NOTAS DE FÍSICA

VOLUME XX

Nº 10

LIMITES ET PERTURBATION DES APPLICATIONS HOLOMORPHES

par

Leopoldo Nachbin

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71 - Botafogo - ZC-82

RIO DE JANEIRO, BRAZIL

1973

Notas de Física - Volume XX - Nº 10

LIMITES ET PERTURBATION DES APPLICATIONS HOLOMORPHES

Leopoldo Nachbin
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas et
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro, Brésil

(Reçu le 24 Juillet, 1973)

1. INTRODUCTION

Les applications holomorphes entre des espaces localement convexes étant un sujet courant d'étude, nous aborderons dans cet exposé quelques aspects de cette matière concernant exclusivement les limites des applications holomorphes et le comportement de l'holomorphie par perturbation de topologie. Les affaires sont typiques de la dimension infinie, en ce sens que nous irons mêttre l'accent sur certaines nuances qui disparaissent en dimension finie. Faute d'un livre de référence, nous nous voyons obligés de donner certaines définitions et notations. Voir aussi [3, 2, 5].

2. TERMINOLOGIE ET SYMBOLISME

Sauf mention du contraire, nous indiquerons par E et F des espaces localement convexes complexes, et par U une partie ouverte non-vide de E.

Pour tout $m \in N$, nous représenterons par $\mathcal{L}_s({}^mE;F)$ et $\mathcal{P}({}^mE,F)$ les espaces vectoriels des applications m-linéaires symétriques continues de E^m dans F et des polynômes m-homogènes continus de E dans F, respectivement. On a la bijection linéaire canonique

$$A \in \mathcal{L}_s({}^mE;F) \rightarrow \hat{A} \in \mathcal{P}({}^mE;F)$$

donnée par $\hat{A}(x) = Ax^m$ pour tout $x \in E$.

3. APPLICATIONS HOLOMORPHES

Soit $\mathcal{H}(U;F)$ l'espace vectoriel des applications $f\colon U \rightarrow F$ telles que, pour chaque $\xi \in U$, il y a une suite de coefficients $A_m \in \mathcal{L}_s({}^mE;F)$, $m \in N$, tels que pour toute semi-norme continue β sur F on puisse trouver un voisinage V de ξ dans U pour lequel

$$\lim_{m\to+\infty} \beta\left[f(x) - \sum_{k=0}^{m} A_k(x-\xi)^k\right] = 0$$

uniformément pour $x \in V$. Pour chaque f et ξ donnés, F étant séparé, la suite (A_m), $m \in N$, est unique; on écrira alors

$$d^m f(\xi) = m!\, A_m \in \mathcal{L}_s({}^mE;F),$$

$$\hat{d}^m f(\xi) = m!\, \hat{A}_m \in \mathcal{P}({}^mE;F),$$

qu'on identifiera de la façon canonique à $f^{(m)}(\xi) \in F$ lorsque $E = C$.

Soit aussi $H(U;F)$ l'espace vectoriel des applications $f\colon U \rightarrow F$ satisfaisant aux conditions précédentes, mais cette fois ci d'une façon plus généreuse au sens que $A_m \in \mathcal{L}_s({}^mE;\hat{F})$, $m \in N$, où $\hat{F}$ est un complété de F;

donc

$$H(U;F) = \mathcal{H}(U;\hat{F}) \cap F^U ,$$

où F^U est l'espace vectoriel des applications de U dans F. C'est clair que H(U;F) est indépendant du choix de $\hat{F}$.

La préférence entre les faisceaux $\mathcal{H}$ et H pour developper la théorie est une question de goût personnel; ils sont parfois plus naturels au points de vue naif et technique, respectivement.

On a $\mathcal{H}(U;F) \subset H(U;F) \subset \mathcal{C}(U;F)$, ceci étant l'espace vectoriel des applications continues de U dans F; on ne change pas la définition de $\mathcal{H}$ et H si l'on prends des applications m-linéaires symétriques pas nécessairement continues $A_m : E^m \to F$, $m \in N$, en imposant alors la continuité de f.

