOLUME VII

Nº 12

CAUSALITÉ ET ANALYTICITÉ

par

Laurent Schwartz

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71

RIO DE JANEIRO

1961

Notas de Física - Volume VII - Nº 12

CAUSALITÉ ET ANALYTICITÉ *

Laurent Schwartz
Faculté des Sciences, Paris
et Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro

(Received April 20, 1961)

§1. La convolution en physique

Considérons un système physique qui, à chaque excitation définie par une fonction E(t) du temps t, nulle pour t négatif assez grand en valeur absolue, fournisse une réponse, définie par une fonction I(t), nulle pour t négatif assez grand en valeur absolue (par exemple E est une force électromotrice, I une intensité).

On définit ainsi un opérateur qui à la fonction E fait

---

* Reproduit d'un document de la Faculté des Sciences de Paris, Séminaire Schwartz-Lévy, 1956-57, après des conférences de l'auteur au Centre Brésilien des Recherches Physiques.

correspondre la fonction I. Supposons que cet opérateur aît les propriétés suivantes:

1º Il est linéaire. Si à E_1 correspond I_1 et à E_2 correspond I_2, alors à $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2$ (λ_1 et λ_2 constantes) correspond $\lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2$.

2º Il commute avec les translations dans le temps, ce qui exprime l'invariabilité du système physique au cours du temps. Cela veut dire que si, à $E(t)$, correspond $I(t)$, à l'excitation décalée $E(t-t_1)$ correspond la réponse décalée $I(t-t_1)$.

3º La réponse n'a jamais lieu avant l'excitation: si $E(t)$ est nulle pour $t < t_1$, alors $I(t)$ aussi est nulle pour $t < t_1$ (principe de causalité).

Tirons-en des conséquences, de façon intuitive. Prenons comme excitation $E(t) = \delta(t)$, "fonction" de Dirac et soit $I(t) = A(t)$ la réponse; $A(t)$ est nulle pour $t < 0$ d'après 3º.

Prenons ensuite comme excitation la même décalée dans le temps: $E(t) = \delta(t-\tau)$; alors la réponse est la même décalée dans le temps: $I(t) = A(t-\tau)$, d'après 2º.

Mais alors toute excitation peut se décomposer en combinaison linéaire des $\delta(t-\tau)$: $E(t) = \int E(\tau) \; \delta(t-\tau) d\tau$. On en déduit, d'après 1º, que $I(t) = \int E(\tau) \; A(t-\tau) \, d\tau$.

Autrement dit l'opérateur est un opérateur de convolution avec la "fonction" $A(t)$, nulle pour $t < 0$:

$$I = A * E. \tag{1,1}$$

Il est évident que ce raisonnement est mathématiquement insuffisant. D'abord il faut admettre des excitations ou des réponses qui soient des distributions du temps, et non des fonctions. Ensuite une intégrale n'est pas une somme, il y a en outre un passage à la limite; il faut donc supposer en outre, la continuité de l'opérateur $E \longrightarrow I$. Mathématiquement on a la proposition suivante:

<u>Proposition I, Soit $E \rightarrow I$ un opérateur qui à toute distribution $E \in \mathcal{D}'_t$, nulle pour t négatif assez grand en valeur absolue, fasse correspondre une distribution $I \in \mathcal{D}'_t$ nulle pour t négatif assez grand en valeur absolue, et ayant les propriétés suivantes:</u>

1° <u>L'opérateur est linéaire;</u>

2° <u>Il commute avec les translations dans le temps;</u>

3° <u>Si $E \in \mathcal{D}'_+$ (espace des distributions ayant leur support dans la demi-droite $t \geq 0$), alors $I \in \mathcal{D}'_+$.</u>

4° <u>L'opérateur est continu de $\mathcal{D}'_+$ dans $\mathcal{D}'_+$. Alors l'opérateur est de la forme $E \rightarrow I = A * E$, où A est une distribution de $\mathcal{D}'_+$.</u>

La démonstration en est donnée (aux questions de support près, mais elles sont évidentes), dans Théorie des Distributions, tome II, théorème X, p. 18, et p. 53.

