Samtempaj geodezioj ĉe Ŝvarcŝild
Geodésicas de simultaneidade em Schwarzschild

F.M. Paiva

Departamento de Física, Unidade Humaitá II, Colégio Pedro II

Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

28–a de junio, 2010

Resumo

Samtempa geodezio estas geodezio de spaca tipo kies paroj de najbaraj eventoj estas samtempaj ($g_{0\mu}\mathrm{d}x^{\mu} = 0$). Tiuj geodezioj estas studataj en ekstera regiono de metriko de Ŝvarcŝild.

Geodésica de simultaneidade é uma geodésica tipo espaço em que todo par de eventos vizinhos é simultâneo ($g_{0\mu}\mathrm{d}x^{\mu} = 0$). Essas geodésicas são estudadas na região exterior da métrica de Schwarzschild.

1 Enkonduko

Ni konsideras limhavan regionon de spacotempo, kaj supozas ke tiu regiono enhavas kelkan graviton. Elektante du eventojn en tiu regiono, ni nomas geodezio, linion kiu unuigas ilin, tiel ke la sumigo de infinitezimaj intervaloj, ds, en tiu linio estu minimuma per infinitezimaj varioj de tiu linio, estante fiksataj ĝiaj ekstremoj. La spacotempo de relativeca teorio permesas tri tipojn de geodezioj: spacan, nulan, kaj tempan. En geodezio de elektata tipo, ĉiu infinitezima intervalo havas tiun saman tipon.

Kompreneble, fizikistoj zorgas precipe pri tempa geodezio (priskribanta movadon de maso libere fluganta en gravito) kaj pri nula geodezio (priskribanta movadon de lumo). Sed matematiko konsideras ke la tri tipoj es-

1 Introdução

Nós consideramos uma região limitada do espaçotempo, e supomos que essa região contém alguma gravitação. Dados dois eventos na região, nós denominamos geodésica, uma linha que os una, tal que a soma dos intervalos infinitesimais, ds, ao longo da linha seja mínima sob variações infinitesimais da linha, mantendo-se fixas as extremidades. O espaço-tempo da relatividade geral permite três tipos de geodésicas: espacial, nula e temporal. Em uma geodésica de um dado tipo, todo intervalo infinitesimal tem aquele tipo.

Os físicos se ocupam principalmente com geodésica temporal (descrevendo massa voando livremente na gravidade) e com geodésica nula (descrevendo movimento de luz). A matemática, porém, considera igualmente imtas same gravaj. Tiu fakto stimulis nin atenti spacajn geodeziojn.

Se koordinatoj estas lokataj en la spacotempa regiono, speciala klaso de spacaj geodezioj aperas: la samtempaj geodezioj [1]. En ili, ĉiu infinitezima intervalo havas $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu = 0$, estante $\mathrm{d}x^\mu$ la apartigoj de koordinatoj [2, paĝo 350].

Geodezio persistas geodezio per ŝanĝo de koordinatoj, kaj ankaŭ ĝia tipo persistas la sama. Tamen, samtempa geodezio en elektata sistemo povas ne persisti samtempa, kvankam persistas spaca. En ĉi tiu artikolo ni studas samtempajn geodeziojn en la pli ordinara formo de metriko de Ŝvarcŝild [3].

portantes os três tipos. Esse fato nos estimulou a atentar para geodésicas espaciais.

Se coordenadas são instaladas na região espaçotemporal, surge uma classe especial de geodésicas espaciais: as geodésicas de simultaneidade [1]. Nelas, todo intervalo infinitesimal tem $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu = 0$, sendo $\mathrm{d}x^\mu$ as separações de coordenadas [2, pág. 350].

Uma geodésica se mantém geodésica sob mudança de coordenadas, e também o seu tipo se mantém. Entretanto, uma geodésica de simultaneidade em um sistema pode não ser de simultaneidade em outro sistema, embora ainda seja tipo espacial. Neste artigo nós estudamos geodésicas de simultaneidade na forma mais usual da métrica de Schwarzschild [3].

