

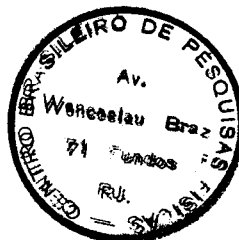
A0011/77

ABR, 1977

UM PROBLEMA NÃO LINEAR EM ENGENHARIA DE FUNDAÇÕES

Marco Antonio Raupp

*Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rio de Janeiro - Brasil*



UM PROBLEMA NÃO LINEAR EM ENGENHARIA DE FUNDAÇÕES

Marco Antonio Raupp
Laboratório de Cálculo
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Av. Wenceslau Braz, 71
20.000 Rio de Janeiro, RJ

ABSTRACT

In this paper the first results of a study on the dynamics of a pile driven into the ground under the action of a pile hammer are presented. They refer to the mathematical and numerical analysis of the problem.

UM PROBLEMA NÃO LINEAR EM ENGENHARIA DE FUNDAÇÕES

Marco A. Raupp
Laboratório de Cálculo
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Av. Wenceslau Braz, 71
Rio de Janeiro, RJ

O objetivo desta nota é apresentar e discutir alguns resultados obtidos na análise de um problema de visco-elasticidade dinâmica com atrito, que aparece em Engenharia de Fundações. Tais resultados referem-se tanto à análise teórica do modelo adotado para o problema, como também à análise numérica. São resultados parciais de uma pesquisa ainda em andamento no Laboratório de Cálculo do CBPF, na qual estão envolvidos, além do autor, os Professores Raul Antonino Feijoo e Carlos Antonio de Moura.

O problema consiste em analisar o movimento de uma estaca penetrando no solo, sob o efeito das forças características de um bate-estacas, resistência do solo e atrito na superfície de contato. Suporemos a estaca unidimensional, o que é um modelo próprio para alguns tipos de estacas metálicas (vide obras do Metrô no Rio de Janeiro...). Em consequência, a força de atrito terá que ser simulada por uma força de massa e não superficial, e a resistência do solo por uma força atuando na ponta penetrante da estaca.

A situação é a dos diagramas na Fig. 1 abaixo, onde estão representados os estados de movimento inicial e num instante $t > 0$, relacionados pelo operador movimento