On remarque simplement, comme plus haut, que si à δ_t correspond $A_t \in \mathcal{D}'_t$, alors

à $\delta_{t-\tau}$ correspond $A_{t-\tau}$, et à

$$\Sigma c_\nu \delta(t-\tau_\nu) \text{ correspond } \Sigma c_\nu A(t-\tau_\nu)$$

Autrement dit la formule $I = A * E$ est vraie si E est une combinaison linéaire finie $\Sigma c_\nu \delta(t-\tau_\nu)$; comme ces combinaisons sont denses dans $\mathcal{D}'_+$ et que l'opérateur est continu, elle est toujours vraie. La distribution A_t s'appellera <u>l'admittance</u> du système physique.

Supposons maintenant qu'on émette une excitation périodique $E(t) = e^{-2i\pi\omega t}$. Alors, bien que cette excitation ne soit pas nulle pour t négatif assez grand en valeur absolue, il se peut qu'il lui corresponde une seule réponse périodique de même fréquence, $a(\omega)\, e^{-2i\pi\omega t}$. On pourra admettre que, si $E(t)$ est une excitation assez régulière, développable en intégrale de Fourier: $E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\omega)\, e^{-2i\pi\omega t}\, d\omega$, il lui corresponde une réponse donnée par $I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\omega)\, a(\omega)\, e^{-2i\pi\omega t}\, d\omega$.

Mais si I a une transformée de Fourier, $i(\omega)$, on a aussi $I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\omega)\, e^{-2i\pi\omega t}\, d\omega$ d'où $i(\omega) = e(\omega)\, a(\omega)$.

Ce raisonnement est mathématiquement assez dénué de sens. Il pourra arriver que, pour certaines valeurs de ω, il n'y ait pas de réponse périodique d'amplitude finie (résonance, $a(\omega) = \infty$). Alors les intégrales n'auront qu'un sens très douteux. D'autre part, si à l'excitation périodique E correspond, parmi toutes les réponses possibles, une seule réponse de même fréquence, à une excitation E quelconque correspondent plusieurs réponses I (à cause des oscillations propres du circuit); il est difficile d'en choisir une meilleure que les autres et d'assurer qu'elle est égale à l'intégrale ci-dessus. Mieux vaut dire que la formule $I = A * E$ donne, si A, I, E, sont des distributions tempérées, et si elles sont images de Fourier $A_t = \mathcal{F} a_\omega$, $I_t = \mathcal{F} i_\omega$, $E_t = \mathcal{F} e_\omega$, par la formule de transformation de la convolution en multiplication: $i_\omega = a_\omega \, e_\omega$[1] si les conditions requises pour la transformation de la convolution en multiplication sont vérifiées. $I_t = A_t * E_t$ a toujours un sens, puisque ces distributions sont dans $\mathcal{D}'_+$, mais la formule de multiplication n'en a pas toujours.

Naturellement a_ω n'est pas arbitraire, puisque son image de Fourier A_t a son support dans la demi-droite $t \geqslant 0$.

§2. Problème: Soit a_ω une distribution tempérée.[2]

Examiner à quelle condition l'image de Fourier $A_t = \mathcal{F} a_\omega = \int \exp(-2i\pi\omega t) \, a_\omega \, d\omega$ a son support dans la demi-droite $t \geqslant 0$.

On connait une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi: il faut et il suffit que a_ω soit la limite (dans l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'_\omega$) $a_\omega = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} a(\omega + i\varepsilon)$, où $a(Z)$ est une fonction holomorphe pour $\mathcal{I} Z > 0$, majorée en module par une puissance de $|Z|$ pour $\mathcal{I} Z \geqslant \eta > 0$ quelconque[3].

