ISSN 0101-9201

CBPF - CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
Rio de Janeiro

Notas de Física CBPF-NF-012/11
July 2011

La relativeca tempo – II
O tempo relativista – II

F.M. Paiva & A.F.F. Teixeira

Ministério da
Ciência e Tecnologia

La relativeca tempo – II
O tempo relativista – II

F.M. Paiva

Departamento de Física, Unidade Humaitá II, Colégio Pedro II

Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

8–a de julio, 2011

Resumo

La relativeca teorio montris ke pluraj Newtonaj ideoj pri la spacotempo estas malperfektaj. Tie ĉi ni prezentas kelkajn relativecajn konceptojn iel rilatajn al tiuj ideoj: samtempecon de eventoj kaj sinkronon de horloĝoj (ambaŭ laŭ linio en la spaca reto), gravitan Doppleran efikon, kaj vojaĝon kun reveno al estinto.

A teoria da relatividade mostrou que várias ideias Newtonianas sobre o espaçotempo são imperfeitas. Nós apresentamos aqui alguns conceitos relativistas de algum modo relacionados àquelas ideias: simultaneidade de eventos e sincronismo de relógios (ambos ao longo de uma linha na frama espacial), efeito Doppler gravitacional, e viagem ao passado.

1 Enkonduko

Antaŭa artiklo [1] prezentis kelkajn fizikajn efikojn montrante ke la Newtona tempo malsimilas al la tempo de speciala relativeco (SR). Tie ni diskutis pri Dopplera efiko, ĝemel-paradokso, rotacio, rigida stango, kaj konstanta propra akcelo. Por tio ni koordenatigis la spacotempon per inercia referencosistemo. Tiu sistemo taŭgas por fiziko sen gravito. Tamen se gravito gravas, ni bezonas uzi koordinatsistemojn pli ĝeneralajn, kiel tiu ĉi artiklo priskribas.

Ni komence klarigas la koncepton de normhorloĝo, de propra intertempo, kaj de

1 Introdução

Um artigo anterior [1] apresentou alguns efeitos físicos mostrando que o tempo Newtoniano é diferente do tempo da relatividade especial (RE). Ali nós discorremos sobre efeito Doppler, paradoxo dos gêmeos, rotação, barra rígida, e aceleração própria constante. Para tanto, nós coordenatizamos o espaçotempo usando um sistema inercial de referência. Esse sistema é apropriado para física sem gravitação. Entretanto, se a gravitação for importante, nós precisamos usar sistemas de coordenadas mais gerais, como este artigo descreve.

Nós inicialmente clarificamos o conceito de relógio padrão, de intertempo próprio, e de se-

sekundo; kaj ni emfazas la konstantecon de lumrapido en vakuo, en iu ajn gravito.

Normhorloĝo estas kiel altkvalita brakhorloĝo [1, Sek.1]. Ĉiuj normhorloĝoj estas *similaj*, tio signifante ke du apudaj normhorloĝoj montras la saman kadencon de fluo de iliaj tempoj. Tamen komence apudaj kaj sinkronaj normhorloĝoj, se poste havante malsimilajn rapidon kaj graviton, estos probable nesinkronaj en okaza renkonto. En la renkonto, la du normhorloĝoj ankoraŭ montras la saman kadencon de fluo de iliaj tempoj.

Normhorloĝo montras la fluon de τ, sia *propratempo*. Konvena unueco de *propra intertempo* $\Delta\tau$ estas la *sekundo*, kiu pendas nek de la movado de normhorloĝo nek de ĝia pozicio en gravita kampo. Estas interkonsentita ke sekundo estas la intertempo de senerare 9.192.631.770 periodoj de specifita radiado el atomo de cezio. Vidu [2, paĝo 18] por detaloj.

Ankaŭ estas interkonsentita [2, paĝo 17] ke la rapido c de lumo en vakuo estas senerare 299.792.458 m/s. Konsekvence, *metro* estas moderne difinita kiel la distanco ke lumo trakuras en vakuo dum frakcio 1/299.792.458 de sekundo, senerare.

Tiu ĉi artiklo akordas Einstein [3], Landau-Lifshitz [4], Anderson [5], Synge [6], Misner-Thorne-Wheeler [7]. Tamen, malsamaj vidpunktoj ekzistas, kiel tiu de Tonkinson [8], ekzemple.

gundo; e enfatizamos a constância da velocidade da luz no vácuo, em qualquer gravitação.

Um *relógio padrão* é como um relógio de pulso de qualidade superior [1, Sect.1]. Todos os relógios padrão são *iguais*, significando que dois deles, colocados muito próximos, mostram a mesma cadência no fluir dos seus tempos. Entretanto, relógios padrão inicialmente vizinhos e síncronos, se posteriormente submetidos a diferentes velocidades e gravitações, estarão provavelmente não-síncronos em um ocasional reencontro. No reencontro, os dois relógios ainda mostram a mesma cadência no fluir dos seus tempos.

Um relógio padrão mostra o fluir de τ, seu *tempo próprio*. Um unidade conveniente de *intertempo próprio* $\Delta\tau$ é o *segundo*, que independe tanto do movimento do relógio padrão como da localização dele em um campo gravitacional. Está postulado que 1 segundo é a exata duração de 9.192.631.770 períodos de uma especificada radiação de um átomo de césio. Veja [2, pág. 18] para detalhes.

Está também postulado [2, pág. 17] que a velocidade c da luz no vácuo é exatamente 299.792.458 m/s . Como consequência, o *metro* está modernamente definido como a distância que a luz percorre no vácuo durante a exata fração 1/299.792.458 de 1 segundo.

Este artigo vai de acordo com Einstein [3], Landau-Lifshitz [4], Anderson [5], Synge [6], Misner-Thorne-Wheeler [7]. Entretanto, há diferentes outros pontos de vista, como por exemplo o de Tonkinson [8].

2 Koordinatoj

Pensu pri *finhava regiono* $\mathcal{R}^3$ de trispaco; kaverno, ekzemple, eble havante graviton. Tie ni etendas (formale) aron de dudimensiaj surfacoj, kiel grandaj kurtenoj, kaj ni orde etiketas ilin per reelaj nombroj x^1. Tiuj surfacoj ĝeneraligas la karteziajn ebenojn x = konst de Euklida geometrio. Simile kiel tiuj ebenoj, surfacoj x^1 = konst ne tuŝas unu la alian, kaj ilia aro pleni-

2 Coordenadas

Considere uma *região finita* $\mathcal{R}^3$ do triespaço; uma gruta, por exemplo, possivelmente com gravitação. Nela nós estendemos (formalmente) um conjunto de superfícies bidimensionais, como grandes cortinas, e as etiquetamos ordenadamente mediante números reais x^1. Essas superfícies generalizam os planos cartesianos x = const da geometria Euclideana. Tal como aqueles planos, as superfícies x^1 = const não tocam gas regionon $\mathcal{R}^3$. Sed malsimile al karteziaj ebenoj, tiuj ĉi koordinatsurfacoj *povas malformiĝi* laŭlonge la tempo.

Ni simile etendas (formale) aliajn du arojn de dudimensiaj surfacoj, kaj etiketas ilin per reelaj nombroj x^2 = konst kaj x^3 = konst. Tiuj ĉi surfacoj ĝeneraligas la karteziajn ebenojn y = konst kaj z = konst. Tiel, tridimensia *spaca reto* estas elektita por $\mathcal{R}^3$. Ĉiu punkto P de la reto rilatas neambigue al triopo $x^i = [x^1, x^2, x^3]$. Ĉar la reto povas malformiĝi laŭlonge la tempo, tial distanco inter punktoj de reto povas ankaŭ varii.

Poste, ni fiksas (formale) unu horloĝon $\mathcal{K}_P$ en ĉiu punkto P de la reto; ĝi estas la *koordinathorloĝo* de P, aŭ *loka horloĝo* de P. Ĉiu $\mathcal{K}_P$ montras valoron *ĉiam pliegantan* de nedimensia variablo t, la *tempa koordinato* en P. $\mathcal{K}_P$ ne estas normhorloĝo, ordinare. Intervalo Δt de loka tempa koordinato estas apenaŭ nombro, sen unueco de intertempo (sed legu [9]). Ĉiu $\mathcal{K}_P$ havas sian kadencon de fluo de sia tempo t, kaj du koordinathorloĝoj ordinare ne estas sinkronaj, eĉ se ili estas najbaraj. Plu, ordinare estas malkonstanta, la rilato inter la fluo de t em $\mathcal{K}_P$ kaj la fluo de τ en normhorloĝo fiksita ĉe P.

Zorgo estas konsilinda, kiam ni altempigas ĉiun $\mathcal{K}_P$ en spaca reto: *najbaraj* lokaj horloĝoj devas montri valorojn de t ankaŭ najbaraj. Atentu, ke vojaĝanto en spaca reto povas renkonti serion de t pliegantan, aŭ senŝanĝantan, aŭ eĉ plietantan; Figuro 1 ekzemplas tiun eblecon.

Einstein nomis *molusko*, la spacotempan koordinatsistemon konstruitan kiel tie ĉi [10]. Kaj nomiĝas *evento*, io okazanta en konata punkto de spaco kaj en konata momento. En elektita molusko, evento E estas specifita per kvaropo $[t, x^1, x^2, x^3]$, aŭ ekvivalente per kvaropo $x^\mu := [x^0, x^i]$, estante $x^0 := ct$. Se ni elektas alian moluskon, la sama evento E estos specifita per

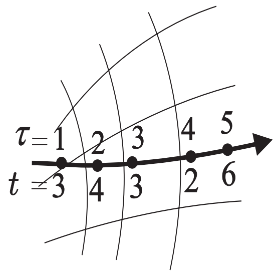
umas às outras, e seu conjunto preenche toda a região $\mathcal{R}^3$. Mas diferentemente daqueles planos, estas superfícies *podem se deformar* ao longo do tempo.

Nós igualmente estendemos (formalmente) outros dois conjuntos de superfícies bidimensionais, e os etiquetamos mediante números reais x^2 = const e x^3 = const. Estas superfícies generalizam os planos cartesianos y = const e z = const. Com isso, uma *rede espacial* tridimensional ficou escolhida para $\mathcal{R}^3$. Cada ponto P na rede corresponde sem ambiguidade a uma trinca $x^i = [x^1, x^2, x^3]$. Como a rede pode se deformar ao longo do tempo, a distância entre pontos da rede pode também variar.

Em seguida nós fixamos (formalmente) um relógio $\mathcal{K}_P$ em cada ponto P da rede; ele é o *relógio de coordenada* de P, ou *relógio local* de P. Um $\mathcal{K}_P$ mostra um valor *sempre crescente* de uma variável adimensional t, a *coordenada temporal* em P. Um $\mathcal{K}_P$ não é um relógio padrão, em geral. Um intervalo Δt de coordenada temporal local é apenas um número, desprovido de unidade (mas leia [9]). Cada $\mathcal{K}_P$ tem sua cadência de fluir de seu tempo t, e dois relógios de coordenada geralmente não estão síncronos, mesmo se forem vizinhos. Além disso, é geralmente variável, a razão entre o fluir de t em um $\mathcal{K}_P$ e o fluir de τ em um relógio padrão fixado em P.

Um cuidado é aconselhado, quando nós regulamos cada $\mathcal{K}_P$ na rede espacial: relógios locais *vizinhos* devem mostrar valores de t também vizinhos. Repare que um viajante na rede espacial pode encontrar série de t crescente, ou estacionário, ou mesmo decrescente; a Figura 1 exemplifica essa possibilidade.

Einstein chamou *molusco*, o sistema de coordenadas espaçotemporais construído como aqui [10]. E se chama *evento*, algo que aconteça em um conhecido ponto do espaço e em um momento conhecido. Em um molusco escolhido, um evento E é especificado por uma quádrupla $[t, x^1, x^2, x^3]$, ou equivalentemente pela quádrupla $x^\mu := [x^0, x^i]$, sendo $x^0 := ct$. Se escolhermos outro molusco, o mesmo evento E



Figuro 1: Normhorloĝo moviĝas en spaca reto. Ĝia propratempo ĉiam pligrandiĝas ($\tau = \ldots, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$), tamen la responda loka tempa koordinato ne ĉiam pligrandiĝas ($t = \ldots, 3, 4, 3, 2, 6, \ldots$).
Figura 1: Um relógio padrão se move na rede espacial. Seu tempo próprio sempre cresce ($\tau = \ldots, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$), embora a coordenada temporal local correspondente nem sempre cresça ($t = \ldots, 3, 4, 3, 2, 6, \ldots$).

alia kvaropo $x^{\mu'}$. Riskante negravan konfuzon kun t, ankaŭ x^0 estas nomita tempa koordinato de E.

Elekti moluskon, kiel ni ĵus faris, ne sufiĉas por priskribi kelkajn fizikajn variablojn. Ekzemple, priskribo de vektoro aŭ tensoro en evento E bezonas *vektoran bazon* en E. Ĉiu bazo taŭgas por specifi *komponojn* de vektoro aŭ tensoro. Konvenas ke bazoj en najbaraj eventoj malsimilu apenaŭ infinitezime. Tie ĉi ni uzos nur la plej bonkonatajn bazojn, la *koordinatbazojn*, kaj iliajn dualajn [11, paĝo 80]. Tiuj bazoj estas kreitaj ekde koordinatoj, sole. Tiel, ekde nun, la vorto molusko implicos uzadon de tiuj bazoj.