2 Ŝvarcŝild

Ni konsideras linielementon

2 Schwarzschild

Nós consideramos o elemento de linha

$$\epsilon(\mathrm{d}s)^2 = (1-\rho/r)(c\mathrm{d}T)^2 - \frac{(\mathrm{d}r)^2}{1-\rho/r} - r^2(\mathrm{d}\theta)^2 - r^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2\,, \tag{1}$$

estante $\epsilon = \pm 1$, kaj estante $\rho := 2Gm/c^2$ la radiuso de Ŝvarcŝild. En ĉi tiu artikolo ni prizorgas nur la eksteran regionon $r > \rho$ kaj ni konsideras nur la ebenon $\theta = \pi/2$; do ni uzas

sendo $\epsilon = \pm 1$, e sendo $\rho := 2Gm/c^2$ o raio de Schwarzschild. Neste artigo nós nos ocupamos apenas da região exterior $r > \rho$ e nós consideramos apenas o plano $\theta = \pi/2$; então nós usamos

$$\epsilon(\mathrm{d}s)^2 = (1-\rho/r)(c\,\mathrm{d}T)^2 - \frac{(\mathrm{d}r)^2}{1-\rho/r} - r^2(\mathrm{d}\varphi)^2\,. \tag{2}$$

Se intervalo estas de spaca tipo oni uzas $\epsilon = -1$, kaj renomas $\mathrm{d}s \to \mathrm{d}\lambda$. Kaj en linielemento (2), kondiĉo de samtempeco $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu = 0$ implicas $\mathrm{d}T = 0$. Tiuokaze (2) plisimpliĝas al

Se o intervalo for do tipo espaço usa-se $\epsilon = -1$, e se redenomina $\mathrm{d}s \to \mathrm{d}\lambda$. E no elemento de linha (2) a condição de simultaneidade $g_{0\mu}\mathrm{d}x^\mu = 0$ implica $\mathrm{d}T = 0$. Nesse caso a (2) se simplifica para

$$(\mathrm{d}\lambda)^2 = \frac{(\mathrm{d}r)^2}{1-\rho/r} + r^2(\mathrm{d}\varphi)^2\,, \tag{3}$$

egala al metriko de spacia sekcio en ebeno $\theta = \pi/2$. Ĉar (3) ne pendas de φ, tial en ĉiu

igual à métrica da seção espacial no plano $\theta = \pi/2$. Como a (3) não depende de φ, em cada geodezio okazas $u_\varphi = \text{konst} =: -r_0$. Konsekvence $u^\varphi := \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\lambda = g^{\varphi\varphi}u_\varphi = r_0/r^2$, do

geodésica ocorre $u_\varphi = \text{konst} =: -r_0$. Então $u^\varphi := \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\lambda = g^{\varphi\varphi}u_\varphi = r_0/r^2$, portanto

$$\mathrm{d}\varphi = (r_0/r^2)\,\mathrm{d}\lambda\,, \tag{4}$$

kaj (3) reskribiĝas kiel

e a (3) se reescreve como

$$(\mathrm{d}r)^2 = (1-\rho/r)(1-{r_0}^2/r^2)(\mathrm{d}\lambda)^2\,. \tag{5}$$

Tirante $\mathrm{d}\lambda$ el (4) kaj lokante ĝin en (5) oni generas diferencialan ekvacion por samtempaj geodezioj:

Extraindo $\mathrm{d}\lambda$ da (4) e colocando-a na (5) gera-se uma equação diferencial para as geodésicas de simultaneidade:

$$(\mathrm{d}r)^2 = (r/{r_0}^2)(r-\rho)(r^2-{r_0}^2)(\mathrm{d}\varphi)^2\,. \tag{6}$$

Sen perdi ĝeneralecon, ni supozas ke r_0 estas pozitiva.

Ni rememoras la jenan geometrian fakton: se r_0 estas distanco de Eŭklida rekto al origino, tial en radiusaj infinitoj de rekto okazas $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}r = \pm r_0/r^2$. Do, farante $r\to\infty$ en (6), montriĝas ke samtempaj geodezioj havas *asimptotojn* kies kolizia parametro estas r_0.

Pozitiveco de $(\mathrm{d}r)^2$ en (6) okazigas du klasojn de solvo kun $r>\rho$:

Sem perder a generalidade, nós supomos que r_0 seja positivo.

Nós relembramos o seguinte fato geométrico: se r_0 for a distância de uma reta Euclideana à origem, então nos infinitos radiais da reta ocorre $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}r = \pm r_0/r^2$. Assim, fazendo-se $r\to\infty$ na (6), mostra-se que geodésicas de simultaneidade têm *assíntotas* cujo parâmetro de impacto é r_0.

A positividade de $(\mathrm{d}r)^2$ na (6) produz duas classes de solução com $r>\rho$:

$$\begin{aligned} 1 &: r > r_0 > \rho\,;\\ 2 &: r > \rho > r_0\,. \end{aligned}$$

Tiuj klasoj estos malkune ekzamenataj.

Essas classes serão examinadas separadamente.