Cette analyticité de $a(Z)$ permet d'obtenir une relation entre les parties réelle et imaginaire de a_ω (pour ω réel). Si l'on ne fait sur a_ω aucune restriction de décroissance à l'infini, cette relation ne permettra sûrement pas de calculer $\mathcal{I} a_\omega$ à partir de $\mathcal{R}a_\omega$; en effet, "a_ω = constante complexe $\alpha + i\beta$" a les propriétés demandées, quelles que soient les constantes réelles α et β, puisque $A_t = \mathcal{F} a_\omega = (\alpha + i\beta)\delta$; il ne doit donc pas être possible de calculer β à partir de α. Nous nous poserons donc le

<u>Problème</u> : <u>Moyennant quelle condition de décroissance à l'infini sur a_ω est-il possible d'exprimer que A_t a son support dans $t \geq 0$ par une relation entre $\mathcal{R}a_\omega$ et $\mathcal{I}a_\omega$, permettant de calculer chacune de ces quantités à partir de l'autre ?</u>

§3. <u>Convolution des distributions avec vp $\frac{1}{x}$</u>

<u>Définition</u>. <u>On appellera</u> $\sqrt{1+x^2}\,\mathcal{D}'_{L^1}$ <u>l'espace des distributions I telles que</u> $\frac{I}{\sqrt{1+x^2}} \in \mathcal{D}'_{L^1}$ [4]. <u>On dira que I converge vers 0 dans l'espace</u> $\sqrt{1+x^2}\,\mathcal{D}'_{L^1}$ <u>si</u> $\frac{I}{\sqrt{1+x^2}}$ <u>converge vers 0 dans $\mathcal{D}'_{L^1}$</u>

<u>Exemples</u>: Toute distribution à support borné appartient à $\sqrt{1+x^2}\,\mathcal{D}'_{L^1}$.

Toute fonction f telle que $\frac{f}{\sqrt{1+x^2}} \in L^1$ appartient à $\sqrt{1+x^2}\,\mathcal{D}'_{L^1}$; en particulier toute fonction continue f majorée, pour $|x| \longrightarrow \infty$, par $\frac{1}{|x|^k}$, $k > 0$, ou par $\left(\frac{1}{\log|x|}\right)^k$, pour $k > 1$.

La constante 1 n'appartient pas à $\sqrt{1+x^2}\,\mathcal{D}'_{L^1}$.

Si $I \in \sqrt{1+x^2}\,\mathcal{D}'_{L^1}$, il en est de même des dérivées de I, et la dérivation est une opération linéaire continue sur $\sqrt{1+x^2}\,\mathcal{D}'_{L^1}$.

Les espaces de distribution $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}'$, O'_c, $\mathcal{D}'_{L^p}$ pour $p < \infty$, sont dans $\sqrt{1+x^2}\,\mathcal{D}'_{L^1}$ et sont denses dans cet espace. $\sqrt{1+x^2}\,\mathcal{D}'_{L^1}$, est contenu dans $\mathcal{S}'$.

<u>Définition.</u> <u>La distribution tempérée.</u> $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$ <u>est définie par</u>

$$\langle \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\,,\ \varphi \rangle = \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\frac{dx}{x}\,,\quad \varphi \in \mathcal{S}\,. \tag{3,1}$$

<u>Proposition 2.</u> Si $T \in \sqrt{1+x^2}\,\mathcal{D}'_{L^1}$, l'expression

$$-\langle \frac{T}{\sqrt{1+x^2}}\,,\ \sqrt{1+x^2}\,(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} * \varphi)\rangle = -\langle \frac{T}{\sqrt{1+x^2}}\,,\psi\rangle \tag{3,2}$$

a un sens, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}$. <u>Elle définit une forme linéaire continue</u> de $\varphi \in \mathcal{S}$ donc une distribution tempérée, que nous appellerons $T * \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$. L'application $T \to T * \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$ est continue de $\sqrt{1+x^2}\,\mathcal{D}'_{L^1}$ dans $\mathcal{S}'$, et coincide avec la convolution avec $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$ si cette convolution existe pour les raisons habituelles ($T \in \mathcal{O}'_C$, $T \in \mathcal{D}'_{L^p}$, $p < \infty$).