Par passage aux quotients séparés de E et F, on ramene l'étude de $\mathcal{H}$ et H au cas séparé.

Nous dirons que F est <u>différentiellement stable</u> si $\mathcal{H}(U;F) = H(U;F)$ quels que soient E et U, ce qui est équivalent à prendre seulement E = C. D'après l'intégrale de Cauchy, c'est le cas si F est séquentiellement complet. C'est aussi le cas ci F est intégralement complet, c'est-à-dire que, pour toute mesure de Radon μ sur un espace compact K et l'application continue f: $K \to F$, l'intégrale $\int_K f d\mu$ appartient toujours à F et non seulement à $\hat{F}$; ce qui arrive quand l'enveloppe convexe fermée de toute partie compacte de F est compacte, en particulier si toute partie précompacte fermée de F est compacte, donc si toute partie bornée fermée de F est complète, ou si F est complet.

Si $f \in H(U;F)$ et S est un sous-espace vectoriel de F contenant f(U), alors $f \in H(U;S)$. On a aussi l'énoncé correspondant pour $\mathcal{H}$, sous réserve que S soit différentiellement stable pour la topologie induite.

Voyons un exemple où l'on peut avoir un espace normé lequel n'est pas différentiellement stable.

EXEMPLE 1. Soit U le disque ouvert de C de rayon 1 et centre 0. Introduisons $f: U \to F$ donnée par

$$f(z) = (1, \ldots, z^n, \ldots), \ z \in U ,$$

où F est le sous-espace vectoriel de C^N engendré par f(U). Munissons F d'une topologie localement convexe séparée telle que $f \in H(U;F)$, et le complété $\hat{F}$ soit contenu continûment dans C^N, par exemple celle induite par la topologie usuelle de l^p, où $1 \leq p \leq +\infty$. Posons

$$a_m = \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) \in C^N, \ m \in N;$$

c'est la suite dont les termes sont tous 0 sauf celui d'ordre m lequel est égal à 1. Or, a_m n'appartient pas à F si $m \geq 1$. Donc, f n'est pas dans $\mathcal{H}(U;F)$. Alors, F n'est pas différentiellement stable.

Donnons un exemple où l'on peut avoir un espace normé différentiellement stable lequel n'est pas complet. En réalité, la stabilité différentielle se présente dans plusieurs exemples courants.

EXEMPLE 2. Soit F un espace localement convexe complexe séparé, engendré en tant qu'espace vectoriel par une partie B linéairement indépendante infinie telle que l'ensemble Φ orthonormale à B soit formé par des formes linéaires <ins>continues</ins> sur F. Fixons $f \in H(U;F)$, où U est une partie ouverte connexe de C. Pour toute $\phi \in \Phi$, l'ensemble $X(\phi)$ où la fonction complexe $\phi \circ f$ holomorphe dans U s'annule est fermé et discret dans U, donc dénombrable, ou bien égal à U. Or, pour tout $z \in U$, l'ensemble des $\phi \in \Phi$ telles que $\phi[f(z)] \neq 0$ est fini. Il en résulte que l'ensemble des $\phi \in \Phi$ telles que $\phi \circ f \neq 0$ est fini; en fait, dans le cas contraire on aurait une partie infinie dénombrable Λ de Φ telle que $\phi \circ f \neq 0$ si $\phi \in \Lambda$, donc

$$U = \bigcup_{\phi \in \Lambda} X(\phi)$$

ce qui est impossible, U n'étant pas dénombrable. Alors f(U) engendre un sous-espace vectoriel de F de dimension finie. Par suite $f \in \mathcal{H}_f(U;F)$. On en conclut que F est différentiellement stable.

4. LIMITES DES APPLICATIONS HOLOMORPHES

Munissons $\mathcal{C}(U;F)$ de la topologie de la convergence compacte.

PROPOSITION 1. H(U;F) est toujours fermé dans $\mathcal{C}(U;F)$. Pour F fixé, $\mathcal{H}(U;F)$ est fermé dans $\mathcal{C}(U;F)$ quels que soient E et U si et seulement si F est différentiellement stable.

Preuve. Il suffit de traiter le cas où F est séparé.