$$\pi_t : [0, 1] \rightarrow [u(0, t), 1+u(1, t)] ,$$

que leva um ponto x da configuração inicial da estaca na posi

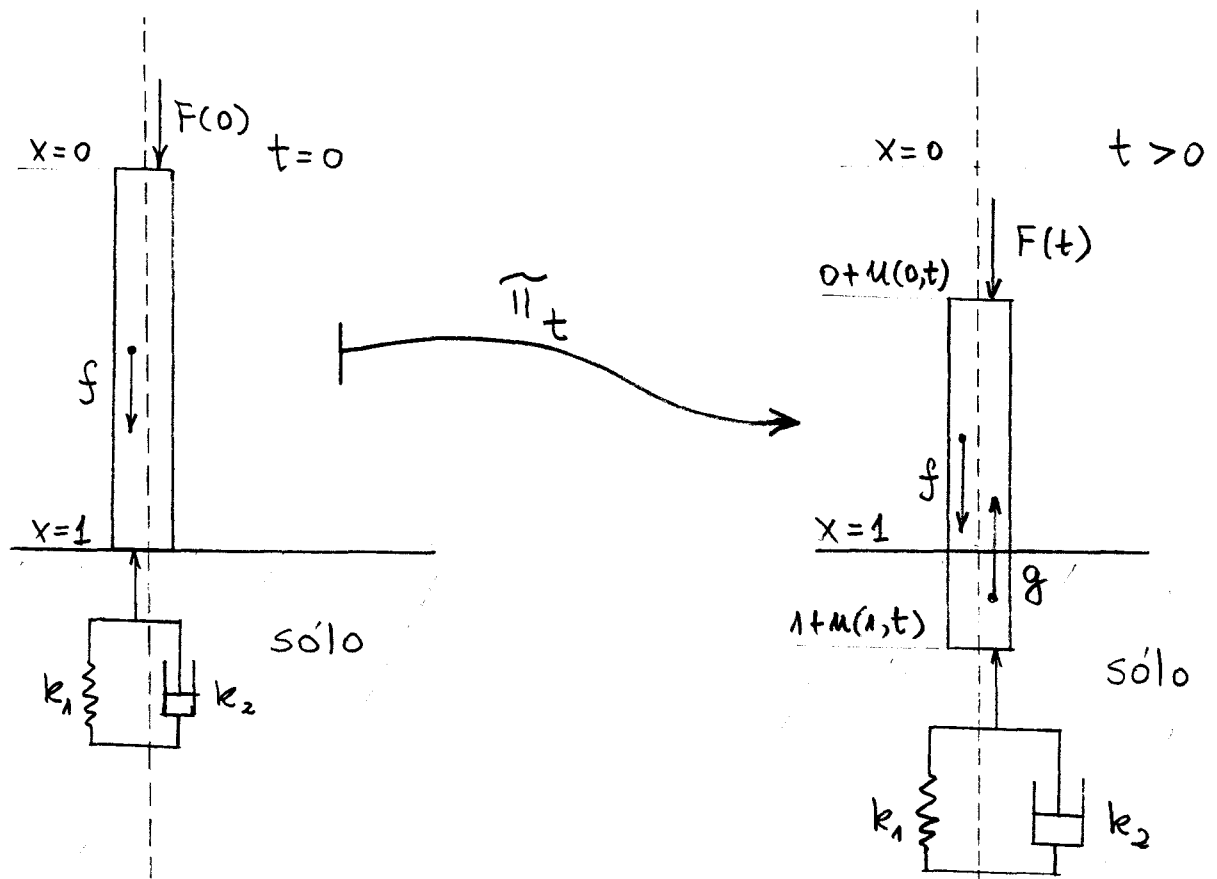


Fig. 1

ção $x+u(x,t)$, onde $u(x,t)$ é o campo de deslocamentos. As forças que atuam na estaca são:

$F(t)$ - força transmitida ao sistema pelo martelo do bate-estacas; sua ação se exerce sempre na "partícula" $x = 0$;

$f(x,t)$ - força de massa; é devida a um campo externo;

$-k_1 u(1,t)$ - força de reação resultante das propriedades elásticas do solo; sua ação se exerce sempre na ponta da

estaca, ou seja, na partícula $x = 1$;

$-k_2 \dot{u}(1,t)$ - força de reação resultante da viscosidade do solo;
sua ação se exerce sempre na ponta da estaca;

$g(x,t)$ - força de atrito que só começa a atuar numa "partícula" x quando esta entra no solo, isto é, quando $x + u(x,t) > 1$; isto implica de imediato numa representação na forma $g = H(x+u-1) \cdot \tilde{g}$, onde H é a função de Heaviside e \tilde{g} seria o valor mesmo da força.

A força de atrito é uma força de ação de contato superficial, mas neste modelo unidimensional da estaca ela será uma força de massa, o que é uma idéia natural para tal situação. O seu comportamento é dado pela lei de Coulomb, que diz (vide Duvaut-Lions [1]): "num instante t e num ponto qualquer da região de contato,

$$(i) \text{ se } |g| < F |F_N| \text{ então } \dot{u} = 0,$$

(1)

$$(ii) \text{ se } |g| = F |F_N| \text{ então existe } \lambda \geq 0 \text{ tal que } \dot{u} = -\lambda g,$$

onde F é o coeficiente de atrito e F_N é a força normal à estrutura". No nosso caso, F_N é a pressão exercida pelo solo sobre a estaca e daí

$$(2) \quad |F_N| = K\gamma(x+u-1),$$

onde K é o coeficiente de Rankine ($0,4 \leq K \leq 3$), e γ é o pe

so específico do solo.

A lei de Coulomb (1) (i) — (1) (ii) implica na seguinte relação, que é satisfeita para qualquer tempo t em todos os pontos de contato:

$$(3) \quad g(v - \dot{u}) + F |F_N| (|v| - |\dot{u}|) \geq 0 ,$$

onde \dot{u} é a velocidade real e v seria uma "velocidade virtual".

Invocamos neste ponto o "princípio das potências virtuais", pois para o estudo de problemas de atrito é necessário postular-se condições de equilíbrio "globais". Segundo P. Germain [2], "num referencial Galileano, e para uma cronologia absoluta, a potência virtual associada às forças de inércia de um sistema S é igual à potência desenvolvida por todas as forças aplicadas ao sistema, tanto externas quanto internas, qualquer que seja o movimento virtual de S considerado". No nosso caso, supondo a área e o perímetro da seção transversal da estaca iguais a 1,

$$(4) \quad \int_0^1 \rho \ddot{u} (v - \dot{u}) dx = - \int_0^1 \sigma (v_x - \dot{u}_x) dx$$

$$+ [-k_1 u(1, t) - k_2 \dot{u}(1, t)] [v(1) - \dot{u}(1, t)]$$

$$+ F(t) [v(0) - \dot{u}(0, t)] +$$

$$+ \int_0^1 f (v - \dot{u}) dx$$

$$+ \int_0^1 H(x+u-1) \tilde{g} (v - \dot{u}) dx ,$$

onde σ = tensor de tensões, ρ = densidade da estaca ($\equiv 1$, por simplicidade), $v - \dot{u}$ = velocidade virtual e $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$.

