

UM ALGORITMO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE  
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NO TEMPO

Abimael F. LOULA e João N.C. GUERREIRO

Laboratório de Cálculo

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Av. Wenceslau Braz, 71-fundos

Rio de Janeiro, RJ

A B S T R A C T

In this work a numerical integration scheme for a system of non-linear ordinary differential equations is presented. This system derived from a finite element spatial discretization; associated with the non-linear vibration of a continuum.

The convergence of the step-by-step integration algorithms depends on the stability of the approximation operator. In linear problems the stability condition for the central difference operator is  $\Delta t < \tau_K/\pi$ , where  $\tau_K$  is the shortest period of free vibration of the discretized problem. Therefore if the number of elements of the discretized system is increased to obtain a better approximation for the vibration modes, the stability condition requires a reduction of the time step size.

For most vibration problems, the lower modes are significantly the most important ones. For this reason a finite difference operator combined with a modal decomposition is derived, for which a less restrictive stability condition namely  $\Delta t < \tau_{N^*}/\pi$ , is obtained,  $N^*$  being the number of modes used to represent the solution.

#### R E S U M O

Neste trabalho apresenta-se um esquema numérico para integração do sistema de equações diferenciais, não lineares, associado a vibrações não lineares de meios contínuos. Este sistema de equações ordinárias resulta de uma aproximação de elementos finitos no domínio espacial.

A convergência dos algoritmos de integração passo-a-passo está condicionada à estabilidade do operador de aproximação. Assim por exemplo, em problemas lineares, a estabilidade do operador de diferença finita central está condicionada à escolha de um intervalo de integração  $\Delta t < \tau_K/\pi$ , em que  $\tau_K$  é o menor período de vibração livre do problema discretizado. Isto significa que aumentando-se o número de elementos do sistema discretizado, visando uma melhor representação dos modos de vibração e portanto da solução do problema, obrigatoriamente o intervalo de integração deverá ser reduzido a fim de atender a condição de estabilidade.

Considerando-se que, normalmente os primeiros modos são os predominantes, propõe-se um algoritmo de diferença finita combinado com uma decomposição modal, onde a condição de estabilidade fica reduzida a  $\Delta t < \tau_{N^*}/\pi$ , sendo  $N^*$  o número de modos usados na representação da solução.

## Introdução

O problema de vibrações de meios contínuos consiste na integração de um sistema de equações diferenciais parciais no domínio  $\mathcal{B} \times [0, T]$ , com condições de contorno definidos na fronteira de  $\mathcal{B}$  e condições iniciais em  $t=0$ .  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$  é o domínio espacial e  $[0, T]$  é o intervalo de definição da variável temporal.

Na obtenção de soluções aproximadas deste problema faz-se inicialmente uma discretização espacial, integrando-se a seguir o sistema de equações diferenciais ordinárias no tempo, resultante desta discretização. A discretização espacial geralmente é feita através do método dos elementos finitos ou através de autofunções definidas em todo o domínio espacial. A integração no tempo pode ser feita através da decomposição modal, no caso de problemas lineares, ou através de integração numérica, por meio de algoritmos de integração passo-a-passo, tipo diferença finita, no caso geral.

Neste trabalho apresenta-se um esquema para integração das equações diferenciais, resultantes da discretização espacial do problema de vibrações não-lineares, de sistemas contínuos, no qual se procura preservar a generalidade dos algoritmos de integração numérica e as vantagens computacionais da análise modal. Este esquema consiste no uso do algoritmo de diferença central combinado com uma decomposição modal sobre as primeiras autofunções do correspondente problema linear.

## 1. Convergência do algoritmo de diferença central.

A análise da convergência dos algoritmos de integração passo-a-passo, aplicados a problemas de valor inicial, normalmente é feita através do seguinte teorema:

**Teorema 1 (Teorema de Lax).** Dado um problema de valor inicial bem posto e um operador de diferença finita  $A(\Delta t)$  que satisfaça a condição de consistência, a aproximação dada por  $A(\Delta t)$  será convergente se e só se o operador for estável. [1]

Considere-se a equação de vibrações forçadas de um oscilador harmônico linear:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) \quad (1.1)$$

com condições iniciais:

$$x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (1.2)$$

Solução aproximada deste problema, no intervalo limitado  $[0, T]$ , será obtida via diferença finita central. Para tanto, o intervalo  $[0, T]$  é dividido em  $N$  intervalos,  $\Delta t = T/N$ , aproximando-se a derivada  $\ddot{x}_n$ , no instante  $t_n = n\Delta t$ , por:

$$\ddot{x}_n = \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\Delta t^2} \quad (1.3)$$

Substituindo (1.3) em (1.1) obtém-se a equação de diferença finita:

$$x_{n+1} = (2 - \omega^2 \Delta t^2)x_n - x_{n-1} + f_n \Delta t^2 \quad (1.4)$$

Definindo-se os vetores:

$$\tilde{X}_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \tilde{X}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{F}_n = \Delta t^2 \begin{bmatrix} f_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

pode-se escrever,

$$\tilde{X}_{n+1} = A \tilde{X}_n + \tilde{F}_n, \quad (1.6)$$

sendo a matriz  $A(\Delta t)$  dada por:

$$A(\Delta t) = \begin{bmatrix} 2 - \omega^2 \Delta t^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

A equação (1.6), aplicada recursivamente, permite escrever o vetor  $\tilde{X}_{n+1}$  em termos das condições iniciais, ou seja:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}; \quad \text{com} \quad x_1 = x_0 + \dot{x}_0 \Delta t \\ \tilde{X}_2 &= A \tilde{X}_1 + \tilde{F}_1 \\ \tilde{X}_3 &= A \tilde{X}_2 + \tilde{F}_2 = A^2 \tilde{X}_1 + A \tilde{F}_1 + \tilde{F}_2 \\ \tilde{X}_{n+1} &= A^n \tilde{X}_1 + \sum_{l=1}^n A^{n-l} \tilde{F}_l \end{aligned} \quad (1.8)$$

Pode-se agora, analisar a convergência da solução aproximada (1.8), com base no teorema de Lax.