Voyons la première partie de l'enoncé. Soit f appartenant à l'adhérence de H(U;F) dans $\mathcal{C}(U;F)$. Fixons $\xi \in U$. Posons $A_0 = f(\xi)$. Nous allons definir $A_m : E^m \to \hat{F}$ pour tout m = 1, 2, ... Si $x_1, \ldots, x_m \in E$, choisissons des nombres réels $r_1, \ldots, r_m > 0$ tels que

$$\xi + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m \in U$$

quels que soient $\lambda_j \in C$, $|\lambda_j| \leq r_j$ pour tout $j = 1, \ldots, m$.

Posons

$$A_m(x_1, \ldots, x_m) =$$

$$= \frac{1}{m!\,(2\pi i)^m} \int\limits_{\substack{|\lambda_1|=r_1 \\ \cdots \\ |\lambda_m|=r_m}} \frac{f(\xi + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m)}{(\lambda_1 \ldots \lambda_m)^2}\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_m ,$$

où l'intégrale a sa valeur dans $\hat{F}$. On peut affirmer que:

1) la valeur de $A_m(x_1, \ldots, x_m)$ ne depend pas du choix de $r_1, \ldots\ r_m$;

2) A_m est m-linéaire et symétrique;

3) si $x \in U$, $r > 1$ est un nombre réel et $(1-\lambda)\xi + \lambda x \in U$ quel que soit $\lambda \in C$, $|\lambda| \leq r$, alors, pour tout $m \in N$,

$$f(x) - \sum_{k=0}^{m} A_k(x-\xi)^k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{f\left[(1-\lambda)\xi+\lambda x\right]}{\lambda^{m+1}(\lambda-1)}\, d\lambda.$$

D'après l'intégrale de Cauchy et la formule du reste de Taylor, ces assertions sont vraies si f est dans $H(U;F)$, parce que alors

$$A_m(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m!}\, d^m f(\xi)(x_1, \ldots, x_m);$$

par passage à la limite, elles restent vraies quand f appartient à l'adhérence de $H(U;F)$ dans $\mathcal{C}(U;F)$.

Pour toute semi-norme continue β sur F fixée, choisissons un voisinage V de ξ dans U et un nombre réel $r>1$ tels que $(1-\lambda)\xi + \lambda x \in U$ si $\lambda \in C$, $|\lambda| \leq r$ et $x \in V$, et que

$$c \equiv \sup \{\beta\{f\left[(1-\lambda)\xi+\lambda x\right]\};\ \lambda \in C,\ |\lambda| \leq r,\ x \in V\}$$

soit fini. Alors, pour $x \in V$ et $m \in N$, on a

$$\beta\left[f(x) - \sum_{k=0}^{m} A_k(x-\xi)^k\right] \leq \frac{c}{r^m(r-1)}$$

et par suite $f \in H(U;F)$ parce que chaque A_m est continue, ou bien parce que f est continue. Il en résulte que $H(U;F)$ est fermé dans $\mathcal{C}(U;F)$.

Si F est différentiellement stable, alors $\mathcal{H}(U;F) = H(U;F)$ est fermé dans $\mathcal{C}(U;F)$.

Si F n'est pas différentiellement stable, il existe f dans $H(U;F)$ n'appartenant pas à $\mathcal{H}(U;F)$, où U est une partie ouverte non-vide de C. Choisissons $\xi \in U$ tel que $f^{(m)}(\xi)$ ne soit pas dans F pour au moins une valeur de $m = 1, 2, \ldots$ Nous pouvons supposer que U est un disque de rayon assez petit et centre ξ pour que

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(\xi)(z-\xi)^m$$

uniformément pour $z \in U$. Or, chaque $f^{(m)}(\xi) \in \hat{F}$, où F est dense. Alors f appartient à l'adhérence, pour la convergence uniforme sur U, de l'ensemble des restrictions à U des polynômes de C dans F; donc f est dans l'adherence de $\mathcal{H}(U;F)$ dans $\mathcal{C}(U;F)$. Il en résulte que $\mathcal{H}(U;F)$ n'est pas fermé dans $\mathcal{C}(U;F)$. QED

REMARQUE 1. On a déduit la suffisance dans la deuxieme partie de l'enoncé ci-dessus de sa première partie. Réciproquement, la suffisance dans la deuxième partie entraîne que $\mathcal{H}(U;F)$ est fermé dans $\mathcal{C}(U;F)$ si F est complet, donc que $H(U;F)$ est fermé dans $\mathcal{C}(U;F)$ pour F arbitraire.