2.1 Klaso 1

En klaso $r>r_0>\rho$, la radiusa valoro r_0 indikas perihelion, kaj (6) reskribiĝas kiel

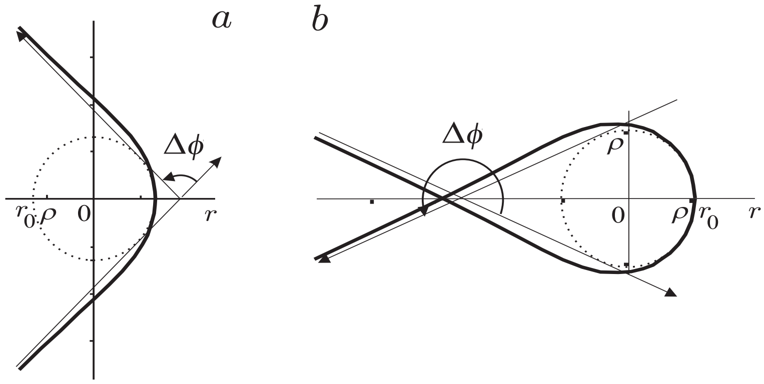
2.1 Classe 1

Na classe $r>r_0>\rho$ o valor radial r_0 indica periélio, e a (6) é reescrita como

$$\mathrm{d}\varphi = \pm\frac{r_0\mathrm{d}r}{\sqrt{r(r-\rho)(r^2-{r_0}^2)}}\,. \tag{7}$$

La integro de (7) de r_0 ĝis r estas elipsa funkcio; vidu figuron 1. La geodezio ĉirkaŭas

A integral da (7) desde r_0 até r é uma função elíptica; veja a figura 1. A geodésica circunda



Figuro 1: Du samtempaj geodezioj (dikaj linioj) de klaso 1 : $r > r_0 > \rho$. Punktitaj cirkloj havas radiuson r_0, kaj la maldikaj linioj estas orientitaj asimptotoj. Ili tanĝas la punktitan cirklon, kaj $\Delta\phi$ estas la angula vario de unu al la alia. En a ni uzis $r_0 = 4\rho/3$, farinte $\Delta\phi \approx \pi/2$. En b ni uzis $r_0 = 1{,}04\rho$, farinte $\Delta\phi \approx 5\pi/4$.

Figura 1: Duas geodésicas de simultaneidade (linhas grossas) da classe 1 : $r > r_0 > \rho$. Os círculos pontilhados têm raio r_0, e as linhas finas são assíntotas orientadas. Elas tangenciam o círculo pontilhado, e $\Delta\phi$ é a variação angular de uma para a outra. Em a nós usamos $r_0 = 4\rho/3$, que faz $\Delta\phi \approx \pi/2$. Em b nós usamos $r_0 = 1{,}04\rho$, que faz $\Delta\phi \approx 5\pi/4$.

la altirantan centron, kaj ju pli granda estas la totala angula vario $\Delta\phi$ de ĝia tangento, des malpli granda estas la perihelio r_0 .

Tiu vario estas la elipsa funkcio

o centro atrativo, e a variação angular $\Delta\phi$ total da sua tangente geométrica é tanto maior quanto menor for o periélio r_0 .

Essa variação é a função elíptica

$$\Delta\phi(r_0) = 2\int_{r=r_0}^{r=\infty} |\mathrm{d}\varphi| - \pi\,, \tag{8}$$

kies grafo estas en regiono $r_0 > \rho$ en figuro 2. Tie ni vidas ke $\Delta\phi(\rho) \to \infty$. Do oni montras ke en ajn du punktoj (kun $r > \rho$) trapasas nefinia nombro de samtempaj geodezioj.

cujo grafo está na região $r_0 > \rho$ na figura 2. Ali nós vemos que $\Delta\phi(\rho) \to \infty$. Mostra-se então que por quaisquer dois pontos (com $r > \rho$) passa uma infinidade de geodésicas de simultaneidade.

2.2 Klaso 2

En klaso $r>\rho>r_0$, la pozicio ρ estas perihelio. Ĉar la kolizia parametro r_0 de la asimptotoj estas malpli granda ol ρ , tial la *asimptotoj* pasas tra la sfero $r = \rho$ de Ŝvarcŝild. Por koni la formon de la geodezioj ni integras (7) de ρ ĝis r . Vidu figuron 3.