a) O problema (1.1), com as condições iniciais (1.2), é bem posto, e tem solução exata, dada por:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \dot{x}_0 / \omega \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \quad (1.9)$$

b) A aproximação de diferença finita para a derivada  $\ddot{x}_n$  é consistente e da ordem de  $\Delta t^2$ . O que pode ser mostrado através do desenvolvimento de Taylor:

$$x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n \Delta t + \frac{1}{2!} \ddot{x}_n \Delta t^2 + \frac{1}{3!} \dddot{x}_n \Delta t^3 + \mathcal{O}(\Delta t^4)$$

$$x_{n-1} = x_n - \dot{x}_n \Delta t + \frac{1}{2!} \ddot{x}_n \Delta t^2 - \frac{1}{3!} \dddot{x}_n \Delta t^3 + \mathcal{O}(\Delta t^4)$$

donde:

$$\frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\Delta t^2} = \ddot{x}_n + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (1.10)$$

c) Finalmente, o esquema de diferença finita, representado pela equação (1.8), é estável, e portanto convergente, (Teorema 1), para todo  $f(t)$  limitado, se a sequência de operadores  $A, A^2, \dots, A^n$ , permanece limitada quando  $n \rightarrow \infty$  e  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Esta condição é equivalente a:

$$|\lambda_{1,2}| \leq 1 \quad (1.11)$$

sendo  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  os autovalores de  $\underline{A}$ , obtidos através da equação

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0 \quad (1.12)$$

A partir de (1.11) e (1.12) chega-se à condição de estabilidade, em termos do intervalo de integração, ou seja:

$$\Delta t < \frac{\tau}{\pi} \quad (1.13)$$

sendo  $\tau = 2\pi/\omega$ , o período das soluções homogêneas da equação (1.1); ou o período de vibrações livres do oscilador harmônico, cuja equação de movimento é (1.1).

Conclui-se, portanto, que a solução de diferença finita (1.8) converge para a solução de (1.1), quando  $\Delta t \rightarrow 0$  e  $n \rightarrow \infty$ , e que a aproximação é da ordem de  $\Delta t^2$ , para  $\Delta t < \tau/\pi$ .

## 2. Vibração de sistemas contínuos lineares.

No estudo de vibrações de meios contínuos, (equações diferenciais parciais), faz-se inicialmente uma discretização do problema, por meio de aproximação na variável espacial, conduzindo a um sistema de equações diferenciais ordinárias no tempo. Este sistema de equações é então integrado via algoritmos de integração passo-a-passo ou via análise modal, em certos casos particulares.

Nesta seção procura-se analisar as implicações da condição de estabilidade (1.13), quando o algoritmo de diferença central é utilizado com diferentes aproximações na variável espacial, em um problema simples de vibrações de meios contínuos.

Considere-se, por exemplo, o problema clássico de vibrações lineares de uma viga bi-apoiada, de comprimento  $L$ , massa por unidade de comprimento  $m$  e rigidez a flexão  $W$ , sujeita a ação de uma força distribuída  $p(x,t)$ .

A equação diferencial deste problema é:

$$m \ddot{u}(x,t) + W \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = p(x,t); \quad x \in [0,L] \text{ e } t \in [0,T] \quad (2.1)$$

com condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \text{e} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L,t) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

e condições iniciais, supostas homogêneas, isto é:

$$u(x,0) = \dot{u}(x,0) = 0. \quad (2.3)$$

Para obtenção de soluções aproximadas a equação (2.1) é escrita na forma variacional,

$$\int_0^L m \ddot{u} v \, dx + \int_0^L W \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} v \, dx = \int_0^L p(x,t) v \, dx$$

que, após integrações por partes, e considerado as condições de contorno (2.2), chega-se a:

$$\int_0^L m \ddot{u} v \, dx + \int_0^L W \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \, dx = \int_0^L p(x,t) v \, dx \quad (2.4)$$

onde,  $u \in V = \{u \in H^2[0,L], \text{ t.q. } u(0) = u(L) = 0\}$ , é a solução procurada, e satisfaz (2.4), para todo elemento  $v \in V$ .  $H^m$  é um espaço de Hilbert, de ordem  $m$ .

Dois tipos de funções de aproximação serão usados: autofunções do operador e aproximação de elementos finitos.

### 2.1 Aproximação por autofunções.

Neste caso o deslocamento  $u(x,t)$  é aproximado por:

$$u^N(x,t) = \sum_{n=1}^N \text{sen} \frac{n\pi x}{L} U_n(t) \quad (2.5)$$

em que  $\text{sen} \frac{n\pi x}{L}$ , são as autofunções do problema:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \lambda u \quad (2.6)$$

com as condições de contorno (2.2).  $U_n(t)$  são funções incógnitas, a serem determinadas.

Levando (2.5) à (2.3) e considerado que qualquer  $v \in V$  pode ser escrito como combinação das autofunções  $\text{sen} \frac{n\pi x}{L}$ , tem-se:



$$\begin{aligned}
& \int_0^L m \sum_{\ell=1}^N \ddot{U}_\ell(t) \operatorname{sen} \frac{\ell\pi x}{L} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx + \\
& + \int_0^L W \sum_{\ell=1}^N U_\ell(t) \frac{\ell^2 \pi^2}{L^2} \operatorname{sen} \frac{\ell\pi x}{L} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \\
& = \int_0^L p(x,t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx; \quad n=1,2,\dots,N \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Devido à ortogonalidade das autofunções, chega-se ao seguinte conjunto de problemas desacoplados:

$$\ddot{U}_n(t) + \lambda_n U_n(t) = f_n(t) \quad (2.8)$$

com  $U_n(0) = \dot{U}_n(0) = 0; \quad n=1,2,\dots,N$ .

Sendo  $\lambda_n$  e  $f_n(t)$  dados por:

$$\lambda_n = n^4 \lambda_1; \quad \lambda_1 = \frac{\pi^4}{L^4} \frac{W}{m} \quad (2.9)$$

$$f_n(t) = \frac{2}{mL} \int_0^L p(x,t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad (2.10)$$

a) Integração numérica.