5. COMPORTEMENT DE L'HOLOMORPHIE PAR PERTURBATION DE TOPOLOGIE

Soit $\mathcal{AB}(U;F)$ l'espace vectoriel des applications $f:U \to F$ amplement bornées, c'est-à-dire telles que, pour tout $\xi \in U$ et toute semi-norme continue β sur F, il existe un voisinage V de ξ dans U tel que β soit bornée sur $f(V)$; c'est le cas si f est continue, ou bien localement bornée. Du reste, si F est semi-normable, f est amplement bornée si et seulement si elle est localement bornée. Si f est amplement bornée, alors $f(K)$ est bornée pour toute partie compacte K de U; la réciproque est valable sous réserve que E soit semi-métrisable.

On sait que $f \in \mathcal{H}(U;F)$ si et seulement si

$$f|(U \cap S) \in \mathcal{H}(U \cap S;F)$$

pour tout sousespace vectoriel S de E de dimension finie, et si en plus $f \in \mathcal{AB}(U;F)$: De même pour le faisceau H.

Si τ_1 et τ_2 sont deux topologies localement convexes sur un espace vectoriel, on écrira $\tau_2 \prec \tau_1$ pour indiquer que toute partie bornée à la fois pour τ_1 et τ_2 possède son adhérence pour τ_1 bornée pour τ_2 (et gratuitement bornée pour τ_1 aussi). C'est le cas si $\tau_2 \subset \tau_1$, ce qui explique la notation choisie.

REMARQUE 2. On a $\tau_2 \prec \tau_1$ dans un des deux cas suivants:

(1) Toute partie bornée pour τ_1 est aussi bornée pour τ_2.

(2) τ_2 est localement fermée par rapport à τ_1, c'est-à-dire que tout voisinage pour τ_2 d'un point contient un autre voisinage pour τ_2 de ce point lequel est fermé pour τ_1.

PROPOSITION 2. Soient E et F deux espaces vectoriels complexes. Représentons E et F munis des topologies localement convexes $\tau_j(E)$ et $\tau_j(F)$ par E_j et F_j, respectivement, pour j = 1, 2. Si $U \subset E$ est ouverte pour $\tau_1(E)$ et $\tau_2(E)$ et non-vide, représentons U en tant qu'un sous-espace topologique de E_j par U_j, pour j = 1, 2. Alors

$$\mathcal{H}(U_1; F_1) \cap \mathcal{AB}(U_2; F_2) \subset \mathcal{H}(U_2; F_2)$$

sous réserve que $\tau_2(F) \prec \tau_1(F)$.

Preuve. Soit f appartenant au premier membre de l'inclusion ci-dessus. Considérons d'abord le cas où E est de dimension finie. En supposant préliminairement que $\tau_1(E) \subset \tau_2(E)$, fixons $\xi \in U$. Soit $A_m \in \mathcal{L}_s({}^mE_1; F_1)$, $m \in N$, la suite des coefficients qui correspondent à $f \in \mathcal{H}(U_1; F_1)$ et à ξ, d'après le §3. Soit W un voisinage equilibré compact de 0 par rapport à $\tau_2(E)$ tel que $\xi + W \subset U$. Or $f \in \mathcal{AB}(U_2; F_2)$; alors $f(\xi+W)$ est bornée pour $\tau_2(F)$. Elle est aussi bornée pour $\tau_1(F)$ à cause de $f \in \mathcal{H}(U_1; F_1)$ et de la compacité de W pour $\tau_1(E)$. Par suite, l'adhérence X pour $\tau_1(F)$ de l'enveloppe equilibrée et convexe de $f(\xi+W)$ est bornée pour $\tau_2(F)$. D'après l'intégrale de Cauchy calculée pour $\tau_1(F)$ supposée séparée, on a