Indas sciiĝi ke ekzistas referencosistemoj kies koordinatoj ne estas videblaj kiel tiuj de molusko de Einstein: la nulaj koordinatoj, ekzemple. Tiuj anstataŭaj referencosistemoj simpligas kalkulojn en kelkaj specialaj fizikaj sistemoj, eĉ en speciala relativeco.

será especificado por outra quádrupla $x^{\mu'}$. Com desimportante risco de confusão com t, também x^0 é chamdo coordenada temporal de E.

Escolher um molusco, como acabamos de fazer, não basta para se descrever certas variáveis físicas. Por exemplo, a descrição de um vetor ou tensor em um evento E requer uma *base vetorial* em E. Uma base permite especificar as *componentes* do vetor ou tensor. Convém que bases de eventos vizinhos difiram apenas infinitesimamente. Nós aqui vamos usar unicamente as bases mais bem conhecidas, as *bases de coordenadas*, e suas duais [11, pág. 80]. Essas bases são criadas a partir das coordenadas, unicamente. Assim, a partir de agora, a palavra molusco implicará o uso dessas bases.

Convém saber que existem sistemas de referência cujas coordenadas não são como as de um molusco de Einstein: as coordenadas nulas, por exemplo. Esses sistemas de referência alternativos simplificam os cálculos em alguns sistemas físicos especiais, mesmo na relatividade especial.

3 Metriko

La spacaj koordinatoj de du punktoj en spaca reto informas se tiuj punktoj estas najbaraj (infinitezime), aŭ ne. Se tamen la punktoj ne estas najbaraj, tial la koordinatoj solaj ne informas la valoron de *finhava*

3 Métrica

As coordenadas espaciais de dois pontos em uma rede espacial informam se esses pontos são vizinhos (infinitesimamente), ou não. Se porém os pontos não forem vizinhos, as coordenadas sozinhas não informam o valor da separação *finita* distanco inter ili; t.e., koordinatoj ne povas diri ion kiel 'punkto A distancas $1m$ de punkto B'. Simile, tempaj koordinatoj de du samlokaj eventoj (tiuj kun samaj spacaj koordinatoj) informas se la eventoj estas tempe najbaraj, aŭ ne. Sed se samlokaj eventoj ne estas najbaraj, la koordinatoj ne informas la *finhavan* intertempon de procezo, ion kiel 'la procezo daŭras $1s$'. Tiaj informoj bezonas uzi *metrikon*.

Matematike, metrika kampo g estas tensora, simetria, de ordo 2. Se molusko estas elektita, la komponoj de g en evento E estas skribitaj $g_{\nu\rho}(E)$. Metriko oferas, krom alioj, la *linielementon* ds inter *najbaraj eventoj*. Tiel, estu $x^\mu = [ct, x^i\,]$ la koordinatoj de evento E, kie t estas montrata per loka horloĝo $\mathcal{K}_P$ de x^i; kaj estu $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu = [c(t+\mathrm{d}t), x^i + \mathrm{d}x^i\,]$ la koordinatoj de alia evento $E + \mathrm{d}E$, najbara al E, estante $t + \mathrm{d}t$ montrata per loka horloĝo $\mathcal{K}_{P+\mathrm{d}P}$ de $x^i + \mathrm{d}x^i$. La linielemento ds rilatantan tiujn eventojn obeas [12]

entre eles; isto é, as coordenadas não podem dizer algo como 'o ponto A está $1m$ afastado do ponto B'. Igualmente, as coordenadas temporais de dois eventos colocais (aqueles com mesmas coordenadas espaciais) informam se os eventos são temporalmente vizinhos, ou não. Mas se os eventos colocais não forem vizinhos, as coordenadas não informam o intertempo *finito* de um processo, algo como 'o processo dura $1s$'. Essas informações precisam usar uma *métrica*.

Matematicamente, o campo métrico g é tensorial, simétrico, de ordem 2. Se um molusco foi escolhido, as componentes de g no evento E são escritas $g_{\nu\rho}(E)$. A métrica g propicia, além de outras coisas, o *elemento de linha* ds entre *eventos vizinhos*. Assim, sejam $x^\mu = [ct, x^i\,]$ as coordenadas de um evento E, onde t é mostrado pelo relógio local $\mathcal{K}_P$ de x^i; e sejam $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu = [c(t+\mathrm{d}t), x^i + \mathrm{d}x^i\,]$ as coordenadas de outro evento $E+\mathrm{d}E$, vizinho a E, sendo $t+\mathrm{d}t$ mostrado pelo relógio local $\mathcal{K}_{P+\mathrm{d}P}$ de $x^i + \mathrm{d}x^i$. O elemento de linha ds que relaciona esses eventos obedece [12]

$$\mathrm{d}s := \sqrt{\epsilon\, g_{\mu\nu}(E)\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu}\,, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3\,, \quad \epsilon = \pm 1\,; \tag{1}$$

la signumo ϵ en (1) estas elektata sama al de $g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$, en ĉiu paro de eventoj.

Nek E nek $E + \mathrm{d}E$ estas kvarvektoroj. Sed dE estas infinitezima kvarvektoro, kun komponoj $\mathrm{d}x^\mu = [c\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}x^i]$. Ĝi estas de tempa tipo, aŭ nula tipo, aŭ spaca tipo, se $g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu > 0$, aŭ $= 0$, aŭ < 0, respektive.

Se dE estas de tempa tipo, tiuokaze

o sinal ϵ na (1) é escolhido igual ao de $g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$, em cada par de eventos.

Nem E nem $E + \mathrm{d}E$ são quadrivetores. Mas dE é um vetor infinitesimal, com componentes $\mathrm{d}x^\mu = [c\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}x^i]$. Ele é do tipo tempo, ou do tipo nulo, ou do tipo espaço, conforme seja $g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu > 0$, ou $= 0$, ou < 0, respectivamente.

Se dE for do tipo tempo, então

$$\mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}\tau\,, \quad \epsilon = +1, \tag{2}$$

kie $\mathrm{d}\tau > 0$ estas propra intertempo mezurita per normhorloĝo iranta de iu evento al alia. Intervaloj de tempa tipo okazas en movado de materia korpo, kiu vojaĝas kun rapido plieta ol c.

Ekv. (2) ebligas havigi komponojn $g_{\nu\rho}$ en evento $x^\mu := [c\,t, x^i]$, per eksperimenta metodo. En tiu metodo, nur proprajn intertempojn estas mezuritaj. Ni ĵetas 10

onde $\mathrm{d}\tau > 0$ é o intertempo próprio medido por um relógio padrão que vá de um evento ao outro. Intervalos do tipo tempo ocorrem no movimento de um corpo material, que viaja com velocidade menor que c.

A (2) permite obter-se as componentes $g_{\nu\rho}$ em um evento $x^\mu := [c\,t, x^i]$, por método empírico. Nesse método, somente intertempos próprios são medidos. Nós atiramos 10 relógios padrão a normhorloĝojn ekde punkto x^i, en loka momento t, en iuj ajn direktoj kaj kun iuj ajn rapidoj. Kiam la propratempo de ĉiu horloĝo h pliegiĝas de valoro $\Delta_h\tau$ sufiĉe malgranda, ni alnotas la tri spacajn koordinatojn $x^i+\Delta_h x^i$ de ĝia loko, kaj la montron $t+\Delta_h t$ de loka horloĝo. Simile kiel (1) kaj (2), ni skribas la 10 ekvaciojn

partir do ponto x^i, no momento local t, em direções quaisquer e com velocidades quaisquer. Quando o tempo próprio de cada relógio h tenha avançado um valor $\Delta_h\tau$ suficientemente pequeno, nós anotamos as três coordenadas espaciais $x^i+\Delta_h x^i$ do lugar onde ele está, e a leitura $t+\Delta_h t$ do relógio local. Como em (1) e (2), nós escrevemos as 10 equações

$$c^2(\Delta_h\tau)^2 = g_{\nu\rho}\Delta_h x^\nu \Delta_h x^\rho\,, \qquad h = 1, 2, ..., 10\,, \tag{3}$$

kaj solvas tiun sistemon de ne-homogenaj linearaj ekvacioj por la 10 koeficientoj $g_{\nu\rho}$ en evento x^μ.

Fakte, kompono g_{00} estas sciebla pli facile, en punkto x^i kaj en loka momento t. En tiu momento ni fiksas normhorloĝon apud la loka horloĝo de x^i. Uzante (1) kaj (2) kun $\mathrm{d}x^i = 0$, ni vidas ke la rilato inter la fluo de tempo de la du horloĝoj pendas nur de koeficiento g_{00} de metriko:

e resolvemos esse sistema de equações lineares inomogêneas para os 10 coeficientes $g_{\nu\rho}$ no evento x^μ.

Em verdade, a componente g_{00} pode ser conhecida mais facilmente, em um ponto x^i e num momento local t. Nesse momento nós fixamos um relógio padrão junto ao relógio local de x^i. Usando (1) e (2) com $\mathrm{d}x^i = 0$, vemos que a relação entre os andamentos dos dois relógios depende somente do coeficiente g_{00} da métrica:

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{g_{00}(t, x^i)}\,\mathrm{d}t\,, \qquad x^i = \mathrm{konst}\,; \tag{4}$$

mezurante $\mathrm{d}\tau$ kaj $\mathrm{d}t$, oni havas $g_{00}(t, x^i)$.

Se $\mathrm{d}E$ estas de spaca tipo, tial neniu korpo aŭ lumradiado povas esti en ambaŭ eventoj E kaj $E+\mathrm{d}E$; tiuokaze oni difinas *propran distancon* inter la eventoj,

medindo $\mathrm{d}\tau$ e $\mathrm{d}t$, tem-se $g_{00}(t, x^i)$.

Se $\mathrm{d}E$ for do tipo espaço, então nenhum corpo ou raio de luz pode estar em ambos eventos E e $E+\mathrm{d}E$; neste caso define-se a *distância própria* entre os eventos

$$\mathrm{d}\lambda := \mathrm{d}s\,, \quad \epsilon = -1\,; \tag{5}$$

ĝi ne pendas de molusko.

Fine, se $\mathrm{d}E$ estas de nula tipo, tial $\mathrm{d}s = 0$, kaj do ambaŭ propra intertempo $\mathrm{d}\tau$ kaj propra distanco $\mathrm{d}\lambda$ estas nulaj. Intervalo de nula tipo okazas en movado kun rapido c, kiel tiu de lumo. En laboratorio, la matematika ($\mathrm{d}s = 0$) kaj eksperimenta praktikeco de lumo estas konvene profitita [13] por malkovri la koeficientojn $g_{\mu\nu}$ en elektita molusko.

ela não depende do molusco.

Finalmente, se $\mathrm{d}E$ for do tipo nulo, então $\mathrm{d}s = 0$, e portanto ambos intertempo próprio $\mathrm{d}\tau$ e distância própria $\mathrm{d}\lambda$ são nulos. Intervalo do tipo nulo ocorre no movimento com velocidade c, como o da luz. Num laboratório, a praticidade matemática ($\mathrm{d}s = 0$) e experimental da luz é convenientemente aproveitada [13] para se descobrir os coeficientes $g_{\mu\nu}$ no molusco escolhido.

4 dL kaj dT

La speciala kaj la ĝenerala relativeco konsideras kvardimensian spacotempon.

4 dL e dT

A relatividade especial e a geral pressupõem um espaçotempo quadridimensional. Entretan-

Tamen, nia homeco kutimigis nin percepti malkune la tempon kaj la spacon, en pli ordinaraj fenomenoj. Tio stimulas nin serĉi relativecajn kvantojn rilatante (tiel bone kiel estas ebla) al Newtonaj distanco kaj intertempo.

Propra distanco kaj propra intertempo ne estas la serĉataj kvantoj, ĉar $\mathrm{d}\lambda$ estas difinita nur se $\mathrm{d}E$ estas de spaca tipo, kaj $\mathrm{d}\tau$ estas difinita nur se $\mathrm{d}E$ estas de tempa tipo. Ni anticipas ke la serĉataj kvantoj estos trovitaj en speciala inercia molusko.

Komence ni difinu distancon $\mathrm{d}L$ inter *punktoj* P kaj $P + \mathrm{d}P$, najbaraj en spaca reto, en elektita momento. Ni procedas simile kiel en speciala relativeco. Ni eligas lumsignalon el punkto $P = x^i$, en loka momento t. Tiu signalo atingas punkton $P + \mathrm{d}P = x^i + \mathrm{d}x^i$ en loka momento $t + \mathrm{d}_1 t$, kie $\mathrm{d}_1 t$ (kio estas $>$, $<$, aŭ $= 0$) estas solvo de $\mathrm{d}s = 0$:

to, nossa condição humana nos habituou a perceber separadamente o tempo e o espaço, nos fenômenos mais comuns. Isso nos estimula a buscar quantidades relativistas que correspondam (tão bem quanto possível) à distância e intertempo Newtonianos.

Distância própria e intertempo próprio não são as quantidades em busca, porque $\mathrm{d}\lambda$ é definido somente se $\mathrm{d}E$ for do tipo espaço, e $\mathrm{d}\tau$ é definido somente se $\mathrm{d}E$ for do tipo tempo. Nós antecipamos que as quantidades em busca serão encontradas em um especial molusco inercial.