Se se pretende obter solução de diferença finita para o conjunto de problemas (2.8), deve-se observar, em cada equação, a condição de estabilidade do algoritmo, que neste caso é:

$$(\Delta t)_n < \frac{\tau_n}{\pi}; \quad n = 1,2,\dots,N \quad (2.11)$$

em que  $\tau_n$  é o n-ésimo período de vibração da viga, dado por:

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{1}{n^2} \left( \frac{2\pi}{\omega_1} \right); \quad \omega_n = \sqrt{\lambda_n} \quad (2.12)$$

o que significa que o intervalo de integração crítico,  $(\Delta t_c)_n$ , decresce na proporção de  $1/n^2$ , ou seja:

$$(\Delta t_c)_n = \frac{1}{n^2} (\Delta t_c)_1 \tag{2.13}$$

b) Integração exata.

Conforme mostrado na equação (1.9), cada um dos problemas (2.8), tem solução exata,

$$U_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \text{sen } \omega_n(t-\tau) d\tau \tag{2.14}$$

o que permite escrever a aproximação  $u^N$ , como:

$$u^N(x,t) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\omega_n} \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \int_0^t f_n(\tau) \text{sen } \omega_n(t-\tau) d\tau \tag{2.15}$$

cujo erro é dado por:

$$|u^N - u| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \int_0^t f_n(\tau) \text{sen } \omega_n(t-\tau) d\tau \right| \tag{2.16}$$

Supondo que a função  $p(x,t)$  é dada por

$$p(x,t) = \begin{cases} 0; & \text{para } t < 0 \\ p_0; & \text{para } t \geq 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

tem-se:

$$f_n(t) = \frac{p_0}{n}; \quad p_0 = \frac{2p_0}{m}, \quad n=1,3,5,\dots \tag{2.18}$$

$$u^N(x,t) = \sum_{n=1,3,\dots} \frac{p_0}{n\omega_n^2} \text{sen } \frac{n\pi x}{L} (1 - \cos \omega_n t) \tag{2.19}$$

sendo o erro limitado por:

$$|u^N - u| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2p_0}{n\omega_n^2}$$

como,  $\omega_n^2 = n^4 \lambda_1$ , tem-se:

$$|u^N - u| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} K_1 \left(\frac{1}{n}\right)^5 \leq 5K_1 \left(\frac{1}{N+1}\right)^4$$

ou seja:

$$|u^N - u| \leq K_2 \left(\frac{1}{N+1}\right)^4 \tag{2.20}$$

A seguir obtém-se a solução aproximada de (2.3), via elementos finitos, procurando-se relacionar a estimativa do erro assim obtido, com a estimativa apresentada em (2.20).

### 2.2 Aproximação de elementos finitos.

Para construção da aproximação de elementos finitos, o domínio  $[0, L]$  é dividido em  $N_e$  elementos, interpolando-se o deslocamento  $u(x, t)$ , dentro de cada elemento. Neste caso se supõem os elementos iguais, com comprimento  $h = L/N_e$  e serão adotados como funções de interpolação os polinômios cúbicos de Hermite.

A partir dos interpolantes locais  $\varphi_i^{(e)}$  constroem-se as funções de interpolação global  $\Phi_i$ , que constituem uma base para o subespaço de aproximação  $S^h$ , ou subespaço de elementos finitos [2], então,

$$S^h = \text{span} \{ \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_K \}, \tag{2.21}$$

em que as  $\Phi_i$  são:

$$\begin{aligned} \Phi_{2n-1} &= \varphi_3^{(n-1)} \cup \Phi_1^{(n)} \\ \Phi_{2n} &= \varphi_4^{(n-1)} \cup \Phi_2^{(n)} \end{aligned}$$

sendo:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(e)} &= 1 - \frac{3x_e^2}{h^2} + \frac{2x_e^3}{h^3} & \varphi_3^{(e)} &= \frac{3x_e^2}{h^2} - \frac{2x_e^3}{h^3} \\ \varphi_2^{(e)} &= x_e - \frac{2x_e^2}{h} + \frac{x_e^3}{h^2} & \varphi_4^{(e)} &= -\frac{x_e^2}{h} + \frac{x_e^3}{h^2} \end{aligned}$$

Deste modo a solução aproximada, via elemento finito, é:

$$u^h = \sum_{i=1}^K \phi_i(x) D_i(t) \quad (2.22)$$

onde  $K$  é o número de graus de liberdade do modelo de elementos finitos, no caso  $K = 2Ne$ .

A aproximação (2.22) levada à equação variacional (2.3), conduz ao seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias no tempo

$$\underline{M} \ddot{\underline{D}} + \underline{K} \underline{D} = \underline{F}(t) \quad (2.23)$$

onde  $\underline{M}$  e  $\underline{K}$  são chamados matrizes de massa e rigidez respectivamente, cujos coeficientes são dados por:

$$M_{ij} = \int_0^L m \phi_i \phi_j dx \quad (2.24)$$

$$K_{ij} = \int_0^L W \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} dx \quad (2.25)$$

O vetor  $\underline{D}$ , contém as funções incógnitas  $D_i(t)$ .  $\underline{F}$  é o vetor de cargas, cujos componentes são,

$$F_i = \int_0^L p(x,t) \phi_i dx \quad (2.26)$$

Associado à equação (2.23), pode-se construir o problema de autovalor algébrico:

$$\underline{K} \underline{\bar{D}} = \lambda^h \underline{M} \underline{\bar{D}} \quad (2.27)$$

que é a forma aproximada do problema (2.6).

Os autovalores  $\lambda_\ell^h$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, K$ , são aproximações dos autovalores exatos  $\lambda_\ell$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, K$ , enquanto que as

autofunções aproximadas  $u_\ell^h$ , são dados por:

$$u_\ell^h = \sum_{i=1}^k \bar{\phi}_i(\bar{D}_\ell)_i \quad (2.28)$$

$u_\ell^h$  constitui uma aproximação para a autofunção exata

$$u_\ell = \text{sen } \frac{\ell\pi x}{L}.$$

As estimativas dos erros de aproximação, no cálculo dos autovalores e autovetores, sobre um subespaço  $S^h$ , de elementos finitos, podem ser obtidas a partir de teoremas desenvolvidos por Strang e Fix [2], apresentados a seguir.