$$A_m\, x^m = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} \frac{f(\xi+\lambda x)}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda$$

pour $x \in W$. Le théorème de la valeur moyenne entraîne alors que $A_m\, x^m \in X$ si $x \in W$. Par passage au quotient séparé, cette conclusion reste valable pour $\tau_1(F)$ arbitraire. Donc $A_m \in \mathcal{L}_s({}^mE_2;\, F_2)$. Choisissons un nombre réel $r > 1$ tel que $\xi + rW \subset U$. Par répétition d'argument, on voit que l'adhérence Y pour $\tau_1(F)$ de l'enveloppe equilibrée et convexe de $f(\xi+rW)$ est bornée pour $\tau_2(F)$. Si $x \in V \equiv \xi + W$, on aura $(1-\lambda)\xi + \lambda x \in \xi + rW \subset U$ pour tout $\lambda \in C$, $|\lambda| \leq r$; donc

$$f(x) - \sum_{k=0}^{m} A_k(x - \xi)^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda^{m+1}(\lambda-1)}\, d\lambda,$$

d'après la formule du reste de Taylor calculée pour $\tau_1(F)$ supposée séparée. Le théorème de la valeur moyenne entraîne que

$$f(x) - \sum_{k=0}^{m} A_k(x-\xi)^k \in \frac{1}{r^m(r-1)}\, Y$$

pour tout $x \in V$ et $m \in N$. Par passage au quotient séparé, cette conclusion reste valable pour $\tau_1(F)$ arbitraire. Il en résulte que

$$f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} A_m(x-\xi)^m$$

uniformément pour $x \in V$, la convergence étant par rapport à $\tau_2(F)$. On a bien que $f \in \mathcal{H}(U_2;\, F_2)$.

En suite, supposons $\tau_1(E)$ et $\tau_2(E)$ arbitraires. Représentons E muni de sa topologie localement convexe séparée $\tau_0(E)$ par E_0; et U en tant qu'un sous-espace topologique de E_0 par U_0. Or, de $\tau_1(E)$, $\tau_2(E) \subset \tau_0(E)$ et de la première partie de la preuve, on déduit que

$$\mathcal{H}(U_1;\ F_1) \cap \mathcal{AB}(U_2;\ F_2) \subset$$

$$\mathcal{H}(U_0;F_1) \cap \mathcal{AB}(U_0;F_2) \subset \mathcal{H}(U_0;F_2);$$

donc $f \varepsilon \mathcal{H}(U_0;F_2)$. Pour conclure de là que $f \varepsilon \mathcal{H}(U_2;\ F_2)$ il suffit de montrer que f est constante modulo S et T, c'est-à-dire que x_1, $x_2 \varepsilon U$, $x_2 - x_1 \varepsilon S$ entraînent que $f(x_2) - f(x_1) \varepsilon T$, où S et T sont les plus petits sous espaces vectoriels fermés de E et F pour $\tau_2(E)$ et $\tau_2(F)$, respectivement. Il est à remarquer que U = U+S. Indiquons S muni de sa topologie localement convexe separée par S_0. Pour tout $x \varepsilon U$ fixé, définissons g: S → F par g(t) = = f(x+t) si t ε S. On a bien que $g \varepsilon \mathcal{H}(S_0;\ F_2)$ parce que $f \varepsilon \mathcal{H}(U_0;F_2)$. Or, g(S) est bornée dans F_2 parce que $f \varepsilon \mathcal{AB}(U_2;\ F_2)$. D'après le théorème de Liouville, g est constante sur S modulo T.