De começo vamos definir distância $\mathrm{d}L$ entre *pontos* P e $P + \mathrm{d}P$, vizinhos na *rede espacial*, em um momento escolhido. Nós procedemos como na relatividade especial. Nós emitimos um sinal luminoso do ponto $P = x^i$, no momento local t. Esse sinal atinge o ponto $P + \mathrm{d}P = x^i + \mathrm{d}x^i$ no momento local $t + \mathrm{d}_1 t$, onde $\mathrm{d}_1 t$ (que é ou positivo, ou negativo, ou nulo) é solução de $\mathrm{d}s = 0$:

$$g_{00}(c\,\mathrm{d}_1 t)^2 + 2g_{0i}(c\,\mathrm{d}_1 t)\mathrm{d}x^i + g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = 0\,, \tag{6}$$

do | portanto

$$\mathrm{d}_1 t = \frac{1}{c\sqrt{g_{00}}}\left(-h_i\mathrm{d}x^i + \epsilon_1\sqrt{h_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}\right)\,, \tag{7}$$

kie | onde

$$\epsilon_1 := \pm 1\,,\quad h_i(x^\mu) := \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}\;,\quad h_{ij}(x^\mu) := \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}\,. \tag{8}$$

La signalo reflektas de $P + \mathrm{d}P$ en loka momento $(t + \mathrm{d}_1 t)$, kaj revenas al P en loka momento $(t + \mathrm{d}_1 t) + \mathrm{d}_2 t$, kie $\mathrm{d}_2 t$ (kio ankaŭ estas $>$, $<$, aŭ $= 0$) ankaŭ estas solvo de $\mathrm{d}s = 0$:

O sinal reflete de $P + \mathrm{d}P$ no momento local $(t + \mathrm{d}_1 t)$, e retorna a P no momento local $(t + \mathrm{d}_1 t) + \mathrm{d}_2 t$, onde $\mathrm{d}_2 t$ (que também é positivo, ou negativo, ou nulo) é também solução de $\mathrm{d}s = 0$:

$$g_{00}(c\,\mathrm{d}_2 t)^2 - 2g_{0i}(c\,\mathrm{d}_2 t)\mathrm{d}x^i + g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = 0\,, \tag{9}$$

do | portanto

$$\mathrm{d}_2 t = \frac{1}{c\sqrt{g_{00}}}\left(+h_i\mathrm{d}x^i + \epsilon_2\sqrt{h_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}\right),\quad \epsilon_2 := \pm 1\,. \tag{10}$$

Inter la eligo de la signalo kaj la reveno, la montro de $\mathcal{K}_P$ pligrandiĝas de

Entre a emissão do sinal e o retorno, a marcação de $\mathcal{K}_P$ aumenta

$$\mathrm{d}_1t + \mathrm{d}_2t = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{c\sqrt{g_{00}}}\sqrt{h_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}\,; \tag{11}$$

certe $\mathrm{d}_1t + \mathrm{d}_2t > 0$, tial nur valoroj $\epsilon_1 = +1$ kaj $\epsilon_2 = +1$ validas en (11). Do, la propra intertempo $\mathrm{d}\tau$ pasita en P, inter eligo de signalo kaj reveno, rilatas al (4) kaj (11) kiel

certamente $\mathrm{d}_1t + \mathrm{d}_2t > 0$, portanto somente os valores $\epsilon_1 = +1$ e $\epsilon_2 = +1$ são válidos na (11). Assim, o intertempo próprio $\mathrm{d}\tau$ transcorrido em P, entre a partida do sinal e o retorno, se relaciona a (4) e (11) como

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{g_{00}}\,(\mathrm{d}_1t + \mathrm{d}_2t) = \frac{2}{c}\sqrt{h_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}\,. \tag{12}$$

Ni difinas $\mathrm{d}L := c\,\mathrm{d}\tau/2$, t.e., la duono de spaco trakurita per lumsignalo, kun rapido c, dum tiu propra intertempo. Uzante (12) ni fine ricevas $\mathrm{d}L := \sqrt{h_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}$.

Resume, la *distanco* inter du punktoj najbaraj en la reto estas

Nós definimos $\mathrm{d}L := c\,\mathrm{d}\tau/2$, ou seja, a metade do espaço percorrido pelo sinal luminoso, com velocidade c, durante esse intertempo próprio. Usando (12) temos finalmente $\mathrm{d}L := \sqrt{h_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}$.

Em resumo, a *distância* entre dois pontos vizinhos na rede é

$$\mathrm{d}L := \sqrt{\left(\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}\right)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}\,. \tag{13}$$

Ĉar la metrikaj koeficientoj ordinare varias kun t, tial ankaŭ la distancoj $\mathrm{d}L$ ordinare varias kun t. Kaj tiel kiel en Euklida geometrio, $\mathrm{d}L$ neniam estas negativa; kaj ĝi estas nula se nur la tri spacaj komponoj $\mathrm{d}x^i$ estas nulaj, t.e., se la punktoj P kaj $P + \mathrm{d}P$ koincidas.

Ekv. (13) difinas ankaŭ *distancon inter najbaraj eventoj*, en elektita molusko. Atentu ke $\mathrm{d}L$ ne pendas de diferenco $\mathrm{d}t$ inter la tempaj koordinatoj de eventoj. Tamen $\mathrm{d}L$ povas varii per ŝanĝo de molusko. Tiu fakto estas jam konita en speciala relativeco, per nomoj plivastiĝo (aŭ malplivastiĝo) de Lorentz.

Ni povas ricevi (13) per alia maniero [5, paĝo 348]: en evento E ni konstruas vektoron

Como os coeficientes métricos geralmente variam com t, também as distâncias $\mathrm{d}L$ geralmente variam com t. E tal como na geometria Euclideana, $\mathrm{d}L$ nunca é negativa; e ela é nula somente se as três componentes espaciais $\mathrm{d}x^i$ forem nulas, ou seja, se os pontos P e $P + \mathrm{d}P$ coincidirem.

A equação (13) define também *distância entre eventos vizinhos*, no molusco escolhido. Repare que $\mathrm{d}L$ não depende da diferença $\mathrm{d}t$ entre as coordenadas temporais dos eventos. Entretanto $\mathrm{d}L$ pode variar por mudança de molusco. Esse fato já é conhecido na relatividade especial, pelos nomes dilatação (ou contração) de Lorentz.

Podemos obter (13) por outra maneira [5, pág. 348]: em um evento E nós construímos o vetor

$$\tau^\mu := \delta^\mu_0/\sqrt{g_{00}}\,, \quad \tau_\mu = g_{0\mu}/\sqrt{g_{00}}\,; \tag{14}$$

ĝi estas de tempa tipo kaj unara ($\tau^\mu\tau_\mu = 1$), kaj celas estonton ($\tau^0 > 0$). Ni disigu

ele é do tipo tempo e unitário ($\tau^\mu\tau_\mu = 1$), e aponta para o futuro ($\tau^0 > 0$). Vamos decompor vektoron $\mathrm{d}x^\mu$ ĉe E per kompono $c\,\mathrm{d}T$ en direkto τ^μ, kaj kompono $\mathrm{d}L^\mu$ en hiperebeno orta al τ^μ:

um vetor $\mathrm{d}x^\mu$ locado em E em componente $c\,\mathrm{d}T$ na direção τ^μ, e componente $\mathrm{d}L^\mu$ no hiperplano normal a τ^μ:

$$\mathrm{d}x^\mu = c\,\mathrm{d}T\,\tau^\mu + \mathrm{d}L^\mu\,, \quad \tau_\mu \mathrm{d}L^\mu = 0\,; \tag{15}$$

tial $c\,\mathrm{d}T = \tau_\mu \mathrm{d}x^\mu$, kaj konsekvence

então $c\,\mathrm{d}T = \tau_\mu \mathrm{d}x^\mu$, e consequentemente

$$\mathrm{d}L^\mu = \mathrm{d}x^\mu - \tau^\mu \tau_\nu \mathrm{d}x^\nu = (\delta^\mu_\nu - \tau^\mu \tau_\nu)\mathrm{d}x^\nu\,. \tag{16}$$

Tiu $\mathrm{d}L^\mu$ estas kvarvektoro de spaca tipo, kies normo $g_{\mu\nu}\mathrm{d}L^\mu \mathrm{d}L^\nu$ estas $-(\mathrm{d}L)^2$. T.e.,

Esse $\mathrm{d}L^\mu$ é um quadrivetor do tipo espaço, cuja norma $g_{\mu\nu}\mathrm{d}L^\mu \mathrm{d}L^\nu$ é $-(\mathrm{d}L)^2$. Ou seja,

$$(\mathrm{d}L)^2 = (g_{0\mu} g_{0\nu}/g_{00} - g_{\mu\nu})\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu\,; \tag{17}$$

ĉar nur $\mu = i$ kaj $\nu = j$ kontribuas al (17), tial ni rericevis (13).

Nun ni esploru $c\,\mathrm{d}T := \tau_\mu \mathrm{d}x^\mu$, t.e.,

como somente $\mu = i$ e $\nu = j$ contribuem para (17), nós reobtivemos (13).

Vamos agora explorar $c\,\mathrm{d}T := \tau_\mu \mathrm{d}x^\mu$, isto é,

$$\mathrm{d}T := \frac{g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu}{c\sqrt{g_{00}}}\,. \tag{18}$$

Ni diras ke $\mathrm{d}T$ estas *intertempo* de evento x^μ al evento $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$, en elektita molusko. Ĉar τ^μ celas estonton, tial $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu$ pozitiva ($\mathrm{d}T > 0$) implicas ke evento $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$ estas tempe *posta* al evento x^μ, en tiu molusko. Klare, $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu$ negativa implicas la malon. Kaj ni diras ke du najbaraj eventoj estas *samtempaj* se $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu$ estas nula ($\mathrm{d}T = 0$), en tiu molusko.

Atentu ke signumo de $\mathrm{d}t$ ne estas decidiga, en tiuj difinoj. Fakte, evento $E + \mathrm{d}E$, supozita tempe posta al evento E, povas havi $\mathrm{d}t > 0$ aŭ $\mathrm{d}t = 0$ aŭ $\mathrm{d}t < 0$. Tio estas jam sugestita en Figuro 1. Ĉar $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu \equiv \mathrm{d}x_0$, samtempeco estas pli kompakte esprimebla per $\mathrm{d}x_0 = 0$.

Atentu ankaŭ en (18) ke la intertempo $\mathrm{d}T$ pendas de spacaj komponoj $\mathrm{d}x^i$, sed ne pendas de nure spacaj metrikaj koeficientoj g_{ij}. Malsimile al propra intertempo $\mathrm{d}\tau$, kiu estas difinita nur se $\mathrm{d}x^\mu$ estas de tempa tipo, la intertempo $\mathrm{d}T$ estas difinita por $\mathrm{d}x^\mu$ de ia ajn tipo.

Simile kiel $\mathrm{d}L$, ankaŭ $\mathrm{d}T$ pendas de molusko. Atentu ankoraŭ ke

Dizemos que $\mathrm{d}T$ é o *intertempo* de um evento x^μ para um evento $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$, no molusco escolhido. Como τ^μ aponta para o futuro, então $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu$ positivo ($\mathrm{d}T > 0$) implica o evento $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$ ser temporalmente *posterior* ao evento x^μ, nesse molusco. É claro que $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu$ negativo implica o contrário. E dizemos que dois eventos vizinhos são *simultâneos* se $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu$ for nulo ($\mathrm{d}T = 0$), nesse molusco.

Repare que o sinal de $\mathrm{d}t$ não é decisório, nessas definições. Com efeito, um evento $E + \mathrm{d}E$, suposto posterior a um evento E, pode ter tanto $\mathrm{d}t > 0$ como $\mathrm{d}t = 0$ ou $\mathrm{d}t < 0$. Isso já foi sugerido na Figura 1. Como $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu \equiv \mathrm{d}x_0$, então a simultaneidade pode ser expressa mais compactamente por $\mathrm{d}x_0 = 0$.

Repare ainda na (18) que o intertempo $\mathrm{d}T$ depende das componentes espaciais $\mathrm{d}x^i$, porém não depende dos coeficientes métricos somente espaciais g_{ij}. Diferentemente do intertempo próprio $\mathrm{d}\tau$, que é definido somente se $\mathrm{d}x^\mu$ for do tipo tempo, o intertempo $\mathrm{d}T$ é definido para $\mathrm{d}x^\mu$ de qualquer tipo.

Semelhantemente a $\mathrm{d}L$, também $\mathrm{d}T$ depende do molusco. Repare ainda que

$$\epsilon(\mathrm{d}s)^2 = (c\,\mathrm{d}T)^2 - (\mathrm{d}L)^2\,. \tag{19}$$

Do, kvankam $\mathrm{d}T$ kaj $\mathrm{d}L$ pendas de molusko, ilia speciala kombino (19) ne pendas. La simileco de (19) kun analoga ekvacio en speciala relativeco ne estas akcidenta. Fakte, $\mathrm{d}T$ kaj $\mathrm{d}L$ estas intertempo kaj distanco inter najbaraj eventoj, mezuritaj en inercia referencosistemo fiksita en x^μ .