**Teorema 2.** Se  $S^h \subset H^m$  é um espaço de elementos finitos de grau  $(k-1)$ , então existe uma constante  $C_1$  tal que os autovalores aproximados  $\lambda_\ell^h$  são limitados, para  $h$  pequeno, por:

$$\lambda_\ell \leq \lambda_\ell^h \leq \lambda_\ell + C_1 h^{2(k-m)} \lambda_\ell^{k/m} \quad (2.29)$$

**Teorema 3.** Se  $S^h \subset H^m$  é um espaço de elementos finitos de grau  $(k-1)$  e  $\lambda_\ell$  é um autovalor distinto, então para  $h$  pequeno:

$$\|u_\ell - u_\ell^h\|_0 = \left( \int_0^L (u_\ell - u_\ell^h)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_2 [h^k + h^{2(k-m)}] \lambda_\ell^{k/2m} \quad (2.30)$$

Se  $\lambda_\ell$  é um autovalor repetido, então as autofunções  $u_j$  podem ser escolhidas de sorte que estas estimativas sejam ainda válidas.

Para o problema em estudo, em que  $m = 2$  e  $k = 4$  (polinômios cúbicos), estas estimativas são:

- para os autovalores,

$$\lambda_l \leq \lambda_l^h \leq \lambda_l + c_1 h^4 \lambda_l^2 \quad (2.31)$$

- para as autofunções,

$$\|u_l - u_l^h\|_0 \leq c_2 h^4 \lambda_l \quad (2.32)$$

Do mesmo modo que no caso anterior, o sistema de equações (2.23), pode ser integrado aproximadamente (integração passo-a-passo) ou exatamente (decomposição modal).

a) Integração numérica da equação aproximada.

A aplicação do esquema de diferença central à equação (2.23), conduz ao sistema de equações algébricas,

$$\underline{M} \underline{D}_{n+1} = (\underline{K} \underline{D}_n + \underline{F}_n) \Delta t^2 + \underline{M}(2\underline{D}_n - \underline{D}_{n-1}) \quad (2.33)$$

em que  $\underline{D}_{n+1}$  é o vetor de incógnitas.

É importante observar que neste caso a condição de estabilidade, e consequentemente de convergência, do algoritmo é,

$$\Delta t < \tau_K^h / \pi \quad (2.34)$$

em que  $\tau_K^h$  é o menor período de vibração do problema discretizado, isto é:

$$\tau_K^h = 2\pi / \omega_K^h; \quad \omega_K^h = \sqrt{\lambda_K^h} \quad (2.35)$$

b) Integração exata da equação aproximada.

Uma vez resolvido o problema de autovalor aproximado (2.27), e conhecidos os autovalores e autovetores aproximados,  $\lambda_l^h$  e

$\bar{D}_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, K$ , pode-se desacoplar o sistema (2.33), através da seguinte transformação de coordenadas:

$$\underline{D} = \underline{Q} \underline{U} \quad (2.36)$$

em que as colunas da matriz  $\underline{Q}$  são os autovetores  $\bar{D}_l$ , isto é:  $Q_{jl} = (\bar{D}_l)_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, K$ , esta matriz dos autovetores é conhecida em vibrações como matriz modal.

Substituindo (2.36) em (2.23) pré multiplicada por  $\underline{Q}^T$ , tem-se:

$$\underline{Q}^T \underline{M} \underline{Q} \ddot{\underline{U}} + \underline{Q}^T \underline{K} \underline{Q} \underline{U} = \underline{Q}^T \underline{F}(t) \quad (2.37)$$

Se se consideram autovetores  $\bar{D}_l$ , normalizados em relação à matriz de massa  $\underline{M}$ , e tendo em vista a ortogonalidade dos mesmos, tem-se:

$$\underline{Q}^T \underline{M} \underline{Q} = \underline{I} \quad \text{e} \quad \underline{Q}^T \underline{K} \underline{Q} = [\lambda^h] \quad (2.38)$$

portanto, o sistema (2.37) é desacoplado em  $k$  equações,

$$\ddot{U}_l + \lambda_l^h U_l = f_l^h \quad (2.39)$$

com  $U_l(0) = \dot{U}_l(0) = 0$ ;  $l = 1, 2, \dots, k$ .

Cada uma destas equações pode ser integrada exatamente conforme mostrado anteriormente. Uma vez obtida a solução nas coordenadas modais  $U_l$ , obtém-se a solução nas variáveis iniciais do problema,  $D_l$ , através da transformação (2.36).

Este procedimento é conhecido como análise modal (ou decomposição espectral) e é muito comum no estudo de vibrações de sistemas lineares.

Deve-se notar que na aproximação de elementos finitos,

dois tipos de erro estão envolvidos:

1) erro de aproximação das autofunções, conforme mostrado em (2.32)

2) erro de truncamento na série de funções de aproximação, devido ao fato de se trabalhar num subespaço de dimensão finita. Este erro é semelhante ao apresentado em (2.16).

Além disto, de acordo com (2.32), o erro de aproximação nas autofunções  $u_l^h$ , crescem com o autovalor  $\lambda_l$ , como  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$ , este erro será maior nas autofunções superiores, o que significa que na obtenção de soluções aproximadas, via análise modal, não vale a pena levar em conta a contribuição de todos os modos aproximados  $u_l^h$ , uma vez que o erro de aproximação dos modos superiores pode ser da ordem do erro de truncamento na série de autofunções.

Seja  $K$  a dimensão do subespaço  $S^h$  de elementos finitos e  $u^h$  a aproximação de elementos finitos obtida com todas as  $K$  autofunções aproximadas,  $u_l^h \in S^h$ , e  $u^{*h}$  a aproximação obtida com as  $N^*$  primeiras autofunções aproximadas,  $u_l^h \in S^h$ . Seja, ainda,  $u^N$  a aproximação obtida com as  $N$  primeiras autofunções exatas. Deste modo pode-se definir:

$$\|e^h\|_0 = \|u^h - u\|_0 \tag{2.41}$$

$$\|e^{*h}\|_0 = \|u^{*h} - u\|_0 \tag{2.42}$$

$$\|e^N\|_0 = \|u^N - u\|_0 \tag{2.43}$$

Do ponto de vista prático, colocam-se então as seguintes questões:



1) Dada a dimensão  $K$  de  $S^h$ , qual o número mínimo de autofunções aproximadas,  $N^*$  tal que  $\|e^{*h}\|_0$  seja da mesma ordem de  $\|e^h\|_0$ .

2) Dado  $N$ , qual dimensão  $K$ , de  $S^h$ , tal que  $\|e^h\|_0$  seja da mesma ordem de  $\|e^N\|_0$ .