Si maintenant E est arbitraire, on voit que

$$f|(U_2 \cap S) \varepsilon \mathcal{H}(U_2 \cap S;\ F_2)$$

pour tout sous-espace vectoriel S de E de dimension finie, et en plus $f \varepsilon \mathcal{AB}(U_2;\ F_2)$. Donc $f \varepsilon \mathcal{H}(U_2;\ F_2)$. <u>QED</u>

REMARQUE 3. Utilisons les notations de la Proposition 2. Si l'on suppose que $\tau_2(F) \prec \tau_1(F)$ et aussi $\tau_1(F) \prec \tau_2(F)$, on a

$$\mathcal{H}(U_1;\ F_1) \cap \mathcal{AB}(U_2;\ F_2) =$$

$$\mathcal{H}(U_2;\ F_2) \cap \mathcal{AB}(U_1;\ F_1);$$

d'autre part, si l'on suppose que $\tau_2(F) \prec \tau_1(F)$, $\tau_1(F) \subset \tau_2(F)$ et $\tau_2(E) \subset \tau_1(E)$, on a

$$\mathcal{H}(U_1;\,F_1) \cap \mathcal{AB}(U_2;\,F_2) = \mathcal{H}(U_2;\,F_2)\ .$$

PROPOSITION 3 (*Liouville*). Soient E et F un espace localement convexe et un espace vectoriel complexes, respectivement, et U une partie ouverte non-vide de E. Représentons F muni des topologies localement convexes $\tau_j(F)$ par F_j, pour j = 1, 2. Alors toute application entière $f\in\mathcal{H}(E;\,F_1)$ bornée sur E par rapport à $\tau_2(F)$ doit être constante sur E, sous réserve que $\tau_2(F) \prec \tau_1(F)$ et que $\tau_2(F)$ soit séparée.

Preuve. On a, par la Proposition 2,

$$f\in \mathcal{H}(E;\,F_1) \cap \mathcal{AB}(E;\,F_2) \subset \mathcal{H}(E;F_2),$$

donc f est constante sur E, d'après la forme classique du théorème de Liouville. QED

On va voir par les deux exemples suivants que les Propositions 2 et 3 sont en défaut sans l'hypothèse que $\tau_2(F)\prec\tau_1(F)$, même si l'on remplace $\mathcal{AB}(U_2;\,F_2)$ par $\mathcal{C}(U_2;\,F_2)$ et pour des espaces normés.

EXEMPLE 3. Prenons E et F comme étant C et l'espace de Banach c_0 des suites de nombres complexes tendant vers zero. Soit U le disque ouvert dans E de rayon unité et centre à l'origine. Introduisons $f:U\to F$ donnée par $f(z) = (1,\ldots,\, z^n,\ldots)$ pour $z\in U$. Les $f(z)$, $z\in U$, étant linéairement indépendants, pour toute $\sigma\colon U \to C$ il existe une forme linéaire ϕ sur F telle que $\phi[f(z)] = \sigma(z)$ quel que soit $z\in U$. Considérons sur F non seulement sa norme usuelle, mais aussi une norme plus grande donnée par

$$|||y||| = \sup \{ \|y\| \ , \ |\phi(y)|\}$$

pour $y \varepsilon F$. On a les topologies $\tau_1(F)$ et $\tau_2(F)$ associées à la norme usuelle et à cette nouvelle norme sur F, la première étant plus petite que la deuxième. Choisissons σ continue mais pas holomorphe. Alors f est continue par rapport à $\tau_2(F)$, comme il résulte de

$$|||f(z_2) - f(z_1)||| = \sup \{ \|f(z_2) - f(z_1)\|, |\sigma(z_2) - \sigma(z_1)|\}$$

pour z_1, z_2 ε U; mais f n'est pas holomorphe par rapport à $\tau_2(F)$, ce qui est une conséquence de $\sigma = \phi \circ f$ et de la continuité de ϕ par rapport à $\tau_2(F)$. Or, f est holomorphe par rapport à $\tau_1(F)$. Donc, on n'a pas l'inclusion

$$\mathcal{H}(U; F_1) \cap \mathcal{C}(U; F_2) \subset \mathcal{H}(U; F_2) \ .$$

EXEMPLE 4. Prenons E et F comme dans l'exemple précedent. Fixons une suite de nombres réels $a_n > 0$, $n \varepsilon N$ tels que $(a_n)^{1/n} \to 0$ pour $n \to +\infty$ et introduisons $f: E \to F$ donnée par $f(z) = (a_0, \ldots, a_n z^n, \ldots)$ pour $z \varepsilon E$. Or, f est entière par rapport à la topologie $\tau_1(F)$ définie par la norme usuelle sur F. Les $f(z)$, $z \varepsilon E$, étant linéairement indépendants, il existe une nouvelle norme sur F telle que $f(E)$ soit bornée par rapport à la topologie $\tau_2(F)$ correspondante. Or, f n'est pas constante.