Se $\mathrm{d}x^\mu$ estas de *tempa tipo*, tial estas moluskoj kie la distanco $\mathrm{d}L'$ inter la eventoj estas nula (samlokaj eventoj); tial la propra intertempo $\mathrm{d}\tau$ estas la modulo de intertempo $\mathrm{d}T\,'$ mezurita en iu ajn el tiuj moluskoj. Sed se $\mathrm{d}x^\mu$ estas de *spaca tipo*, tial estas moluskoj kie la intertempo $\mathrm{d}T\,'$ estas nula (samtempaj eventoj); tial la propra distanco $\mathrm{d}\lambda$ estas la distanco $\mathrm{d}L'$ mezurita en iu ajn el tiuj moluskoj. Fine, se $\mathrm{d}x^\mu$ estas de *nula tipo*, tial $\mathrm{d}\tau$ kaj $\mathrm{d}\lambda$ estas nulaj. Sed $\mathrm{d}T$ kaj $\mathrm{d}L$ estas ne-nulaj, plue ili havas saman modulon ($|c\mathrm{d}T| = \mathrm{d}L$) , kies valoro pendas de molusko.

Assim, embora $\mathrm{d}T$ e $\mathrm{d}L$ dependam do molusco, a especial combinação deles (19) não depende. A semelhança da (19) com equação análoga na relatividade especial não é acidental. Na verdade, $\mathrm{d}T$ e $\mathrm{d}L$ são intertempo e distância entre eventos vizinhos, medidos em um sistema inercial de referência fixado em x^μ .

Se um intervalo $\mathrm{d}x^\mu$ for do *tipo tempo*, então existem moluscos nos quais a distância $\mathrm{d}L'$ entre os eventos é nula (eventos colocais); então o intertempo próprio $\mathrm{d}\tau$ é o módulo do intertempo $\mathrm{d}T\,'$ medido em algum desses moluscos. Porém se $\mathrm{d}x^\mu$ for do *tipo espaço*, então existem moluscos nos quais o intertempo $\mathrm{d}T\,'$ é nulo (eventos simultâneos); então a distância própria $\mathrm{d}\lambda$ é a distância $\mathrm{d}L'$ medida em algum desses moluscos. Finalmente, se $\mathrm{d}x^\mu$ for do *tipo nulo*, então o intertempo próprio $\mathrm{d}\tau$ e a distância própria $\mathrm{d}\lambda$ são nulos. Mas o intertempo $\mathrm{d}T$ e a distância $\mathrm{d}L$ não são nulos, ademais eles têm mesmo módulo ($|c\mathrm{d}T| = \mathrm{d}L$) , cujo valor depende do molusco.

5 Kelkaj rimarkoj

En difino (13), atentu ke *ĉiuj* 10 koeficientoj $g_{\mu\nu}$ kontribuas al $\mathrm{d}L$; kaj ĉar tiuj koeficientoj ordinare varias laŭ la tempo, la distanco $\mathrm{d}L$ inter punktoj najbaraj en la reto ankaŭ ordinare varias, tial la reto ordinare malformiĝas laŭ la tempo. Atentu ankaŭ ke ĉar $(g_{0i}\mathrm{d}x^i)(g_{0j}\mathrm{d}x^j) \geq 0$, tial la miksitaj komponoj g_{0i} de metriko, se ne-nulaj, ĉiam pligrandigas distancojn $\mathrm{d}L$.

Ĉar $h_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ en (12) estas ne-negativa por iuj ajn $\mathrm{d}x^i$, koeficientoj h_{ij} difinitaj en (8) obeas la $3+3+1 =\ 7$ neegalecojn [4, paĝo 236]

5 Algumas notas

Na definição (13), repare que *todos* os 10 coeficientes $g_{\mu\nu}$ da métrica contribuem para $\mathrm{d}L$; e como esses coeficientes geralmente variam com o tempo, a distância $\mathrm{d}L$ entre pontos vizinhos na rede também geralmente varia, daí a rede espacial geralmente se deforma ao longo do tempo. Repare também que como $(g_{0i}\mathrm{d}x^i)(g_{0j}\mathrm{d}x^j) \geq 0$, então as componentes mistas g_{0i} da métrica, se não-nulas, sempre aumentam as distâncias $\mathrm{d}L$.

Como $h_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ na (12) é não-negativo para quaisquer $\mathrm{d}x^i$, os coeficientes h_{ij} definidos na (8) cumprem as $3+3+1 =\ 7$ desigualdades [4, pág. 236]

$$h_{ii} > 0\,, \quad h_{ii}h_{jj} > (h_{ij})^2\,, \quad \det(h_{ij}) > 0\,. \tag{20}$$

Tiuj neegalecoj faras ke $\mathrm{d}L$ estu nula nur se la tri komponoj $\mathrm{d}x^i$ estas nulaj. Kaj uzante

Essas desigualdades fazem $\mathrm{d}L$ nulo somente se as três componentes $\mathrm{d}x^i$ forem nulas. E usando

h_{ij} de (8), kaj (20), ni vidas ke koeficientoj $g_{\mu\nu}$ obeas la $1+3+3+1=8$ neegalecojn

os h_{ij} da (8), e as (20), vemos que os coeficientes $g_{\mu\nu}$ cumprem as $1+3+3+1=8$ desigualdades

$$g_{00}>0\,,\quad g_{00}g_{ii}<(g_{0i})^2\,,$$
$$g_{00}(g_{ii}g_{jj}-g_{ij}^2)-g_{0i}(g_{0i}g_{jj}-g_{ij}g_{0j})-g_{0j}(g_{0j}g_{ii}-g_{0i}g_{ij})>0\,,\quad \det(g_{\mu\nu})<0\,. \tag{21}$$

Pro arbitra ŝanĝo de molusko, kvantoj h_{ij} , $g_{\mu\nu}$, kaj $\mathrm{d}x^\mu$ ordinare varias, en eventoj E kaj $E+\mathrm{d}E$. Ni povas demandi se la specialaj kombinoj (13) kaj (18) de tiuj kvantoj lasas ke $\mathrm{d}L$ kaj $\mathrm{d}T$ estu nevariantaj. Tiel kiel en speciala relativeco, respondo estas *ne*, ordinare.

Tamen, estas *specialaj* ŝanĝoj de molusko $[t,x^i]\to[t',x^{i'}]$ kiuj lasas ne-ŝanĝantaj *ĉiun* infiniteziman distancon $\mathrm{d}L$ kaj *ĉiun* infiniteziman intertempon $\mathrm{d}T$. En tiuj ŝanĝoj de molusko, spaciaj koordinatoj transformiĝas kiel $x^i\to x^{i'}(x^j)$. T.e., la ŝanĝo de iu spaca reto al la alia ne pendas de tempo. La responda tempa transformo povas esti ĝenerala, $t\to t'(t,x^i)$. Atentu ke la Lorentzaj transformoj por la spaca reto, uzataj en speciala relativeco, pendas de t ; ekzemple, $x\to x'=\gamma(x-vt/c)$. Bonkonate, tiuj transformoj malplivastigas la spacan reton.

Ni vidis ke $\mathrm{d}L:=\sqrt{h_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}$ estas distanco inter punktoj najbaraj en spaca reto de elektita molusko. Se punktoj ne estas najbaraj, la finia distanco inter ili estas difinita per integralo de $\mathrm{d}L$ laŭ la geodezio unuiganta ilin, uzante h_{ij} kiel tridimensia metriko. Ĉar tiuj koeficientoj ordinare varias laŭ la tempo, ankaŭ la distanco ordinare varias.

Por mudança arbitrária de molusco, as quantidades h_{ij} , $g_{\mu\nu}$, e $\mathrm{d}x^\mu$ geralmente variam, nos eventos E e $E+\mathrm{d}E$. Podemos perguntar se as especiais combinações (13) e (18) dessas quantidades deixam $\mathrm{d}L$ e $\mathrm{d}T$ invariantes. Tal como na relatividade especial, a resposta é *não*, em geral.

Entretanto, existem *especiais* mudanças de molusco $[t,x^i]\to[t',x^{i'}]$ que deixam inalterados *toda* distância infinitesimal $\mathrm{d}L$ e *todo* intertempo infinitesimal $\mathrm{d}T$. Nessas mudanças de molusco, as coordenadas espaciais se transformam como $x^i\to x^{i'}(x^j)$. Ou seja, a mudança de uma rede espacial para a outra não depende do tempo. A correspondente transformação temporal pode ser geral, $t\to t'(t,x^i)$. Repare que as transformações de Lorentz para a rede espacial, usadas na relatividade especial, dependem de t ; por exemplo, $x\to x'=\gamma(x-vt/c)$. Como é bem sabido, essas transformações contraem a rede espacial.

Nós vimos que $\mathrm{d}L:=\sqrt{h_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}$ é a distância entre pontos vizinhos na rede espacial do molusco escolhido. Se os pontos não forem vizinhos, a distância finita entre eles é definida como a integral de $\mathrm{d}L$ ao longo da geodésica que os une, usando-se h_{ij} como métrica tridimensional. Como esses coeficientes geralmente variam com o tempo, também as separações geralmente variam.

6 Rapido

Estu du najbaraj eventoj, kun koordinatoj x^μ kaj $x^\mu+\mathrm{d}x^\mu$ en iu molusko. Uzante $\mathrm{d}L$ kaj $\mathrm{d}T$, ni difinas *rapidon* rilatan al kvarvektoro $\mathrm{d}x^\mu$ per

6 Velocidade

Sejam dois eventos vizinhos, com coordenadas x^μ e $x^\mu+\mathrm{d}x^\mu$ em algum molusco. Usando $\mathrm{d}L$ e $\mathrm{d}T$, nós definimos uma *velocidade* associada ao vetor $\mathrm{d}x^\mu$ mediante

$$v:=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}T}\,. \tag{22}$$

Klare, v pendas de molusko. Ĉar $\mathrm{d}L$ estas pozitiva, kaj $\mathrm{d}T$ povas esti aŭ pozitiva, aŭ nula, aŭ negativa, tial rapido (22) povas havi iun ajn valoron, $-\infty \leq v \leq \infty$. Okazas $v > 0$ se $\mathrm{d}T > 0$, t.e. se evento $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$ estas tempe posta evento x^μ (tial $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu > 0$), kaj okazas $v < 0$ se kontraŭe (tial $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu < 0$). Kaj okazas $|v| = \infty$ se la eventoj estas samtempaj ($\mathrm{d}T = 0$).

Se $c\,\mathrm{d}T > \mathrm{d}L$, tial $0 < v < c$, indikante ke objekto povas ekiri de punkto x^i de spaca reto en loka momento t kaj atingi punkton $x^i + \mathrm{d}x^i$ en loka momento $t + \mathrm{d}t$. Kaj se $c|\mathrm{d}T| > \mathrm{d}L$ sed $\mathrm{d}T < 0$, tial $-c < v < 0$, indikante ke objekto povas iri ekde $x^i + \mathrm{d}x^i$ en loka momento $t + \mathrm{d}t$ kaj atingi punkton x^i en loka momento t. En ambaŭ okazoj $\mathrm{d}t$ povas havi iun ajn signumon. Plue, (2), (19) kaj (22) oferas je

É claro que v depende do molusco. Como $\mathrm{d}L$ é sempre positivo, e $\mathrm{d}T$ pode ser ou positivo, ou nulo, ou negativo, então a velocidade (22) pode ter qualquer valor, $-\infty \leq v \leq \infty$. Ocorre $v > 0$ se $\mathrm{d}T > 0$, ou seja, se o evento $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$ for posterior ao evento x^μ (então $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu > 0$), e ocorre $v < 0$ no caso contrário (então $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu < 0$). E ocorre $|v| = \infty$ se os eventos forem simultâneos ($\mathrm{d}T = 0$).

Se $c\,\mathrm{d}T > \mathrm{d}L$, então $0 < v < c$, indicando que um objeto pode partir do ponto x^i da rede espacial no momento local t e atingir o ponto $x^i + \mathrm{d}x^i$ no momento local $t + \mathrm{d}t$. E se $c|\mathrm{d}T| > \mathrm{d}L$ mas $\mathrm{d}T < 0$, então $-c < v < 0$, indicando que o objeto pode partir de $x^i + \mathrm{d}x^i$ no momento local $t + \mathrm{d}t$ e atingir o ponto x^i no momento local t. Em ambos casos $\mathrm{d}t$ pode ter qualquer sinal. Ademais, (2) e (19) e (22) dão

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,|\mathrm{d}T\,|, \tag{23}$$

estante v la rapido de objekto en tiu molusko.

Se $c|\mathrm{d}T| = \mathrm{d}L$, tial $\mathrm{d}s = 0$, do lumsignalo povas konekti eventojn x^μ kaj $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$. Laŭ (22), la rapido de signalo havas modulon c. La signalo iras de x^i al $x^i + \mathrm{d}x^i$ se $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu > 0$, kaj en la mala direkto se $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu < 0$.

Fine, se $c|\mathrm{d}T| < \mathrm{d}L$ tial (22) indikas ke $|v| > c$: neniu objekto kaj neniu lumsignalo povas konekti la eventojn. Speciale, se $\mathrm{d}T = 0$ kun $\mathrm{d}L \neq 0$, tial (22) indikas $|v| = \infty$.

sendo v a velocidade do objeto nesse molusco.