Respostas precisas a estas perguntas, só são possíveis com o conhecimento da solução exata  $u$ , portanto só em casos particulares. Entretanto, a partir das estimativas (2.20) e (2.32), algumas conclusões podem ser obtidas:

1) A velocidade de convergência da solução aproximada  $u^N$  é maior que a velocidade de convergência da autofunção aproximada  $u_N^h$ .

A partir de (2.20) e (2.32) tem-se:

$$\|u^N - u\|_0 \leq \alpha_1 \left(\frac{1}{N+1}\right)^4$$

$$\|u_N - u_N^h\| \leq c_2 h^4 \lambda_N$$

Considerado que  $h = L/Ne$  e  $\lambda_N = N^4 \lambda_1$ , obtém-se:

$$\|u_N - u_N^h\| \leq \alpha_2 \left(\frac{1}{Ne}\right)^4 N^4 \tag{2.44}$$

Conclui-se portanto que para se ter estimativas de mesma ordem deve-se ter  $Ne > N$  e  $K \gg N$ , já que para o problema em estudo  $K = 2Ne$ .

2) Uma vez que, convergência de  $u^h$  para  $u$ , implica em, convergência de  $u_\ell^h$  para  $u_\ell$ , deve-se ter  $N \leq N^* \ll K$ , sempre que  $\|e^N\|_0$ ,  $\|e^{*h}\|_0$  e  $\|e^h\|_0$  forem da mesma ordem.

3) Do ponto de vista numérico pode-se definir uma ordem de

preferência, em termos de menor esforço computacional:

- I - aproximação via autofunções exatas
- II - aproximação de elementos finitos e integração exata das equações diferenciais resultantes, via análise modal
- III - aproximação de elementos finitos e integração aproximada das equações diferenciais resultantes.

Evidentemente que a classe de problemas estudados em I, está contida em II, que por sua vez está contida em III. A classe I é extremamente restrita, pois somente em casos muito particulares se pode conhecer as autofunções  $u_i$ .

No estudo de problemas reais de engenharia, é comum a utilização de aproximação de elementos finitos combinada com análise modal, no caso em que o sistema de equações diferenciais resultantes pode ser desacoplado pela matriz modal, (classe II).

Quando não é possível desacoplar o sistema de equações diferenciais resultante, utiliza-se a integração numérica no tempo, (classe III). Neste último caso estariam os problemas de vibrações não-lineares e mesmo lineares, com coeficientes dependentes do tempo (sistemas não autônomos).

### 3. Vibração de sistemas contínuos não lineares.

Considere-se ainda o problema anterior, admitindo-se, no entanto, que o material da viga tem um comportamento elastoplástico perfeito. Neste caso a forma variacional da equa-

ção de movimento é:

$$\int_0^L m \ddot{u} v \, dx + \int_0^L \int_{\Omega} \sigma \epsilon(v) \, d\Omega \, dx = \int_0^L p(x,t)v \, dx \quad (3.1)$$

onde  $\Omega$  é a região definida pela seção transversal da viga,  $\sigma$  e  $\epsilon$  representam os campos de tensão e deformação na direção longitudinal, sendo

$$\epsilon(v) = z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.2)$$

em que  $z$  é um eixo no plano de flexão, perpendicular a  $x$  e com origem na linha neutra.

A lei de comportamento, relação tensão x deformação, para materiais elasto-plásticos perfeitos é dada, em forma infinitesimal, por:

$$d\sigma = E d\epsilon \quad \text{para} \quad \begin{cases} |\sigma| < \sigma_y & \text{ou} \\ |\sigma| = \sigma_y & \text{e } \sigma d\sigma < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

ou

$$d\sigma = 0 \quad \text{para} \quad |\sigma| = \sigma_y \quad \text{e} \quad \sigma d\sigma \geq 0 \quad (3.4)$$

Chamando de  $\Omega_e$  a região de  $\Omega$  tal que  $d\sigma = E d\epsilon$  e  $\Omega_p$  a região de  $\Omega$  tal que  $d\sigma = 0$ , (obviamente,  $\Omega_e \cup \Omega_p = \Omega$ ), a equação (3.1), pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \int_0^L m \ddot{u} v \, dx + \int_0^L W \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \, dx - \int_0^L \int_{\Omega_p} E \epsilon(u) \epsilon(v) \, d\Omega \, dx = \\ = \int_0^L p(x,t)v \, dx - \int_0^L \int_{\Omega_p} \sigma_y \epsilon(v) \, d\Omega \, dx \end{aligned} \quad (3.5)$$

em que se supôs o módulo de elasticidade  $E$  e a seção transversal da viga, independentes de  $x$ . A constante  $W$ , rigidez a flexão, é dada por

$$W = E \int_{\Omega} z^2 d\Omega \tag{3.6}$$

A não linearidade da equação (3.5), decorre do fato de não se conhecer a priori a região plástica  $\Omega_p$ . Neste caso, o algoritmo de diferença finita é particularmente conveniente, posto que, de sua aplicação à equação (3.5), resulta automaticamente um sistema algébrico linear, em cada intervalo de integração, (consequência natural dos algoritmos explícitos).

Aplicando-se o esquema de diferença central (1.3) à equação (3.5) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^L m u_{n+1} v dx = \int_0^L m (2u_n - u_{n-1})v dx + \\ & + \Delta t^2 \left\{ \int_0^L W \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x^2} dx - \int_0^L \int_{\Omega_p(n)} E \epsilon(u_n) \epsilon(v) d\Omega dx \right\} + \\ & + \Delta t^2 \left\{ \int_0^L p(x, t_n) v dx - \int_0^L \int_{\Omega_p(n)} \sigma_y \epsilon(v) d\Omega dx \right\} \tag{3.7} \end{aligned}$$

Em (3.7) a única incógnita é  $u_{n+1}$ .  $\Omega_p(n)$  é conhecida, uma vez que em  $t_n$  já são conhecidos os campos de deslocamento  $u_n$ , e conseqüentemente  $\epsilon(u_n)$  e  $\sigma_n$ .