REMARQUE 4. La proposition 2 et la condition (1) de la Remarque 2 entraînent le résultat connu suivant. Soient E et F un espace localement convexe semi-métrisable et un espace vectoriel complexes, respectivement, et U une partie ouverte non-vide de E. Représentons F muni des topologies localement convexes $\tau_j(F)$ par F_j, pour $j = 1, 2$. Alors, si toute partie bornée pour $\tau_1(F)$ est aussi bornée pour $\tau_2(F)$, on a $\mathcal{H}(U;F_1) \subset \mathcal{H}(U;F_2)$. Voir aussi [4].

REMARQUE 5. La Proposition 2 et la condition (2) de la Remarque 2 entraînent le résultat connu suivant. Soient E un espace localement convexe semi-métrisable et U une partie ouverte non-vide de E. Indiquons par F un espace vectoriel de fonctions complexes sur un ensemble Y. Soit $\tau_1(F)$ la topologie sur F de la convergence ponctuelle sur Y. Introduisons aussi une autre topologie localement convexe $\tau_2(F)$ sur F telle que $\tau_1(F) \subset \tau_2(F)$ et que $\tau_2(F)$ soit localement fermée par rapport à $\tau_1(F)$. Alors, $f: U \to F$ est holomorphe par rapport à $\tau_2(F)$ si et seulement si f est ponctuellement holomorphe, c'est-à-dire que l'application f est holomorphe par rapport a $\tau_1(F)$, et si en plus f applique toute partie compacte de U dans une partie de F bornée pour $\tau_2(F)$, ce qui ici est équivalent à dire que f applique toute partie compacte de U dans une partie de F précompacte pour $\tau_2(F)$. Si l'espace vectoriel des fonctions complexes sur Y à supports finis est contenu et dense dans F pour $\tau_2(F)$, le résultat précédent se réformule en termes d'une base topologique d'un espace localement convexe complexe F et de l'equivalence de l'holomorphie d'une application $f: U \to F$ et de son holomorphie par composantes suivant la base, ceci sous réserve des conditions correspondantes aux précédentes. Voir aussi [1].

Pour ne pas alourdir l'exposé, nous nous dispenserons d'examiner les questions analogues pour le faisceau H.

REMARQUE 6. Le théorème de Liouville classique résulte de la Proposition 2 si $\tau_2(E)$ est la topologie dont les seules parties ouvertes sont E et ϕ, si $\tau_1(F) = \tau_2(F)$ est séparée et si U = E.

* * *

RÉFÉRENCES

1. R. M. Aron and J. A. Cima, "A Theorem on Holomorphic Mappings into Banach Spaces with Basis", Proceedings of the American Mathematical Society (à paraître).

2. J. A. Barroso et L. Nachbin, "Sur Certaines Propriétés Bornologiques des Espaces d'Aplications Holomorphes", Troisième Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle, Centre Belge de Recherches Mathématiques (1971), pp. 47-55, Vander.

3. N. Bourbaki, Variétés Différentielles et Analytiques, Fascicule de Résultats", Hermann (1967-1971).

4. A. Hirschowitz, "Sur les Suites de Fonctions Analytiques", Annales de l'Institut Fourier, t. 20 (1970), pp. 403-413.

5. Ph. Noverraz, "Pseudo-Convexité, Convexité Polynomiale et Domaines d'Holomorphie en Dimension Infinie", Notas de Matemática, vol. 48 (1973), North-Holland.

* * *

À paraître aux Comptes Rendus du Colloque sur les Fonctions Analytiques de Plusieurs Variables Complexes organisé par le Centre National de la Recherche Scientifique à l'Institut Henri Poincaré, Paris, Juin 1972, édités par Gauthier-Villars dans la collection AGORA MATHEMATICA.