NOTAS DE FÍSICA

VOLUME XI

Nº 10

SUR LE THÉORÈME DE DENJOY-CARLEMAN POUR LES APPLICATIONS VECTORIELLES INDÉFINIMENT DIFFÉRENTIABLES QUASI-ANALYTIQUES

par

Leopoldo Nachbin

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71

RIO DE JANEIRO

1964

Notas de Física - Volume XI - Nº 10

SUR LE THÉORÊME DE DENJOY-CARLEMAN POUR LES APPLICATIONS VECTORIELLES INDÉFINIMENT DIFFÉRENTIABLES QUASI-ANALYTIQUES *

Leopoldo Nachbin **
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas,
Instituto de Matemática Pura e Aplicada,
Universidade do Brasil, Rio de Janeiro

(Reçu le 25 fevrier, 1964)

RÉSUMÉ. On indique une condition suffisante pour qu'une application indéfiniment différentiable d'une variable vectorielle à valeurs vectorielles soit quasi-analytique. On utilise, pour cela, des majorations des différentielles successives par des multi-seminormes.

---

* À paraître aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.

** Actuellement à la Faculté des Sciences de Paris.

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces vectoriels topologiques réels localement convexes, $\mathcal{F}$ étant séparé. Considérons une application indéfiniment différentiable $\varphi: U \to \mathcal{F}$, où $U \subset \mathcal{E}$ est ouvert et connexe [1]. Désignons par $D^m\varphi(x)$ sa m-ème différentielle au point $x \in U$: c'est donc une application m-linéaire symétrique hypocontinue [2], définie sur la puissance cartesienne $\mathcal{E}^m = \mathcal{E} \times \ldots \times \mathcal{E}$ (m fois) à valeurs dans $\mathcal{F}$, dont la valeur au point $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{E}^m$ sera notée par $D^m\varphi(x; x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{F}$. Nous dirons que φ est quasi-analytique si, quel que soit $x \in U$, le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{F}$ engendré par tous les $D^m \varphi(x; x_1, \ldots, x_m)$, pour $x_1, \ldots, x_m \in \mathcal{E}$ et $m = 0, 1, \ldots$ arbitraires, est indépendant de x et coincide avec le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{F}$ engendré par $\varphi(U)$. Ceci entraîne que, si $D^m \varphi(x) = 0$ pour un certain $x \in U$ et tout $m = 0, 1, \ldots$, alors $\varphi = 0$. Notons que, si φ est localement quasi-analytique, ou si φ est analytique, alors elle est quasi-analytique.

Une m-semi-norme α_m sur $\mathcal{E}$, pour $m = 0, 1, \ldots$, est une fonction réelle positive sur $\mathcal{E}^m$ telle que, pour chaque $i = 1, \ldots, m$, la fonction partielle $x_i \to \alpha_m(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$ est une semi-norme au sens usuel les vecteurs $x_j \in \mathcal{E}$, pour $j = 1, \ldots, m$, $j \neq i$, étant fixes (une 0-semi-norme est un nombre réel positif; toute 1-semi-norme est une semi-norme usuelle). On supposera de plus α_m symétrique. On dira que une suite (α_m), $m = 0, 1, \ldots$, où α_m est une m-semi-norme symétrique sur $\mathcal{E}$, satisfait à la condition de Denjoy-Carleman si $\mathcal{E}$ est son sous-espace vectoriel engendré par les $x \in \mathcal{E}$ tels que

$$\sum_{m \geqslant \sup(1,h)} \frac{1}{\sqrt[m]{\alpha_m(x,\ldots,x,x_1,\ldots,x_h)}} = \infty , \qquad (1)$$

(x répété $m-h$ fois) quels que soient $h = 0, 1, \ldots$ et $x_1,\ldots,x_h \in \mathcal{E}$. Remarquons que, si $\mathcal{E}$ est semi-normé et α_m définie par $\alpha_m(x_1,\ldots,x_m) = M_m\|x_1\|\ldots\|x_m\|$, où $M_m \geqslant 0$ (comme c'est toujours le cas si $\mathcal{E} = R$), la condition de Denjoy-Carleman est alors satisfaite si et seulement si

$$\sum_{m \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt[m]{M_m}} = \infty , \qquad (2)$$

auquel cas tout $x \in \mathcal{E}$ satisfait à (1). Ceci est à l'origine de la terminologie ci-dessus.