Se $c|\mathrm{d}T| = \mathrm{d}L$, então $\mathrm{d}s = 0$, portanto um sinal luminoso pode conectar os eventos x^μ e $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$. Segundo a (22), a velocidade do sinal tem módulo c. O sinal vai de x^i para $x^i + \mathrm{d}x^i$ se $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu > 0$, e no sentido contrário se $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu < 0$.

Finalmente, se $c|\mathrm{d}T| < \mathrm{d}L$ então a (22) indica $|v| > c$: nenhum objeto e nenhum sinal luminoso pode conectar os eventos. Em particular, se $\mathrm{d}T = 0$ com $\mathrm{d}L \neq 0$, então a (22) indica $|v| = \infty$.

7 En kurbo

Kurbo en spacotempo estas rompebla je pecoj. Peco esta nomita *de tempa tipo* (aŭ de nula tipo, aŭ de spaca tipo) se ĉiu infinitezima intervalo de tiu peco estas de tempa tipo (aŭ nula, aŭ spaca, respektive). Peco de tempa aŭ nula tipo estas direktebla laŭ plieganta T, kaj tiu direkto ne varias per ŝanĝo de molusko. Ankaŭ peco

7 Em uma curva

Uma *curva no espaçotempo* pode ser partida em pedaços. Um pedaço é dito do tipo tempo (ou do tipo nulo, ou do tipo espaço) se todo intervalo infinitesimal desse pedaço for do tipo tempo (ou nulo, ou espaço, respectivamente). Um pedaço do tipo tempo ou nulo pode ser orientado segundo T crescente, e essa orientação não varia sob mudança de molusco. Também um pedaço de spaca tipo estas tiel direktebla, sed direkto povas varii per ŝanĝo de molusko.

Estu du eventoj E_1 kaj E_2, finie apartitaj. En Newtona mekaniko, la tempa apartigo inter ili estas simple $t_2 - t_1$, kaj la spaca apartigo estas simple $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$. En speciala relativeco la temo estas pli subtila, ĉar ambaŭ apartigoj pendas de la inercia referencosistemo ke oni uzas. Kaj en molusko de Einstein la temo estas ankoraŭ pli subtila.

Finia apartigo estas sumigo de infinitezimaj apartigoj. Ni jam difinis du malsamajn infinitezimajn tempajn apartigojn: propran intertempon $\mathrm{d}\tau$ kaj intertempon $\mathrm{d}T$. Kaj ni difinis ankaŭ du malsamajn infinitezimajn spacajn apartigojn: propran distancon $\mathrm{d}\lambda$ kaj distancon $\mathrm{d}L$. Do ni havas 4 malsimilajn finiajn apartigojn por konsideri. Tiuj apartigoj estos difinataj laŭ iu elektita kurbo en spacotempo. Atentu ke estas nefinia nombro de kurboj de spaca tipo kunigante du iujn ajn eventojn. Sed eble ne ekzistas kurbon de nula tipo, aŭ de tempa tipo, por fari tion.

Se kurbo de tempa tipo komencas en evento E_1 kaj finiĝas en evento E_2, tial la integraĵo

do tipo espaço pode ser assim orientado, mas a orientação pode variar sob mudança de molusco.

Sejam dois eventos E_1 e E_2, finitamente separados. Na mecânica Newtoniana a separação temporal entre eles é simplesmente $t_2 - t_1$, e a separação espacial é simplesmente $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$. Na relatividade especial a questão é mais sutil, porque ambas separações dependem do referencial inercial que se use. E em um molusco de Einstein a questão é ainda mais sutil, como veremos.

Separação finita é soma de separações infinitesimais. Nós já definimos duas separações temporais infinitesimais distintas: o intertempo próprio $\mathrm{d}\tau$ e o intertempo $\mathrm{d}T$. E definimos também duas separações espaciais infinitesimais distintas: distância própria $\mathrm{d}\lambda$ e distância $\mathrm{d}L$. Então nós temos 4 separações finitas distintas, para tratar. Essas separações são definidas ao longo de curvas escolhidas no espaçotempo. Repare que há infinitas curvas do tipo espaço para unir dois quaisquer eventos. Porém pode não haver curva do tipo nulo, nem do tipo tempo, que o faça.

Se uma curva do tipo tempo começa no evento E_1 e termina no evento E_2, então a integral

$$\Delta\tau = \int_{E_1}^{E_2} \mathrm{d}\tau\,, \tag{24}$$

kalkulita laŭ la kurbo, estas la propra intertempo inter la eventoj, laŭ tiu kurbo. Klare $\Delta\tau$ ne varias per ŝanĝo de molusko. Se alia kurbo de tempa tipo estas elektita inter tiuj eventoj, la nova propra intertempo havos malsaman valoron, ordinare. Ekzisto de kurbo de tempa tipo kunigante du eventoj implicas ekzisto de nefinia nombro de kurboj de nula tipo, kaj de spaca tipo, kunigante tiujn eventojn.

Se kurbo de spaca tipo estas elektita por kunigi E_1 kun E_2, tial la integraĵo

calculada ao longo da curva, é o intertempo próprio entre os eventos, nessa curva. É claro que $\Delta\tau$ não varia por mudança de molusco. Se outra curva do tipo tempo for escolhida entre aqueles eventos, o novo intertempo próprio terá outro valor, em geral. A existência de uma curva do tipo tempo ligando dois eventos implica a existência de uma infinidade de curvas do tipo nulo, e uma infinidade do tipo espaço, ligando aqueles eventos.

Se uma curva do tipo espaço é escolhida para unir E_1 com E_2, então a integral

$$\Delta\lambda = \int_{E_1}^{E_2} \mathrm{d}\lambda\,, \tag{25}$$

kalkulita laŭ la kurbo, estas la propralongo de kurbo inter la eventoj, laŭ tiu kurbo. Klare, $\Delta\lambda$ ne varias per ŝanĝo de molusko. Se alia kurbo de spaca tipo estas elektita inter tiuj eventoj, la propralongo de nova kurbo havos alian valoron, ordinare.

Kompletante, ni difinas intertempon ΔT kaj distancon ΔL, inter du eventoj en elektita kurbo. Ambaŭ pendas de molusko. Por ia ajn kurbo kunigante E_1 kun E_2, ili estas difinitaj per

calculada ao longo da curva, é o comprimento próprio da curva entre os eventos, ao longo daquela curva. É claro que $\Delta\lambda$ não varia por mudança de molusco. Se outra curva do tipo espaço for escolhida entre aqueles eventos, o comprimento próprio da nova curva terá outro valor, em geral.

Para completar, definimos o intertempo ΔT e a distância ΔL, entre dois eventos escolhidos em uma curva. Ambos dependem do molusco. Para uma curva qualquer ligando E_1 com E_2, eles são definidas por

$$\Delta T = \int_{E_1}^{E_2} \mathrm{d}T\,, \qquad \Delta L = \int_{E_1}^{E_2} \mathrm{d}L\,, \tag{26}$$

kie la integro estas farita laŭ la kurbo [14]. Speciala kurbo por integro de ambaŭ (26a) kaj (26b) estas *spacotempa geodezio* entenanta E_1 kaj E_2. Tiu geodezio povas havi ian tipon. Por integro de (26b), alia speciala kurbo estas geodezio entenanta punktojn P_1 kaj P_2, kalkulita kun metrikaj koeficientoj h_{ij} skribitaj en (8c).

Estas moluskoj kies intertempoj ΔT estas haveblaj sen bezoni integri (26a). Ekzemple, molusko kies kvar funkcioj $g_{0\mu}/\sqrt{g_{00}}$ estas komponoj de kvargradiento de iu funkcio, kiu ni nomas $cT(x^\nu)$. Tial (18) diras ke la intertempo ΔT de evento E_1 al evento E_2 valoras $T(E_2) - T(E_1)$ por ia ajn kurbo, en tiu molusko.

Oni povas montri [4, paĝo 237] ke iu ajn finia peco de spacotempo permesas moluskojn kun $g_{00} = 1$ kaj $g_{0i} = 0$. En tiuj moluskoj, (18) simpliĝas al $\mathrm{d}T = \mathrm{d}t$, do iu intertempo ΔT koincidas kun Δt.

onde a integração é feita ao longo da curva [14]. Uma curva especial para a integração de ambas (26a) e (26b) é uma *geodésica espaçotemporal* que contenha E_1 e E_2. Tal geodésica ter qualquer tipo. Para a integração de (26b), uma outra curva especial é uma geodésica que contenha os pontos P_1 e P_2, calculada com os coeficientes métricos h_{ij} escritos na (8c).

Há moluscos em que os intertempos ΔT podem ser obtidos sem precisar integrar (26a). Por exemplo, um molusco em que as quatro funções $g_{0\mu}/\sqrt{g_{00}}$ sejam componentes do quadrigradiente de alguma função, que chamamos $cT(x^\nu)$. Então a (18) diz que o intertempo ΔT do evento E_1 para o evento E_2 vale $T(E_2) - T(E_1)$ para qualquer qualquer curva, nesse molusco.

Pode-se mostrar [4, pág. 237] que qualquer porção finita de espaçotempo admite moluscos com $g_{00} = 1$ e $g_{0i} = 0$. Nesses moluscos a (18) se simplifica para $\mathrm{d}T = \mathrm{d}t$, portanto todo intertempo ΔT coincide com Δt.

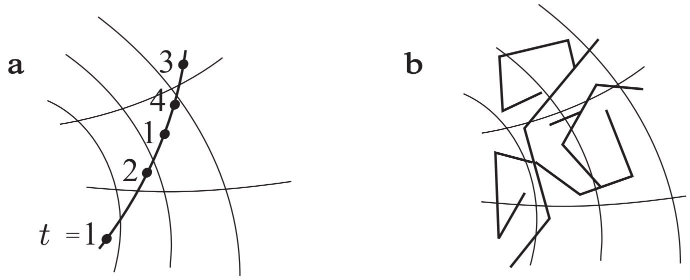
8 Samtempaj eventoj

Sekcio 4 difinis samtempajn *najbarajn* eventojn en elektita molusko; ili havas nulan intertempon $\mathrm{d}T$, t.e., ili havas [4, paĝo 237]

8 Eventos simultâneos

A seção 4 definiu eventos *vizinhos* simultâneos em um dado molusco: eles têm intertempo $\mathrm{d}T$ nulo, ou seja, eles têm [4, pág. 237]

$$c\,\mathrm{d}t = -\frac{g_{0i}(x^\mu)\,\mathrm{d}x^i}{g_{00}(x^\mu)}\,, \tag{27}$$



Figuro 2: **a**: En malfermita linio en spaca reto, ni elektas *eventojn samtempajn laŭ linio*; valoro de loka tempa koordinato t de eventoj varias laŭ la linio, ordinare. **b**: Arbo en spaca reto, kun iom ajn da branĉoj, sed sen fermita spaca cirkvito; en tiu arbo ni povas elekti eventojn samtempajn laŭ linio.
Figura 2: **a**: Em uma linha aberta na rede espacial, nós selecionamos *eventos simultâneos por linha*; o valor da coordenada temporal local t dos eventos varia al longo da linha, geralmente. **b**: Uma árvore na rede espacial, com qualquer quantidade de ramos, mas sem circuito espacial fechado; nessa árvore nós podemos selecionar eventos simultâneos por linha.

estante x^μ kaj $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$ koordinatoj de eventoj en molusko. Kaj ni vidis ke ŝanĝo de molusko ordinare malfaras fruajn samtempecojn, sed kreas novajn.

Nun ni difinas samtempecon de eventoj *finie* apartitaj en spaca reto de molusko. Por tio, ni kreas novan koncepton, tiun de *samtempeco laŭ linio* en spaca reto [4, paĝo 237]. Ni elektas iun ajn *linion* $\mathcal{L}$ sen memcruciĝo en spaca reto, kaj elektas iun ajn eventon E en tiu linio. Tial ni povas trovi, ekde evento E kaj en ambaŭ direktoj de linio $\mathcal{L}$, sinsekvajn samtempajn najbarajn eventojn ($\mathrm{d}T = 0$) en $\mathcal{L}$. Kvankam samtempaj najbaraj eventoj havas valorojn de loka tempo t tre similaj, eventoj en punktoj sufiĉe apartitaj en $\mathcal{L}$ povas havi valorojn de t *tre malsimilaj.* Tamen ni diras ke tiuj eventoj estas *samtempaj laŭ* $\mathcal{L}$. Vidu Figuron 2a. Tiu koncepto validas ankaŭ por *arbo de samtempecoj* en spaca reto de molusko, kiel en Figuro 2b.

Atentu ke du eventoj, samtempaj laŭ linio $\mathcal{L}_a$ en elektita molusko, ne estas samtempaj laŭ alia linio $\mathcal{L}_b$, ordinare. Tio ordinare malpermesas ekziston de *fermita* linio en spaca reto, kie ĉiu paro de najbaraj eventoj estas samtempaj. Konsekvence ne

sendo x^μ e $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$ as coordenadas dos eventos no molusco. E nós vimos que uma mudança de molusco geralmente desfaz simultaneidades anteriores, mas cria novas.