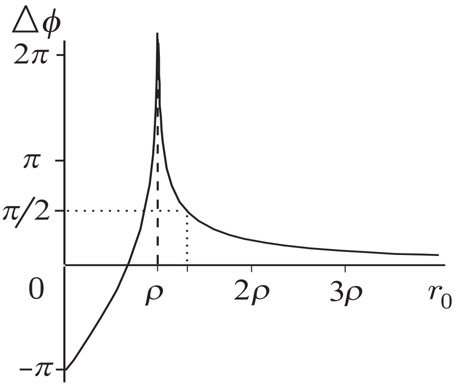
La totala vario de orienton de geodezio estas la integro

2.2 Classe 2

Na classe $r > \rho > r_0$ a posição ρ é periélio. Como o parâmetro de impacto r_0 das assíntotas é menor que ρ , então as *assíntotas* passam através da esfera $r = \rho$ de Schwarzschild. Para conhecermos a forma das geodésicas nós integramos a (7) desde ρ até r . Veja a figura 3.

A variação total da orientação da geodésica é a integral

$$\Delta\phi(r_0) = 2\int_{r=\rho}^{r=\infty} |\mathrm{d}\varphi| - \pi\,, \tag{9}$$



Figuro 2: Totala vario $\Delta\phi(r_0)$ de oriento de samtempa geodezio de klaso 1: $r > r_0 > \rho$ kaj de klaso 2: $r > \rho > r_0$. Speciale, la cirklo kun radiuso $r_0 = \rho$ estas samtempa geodezio, kun $\Delta\phi(\rho) = \infty$. Ne konfuzu ĉi tiun geodezion kun la nula geodezio ankaŭ cirkla, sed kun radiuso $3\rho/2$. Malpozitivaj valoroj de $\Delta\phi(r_0)$ por $r_0 < 0{,}67\rho$ indikas ke samtempa geodezio kun tre malgranda kolizia parametro r_0 estas forte forpuŝata de centra maso.
Figura 2: Variação total $\Delta\phi(r_0)$ da orientação de uma geodésica de simultaneidade da classe 1: $r > r_0 > \rho$ e da classe 2: $r > \rho > r_0$. Em especial, o círculo com raio $r_0 = \rho$ é uma geodésica de simultaneidade, com $\Delta\phi(\rho) = \infty$. Não confunda esta geodésica com a geodésica nula também circular, mas com raio $3\rho/2$. Os valores negativos de $\Delta\phi(r_0)$ para $r_0 < 0{,}67\rho$ indicam que geodésica de simultaneidade com parâmetro de impacto r_0 muito pequeno é fortemente repelida da massa central.

kies grafo estas en regiono $r_0 < \rho$ en figuro 2.

3 Komentoj

Bonkonate, la samtempaj geodezioj de spacotempo de Minkovski estas Eŭklidaj rektoj. Tio okazas ankaŭ en spacotempo (1) de Ŝvarcŝild, sed nur en regionoj kun tre malforta gravito ($r >> \rho$). Tamen, se la kolizia parametro r_0 valoras proksimume la radiuso ρ de Ŝvarcŝild, do la samtempa geodezio tre malsimilas Eŭklidan rekton, precipe en regionoj ĉirkaŭ ρ. Tio estas klare vidata en figuroj 1 kaj 3.

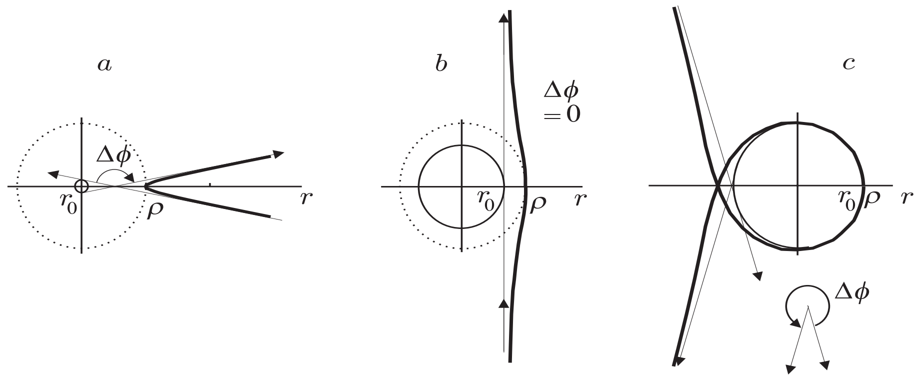
Pensu pri Eŭklida trispaco, kun linielemento $(\mathrm{d}\lambda)^2 = (\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}z)^2$, kaj pri la paraboloido $z^2 = 4\rho(r-\rho)$, rotacianta ĉirkaŭ akso z. Uzante tiujn du ekvaciojn, la linielemento de paraboloido estas (3), la sama linielemento kies geodezioj estas la samtempaj geodezioj de Ŝvarcŝild kun

cujo grafo está na região $r_0 < \rho$ na figura 2.