D'abord $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} * \varphi$ est la fonction

$$\theta(x) = \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-\xi)\,\frac{d\xi}{\xi}$$

On a la majoration

$$\frac{1}{|\xi|} \leqslant \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}\,\sqrt{1+(x-\xi)^2} \quad \text{pour } |\xi| \geqslant 1. \text{ Donc}$$

$$\left|\int_{|\xi|\geqslant 1} \varphi(x-\xi)\,\frac{d\xi}{\xi}\right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}\int_{|\xi|\geqslant 1} |\varphi(x-\xi)|\,\sqrt{1+(x-\xi)^2}\,d\xi =$$

$$= \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}\int_R |\varphi(\xi)|\,\sqrt{1+\xi^2}\,d\xi \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{puisque } \varphi < \mathcal{S}\,.$$

Par ailleurs

$$\left| \mathrm{vp} \int_{|\xi| \leqslant 1} \varphi(x-\xi) \frac{d\xi}{\xi} \right| = \left| \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x-\xi) - \varphi(x)}{\xi} d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{Max}_{|\xi - x| \leqslant 1} |\varphi'(\xi)| \leqslant \frac{C_2}{\sqrt{1+x^2}} , \quad \text{puisque} \quad \varphi \in \mathcal{S} .$$

Finalement

$$|\theta(x)| \leqslant \frac{C_1 + C_2}{\sqrt{1+x^2}} ,$$

donc $\psi = \sqrt{1+x^2}\ \theta$ est une fonction bornée. Mais les dérivées successives de θ s'obtiennent par la même formule de convolution, dans laquelle φ est remplacée par ses dérivées; donc toutes les fonctions $\sqrt{1+x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^k \theta$ sont bornées, donc $\sqrt{1+x^2}\ \theta = \psi$ est bornée ainsi que chacune de ses dérivées:

$$\psi \in \mathcal{B}. \quad \text{Comme alors} \quad \frac{T}{\sqrt{1+x^2}} \in \mathcal{D}'_{L^1} ,$$

l'expression (3,2) a bien un sens [5]. D'autre part si φ converge vers 0 dans $\mathcal{S}$, (3,2) converge vers 0, parce que ψ converge vers 0 dans $\mathcal{B}$. Donc on définit bien par (3,2) une distribution S tempérée, telle que $\langle S, \varphi \rangle = (3,2)$. Il est normal de poser $S = T * \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$ car, dans les cas où ce produit de convolution a un sens pour les raisons habituelles, on a bien $\langle T * \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}, \varphi \rangle =$
$= \langle T, -\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} * \varphi \rangle = -\langle \frac{T}{\sqrt{1+x^2}}, \sqrt{1+x^2}\,(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} * \varphi) \rangle = \langle S, \varphi \rangle$

L'application $T \longrightarrow T * \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$ est continue de $\sqrt{1+x^2}\,\mathcal{D}'_{L^1}$, dans $\mathcal{S}'$; car si φ parcourt un ensemble borné dans $\mathcal{S}'$, ψ parcourt un ensemble borné dans $\mathcal{B}$; si alors T converge vers 0 dans $\sqrt{1+x^2}\mathcal{D}'_{L^1}$, $\frac{T}{\sqrt{1+x^2}}$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}'_{L^1}$, et pour que T appartienne à $\sqrt{1+x^2}\mathcal{D}'_{L^1}$, il faut et il suffit qu'elle puisse s'écrire $T = T_0 + xT_1$, $T_0 \in \mathcal{D}'_{L^1}$, $T_1 \in \mathcal{D}'_{L^1}$ (elle peut alors s'écrire $T = x\,S_1$, $S_1 \in \mathcal{D}'_{L^1}$). (3,2) converge vers 0..

<u>On peut considérer que</u> "$T \in \sqrt{1+x^2}\,\mathcal{D}'_{L^1}$" <u>est la condition la plus générale sous laquelle</u> $T * \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$ <u>puisse se définir; on dira donc aussi que</u> $\sqrt{1+x^2}\,\mathcal{D}'_{L^1}$ <u>est l'espace des distributions composables avec</u> $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$.

§4. <u>Multiplication des distributions par des fonctions à variation localement bornée</u>.

<u>Définition</u>. <u>On appellera $(\mathcal{E}^0)'$ l'espace des distributions qui sont somme de dérivées premières de fonctions continues</u>.