Da aplicação do método dos elementos finitos a equação (3.7), resulta o sistema de equações algébricas:

$$\tilde{M} \tilde{D}_{n+1} = \tilde{R}_n \tag{3.8}$$

sendo

$$\tilde{R}_n = \Delta t^2 [\tilde{K} - \tilde{K}_p(n)] \tilde{D}_n + \tilde{M}(2\tilde{D}_n - \tilde{D}_{n-1}) + \Delta t^2 (\tilde{F}_n - \tilde{P}_n) \tag{3.9}$$

É fácil mostrar que a condição de estabilidade (2.34), do correspondente problema linear  $(\Delta t_c = \frac{\tau_k^h}{\pi})$ , é suficiente

para o esquema (3.8), uma vez que em cada intervalo  $\Delta t$ , tem-se, associado a (3.8), o problema de autovalor linear:

$$\underline{M} \underline{D} = \lambda^h(n) [\underline{K} - \underline{K}_p(n)] \underline{\bar{D}} \quad (3.10)$$

como a matriz  $\underline{K}_p(n)$  é sempre positiva, o que pode ser observado diretamente em (3.7),

$$\underline{D}^T \underline{K}_p(n) \underline{D} \geq 0; \quad \forall \underline{D} \in \mathbb{R}^K \quad (3.11)$$

consequentemente,  $\lambda_l^h(n) \leq \lambda_l^h$ , o que implica em:  $\Delta t_c^* \geq \Delta t_c$  do correspondente problema linear, (ver equação (3.34)).

Interpretado fisicamente, significa dizer que a estrutura fica menos rígida após a plastificação e consequentemente passa a ter frequências naturais menores, e períodos de vibração mais longos.

Permanece, portanto, a questão da estabilidade condicional, e surge outra: mesmo no caso não linear, é possível tirar proveito da decomposição modal? Em princípio a resposta seria não, uma vez que a matriz modal não desacopla o problema não linear.

Nickell [3] propõe um esquema de decomposição modal incremental, no qual se resolve o problema de autovalor (3.10), em instantes discretos  $t_n$ . Dentro de cada incremento,  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ , a solução é obtida, como no caso linear, tomando-se apenas os  $N^*$  primeiros autovetores de (3.10). Apesar do inconveniente de ter que calcular o problema de autovalor (3.10) a cada instante  $t_n$ , Nickell, conclue que este esquema tem vantagem computacional sobre a integração direta do sistema de equações diferenciais, quando  $N^* \ll K$ .

Propõe-se, a seguir, um esquema para integração do

sistema das equações diferenciais, resultante da discretização do problema de vibrações não lineares de sistemas contínuos, no qual se procura preservar a generalidade dos algoritmos de integração direta e as vantagens computacionais da análise modal. Este esquema consiste no uso do algoritmo de diferença central combinado com uma decomposição modal sobre as  $N^*$  primeiras autofunções do correspondente problema linear.

Seja  $Q^*$ , a matriz modal constituída dos  $N^*$  primeiros autovetores do problema de autovalor (2.27), isto é:

$$Q_{jt}^* = (\bar{D}_t)_j, \quad j=1,2,\dots,N^* \quad (3.12)$$

Aplicando, à equação (3.8), a transformação de coordenada,

$$\underline{D}_{n+1} = \underline{Q}^* \underline{U}_{n+1} \quad (3.13)$$

tem-se,

$$\underline{M} \underline{Q}^* \underline{U}_{n+1} = \underline{R}_n, \quad (3.14)$$

pré-multiplicando (3.14) por  $\underline{Q}^{*T}$ , e considerando (49), chega-se a

$$\underline{U}_{n+1} = \underline{Q}^{*T} \underline{R}_n \quad (3.15)$$

finalmente, voltando às coordenadas iniciais, obtém-se o algoritmo proposto:

$$\underline{D}_{n+1} = \underline{Q}^* \underline{Q}^{*T} \underline{R}_n \quad (3.16)$$

Pergunta-se:

- 1) O esquema (3.16) é convergente?
- 2) Sendo convergente, que vantagens tem (3.16) frente a (3.8)?

A primeira pergunta responde-se afirmativamente, sempre que (3.8) for convergente, porque quando  $N^*$  tende a  $K$ , conseqüentemente  $\underline{Q}^*$  tende a  $\underline{Q}$  e  $\underline{Q}\underline{Q}^T$  nada mais é que a inversa da matriz  $\underline{M}$ .

Naturalmente que (3.16) só tem vantagens frente a (3.8) quando  $N^* \ll K$ . Isto é, para problemas em que a velocidade de convergência da solução aproximada, via autofunções da parte linear do operador, for maior que a velocidade de convergência da aproximação de elementos finitos. Este fato é de se esperar, principalmente em problemas fracamente não-lineares.

Além disso, como a aproximação via autofunções, é uma aproximação global, enquanto que a aproximação de elementos finitos é local, é de se esperar que a relação  $N^*/K$ , decresça na medida em que a dimensão do problema cresce, e também na medida em que aumenta o número de vínculos do problema. Por exemplo, é de se esperar relação  $N^*/K$  menor para uma viga contínua, do que para uma viga de um só vão.

Outro dado importante é a função carregamento  $p(x,t)$ . Nos casos mais comuns, a projeção do carregamento é sempre maior sobre os primeiros modos.

Para  $N^* \ll K$ , o algoritmo proposto em (3.16) tem, frente ao esquema convencional de diferença central (3.8), duas vantagens principais:

- 1) a estabilidade de (3.16) está condicionada a  $\Delta t < \tau_{N^*}/\pi$ , enquanto que em (3.8) esta condição é  $\Delta t < \tau_K/\pi$ , portanto (3.16) permite o uso de intervalos de integração maiores. Por exemplo, para o problema em estudo, os intervalos de in-

tegração críticos estão relacionados por:

$$(\Delta t_c)_{N^*} \geq \left(\frac{K}{N^*}\right)^2 (\Delta t_c)_K \quad (3.17)$$

2) reduz o número de graus de liberdade, eliminando os modos mais elevados, evitando que estes modos perturbem a solução.

A desvantagem de (3.16) frente a (3.8) é a necessidade de se calcular o problema de autovalor (2.27). Entretanto este cálculo só precisa ser feito uma vez, podendo-se através de rotinas de iteração de subespaço, calcular apenas os  $N^*$  primeiros autovalores e autovetores. Além disto, na definição do intervalo de integração é importante o conhecimento das frequências de vibração do problema linear.