3 Comentários

É bem sabido que as geodésicas de simultaneidade do espaçotempo de Minkowski são retas Euclideanas. Isso ocorre também em Schwarzschild (1), porém apenas nas regiões com gravitação muito fraca ($r >> \rho$). Entretanto, se o parâmetro r_0 valer aproximadamente o raio ρ de Schwarzschild, a geodésica de simultaneidade difere muito de uma reta Euclideana, principalmente nas regiões perto de ρ. Isto é visto claramente nas figuras 1 e 3.

Considere o triespaço Euclideano, com elemento de linha $(\mathrm{d}\lambda)^2 = (\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}z)^2$, e o parabolóide $z^2 = 4\rho(r-\rho)$, de revolução em torno do eixo z. Usando essas duas equações, o elemento de linha do parabolóide é (3), o mesmo elemento de linha cujas geodésicas são as de simultaneidade de Schwarzschild com



Figuro 3: Tri samtempaj geodezioj (dikaj linioj) de klaso 2: $r > \rho > r_0$. La punktitaj cirkloj havas radiuson ρ, kaj la ne punktitaj havas radiuson r_0. La maldikaj linioj estas orientitaj asimptotoj. Ili tanĝas la cirklon kun radiuso r_0; la angula vario de unu al la alia estas $\Delta\phi$. En a ni uzis $r_0 = 0{,}1\rho$, farinte $\Delta\phi < 0$; en b ni uzis $r_0 \approx 0{,}67\rho$, farinte $\Delta\phi = 0$; kaj en c ni uzis $r_0 = 0{,}99\rho$, farinte $\Delta\phi > 0$.
Figura 3: Três geodésicas de simultaneidade (linhas grossas) da classe 2: $r > \rho > r_0$. Os círculos pontilhados têm raio ρ, e os não pontilhados têm raio r_0. As linhas finas são assíntotas orientadas. Elas tangenciam o círculo com raio r_0; a variação angular de uma para a outra é $\Delta\phi$. Em a nós usamos $r_0 = 0{,}1\rho$, que faz $\Delta\phi < 0$; em b nós usamos $r_0 \approx 0{,}67\rho$, que faz $\Delta\phi = 0$; e em c nós usamos $r_0 = 0{,}99\rho$, que faz $\Delta\phi > 0$.

$\theta = \pi/2$. Geodezio de klaso 1 rilatas al geodezio de paraboloido kiu ne trairas ekvatoron $r = \rho$ de paraboloido, kaj geodezio de klaso 2 rilatas al tiu kiu trairas. Vidu figuron 4.

$\theta = \pi/2$. Geodésica da classe 1 se relaciona a geodésica do parabolóide que não atravessa o equador $r = \rho$ do parabolóide, e geodésica da classe 2 se relaciona a uma que atravessa. Veja a figura 4.

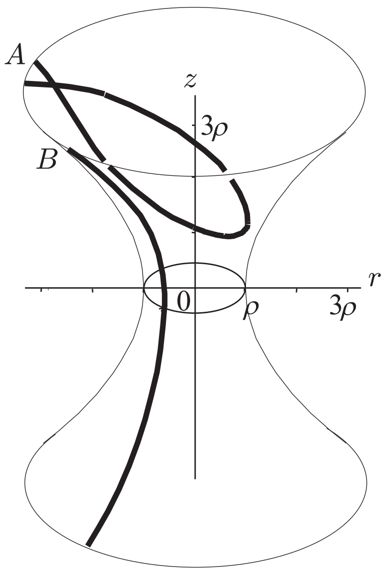
Citaĵoj

Referências

[1] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *La relativeca tempo – II / O tempo relativista – II*, baldaŭ aperonta en arXiv[physics] (*The relativistic time – II*).

[2] J.L. Anderson, *Principles of relativity physics*, Academic Press (1967).

[3] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Doppleraj efikoj ĉe Schwarzschild / Efeitos Doppler em Schwarzschild*, arXiv:0912.1229; CBPF-NF-023/09.



Figuro 4: Skizo de paraboloido $z^2 = 4\rho(r - \rho)$, kaj du el ĝiaj geodezioj. A estas geodezio ne trairanta ekvatoron $r = \rho$ de paraboloido, kaj rilatas al samtempa geodezio de Ŝvarcŝild en figuro 1b. B estas geodezio kiu trairas, kaj rilatas al samtempa geodezio en figuro 3a.
Figura 4: Esboço do parabolóide $z^2 = 4\rho(r - \rho)$ e duas de suas geodésicas. A é uma geodésica que não atravessa o equador $r = \rho$, e se relaciona à geodésica de simultaneidade na figura 1b. B é uma geodésica que atravessa, e se relaciona à geodésica de simultaneidade na figura 3a.