Agora nós definimos simultaneidade de eventos *finitamente* separados na rede espacial de um molusco. Para isso, nós criamos um novo conceito, aquele de *simultaneidade por linha* na rede espacial [4, pág. 237]. Escolhemos uma qualquer *linha* $\mathcal{L}$ sem auto-interseção na rede espacial, e escolhemos um qualquer evento E nessa linha. Então podemos encontrar sequencialmente, a partir do evento E e em ambos os sentidos da linha $\mathcal{L}$, eventos vizinhos simultâneos ($\mathrm{d}T = 0$) sobre $\mathcal{L}$. Embora eventos vizinhos simultâneos tenham valores de tempo t local muito semelhantes, os eventos em pontos suficientemente separados sobre $\mathcal{L}$ podem ter t com valores *muito diferentes.* Mesmo assim, vamos dizer que todos aqueles eventos são *simultâneos por* $\mathcal{L}$. Veja a Figura 2a. Esse conceito pode ser estendido para uma *árvore de simultaneidades* na rede espacial do molusco, como na Figura 2b.

Repare que dois eventos, simultâneos por uma linha $\mathcal{L}_a$ de um dado molusco, não são simultâneos por outra linha $\mathcal{L}_b$, em geral. Isto impede a existência, em geral, de linha *fechada* na rede espacial, em que todo par de eventos vizinhos na linha seria simultâneo. Consequenteekzistas, ordinare, eventoj finie apartitaj en spaca reto, estante samtempaj laŭ iu ajn linio. Vidu Figuron 3.

Bonkonate, ĉiu finia peco de spacotempo permesas moluskojn tiel ke ĉiuj eventoj estas samtempaj laŭ iu ajn linio [4, paĝo 286]. Tial ni diras ke tiuj eventoj estas *samtempaj* (sen indiki linion) en tiu molusko. Ekzemple, en molusko kun $g_{0i}=0$ ĉiuj eventoj kun sama valoro de t estas samtempaj, laŭ (27).

Aliaj moluskoj oferantaj (tutan, por emfazo) samtempecon havas la tri kvocientojn g_{0i}/g_{00} ne pendantaj de t, kaj plue estantaj komponoj de trigradiento de funkcio, kiun ni nomas $-ct(x^j)$. Tio estas,

mente não existem, em geral, eventos finitamente separados na rede espacial, simultâneos por qualquer caminho. Veja a Figura 3.

Como é bem conhecido, toda porção finita de espaçotempo admite moluscos com pares de eventos simultâneos por qualquer caminho [4, pág.286]. Dizemos então que esses eventos são *simultâneos* (sem indicar caminho) nesse molusco. Por exemplo, em um molusco com $g_{0i}=0$ todos os eventos com mesmo valor de t são simultâneos, segundo a (27).

Outros moluscos com simultaneidade (global, por ênfase) têm os três cocientes g_{0i}/g_{00} não dependentes de t, e ademais sendo componentes do trigradiente de uma função, que chamamos $-ct(x^j)$. Isto é,

$$\frac{g_{0i}\,(t,x^j)}{g_{00}\,(t,x^j)}=-c\frac{\partial t(x^j)}{\partial x^i}\,. \tag{28}$$

Tial, kondiĉo por samtempeco (27) simpliĝas al $\mathrm{d}t=\mathrm{d}t(x^j)$, kies solvo estas $t-t_0=t(x^j)-t(x_0^j)$. Per vortoj, se oni elektas eventon $E_0:=[t_0,x_0^j]$, tial funkcio $t(x^j)$ indikas valoron de t en evento $[t,x^j]$, kiu estas samtempa al evento E_0 laŭ iu ajn linio en spaca reto. Ni ĉiam povas konstrui tiel molusko, en finia peco de spacotempo.

Ni scias ke du najbaraj eventoj generas ĝuste unu geodezion. Se tiuj eventoj estas samtempaj ($\mathrm{d}T=0$) en iu molusko, tial la geodezio estas de spaca tipo. Kaj la rapido (22) rilata al eventoj estas nefinia en tiu molusko. Ni difinas *geodezio de samtempecoj*, geodezion de spaca tipo kie ĉiuj najbaraj eventoj estas samtempaj, en tiu molusko [15, 17]. Malsimile al aliaj geodezioj, ĉi tia ne estas direktebla per plieganta T. En Newtona interpreto, ĝi prezentas movadon de hipoteza objekto sentiva al gravito, sed vojaĝanta kun nefinia rapido.

Então a condição para simultaneidade (27) se reduz a $\mathrm{d}t=\mathrm{d}t(x^j)$, cuja solução é $t-t_0=t(x^j)-t(x_0^j)$. Em palavras, se se escolhe um evento $E_0:=[t_0,x_0^j]$, então a função $t(x^j)$ indica o valor de t no evento $[t,x^j]$, que é simultâneo ao evento E_0 por qualquer linha na rede espacial. Nós sempre podemos construir um tal molusco, em uma porção finita do espaçotempo.

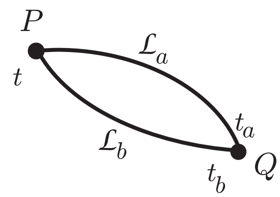
Sabemos que dois eventos vizinhos geram uma única geodésica. Se esses eventos forem simultâneos ($\mathrm{d}T=0$) em algum molusco, então a geodésica é do tipo espaço. E a velocidade (22) relacionada aos eventos é infinita nesse molusco. Nós definimos como *geodésica de simultaneidades* aquela geodésica do tipo espaço em que todos os eventos vizinhos são simultâneos, nesse molusco [15, 17]. Diferentemente das outras geodésicas, ela não pode ser orientada mediante T crescente. Numa interpretação Newtoniana, ela representa o movimento de um hipotético objeto sensível à gravitação, mas que viaja com velocidade infinita.

9 Sinkronaj horloĝoj

Kutime ni diras ke du horloĝoj estas sinkro-

9 Relógios síncronos

Comumente dizemos que dois relógios estão



Figuro 3: P kaj Q estas punktoj de spaca reto, kunigitaj per linioj $\mathcal{L}_a$ kaj $\mathcal{L}_b$ en la reto. Supozu ke evento $[t_a, Q]$ estas samtempa al $[t, P]$ laŭ linio $\mathcal{L}_a$. Ankaŭ supozu ke alia evento $[t_b, Q]$ estas samtempa al $[t, P]$, sed laŭ linio $\mathcal{L}_b$. Ordinare $t_b \neq t_a$, tial unuigo $\mathcal{L}_a \cup \mathcal{L}_b$ ordinare ne estas fermita linio de samtempaj eventoj.
Figura 3: P e Q são pontos da rede espacial, ligados pelas linhas $\mathcal{L}_a$ e $\mathcal{L}_b$ na rede. Suponha que o evento $[t_a, Q]$ seja simultâneo ao $[t, P]$ pela linha $\mathcal{L}_a$. Suponha que também o evento $[t_b, Q]$ seja simultâneo ao $[t, P]$, mas pela linha $\mathcal{L}_b$. Em geral $t_b \neq t_a$, então a união $\mathcal{L}_a \cup \mathcal{L}_b$ não é em geral uma linha fechada de eventos simultâneos.

naj se ili 'montras la saman horon'. En Newtona mekaniko kaj en speciala relativeco la koordinathorloĝoj estas ĉiam sinkronaj, ĉar ili estas tiel elektitaj. Sed se ni uzas spacotempajn koordinatojn pli ĝeneralaj, ni bezonas esti pli precizaj por difini sinkronon.

Por *najbaraj* koordinathorloĝoj, bona difino estas: en elektita molusko, horloĝoj de ${x_0}^i$ kaj ${x_0}^i + \mathrm{d}x^i$ estas *sinkronaj en momento* t_0 se iliaj montroj t_0 estas *samtempaj* ($\mathrm{d}T = 0$); t.e., se eventoj $[\,t_0, {x_0}^i]$ kaj $[\,t_0, {x_0}^i + \mathrm{d}x^i]$ estas semtempaj en tiu molusko. Tial, kondiĉo (27) por samtempeco de najbaraj eventoj, kune kun $\mathrm{d}t = 0$, oferas la *kondiĉon por sinkrono* de najbaraj koordinathorloĝoj en momento t_0 :

síncronos quando eles 'estão marcando a mesma hora'. Na mecânica Newtoniana e na relatividade especial os relógios de coordenada estão sempre síncronos, porque assim são escolhidos. Mas se nós usarmos coordenadas espaçotemporais mais gerais, nós teremos que ser ser mais precisos para definir sincronia.

Para relógios de coordenadas *vizinhos*, uma boa definição é: em um molusco escolhido, os relógios de ${x_0}^i$ e ${x_0}^i + \mathrm{d}x^i$ estão *síncronos no momento* t_0 se suas marcações t_0 forem *simultâneas* ($\mathrm{d}T = 0$); isto é, se os eventos $[\,t_0, {x_0}^i]$ e $[\,t_0, {x_0}^i + \mathrm{d}x^i]$ forem simultâneos nesse molusco. Então a condição (27) para simultaneidade de eventos vizinhos, e ademais $\mathrm{d}t = 0$, dão a *condição para sincronia* de relógios de coordenada vizinhos no momento t_0 :

$$g_{0i}(t_0, {x_0}^i)\,\mathrm{d}x^i = 0. \tag{29}$$

Atentu ke sinkrono ordinare estas momenta, ĉar g_{0i} ordinare varias laŭ la tempo.

Por koordinathorloĝoj *finie apartitaj* en spaca reto de molusko, oni proponas *sinkronon laŭ linio.* Tial, estu evento $[t_x, x^i]$. Kaj selektu linion $\mathcal{L}$ en spaca reto, entenante punkton x^i. Sekvante marku eventojn $[t_y, y^i]$ samtempajn al evento $[t_x, x^i]$, en ambaŭ direktoj de linio $\mathcal{L}$. La horloĝo de y^i estas nomita sinkrona al horloĝo de x^i , laŭ linio $\mathcal{L}$ kaj en momento

Repare que uma sincronia é geralmente momentânea, porque os g_{0i} geralmente variam com o tempo.

Para relógios de coordenada *finitamente separados* na rede espacial de um dado molusco, propõe-se a *sincronia por linha.* Assim, seja um evento $[t_x, x^i]$. E escolha-se uma linha $\mathcal{L}$ na rede espacial, contendo o ponto x^i. Depois marque-se sucessivamente os eventos $[t_y, y^i]$ simultâneos ao $[t_x, x^i]$, para ambos os lados da linha $\mathcal{L}$. O relógio de y^i é dito síncrono ao relógio de x^i, pela linha $\mathcal{L}$ e no momento t_x, se $t_y = t_x$. Repare que

t_x , se $t_y = t_x$. Atentu ke la kvanto de tiuj aliaj horloĝoj povas varii de nulo al nefinio, kaj ke la sinkrono ordinare estas momenta.

Klare ke (29) veriĝas en moluskoj kun la tri funkcioj $g_{0i} = 0$. Tial en tiuj moluskoj ĉiuj koordinathorloĝoj estas sinkronaj, laŭ iu ajn linio kaj en iu ajn momento, eĉ se la aliaj metrikaj koeficientoj g_{00} kaj g_{ij} pendas de tempo.

Sekcio 8 montris ke moluskoj havantaj $g_{0i}(x^\mu)/g_{00}(x^\mu) = -c\nabla_i t(x^j)$ permesas ĝeneralan samtempecon. Tio sugestas ke ni faru ŝanĝon de tempa koordinato $t \to t' = t - t(x^j)$, kiu nuliĝas miksitajn komponojn $g_{0'i'}$ de nova molusko. Tio estas, la koordinathorloĝoj de nova molusko estos ĉiam sinkronaj.

a quantidade desses outros relógios pode variar desde 0 até infinito, e que a sincronia é geralmente momentânea.

Claramente a (29) é verdadeira nos moluscos com as três funções $g_{0i} = 0$. Então nesses moluscos todos os relógios de coordenada são síncronos, por qualquer caminho e em qualquer momento, mesmo se os outros coeficientes métricos g_{00} e g_{ij} dependerem do tempo.

A Seção 8 mostrou que os moluscos com $g_{0i}(x^\mu)/g_{00}(x^\mu) = -c\nabla_i t(x^j)$ permitem simultaneidade global. Isso sugere que façamos a mudança de coordenada temporal $t \to t' = t - t(x^j)$, que torna nulos os termos mistos $g_{0'i'}$ no novo molusco. Ou seja, os relógios de coordenada do novo molusco estarão eternamente síncronos.

10 Kelkaj komentoj

Sekcio 8 montris ke molusko hazarde elektita, por spacotempo ankaŭ hazarde elektita, ordinare ne permesas tutan samtempecon. Pli klare, ordinare ĝi ne permesas ekziston de eventoj samtempaj laŭ iu ajn linio. Sed ĉiu evento $E = [t, P]$ havas *infiniteziman samtempan najbaron.* Alivorte, ĉiam ekzistas infinitezima najbaro de punkto P en spaca reto, kies koordinathorloĝoj obeas samtempecon (27). Oni facile provas ke ĉiu paro de eventoj de tiu najbaro estas ankaŭ samtempaj.

Infinitezima sinkrona disko estas interesa subaro de tiu najbaro. Ĝi estas infinitezima dudimensia disko en spaca reto kies koordinathorloĝoj estas sinkronaj. Do, ĉiu ajn evento estas centro de tial disko.