Supondo uma lei de comportamento linear para a estaca, qual seja,

$$(5) \quad \sigma = a u_x + b \dot{u}_x ,$$

implicamos uma sua classificação no domínio dos "sólidos visco-elásticos". Isto, e mais a consideração de (3), transforma (4) em

$$(6) \quad (\ddot{u}, v - \dot{u}) + a(u_x, v_x - \dot{u}_x) \\ + b(\dot{u}_x, v_x - \dot{u}_x) + [k_1 u(1, t) + \\ + k_2 \dot{u}(1, t)] [v(1) - \dot{u}(1, t)] + (HF |F_N|, |v| - |\dot{u}|) \\ \geq (f, v - \dot{u}) + F(t) [v(0) - \dot{u}(0, t)] , \quad \forall v ,$$

onde $(u_1, u_2) = \int_0^1 u_1(x) u_2(x) dx$.

Se definirmos, para cada u , o funcional

$$J(u; \cdot) : H^1(0, 1) \rightarrow R$$

$$v \longrightarrow \gamma FK \int_0^1 H(x+u-1) (x+u-1) |v(x)| dx ,$$

onde $H^1(0, 1)$ é o espaço de Sobolev usual, podemos reescrever

a condição de equilíbrio (6), e o problema do movimento da estaca será descrito matematicamente pelo problema de valor inicial seguinte:

$$(7) \text{ (i)} \quad u(x,0) = 0,$$

$$(7) \text{ (ii)} \quad \dot{u}(x,0) = 0,$$

$$(7) \text{ (iii)} \quad (\ddot{u}, v - \dot{u}) + a(u_x, v_x - \dot{u}_x) + \\ + b(\dot{u}_x, v_x - \dot{u}_x) + [k_1 u(1,t) + k_2 \dot{u}(1,t)] \cdot \\ \cdot [v(1) - \dot{u}(1,t)] + J(u;v) - J(u;\dot{u}) \geq \\ \geq (f, v - \dot{u}) + F(t) [v(0) - \dot{u}(0,t)],$$

$$\forall v \in H^1(0,1).$$

Escrito nesta forma, o problema da estaca é uma questão matemática bem definida. O que se pergunta é:

- (1) Que condições sobre os dados f e F garantiriam a existência de uma solução única e estável?
- (2) Que tipo de algoritmos poderiam ser desenhados para o cálculo efetivo de tal solução?

Indicaremos então alguns resultados parciais obtidos, que nos darão algumas respostas.

Teorema 1. Se $\Omega = (0,1)$ e

$$f, \dot{f} \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega)),$$

$$\text{e } F, \dot{F} \in L^2(0, \infty; H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)), \quad F(0) = 0,$$

então existe uma única $u \in L^\infty(0, \infty; H^1(\Omega))$, e com $\dot{u} \in L^\infty(0, \infty; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; H^1(\Omega))$, $\ddot{u} \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; H^1(\Omega))$, tal que (7)(i) — (7)(iii) es
tão satisfeitas para ela.

Um roteiro da demonstração é o seguinte:

Etapa 1 - Unicidade. Suponhamos que u_1 e u_2 fossem soluções e tomemos $u = u_1 - u_2$. Escolhendo $v = \dot{u}_2$ na inequação (7)(iii) escrita para u_1 , $v = \dot{u}_1$ na inequação (7)(iii) escri
ta para u_2 e somando os resultados, obtemos

$$\begin{aligned} & (\ddot{u}, \dot{u}) + a(u_x, \dot{u}_x) + b(\dot{u}_x, \dot{u}_x) + [k_1 u(1, t) + \\ & + k_2 \dot{u}(1, t)] \dot{u}(1, t) \leq J(u_1; \dot{u}_2) - J(u_1; \dot{u}_1) \\ & + J(u_2; \dot{u}_1) - J(u_2; \dot{u}_2); \end{aligned}$$