#### 4. Exemplo numérico.

Visando a comprovação de alguns dos resultados e conclusões apresentados anteriormente, analisou-se a viga mostrada na figura 1, usando-se diferentes discretizações de elementos finitos, para o cálculo dos autovalores e autovetores, e da resposta dinâmica.



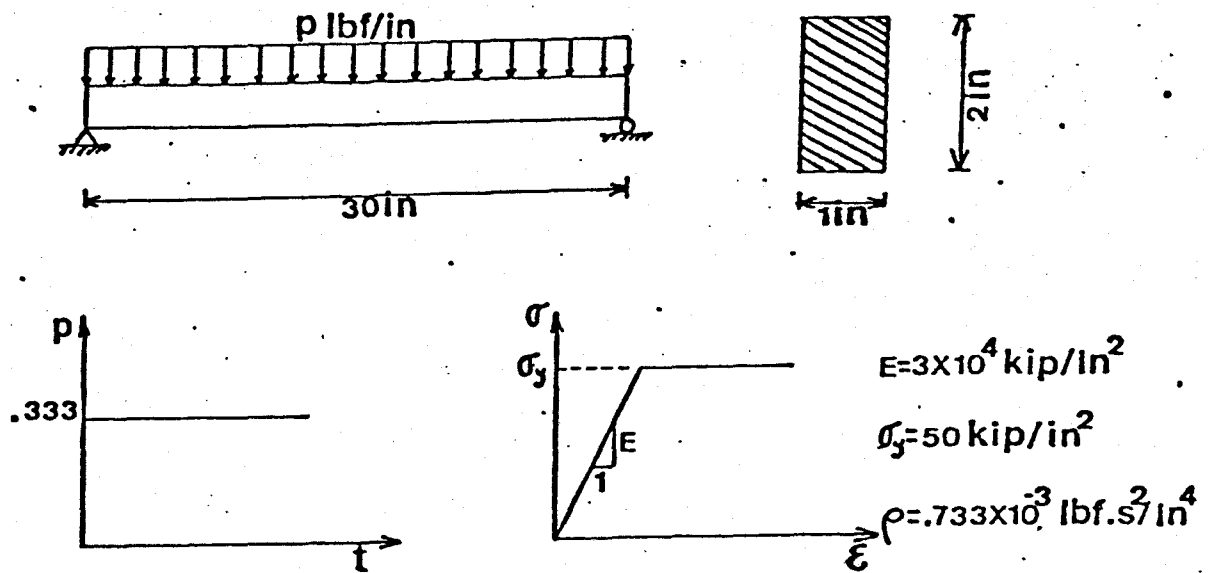


Figura 1 - Viga bi-apoiada com carga uniforme. Variação da carga no tempo. Diagrama tensão x deformação.

4.1 Cálculo dos autovalores.

Os autovalores e autovetores exatos, deste problema, são conhecidos e portanto pode ser feita a comprovação das estimativas obtidas para a aproximação de elementos finitos.

Conforme visto anteriormente, deve-se esperar no cálculo dos autovalores aproximados  $\lambda_\ell^h$ , aproximações da ordem de,

$$\frac{\lambda_\ell^h - \lambda_\ell}{\lambda_\ell^h} \leq c_1 h^4 \lambda_\ell \tag{4.1}$$

ou, em termos de logaritmos,

$$\log(\lambda_\ell^h - \lambda_\ell) - \log \lambda_\ell \leq 4 \log h + \log c_1 \tag{4.2}$$

o que significa que num gráfico  $\log h \times \log(\lambda_\ell^h - \lambda_\ell)$ ,

(4.2) é a equação de uma reta com coeficiente angular 4.

A figura 2 mostra a confirmação destas estimativas pa

ra os quatro primeiros autovalores, calculados com malhos de: 2, 3, 4, 5, 6 e 8 elementos iguais. Pode-se notar que a medida que  $h$  diminui, as linhas tendem a retas com coeficiente angular 4.

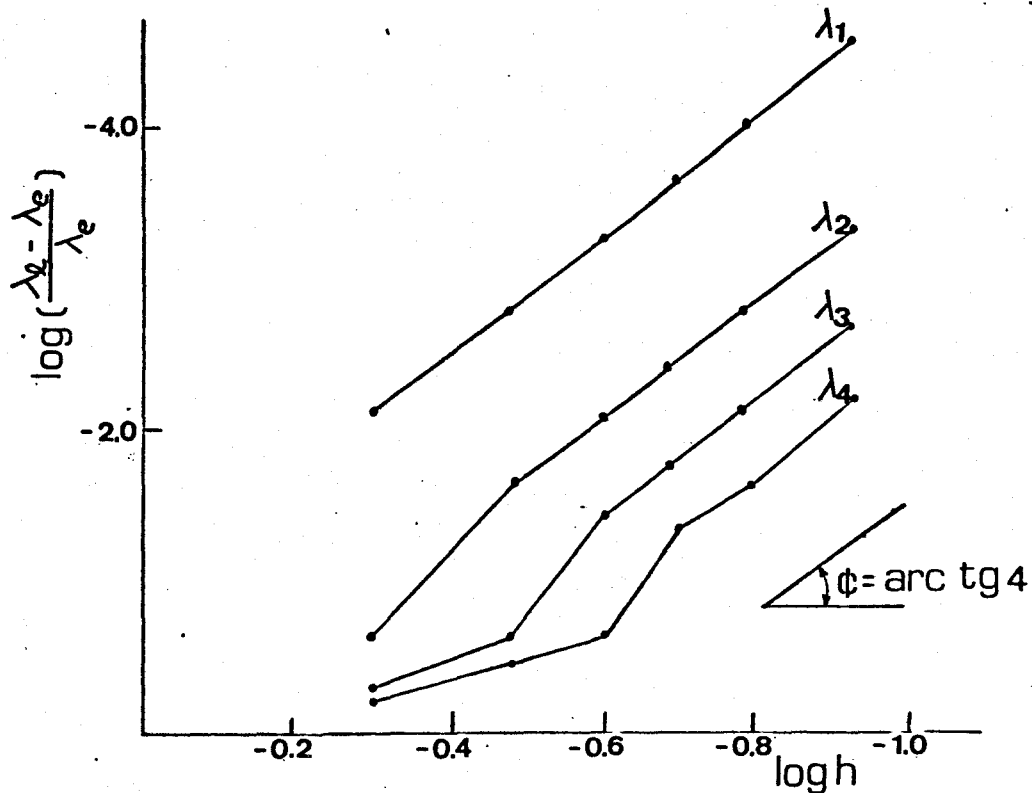


Figura 2 - Taxa de convergência dos auto-valores aproximados

#### 4.2 Cálculo da resposta dinâmica.

Para o cálculo da resposta dinâmica, utilizou-se uma malha de 6 elementos iguais, fazendo-se uso da simétrica em relação a  $L/2$ .