Sinkrona linio en spaca reto ekzistas en molusko kie unu el la tri komponoj g_{0i} estas nula. Ekzemple, se $g_{01} = 0$, tial (27) veriĝas en linio kie nur x^1 varias. Simile, *sinkrona surfaco* en spaca reto ekzistas en molusko kie du el la tri funkcioj g_{0i} estas nulaj. Fakte, en tia surfaco ĉiuj koordinathorloĝoj estas sinkronaj laŭ iu ajn linio

10 Alguns comentários

A Seção 8 mostrou que um molusco escolhido ao acaso (para um espaçotempo escolhido também ao acaso) não admite simultaneidade global, em geral. Mais claramente, ele geralmente não permite existência de eventos simultâneos por qualquer caminho. Porém todo evento $E = [t, P]$ tem uma *vizinhança simultânea infinitesimal.* Isto é, sempre existe uma vizinhança infinitesimal do ponto P na rede espacial, cujos relógios de coordenadas cumprem a simultaneidade (27). Prova-se facilmente que todo par de eventos dessa vizinhança é também simultâneo.

Um *disco síncrono infinitesimal* é um interessante subconjunto dessa vizinhança. Ele é um disco bidimensional infinitesimal na rede espacial, cujos relógios de coordenadas são síncronos. Portanto, todo evento é centro de um tal disco.

Uma *linha síncrona* na rede espacial existe em molusco onde uma dentre as três funções g_{0i} for nula. Se, por exemplo, $g_{01} = 0$, então (27) é verdadeira em linha onde somente x^1 varia. Semelhantemente, uma *superfície síncrona* na rede espacial existe em molusco onde duas das três funções g_{0i} forem nulas. De fato, em tal superfície todos os relógios de coordenada são kunigante ilin, en la surfaco.

Pli ĝenerale, sinkronaj surfacoj ekzistas en moluskoj kun

síncronos por quaisquer linhas na superfície.

Mais geralmente, superfícies de sincronia existem em moluscos com

$$g_{0i}(t, x^j) = \varphi(t, x^j) \frac{\partial \phi(x^j)}{\partial x^i} ; \tag{30}$$

en tiuj moluskoj, surfacoj $\phi(x^j) =$ konst estas sinkronaj.

nesses moluscos, as superfícies $\phi(x^j) =$ const são síncronas.

11 Gravita Doppplera efiko

11 Efeito Doppler gravitacional

En onda fenomeno, Dopplera efiko estas ŝanĝo de frekvenco ν_{obs} observata, kompare kun frekvenco ν_{fon} igita el fonto. Tiu efiko estas priskribita per Dopplera faktoro $D := \nu_{obs}/\nu_{fon}$. Se $D > 1$, oni diras ke okazas albluiĝo, kaj se $D < 1$, oni diras ke okazas alruĝiĝo. Kelkaj kialoj por la neegaleco $D \neq 1$ estas rapido kaj loko de fonto en momento de eligo de ondo, kaj ankaŭ rapido kaj loko de observanto en momento de ricevo.

Praktika maniero por sciiĝi Doppleran faktoron estas unue supozi ke fonto eligas du signalojn, apartigitajn kun sufiĉe malgranda propra intertempo $\Delta\tau_{fon}$, mezurita per fonto; poste kalkuli la propran intertempon $\Delta\tau_{obs}$ mezurita per observanto, inter ricevo de tiuj signaloj. Tial la Dopplera faktoro estos [16]

Em um fenômeno ondulatório, efeito Doppler é uma mudança na frequência ν_{obs} observada, em comparação com a frequência ν_{fon} emitida. Esse efeito é descrito pelo fator Doppler $D := \nu_{obs}/\nu_{fon}$. Se $D > 1$, diz-se que ocorre desvio para o azul, e se $D < 1$, diz-se que ocorre desvio para o vermelho. Alguns motivos para a desigualdade $D \neq 1$ são a velocidade e a localização da fonte emissora no momento da emissão, e também a velocidade e localização do receptor no momento da recepção.

Um modo prático de se conhecer o fator Doppler é primeiramente supor que a fonte emita dois sinais separados por um intervalo de tempo próprio $\Delta\tau_{fon}$ suficientemente pequeno, medido pela fonte; depois calcular o intervalo de tempo próprio $\Delta\tau_{obs}$ medido pelo observador, entre o recebimento desses sinais. Então o fator Doppler será [16]

$$D = \Delta\tau_{fon}/\Delta\tau_{obs} . \tag{31}$$

En speciala okazo ke fonto kaj observanto estas fiksitaj en spaca reto de nemovebla molusko (tiu, kiu ne malformiĝas laŭ la tempo), tial [5, paĝo 414]

No caso especial de fonte e receptor estarem fixados na rede espacial de um molusco estacionário (aquele que não se deforma ao longo do tempo), então [5, pág. 414]

$$D = \sqrt{\frac{g_{00}(P_{fon})}{g_{00}(P_{obs})}} , \tag{32}$$

estante P_{fon} kaj P_{obs} pozicioj de fonto kaj observanto en reto. En molusko de Schwarzschild, ekzemple, kie $g_{00} = 1 -$

sendo P_{fon} e P_{obs} as posições da fonte e do receptor na rede. No molusco de Schwarzschild, por exemplo, onde $g_{00} = 1 - 2Gm/(c^2r)$, o fator

$2Gm/(c^2r)$, la Dopplera faktoro por lumo falanta de alto h_{fon} ĝis alto h_{obs} ĉe nia planedo (kun radiuso R kaj maso M) estas

Doppler para luz caindo desde uma altura h_{fon} até uma altura h_{obs} no nosso planeta (com raio R e massa M) é

$$D = \sqrt{\frac{1-(2GM/c^2)/(R+h_{fon})}{1-(2GM/c^2)/(R+h_{obs})}} \approx 1+\frac{g}{c^2}\Delta h\,, \tag{33}$$

estante $g := GM/R^2$ la akcelo pro tera gravito en marnivelo kaj $\Delta h := h_{fon} - h_{obs}$.

sendo $g := GM/R^2$ a aceleração da gravidade terrestre ao nível do mar e $\Delta h := h_{fon} - h_{obs}$.

12 Reveno al estinto

Ĝenerala relativeco permesas surprizan eblecon, *revenon al estinto*. Tio signifas ke persono revenanta de vojaĝo povas vidi lokajn horloĝojn montrante momenton antaŭan al de ekvojaĝo. Tiu ebleco estas ofte trovita en moluskoj rotaciantaj rilate al inercia referencosistemo.

Ekzemple, konsideru spacotempon de Som-Raychaudhuri [17],

12 Retorno ao passado

A relatividade geral permite uma surpreendente possibilidade, o *retorno ao passado*. Isto significa que uma pessoa regressando de uma viagem pode ver os relógios locais mostrando um momento anterior ao da partida. Essa possibilidade é frequentemente encontrada em moluscos rodando em relação a um referencial inercial.

Por exemplo, considere o espaçotempo de Som-Raychaudhuri [17],

$$\epsilon(\mathrm{d}s)^2 = [c\,\mathrm{d}t + (\omega r^2/c)\,\mathrm{d}\varphi]^2 - r^2(\mathrm{d}\varphi)^2 - (\mathrm{d}r)^2 - (\mathrm{d}z)^2\,. \tag{34}$$

La materio kongruanta al tiu metriko estas elektre ŝarĝita polvo, rigide rotacianta ĉirkaŭ akso z de inercia referencosistemo. Sen perdi ĝeneralecon, ni supozas rotacion en hora direkto ($-\vec{z}$), implicante $\omega > 0$. La polvo restas en molusko de (34). Ni montros ke persono revenas (pli maljune) al loka estinto, se vojaĝas en cirklo kun $r > c/\omega$ konstanta, kaj kun konstanta rapido $v > c^2/(\omega r)$, en direkto mala al tiu de ω .

Por nia studo en cirklo, sufiĉas konsideri

A matéria associada a essa métrica é uma poeira eletricamente carregada, rodando rigidamente em torno do eixo z de um referencial inercial. Sem perda de generalidade, nós supomos a rotação no sentido horário ($-\vec{z}$), implicando $\omega > 0$. A poeira está em repouso no molusco da (34). Nós vamos mostrar que uma pessoa retorna (mais velha) ao passado local, se viajar em um círculo com $r > c/\omega$ constante, e com velocidade constante $v > c^2/(\omega r)$, no sentido oposto ao de ω .

Para nosso estudo no círculo, basta-nos considerar

$$(c\,\mathrm{d}\tau)^2 = [c\,\mathrm{d}t + (\omega r^2/c)\,\mathrm{d}\varphi]^2 - r^2(\mathrm{d}\varphi)^2\,. \tag{35}$$

Komence, atentu ke du najbaraj koordinathorloĝoj en sama cirklo $r =$ konst ne estas sinkronaj. Fakte, du najbaraj eventoj $[t, r, \varphi]$ kaj $[t+\mathrm{d}t, r, \varphi+\mathrm{d}\varphi]$ estas samtempaj se $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu = 0$, t.e., se

De início, perceba que dois relógios de coordenada vizinhos em um mesmo círculo $r =$ const não são síncronos. De fato, dois eventos vizinhos $[t, r, \varphi]$ e $[t + \mathrm{d}t, r, \varphi + \mathrm{d}\varphi]$ são simultâneos se $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu = 0$, isto é, se

$$c\,\mathrm{d}t + (\omega r^2/c)\mathrm{d}\varphi = 0\,. \tag{36}$$

Supozante ke ω kaj $\mathrm{d}\varphi$ estas pozitivaj, veriĝas $\mathrm{d}t < 0$, indikante ke koordinathorloĝo de $\varphi + \mathrm{d}\varphi$ malfruas rilate al tiu de φ. Do, se io ekvojaĝas el φ_0 en loka momento t_0, en malhora direkto (direkto *mala* al rotacio ω), kun nefinia rapido, tial ĝi atingos pozicion $\varphi_0 + \mathrm{d}\varphi$ en loka momento $t_0 - (\omega r^2/c^2)\mathrm{d}\varphi$. Se tiu io daŭras kun nefinia rapido en cirklo $r =$ konst, ĝi revenos al komenca pozicio φ_0 en loka momento $t_0 - (2\pi\omega r^2/c^2)$. Tio estas, ĝi revenos en momento antaŭa al tiu de ekvojaĝo.

Sed persono ne povas havi $|v| = \infty$, li devas havi $|v| < c$. Tial ni demandas: ĉu estas rapido $|v| < c$ kaj radiuso r tiaj ke momento de reveno de vojaĝanto estas frua je momento de ekvojaĝo, en universo de Som-Raychaudhuri? Surpriza respondo de ĝenerala relativeco estas *jes*.

Fakte, rapido de vojaĝanto en cirklo estas $v = \mathrm{d}L/\mathrm{d}T$, estante $\mathrm{d}L = r\mathrm{d}\varphi$ laŭ (13), kaj $\mathrm{d}T = \mathrm{d}t + (\omega r^2/c^2)\mathrm{d}\varphi$ laŭ (18). Tial

Supondo ω e $\mathrm{d}\varphi$ positivos, então $\mathrm{d}t < 0$, indicando que o relógio de coordenada em $\varphi + \mathrm{d}\varphi$ está atrasado com relação àquele em φ. Assim, se algo partir de φ_0 no momento local t_0, na direção anti-horária (direção *oposta* à rotação ω), com velocidade infinita, ele atingirá a posição $\varphi_0 + \mathrm{d}\varphi$ no momento local $t_0 - (\omega r^2/c^2)\mathrm{d}\varphi$. Se esse algo prosseguir com velocidade infinita no círculo $r =$ const, ele retornará à posição φ_0 no momento local $t_0 - (2\pi\omega r^2/c^2)$. Ou seja, ele retornará em um momento anterior àquele da partida.

Mas uma pessoa não pode ter $|v| = \infty$, ela tem $|v| < c$. Então nós perguntamos: haverá uma velocidade $|v| < c$ e um raio r tais que o momento do retorno do viajante seja anterior ao momento da partida, no universo de Som-Raychaudhuri? A surpreendente resposta da relatividade geral é *sim*.

De fato, a velocidade do viajante no círculo é $v = \mathrm{d}L/\mathrm{d}T$, com $\mathrm{d}L = r\mathrm{d}\varphi$ segundo (13), e $\mathrm{d}T = \mathrm{d}t + (\omega r^2/c^2)\mathrm{d}\varphi$ segundo (18). Então

$$v = \frac{r\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t + (\omega r^2/c^2)\mathrm{d}\varphi}\,. \tag{37}$$

Ĉar $v =$ konst implicas $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = \Delta\varphi/\Delta t$, tial en kompleta turno ($\Delta\varphi = 2\pi$) okazas

Como $v =$ const implica $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = \Delta\varphi/\Delta t$, então numa volta completa ($\Delta\varphi = 2\pi$) ocorre

$$v = \frac{2\pi r}{\Delta t + 2\pi\omega r^2/c^2}\,. \tag{38}$$

Do

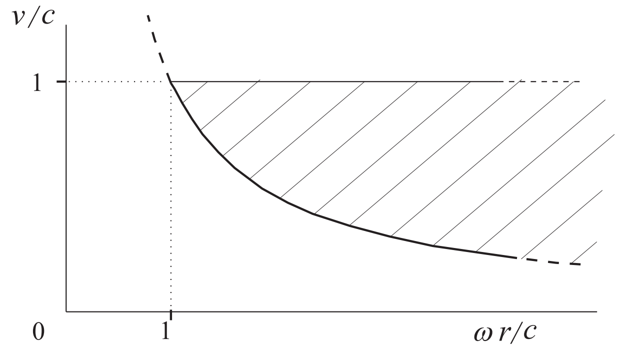
Então

$$\Delta t = 2\pi r(1/v - \omega r/c^2)\,, \tag{39}$$

montrante ke Δt estas negativa se $v > c^2/(\omega r)$. Ĉar ni ankaŭ impozas $v < c$, la kondiĉo por persono reveni al estinto en spacotempo de Som-Raychaudhuri estas

mostrando que Δt é negativo se $v > c^2/(\omega r)$. Como impomos também $v < c$, a condição para a pessoa retornar ao passado no espaçotempo de Som-Raychaudhuri é

$$c/(\omega r) < v/c < 1\,. \tag{40}$$



Figuro 4: Strekata regiono, $c/(\omega r) < v/c < 1$, indikas parojn de radiuso r (kun unueco c/ω) kaj rapido v (kun unueco c) rilataj al reveno de vojaĝanto al estinto, en spacotempo de Som-Raychaudhuri.
Figura 4: A região tracejada, $c/(\omega r) < v/c < 1$, indica os pares de raio r (com unidade c/ω) e velocidade v (com unidade c) relacionados a retorno de viajante ao passado, no espaçotempo de Som-Raychaudhuri.