Comme une fonction continue est elle-même dérivée d'une fonction continue, il revient au même de dire que $(\mathcal{E}^0)'$ est l'espace des dérivées premières de fonctions continues.

<u>Exemple</u>. Toute fonction localement sommable est dans $(\mathcal{E}^0)'$; δ n'est pas dans $(\mathcal{E}^0)'$.

<u>Definition</u>. <u>Soit $T \in (\mathcal{E}^0)'$. Soit f une fonction à variation localement bornée, c. à d. telle que f' soit une mesure. On définit le produit Tf par</u>

$$Tf = g'f = (gf)' - gf' \qquad (4,1)$$

où g est l'une quelconque des primitives de T. Le produit Tf est une forme bilinéaire de T et f. Tf coincide avec le produit multiplicatif usuel quand celui-ci existe pour les raisons habituelles (T = fonction, localement sommable par exemple, où f = fonction continuement différentiable).

D'abord (4,1) a un sens. Car gf est le produit de deux fonctions, toutes deux localement bornées, donc il est une fonction localement bornée; alors $(gf)'$ est sa dérivée au sens des distributions; ensuite f' est une mesure et g une fonction continue, donc gf' a un sens. (4,1) est indépendant du choix de la primitive g de T; car une autre primitive s'écrit $g+C$, C = constante, alors $((g+C)f)' - (g+C)f' = (gf)' - gf'$.

La bilinéarité est évidente.

Si f est une fonction continuement différentiable, Tf est bien le produit multiplicatif usuel de $T \in \mathcal{D}'^1$ par $f \in \mathcal{E}^1$ [6]; on en déduit que Tf est bien le produit multiplicatif usuel pour T fonction localement sommable et f à variation localement bornée, par passage à la limite.

Proposition 3. Soit Y la fonction d'Heaviside (égale à 0 pour $x < 0$, à 1 pour $x > 0$), $\check{Y}$, sa symétrique par rapport à l'origine (égale à 1 pour $x < 0$, à 0 pour $x > 0$). Pour qu'une distribution $T \in (\mathcal{E}^0)'$ ait son support dans la demi-droite $x \geq 0$, il faut, il suffit que $\check{Y}T = 0$ ou que $T = YT$; dans ce cas, T est dérivée d'une fonction continue g, nulle pour $x \leq 0$.

Soit en effet $T \in (\mathcal{E}^0)'$ une distribution de support dans la demi-droite $x \geqslant 0$. Parmi ses primitives, il en existe une, g, de support dans $t \geqslant 0$: comme elle est continue, g (x) est nulle pour $x \leqslant 0$. On a alors $\check{Y}\, T = (\check{Y}\, g)' - \check{Y}'\, g = 0 + g(0)\ \delta = 0$. Alors $YT = (1-\check{Y})\ T = T$.

Réciproquement si $T \in (\mathcal{E}^{o})'$ vérifie l'une de ces deux conditions équivalentes, on a, dans l'ouvert $x < 0$, $T = 0$, puisque Y vaut 1 dans cet ouvert, donc T a son support dans $x \geqslant 0$.

§5. Images de Fourier de vp $\frac{1}{\omega}$, δ_{ω}^{-}, δ_{ω}^{+}.

Définition. $\delta_{\omega}^{+} = \frac{1}{2}\,\delta_{\omega} + \frac{1}{2i\pi}\ \mathrm{vp}\,\frac{1}{\omega}$

$$\delta_{\omega}^{-} = \frac{1}{2}\,\delta_{\omega} - \frac{1}{2i\pi}\ \mathrm{vp}\,\frac{1}{\omega} \quad \text{d'où} \tag{5,1}$$

$$\begin{aligned} \delta_{\omega}^{+} + \delta_{\omega}^{-} &= \delta_{\omega} \\ \delta_{\omega}^{+} - \delta_{\omega}^{-} &= \frac{1}{i\pi}\ \mathrm{vp}\,\frac{1}{\omega} \end{aligned} \tag{5,2}$$