$$u(0) = 0 \quad ; \quad \dot{u}(0) = 0.$$

Daí,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\dot{u}|^2(t) + \frac{a}{2} \frac{d}{dt} |u_x|^2(t) + b |\dot{u}_x|^2(t) + \frac{k_1}{2} \frac{d}{dt} u^2(1, t)$$

$$+ k_2 \dot{u}^2(1, t) \leq F_{\gamma K} \int_0^1 [|\dot{u}_2| - |\dot{u}_1|] [H(x+u_1) - 1] \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot (x+u_1 - 1) - H(x+u_2 - 1) (x+u_2 - 1) \Big] dx \\ & \leq 2F\gamma K \{ |\dot{u}|^2(t) + |u|^2(t) \}, \end{aligned}$$

onde $|f| = \sqrt{(f,f)}$. Se integrarmos de 0 a t:

$$\begin{aligned} |\dot{u}|^2(t) + k_1 u^2(1,t) + |u_x|^2(t) + 2k_2 \int_0^t \dot{u}^2(1,\tau) d\tau + \\ + 2 \int_0^t |u_x|^2(\tau) d\tau \leq 4F\gamma K \int_0^t \{ |\dot{u}|^2(\tau) + \\ + |u|^2(\tau) \} d\tau . \end{aligned}$$

Mas $k_1 u^2(1,t) + |u_x|^2(t)$ majora

$$\|u\|^2(t) = |u|^2(t) + |u_x|^2(t),$$

em vista de

$$u(x,t) = u(1,t) - \int_x^1 u_x(\zeta,t) d\zeta ,$$

e daí, pelo lema de Gronwall.

$$|\dot{u}|^2(t) + \|u\|^2(t) = 0 ,$$

isto é, $u_1 = u_2$.

Etapa 2 - Existência. No estudo dessa questão seguimos o caminho seguinte:

1º Passo: Tomamos uma regularização convexa J_ε do funcional J e, como estamos trabalhando no espaço $H^1(\Omega)$ inteiro, caímos numa equação variacional equivalente para uma nova variável de

pendente u_ε :

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & (\ddot{u}_\varepsilon, v) + a(u_{\varepsilon x}, v_x) + b(\dot{u}_{\varepsilon x}, v_x) + \\
 & + [k_1 u_\varepsilon(1, t) + k_2 \dot{u}_\varepsilon(1, t)] v(1) + \\
 & + \gamma FK \int_0^1 H(x+u_\varepsilon - 1) (x+u_\varepsilon - 1) \phi'_\varepsilon(\dot{u}_\varepsilon) v(x) dx \\
 & = (f, v) + F(t)v(0) \quad , \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad ,
 \end{aligned}$$

onde $\phi_\varepsilon(f)$ é uma conveniente regularização convexa de $|f|$.

A estimativa a priori básica desta equação é

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & |\dot{u}_\varepsilon|^2(t) + \|u_\varepsilon\|^2(t) + \int_0^t \|\dot{u}_\varepsilon\|^2(\tau) d\tau \leq \\
 & \leq C \int_0^t \{ |f|^2(\tau) + |F|_{H^{-\frac{1}{2}}}^2(\tau) \} d\tau \quad ,
 \end{aligned}$$

com C independente de ε e t , que resulta de (8) quando se escolhe $v = \dot{u}_\varepsilon$ e observa que

$$\int_0^1 H(x+u_\varepsilon - 1) (x+u_\varepsilon - 1) \phi'_\varepsilon(\dot{u}_\varepsilon) \dot{u}_\varepsilon dx \geq 0.$$

2º Passo: Mostramos pelo método de Galerkin (parâmetro = h) que a equação regularizada (8) tem solução. Para se poder passar ao limite "na dimensão" uma outra estimativa básica é estabelecida, qual seja,

$$(10) \quad |\ddot{u}_\varepsilon^h|^2(t) + \|\dot{u}_\varepsilon^h\|^2(t) + \int_0^t \|\ddot{u}_\varepsilon^h\|^2(\tau) d\tau$$

$$\leq |f|^2(0) + c \int_0^t \{ |\dot{f}|^2(\tau) d\tau + |\dot{F}|_{H^{-\frac{1}{2}}}^2(\tau) d\tau \}$$

onde C é independente de ε , h e t .

3º Passo: Por fim, passamos ao limite $\varepsilon \rightarrow 0$ na inequação equivalente para u_ε , verificando que o limite u satisfaz (7).