Figuro 4 indikas regionon de ebeno $[r, v]$ rilata al reveno de vojaĝanto al estinto.

a Figura 4 indica a região do plano $[r, v]$ relacionada a retorno do viajante ao passado.

13 Konkludo

Pluraj niaj fruaj artikloj diskutis pri spacotempo ĉe la speciala relativeco [1, 16, 18]. Aliaj artikloj traktis pri fenomenoj en ĝenerala relativeco [15, 17, 19]. Ni nun diskutis plidetale pri spacotempo ĉe la ĝenerala relativeco.

Sekcio 1 traktis pri temoj gravaj por la artiklo: normhorloĝo, propratempo, konstanteco de c, kaj sekondo.

Sekcio 2 emfazis kiom libere la spacotempaj koordinatoj estas elektitaj en ĝenerala relativeco, speciale la loka tempa koordinato. Komencantaj fizikistoj ofte ne kredas ke tiel ĝeneralaj koordinatoj povas esti utilaj por precizaj kalkuloj.

Sekcio 3 montris kiel la spacotempa metriko rilatas tiujn arbitrajn koordinatojn al infinitezimaj propraj distancoj $\mathrm{d}\lambda$, aŭ al infinitezimaj propraj intertempoj $\mathrm{d}\tau$. Por tio, sole la konstanta rapido c de lumo en vakuo estis uzita.

Sekcioj 4 – 6 difinis distancon $\mathrm{d}L$ inter du najbaraj punktoj fiksitaj en spaca reto, kaj intertempon $\mathrm{d}T$ de evento al najbara

13 Conclusão

Vários artigos nossos anteriores discutiram sobre espaçotempo na relatividade especial [1, 16, 18]. Outros artigos trataram de fenômenos na relatividade geral [15, 17, 19]. Nós agora discutimos com mais detalhes sobre o espaçotempo na relatividade geral.

A Seção 1 tratou de importantes tópicos para o artigo: relógio padrão, tempo próprio, constância de c, e segundo.

A Seção 2 enfatizou o quanto livremente as coordenadas espaçotemporais são escolhidas na relatividade geral, especialmente a coordenada temporal local. Físicos iniciantes frequentemente não creem que coordenadas tão gerais possam ser úteis para cálculos precisos.

A Seção 3 mostrou como a métrica espaçotemporal relaciona essas coordenadas arbitrárias às distâncias próprias infinitesimais $\mathrm{d}\lambda$, ou aos intertempos próprios infinitesimais $\mathrm{d}\tau$. Para tal, somente a constância da velocidade c da luz no vácuo foi usada.

As Seções 4 – 6 definiram distância $\mathrm{d}L$ entre dois pontos vizinhos na rede espacial, e intertempo $\mathrm{d}T$ de um evento para outro, vizinho.

evento. Ambaŭ dL kaj dT estis difinitaj en inercia referencosistemo restanta rilate al elektita spaca reto, najbare al la eventoj. Oni ordinare konsentas ke dL kaj dT estas kvantoj kiuj plej similas al Newtona distanco kaj intertempo. Tri-dimensia metriko $h_{ij}(x^\mu)$ por la spaca reto estis derivita, denove uzante sole la konstantan valoron c. Plu, rapido v rilatante du najbarajn eventojn estis prezentita, pendanta de spacotempa koordinataro uzita. Ĝia modulo superas c, se la intervalo estas de spaca tipo.

Sekcio 7 klarigis ke, en ĝenerala relativeco, distancoj kaj intertempoj rilataj al eventoj finiaj apartitaj ne estas kiel en Newtona mekaniko. Nun bezonas enkonduki koncepton de distanco kaj intertempo laŭ elektita kurbo en spacotempo. Simile, Sekcio 8 difinis samtempecon de eventoj laŭ elektita linio en spaca reto, kaj Sekcio 9 difinis sinkronon de horloĝoj laŭ elektita linio en spaca reto.

Sekcio 10 anoncis ekziston de du interesaj infinitezimaj subaroj de spaca reto. La unua estas tri-dimensia, permesante ekziston de samtempaj eventoj. La dua estas du-dimensia, entenante sinkronajn koordinathorloĝojn.

Sekcio 11 prezentis gravan prognozon de ĝenerala relativeco, tion de gravita albluiĝo de lumo falanta sur tero. Alia prognozo estas gravita alruĝiĝo de lumo eskapanta el stelo. Kutime tiuj du efikoj konkursas, kaj la gravita alruĝiĝo ordinare estras.

Fine, Sekcio 12 faris detalan eksponadon de reveno al estinto en spacotempo de Som-Raychaudhuri. En tiu universo kun $\omega = 1$ turno/jarcento, persono revenas al estinto se vojaĝas en cirklo kun radiuso $r = 70$ lumjaroj kun konstanta rapido $v = c/4$, en direkto mala al ω. Kruda takso donas komfortan radiusan akcelon (ĉirkaŭ triono de tera gravito ĉe marnivelo), por teni

Ambos dL e dT foram definidos em um sistema inercial de referência em repouso relativamente à rede espacial em uso, na vizinhança dos eventos. Há concordância geral, em que dL e dT são as quantidades relativistas que mais de perto representam a distância e o intertempo Newtonianos. Um métrica tridimensional $h_{ij}(x^\mu)$ para a rede espacial foi derivada, novamente usando unicamente o valor constante c. Ainda, uma velocidade v relacionando dois eventos vizinhos foi apresentada, dependente das coordenadas espaçotemporais usadas. Seu módulo excede c, se o intervalo for do tipo espaço.

A Seção 7 deixou claro que, na relatividade geral, distâncias e intertempos relacionados a eventos finitamente separados não são como na mecânica Newtoniana. Agora é preciso introduzir-se o conceito de distâncias e intertempos ao longo de alguma curva escolhida no espaçotempo. Semelhantemente, as Seções 8 e 9 definiram simultaneidade de eventos e sincronia de relógios, ambas ao longo de uma linha escolhida na rede espacial.

A Seção 10 anunciou a existência de dois interessantes subconjuntos infinitesimais da rede espacial. O primeiro é tridimensional, permitindo existência de eventos simultâneos. O segundo é bidimensional, contendo relógios de coordenadas síncronos.

A Seção 11 apresentou uma importante predição da relatividade geral, o desvio gravitacional para o azul, de luz caindo na Terra. Outra predição é o desvio gravitacional para o vermelho, de luz escapando de uma estrela. Em geral esses dois efeitos conflitam, e o desvio para o vermelho geralmente predomina.

Finalmente, a Seção 12 fez detalhada exposição de viagem no tempo no espaçotempo de Som-Raychaudhuri. Em um tal universo com $\omega = 1$ volta/século, uma pessoa retorna ao passado se viajar em um círculo com raio $r = 70$ anos-luz com velocidade constante $v = c/4$, na direção oposta a ω. Uma estimativa grosseira dá uma confortável aceleração radial (cerca de um terço da gravidade terrestre ao nível do mar), vojaĝanton en orbito. | para manter o viajante em órbita.

Citaĵoj

[1] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *The relativistic time – I*, arXiv/physics/0603053 em Esperanto: CBPF-NF-006/06 em Esperanto/Português.

[2] Bureau International des Poids et Mesures, kaj Organisation intergouvernamentale de la Convention du Mètre, *Le système international d'unités (SI)* 7e édition 1998, Édité par le BIPM, France (http://www.bipm.fr/utils/en/pdf/brochures-si.pdf).

[3] A. Einstein, *Relativity, the special and the general theory: a popular exposition*, 15*th ed.*, Methuen, London (1954).

[4] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *The classical theory of fields*, Butterworth-Heinemann (1996).

[5] J.L. Anderson, *Principles of relativity physics*, Academic Press (1967).

[6] J.L. Synge, *Relativity: the general theory*, North-Holland (1960).

[7] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman (1973).

[8] B. Tonkinson, *The behaviour of clocks and rods in special and general relativity*, arXiv:0904.3029.

[9] Tamen, oni kutime uzas *sekundon* kiel unueco de intertempo Δt de koordinato. Tio okazas ĉar oni kutime uzas normhorloĝon kiel koordinathorloĝo.
Entretanto, geralmente se usa o *segundo* como unidade de intertempo de coordenada Δt . Isso ocorre porque geralmente se usa um relógio padrão como relógio de coordenada.

[10] Nomo *Molusk* estis proponita ĉar la malformiĝo de spaca reto estas ordinare malrapida, en homa skalo [3, paĝo 99]. En nuna artiklo, '*molusko*' signifas 'spacotempa koordinatsistemo konstruita kiel en Sekcio 2'.
O nome *Molusk* foi proposto porque a deformação da rede espacial é geralmente lenta, na escala humana [3, pág. 99]. No presente artigo, '*molusco*' significa 'sistema de coordenadas espaçotemporais construído como na Seção 2'.

[11] A. Lichnerowicz, *Éléments de calcul tensoriel*, Librairie Armand Colin (1955).

[12] Esprimo *linielemento* estas ofte uzata por kvadrato $(\mathrm{d}s)^2$; kaj la parametro ϵ estas ofte preterlasita en difino (1), tial permesante ke $(\mathrm{d}s)^2$ estu negativa. Tiu ĉi artiklo uzas signaturon -2 por metriko.
A expressão *elemento de linha* é frequentemente usada para o quadrado $(\mathrm{d}s)^2$; e o parâmetro ϵ é frequentemente omitido na definição (1), permitindo que $(\mathrm{d}s)^2$ seja negativo. Este artigo usa assinatura -2 para a métrica.

[13] A.F.F. Teixeira, *Experimentally obtaining metrics in general relativity*, arXiv/gr-qc/0505047, em Esperanto.

[14] Malsimile al $\Delta\tau$ kaj $\Delta\lambda$, ambaŭ ΔT kaj ΔL estas difineblaj en kurboj kun pecoj de malsimilaj tipoj.
Diferentemente de $\Delta\tau$ e $\Delta\lambda$, ambos ΔT e ΔL podem ser definidos em curvas com pedaços de diferentes tipos.

[15] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Samtempaj geodezioj ĉe Ŝvarcŝild / Geodesics of simultaneities in Schwarzschild*, arXiv:1006.4654; CBPF-NF-012/10 em Esperanto/Português.

[16] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Relativistic Doppler effect in a uniformly accelerated motion – II*, arXiv:0704.1130 em Esperanto; CBPF-NF-011/07 em Esperanto/Português.

[17] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Tempa vojaĝo kaj geodezioj en ĝenerala relativeco / Time travel and geodesics in general relativity*, arXiv:1104.2273; CBPF-NF-009/11 em Esperanto/Português.

[18] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira:
Relativistic Doppler effect in a uniformly accelerated motion – I, arXiv/physics/0701092 em Esperanto; CBPF-NF-002/07 em Esperanto/Português;
Relativistic Doppler effect between two accelerated bodies, arXiv:0801.2290 em Esperanto; CBPF-NF-001/08 em Esperanto/Português;
Relativistic Doppler effect in a uniformly accelerated motion – III, arXiv:0808.0126 em Esperanto; CBPF-NF-018/08 em Esperanto/Português;
Doppler effect of a luminous plane as seen by an accelerated observer, arXiv:0810.2776 em Esperanto; CBPF-NF-022/08 em Esperanto/Português.

[19] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Doppler effects in Schwarzschild*, arXiv:0912.1229[physics] em Esperanto; CBPF-NF-023/09 em Esperanto/Português;

NOTAS DE FÍSICA é uma pré-publicação de trabalho original em Física.
Pedido de cópias desta publicação deve ser enviado aos autores ou ao:

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Área de Publicações
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150 – 4º andar
22290-180 – Rio de Janeiro, RJ
Brasil
E-mail: socorro@cbpf.br/valeria@cbpf.br
http://www.biblioteca.cbpf.br/index_2.html

NOTAS DE FÍSICA is a preprint of original unpublished works in Physics.
Request for copies of this report should be addressed to:

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Área de Publicações
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150 – 4º andar
22290-180 – Rio de Janeiro, RJ
Brazil
E-mail: socorro@cbpf.br/valeria@cbpf.br
http://www.biblioteca.cbpf.br/index_2.html