Proposition 4. On a les formules suivantes:

$$\mathcal{F}\,\delta_{\omega}^{+} = \check{Y}_t \tag{5,3}$$

$$\mathcal{F}\,\delta_{\omega}^{-} = Y_t$$

$$\mathcal{F}\ \mathrm{vp}\,\frac{1}{\omega} = -\,i\pi\,\frac{t}{|t|} = -\,i\pi\,(Y_t - \check{Y}_t)$$

En effet, vp $\frac{1}{\omega}$ est la seule distribution <u>impaire</u> dont le produit par $-\,2i\pi\omega$ soit la constante $-2i\pi$, donc $\mathcal{F}$ vp $\frac{1}{\omega}$ est la seule distribution impaire dont la dérivée soit $-2i\pi\delta$, c'est donc $-i\pi\dfrac{t}{|t|}$. Comme $\mathcal{F}\,\delta_\omega = 1$, on en déduit $\mathcal{F}\,\delta^+_\omega$ et $\mathcal{F}\,\delta^-_\omega$.

<u>Remarque</u>. La formule de réciprocité de Fourier donne alors

$$\delta^+_\omega \equiv \bar{\mathcal{F}}\,\check{Y}_t = \int_{-\infty}^{0} e^{2i\pi t\omega}\,dt = \int_0^\infty e^{-2i\pi t\omega}\,dt \qquad (5,4)$$

$$\delta^-_\omega \equiv \bar{\mathcal{F}}\,Y_t = \int_0^\infty e^{2i\pi t\omega}\,dt.$$

§6. <u>Transformation de Fourier, convolution avec</u> δ^+_ω <u>et multiplication par</u> $\check{Y}_t$.

<u>Proposition 5.</u> Si $a_\omega \in \sqrt{1+\omega^2}\,\mathcal{D}'_{L^1}$, alors

$A_t = \mathcal{F} a_\omega \in (\mathcal{E}^0_t)'$. De plus, l'image de Fourier de $a_\omega * \delta^+_\omega$ est $A_t\,\check{Y}_t$.

Si en effet $a_\omega \in \sqrt{1+\omega^2}\,\mathcal{D}'_{L^1}$, on peut écrire

$$a_\omega = (1-2i\pi\omega)\,b_\omega\,,\ b_\omega \in \mathcal{D}'_{L^1}\,. \qquad (6,1)$$

Alors, si
$$A_t = \mathcal{F} a_\omega\,,\ B_t = \mathcal{F} b_\omega$$
$$A_t = B_t + B'_t$$

Mais l'image de Fourier B_t de $b_\omega \in \mathcal{D}'_{L^1}$ est une fonction continue [7] donc $A_t \in (\mathcal{E}^0_t)'$.

Ensuite a_ω est composable avec vp $\dfrac{1}{\omega}$ donc avec δ^+_ω (prop. 2), et A_t est multipliable par Y_t (définition de §4); donc les deux expressions $a_\omega * \delta^+_\omega$, $A_t\,\check{Y}_t$ ont un sens.

Soit maintenant $a_\omega^{(\nu)}$ une suite de distributions à support compact qui, pour $\nu \to \infty$, tend vers a_ω dans $\sqrt{1+\omega^2}\, \mathcal{D}_{L^1}$.

Les $b_\omega^{(\nu)} = \dfrac{a_\omega^{(\nu)}}{1-2i\pi\omega}$ tendent vers b_ω dans $\mathcal{D}'_{L^1}$. Alors les $B_t^{(\nu)} = \mathcal{F}\, b_\omega^{(\nu)}$ convergent vers B_t, uniformément sur tout intervalle fini de R.

Pour tout ν, on a (transformation de la convolution en multiplication, TD, tome II, Théorème XV, p. 124).

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(a_\omega^{\nu} * \delta_\omega^{+}) &= A_t^{(\nu)}\, \check{Y}_t \\ &= (B_t^{(\nu)} + B_t'^{(\nu)})\, \check{Y}_t \\ &= B_t^{(\nu)}\, Y_t + (B_t^{(\nu)}\, \check{Y}_t)' + B^{\nu}(0)\, \delta_t\ .\end{aligned}$$

Comme la convolution avec vp $\frac{1}{\omega}$ est continue de $\sqrt{1+\omega^2}\, \mathcal{D}'_{L^1}$ dans $\mathcal{S}'_\omega$ (prop. 2), $a_\omega^{(\nu)} * \delta_\omega^{+}$ converge pour $\nu \to \infty$ vers $a_\omega * \delta_\omega^{+}$ dans $\mathcal{S}'_\omega$, donc le premier membre de (6,3) converge vers $\mathcal{F}(a_\omega * \delta_\omega^{+})$ dans $\mathcal{S}'_t$.