Teorema 2. Nas condições do teorema 1 ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{u}|(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\ddot{u}|(t) = 0 ,$$

isto é, "o movimento tende para o repouso quando $t \rightarrow \infty$ ".

Demonstração parcial. Como $u(x,0) = 0$,

$$\dot{u}(x,t_1) - \dot{u}(x,t_2) = \int_{t_2}^{t_1} \ddot{u}(x,\tau) d\tau ,$$

de onde sai

$$| |\dot{u}|(t_1) - |\dot{u}|(t_2) | \leq \int_{t_2}^{t_1} |\ddot{u}|(\tau) d\tau \leq \sup_{0 \leq t \leq \infty} |\ddot{u}|(t) (t_1 - t_2) ,$$

ou seja, $|\dot{u}|(t)$ é uniformemente contínua em $[0, +\infty)$. Isto, mais o fato de que $|\dot{u}|(t)$ é integrável em $[0, \infty)$, implica a primeira assertiva. A demonstração da segunda assertiva é mais elaborada.

Os teoremas 1 e 2 oferecem uma resposta à pergunta 1). Vejamos agora uma alternativa para atacar o problema colocado na pergunta 2). Discretizaremos a variável t em n

veis $t_n = n\Delta t$, onde Δt é um "passo" dado e $n = 0, 1, 2, \dots$, e aproximaremos $H^1(\Omega)$ por um subespaço V_h de "elementos finitos quadráticos e contínuos". Para uma função α^n , com domínio nos níveis do tempo, definimos

$$(11) \quad \partial_t \alpha^n = \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^n}{\Delta t},$$

$$(12) \quad \delta_t \alpha^n = \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^{n-1}}{2\Delta t},$$

$$(13) \quad \begin{aligned} \partial_t^2 \alpha^n &= \frac{\partial_t \alpha^n - \partial_t \alpha^{n-1}}{\Delta t} = \frac{\alpha^{n+1} - 2\alpha^n + \alpha^{n-1}}{(\Delta t)^2} = \\ &= 2 \left(\frac{\delta_t \alpha^n - \partial_t \alpha^{n-1}}{\Delta t} \right), \end{aligned}$$

$$(14) \quad \begin{aligned} \alpha^{n+\theta} &= \alpha^n + \theta [\alpha^{n+1} - \alpha^n] = \\ &= \alpha^n + \theta \Delta t \partial_t \alpha^n \\ &= \alpha^n + 2\theta \Delta t \delta_t \alpha^n - \theta \Delta t \partial_t \alpha^{n-1}, \quad \theta \in [0, 1], \end{aligned}$$

$$(15) \quad \partial_t \alpha^{n+\theta} = \frac{\alpha^{n+1+\theta} - \alpha^{n+\theta}}{\Delta t} = \partial_t \alpha^n + \theta [\partial_t \alpha^{n+1} - \partial_t \alpha^n].$$

Como aproximações para $u(x, t_n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, propomos então funções $U^n(x)$ definidas pelas condições seguintes:

$$(16) \quad U^n \in V_h, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(17) \quad U^0 = U^1 = 0 ,$$

$$(18) \quad \begin{aligned} & (\partial_t^2 U^n, v_h - \delta_t U^n) + a(U_x^n, v_{hx} - \delta_t U_x^n) \\ & + (\delta_t U_x^n, v_{hx} - \delta_t U_x^n) \\ & + [k_1 U^n(1) + k_2 \delta_t U^n(1)] [v_h(1) - \delta_t U^n(1)] \\ & + J(U^n; v_h) - J(U^n; \delta_t U^n) \geq \\ & \geq (f_n, v_h - \delta_t U^n) + F_n [v_h(0) - \\ & \quad - \delta_t U^n(0)] , \quad \forall v_h \in V_h . \end{aligned}$$

Tal esquema é consistente com (7) na $O(\Delta t^2)$.