THÉORÈME. Pour que φ soit quasi-analytique, il suffit que, pour toute semi-norme continue β sur $\mathcal{F}$, on puisse trouver une suite (α_m), $m = 0, 1, \ldots$, où α_m est une m-semi-norme symétrique sur $\mathcal{E}$, satisfaisant à la condition de Denjoy-Carleman, telle que

$$\beta\left[D^m\varphi(x;\, x_1,\ldots,x_m)\right] \leqslant \alpha_m(x_1,\ldots,x_m)$$

quels que soient $x \in U$, $x_1,\ldots,x_m \in \mathcal{E}$, $m = 0, 1, \ldots$.

Ce théorème contient comme cas particulier la partie suffisante du théorème classique de Denjoy-Carleman. D'autre part, il est une conséquence, par récurrence finie, du théorème classique de Denjoy-Carleman. Un aspect à signaler dans l'énoncé du théorème ci-dessus est que l'on admet pour les différentielles des majorations uniformes (par rapport à $x \in U$) par des multi-semi-normes symétriques générales, et non pas forcément par celles du type particulier $M_m \alpha(x_1)\ldots\alpha(x_m)$, où α est une semi-norme sur $\mathcal{E}$, ce qui du reste est naturel, parce que la fonction

$$(x_1,\ldots,x_m) \to \sup_{x\in U} \beta\left[D^m\varphi(x;\, x_1,\ldots,\, x_m)\right],$$

pourvu qu'elle soit partout finie sur $\mathcal{E}^m$, constitue elle-même une m-semi-norme symétrique sur $\mathcal{E}$. Observons que le théorème de cette note entraîne le corollaire bien connu suivant: pour que φ soit quasi-analytique, il suffit que, pour toute semi-norme continue β sur $\mathcal{F}$, il existe une semi-norme continue α sur $\mathcal{E}$ et une suite (M_m), $m = 0, 1, \ldots$ à termes positifs satisfaisant à (2), telles que $\| D^m \varphi(x)\|_{\alpha,\beta} \leq M_m$ quel que soit $x \in U$; ce qui revient à prendre $\alpha_m(x_1,\ldots,\, x_m) = M_m\alpha(x_1)\ldots\alpha(x_m)$. Néanmoins ce corollaire ne suffit pas dans les cas qu'on a en vue. Le théorème de quasi-analyticité ci-dessus trouve son application immédiate dans l'étude du problème d'approximation de Bernstein [3].

* * *

<u>References</u>.

1. Pour la notion classique d'application vectorielle indéfiniment différentiable, voir, par exemple, S. Lang, <u>Introduction to differentiable manifolds</u>, pag. 6 (1962). En réalité, le théoreme qu'on va énoncer reste valable pour d'autres versions connues et moins exigeantes de cette notion.
2. Voir J. Dieudonné et L. Schwartz, <u>La dualité dans les espaces (F) et (DF)</u>, Annales de l'Institut Fourier, t. 1 (1949); N. Bourbaki, <u>Espaces vectoriels topologiques</u>, chap. III (1955).
3. Voir L. Nachbin, <u>Résultats récents et problèmes de nature algébrique en théorie de l'approximation</u>, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Stockholm (1962); <u>Fonctions analytiques et quasi-analytiques vectorielles et le problème d'approximation de Bernstein</u>, Séminaire Lelong, Faculté des Sciences de Paris (1962/63).