Mais $B_t^{(\nu)}$ converge vers B_t uniformément sur tout intervalle fini, donc le deuxième membre de (6,3), converge dans $\mathcal{D}'_t$ vers

$$B_t\, \check{Y}_t + (B_t\, \check{Y}_t)' + B(0)\delta_t =$$

$= A_t\, \check{Y}_t$. On a donc bien $\mathcal{F}(a_\omega * \delta_\omega^{+}) = A_t\, \check{Y}_t$.

§7. Le théorème fondamental.

Ce théorème n'est qu'un corollaire trivial de la proposition 5:

Théorème. Soit a_ω une distribution composable avec $\mathrm{vp}\,\frac{1}{\omega}$. La condition nécessaire et suffisante pour que $A_t = \mathcal{F}\, a_\omega$ ait son support dans la demi-droite $t \geqslant 0$, est $a_\omega * \delta_\omega^+ = 0$ ou

$$a_\omega = -\frac{1}{i\pi}\, a_\omega * \mathrm{vp}\,\frac{1}{\omega} \quad \text{ou} \tag{7,1}$$

$$\mathcal{R}a_\omega = -\frac{1}{\pi}\,\mathcal{I}a_\omega * \mathrm{vp}\,\frac{1}{\omega} \;;\quad \mathcal{I}a_\omega = \frac{1}{\pi}\,\mathcal{R}a_\omega * \mathrm{vp}\,\frac{1}{\omega}$$

En effet $\mathcal{F}(a_\omega * \delta_\omega^+) = A_t\ \check{Y}(t)$ (prop. 5) et pour que A_t ait son support dans $t \geqslant 0$, il faut et il suffit que $A_t\,\check{Y}_t$ soit nul (prop. 3).

Commentaires. La condition, telle qu'elle est exprimée, suppose nécessairement que a_ω soit composable avec $\mathrm{vp}\,\frac{1}{\omega}$, donc nous n'avons fait sur a_ω aucune hypothèse superflue.

Par ailleurs, il y a d'autre cas, plus généraux que ceux pour lesquels a_ω est composable avec $\mathrm{vp}\,\frac{1}{\omega}$, où l'on peut quand même trouver une relation entre $\mathcal{R}a_\omega$ et $\mathcal{I}a_\omega$ permettant de calculer l'une à partir de l'autre (par exemple il suffit que a_ω converge vers 0 à l'infini, $a_\omega \in \mathcal{B}'_\omega$, voir TD, tome II, §8); mais il y en a "bien peu", puisque $a_\omega = \alpha + i\beta$, α et β constantes complexes, ne doit pas rentrer dans ces cas généraux.

* * *

1. TD, tome II, théorème XV, p. 124.

2. TD (théorie des distributions), tome II, chap. VII.

3. Nous ne le démontrerons pas ici. On pourra le voir en utilisant Schwartz: "Transformation de Laplace des distributions". Séminaire Math. Univ. Lund, tome dédié à Marcel Riesz, 1952, p. 196-206.

4. TD, tome II, chapitre VI, §8, pg. 55.
Nous écrivons $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pour avoir la même décroissance à l'infini que $\frac{1}{|x|}$ mais sans singularité à l'origine. On pourra prendre aussi $\frac{1}{x + \ell i \varepsilon}$, $\varepsilon \neq 0$.

5. $(S, \varkappa)$ a un sens pour $S \in \mathcal{D}'_{L^1}$, $\varkappa \in \mathcal{B}$: TD tome II, dualité entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}'_{L^1}$ p. 58.

6. TD, tome I, chapitre V, §1, formule (V, 1; 4).

7. TD, tome II, exemple 4, p. 112.

* * *