Observemos que em vista de (13) a inequação (18) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} & (\delta_t U^n, v_h - \delta_t U^n) + b \frac{\Delta t}{2} (\delta_t U_x^n, v_{hx} - \delta_t U_x^n) \\ & + \frac{\Delta t}{2} k_2 \delta_t U^n(1) [v_h(1) - \delta_t U^n(1)] \\ & + \frac{\Delta t}{2} [J(U^n; v_h) - J(U^n; \delta_t U^n)] \geq \\ & \geq \frac{\Delta t}{2} (f_n, v_h - \delta_t U^n) - \frac{\Delta t}{2} (U_x^n, v_{hx} - \delta_t U_x^n) - \\ & - \frac{\Delta t}{2} k_1 U^n(1) [v_h(1) - \delta_t U^n(1)] \\ & + \frac{\Delta t}{2} F_n [v_h(0) - \delta_t U^n(0)] + \\ & + (\partial_t U^{n-1}, v_h - \delta_t U^n) = \\ & = L_n(v_h - \delta_t U^n) , \quad v_h \in H^1(\Omega) , \end{aligned}$$

onde $L_n : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ são funcionais lineares e contínuos. Se definirmos

$$\begin{aligned} a(u,v) &= (u,v) + b \frac{\Delta t}{2} (u_x, v_x) + \\ &+ \frac{\Delta t}{2} k_2 u(1) v(1) , \\ j_n(v) &= \frac{\Delta t}{2} J(U^n; v) , \end{aligned}$$

para $u, v \in H^1(\Omega)$, as aproximações são então caracterizadas pelas fórmulas

$$(19) \quad U^n \in V_h , \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(20) \quad U^0 = U^1 = 0 ,$$

$$(21) \quad \begin{aligned} a(\delta_t U^n, v_h - \delta_t U^n) + j_n(v_h) - j_n(\delta_t U^n) \\ \geq L_n(v_h - \delta_t U^n) , \quad v_h \in V_h , \end{aligned}$$

$$(22) \quad U^{n+1} = U^{n-1} + 2 \Delta t \delta_t U^n , \quad n = 1, 2, \dots$$

A primeira pergunta é: estarão bem definidas? Ou seja, para cada n podemos tirar $\delta_t U^n$ como única solução do "problema estacionário" (21)? A resposta é sim, visto que $a(.,.)$ é uma forma bilinear em $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ contínua, simétrica e coerciva, $L_n \in (H^1(\Omega))'$ e $j_n : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuos e convexos (ver Glowinski-Lions-Trémolières [3]). Além disso, podemos caracterizar $\delta_t U^n$ como solução do problema

$$(23) \quad \inf_{v_h \in V_h} \left\{ \frac{1}{2} a(v_h, v_h) - L_n(v_h) + j_n(v_h) \right\} ,$$

o que nos sugere que para o seu cálculo devemos usar um algo

rítmo de otimização. Visto que estamos lidando com um funcional não diferenciável, as possibilidades estão com os algoritmos do tipo "pesquisa de ponto de sela", como, por exemplo, os de Uza wa e Arrow-Hurwicz [3]. É nosso objetivo, nesta pesquisa que estamos desenvolvendo sobre o "problema do bate-estacas", fazer testes numéricos com o maior número possível de algoritmos existentes.

Uma segunda pergunta é: quão distante estarão as $U^n(x)$ calculadas por (19) — (22) da solução exata u nos níveis de tempo $n\Delta t$? O seguinte teorema nos dá informação sobre a convergência para zero da diferença $e_h^n(x) = u(x, t_n) - U^n(x)$, quando $\Delta t \downarrow 0$ e $h \downarrow 0$.

Teorema 3. Quando Δt e h tendem para zero, existe uma constante α tal que, com $(\frac{\Delta t}{h})^2 \leq \alpha < 1$,

$$\sum_{j=0}^N U^j(x) \theta_j(t) \longrightarrow u(x, t) \quad ,$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \delta_t U^j(x) \theta_j(t) \longrightarrow \dot{u}(x, t) \quad ,$$

ambos em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ forte, onde $T > 0$ é um instante dado, $N\Delta t = T$, e

$$\theta_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t_j \leq t < t_{j+1} \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Obviamente este ainda não é um resultado bom no contexto do nosso modelo, visto que êle nada diz a respeito da

convergência das aproximações do campo de deformações e do campo de tensões. Avaliações das velocidades dessas convergências, no sentido do comportamento assintótico do erro, também ainda não foram obtidas, pois em princípio dependeriam de uma maior regularidade da solução exata, o que não temos.

REFERÊNCIAS

- [1] Duvaut, G., Lions, J.L. - *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris (1972).
- [2] Germain, P. - *Cours de mécanique des milieux continus*. Masson et Cie., Editeurs, Paris (1973).
- [3] Glowinski, R., Lions, J.L., Trémolières, R. - *Analyse numérique des inéquations variationnelles*. Dunod, Paris (1976).