Procurando confirmar a convergência do algoritmo de diferença finita combinado com decomposição modal, equação (3.16), calculou-se a resposta elastoplástica da viga mostrada na figura 1, usando-se diferentes números de modos do problema elástico. Os resultados da análise, para os deslocamentos a meio vão, estão mostrados na figura 3. Verifica-

se que com apenas cinco modos ( $\Delta t = 1.25 \times 10^{-5}$  seg.) os resultados obtidos já são muito próximos daqueles calculados com o algoritmo de diferença finita convencional ( $\Delta t = 2.0 \times 10^{-6}$  seg.). Enquanto que a solução obtida com sete modos ( $\Delta t = 6.25 \times 10^{-3}$  seg.) praticamente coincide com a solução de diferença finita.

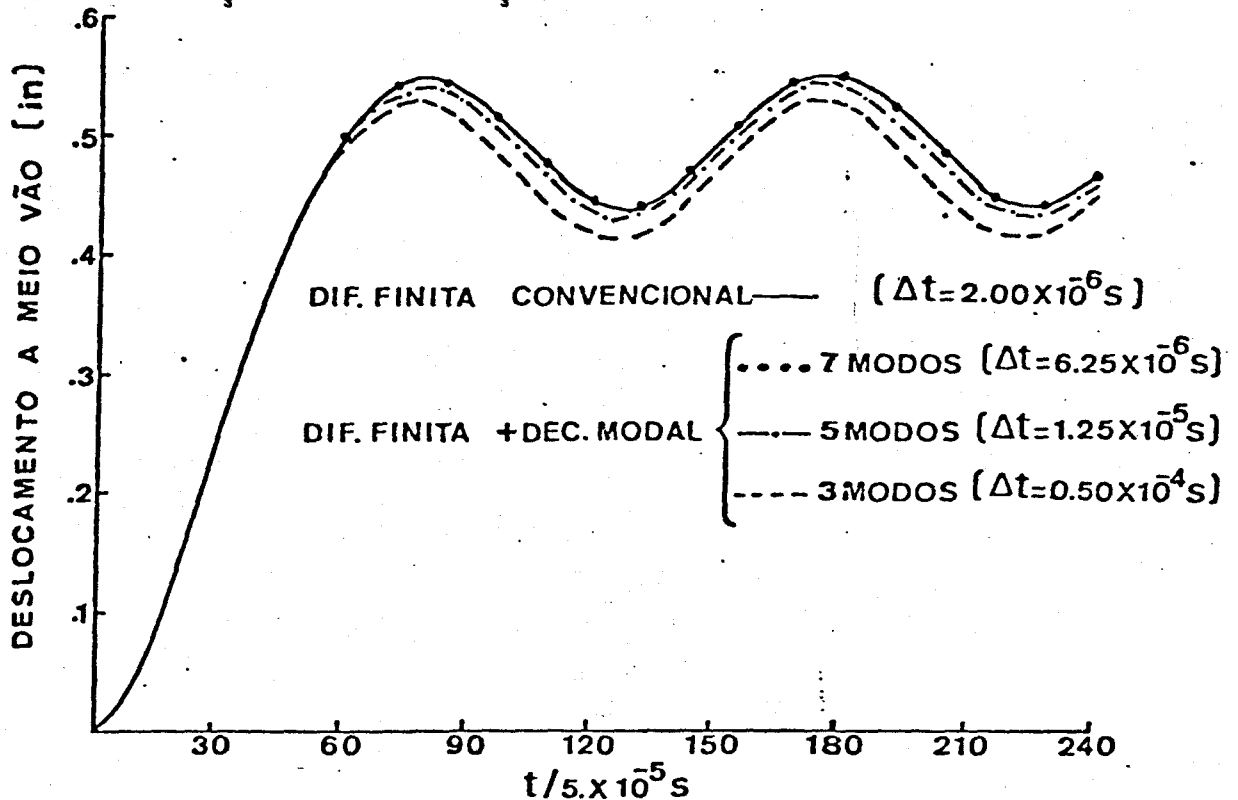


Figura 3 - Convergência do algoritmo de diferença finita proposto.

##### 5. Conclusões.

No estudo de vibrações não lineares, desde que se possa mostrar que a velocidade de convergência de soluções aproximadas via autofunções da parte linear do operador, seja maior que a velocidade de convergência da aproximação de elementos finitos, pode ser vantajosa a mudança da representação da solução aproximada da base de elementos finitos pa

2

ra a base de autofunções, (decomposição modal).

A conclusão anterior é extensível a vibrações de sistemas lineares não autônomos. Neste caso as autofunções são da parte constante (independente do tempo) do operador.

Esta mudança de base só terá sentido nos casos em que o número de autofunções, necessárias para representar satisfatoriamente a solução, seja pequeno comparado com o número total de graus de liberdade do modelo de elementos finitos.

Da decomposição modal resulta um sistema de equações diferenciais acopladas (apenas a parte linear ou a parte constante ficam desacoplados), porém de menor ordem que o sistema original. Este sistema resultante é então integrado via algoritmos de integração passo-a-passo. No caso do algoritmo de diferença central (condicionalmente estável), a condição de estabilidade passa a ser menos rigorosa, permitindo o uso de intervalos de integração maiores.

## Bibliografia

- [1] Lax, P.D. and Richtmyer, R.D., Survey of the stability of Linear Finite Difference Equations, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. IX, pp.267-293, 1956.
- [2] Strang, G. and Fix, G.J., An analysis of the finite element method. Prentice-Hall, USA (1973).
- [3] Nickell, R.E., Nonlinear Dynamics by mode superposition. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 7, 107-129, 1976.