NOTAS DE FÍSICA

VOLUME XI

Nº 9

RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ELLIPTIQUES

par

Leopoldo Nachbin

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71

RIO DE JANEIRO

1964

Notas de Física - Volume XI - Nº 9

RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ELLIPTIQUES *

Leopoldo Nachbin **
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas,
Instituto de Matemática Pura e Aplicada,
Universidade do Brasil, Rio de Janeiro

(Reçu le 25 fevrier, 1964)

1. Notations et terminologie.

Voir le traité classique de L. Schwartz [12] et le livre récent de Hörmander [2]. Soient $U \subset R^n$ un ouvert non-vide, où R est la droite numérique; $\mathcal{E}(U)$ l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables sur U; $\mathcal{D}(U)$ le sous-espace de celles à support compact; $\mathcal{D}'(U)$ l'espace des distributions sur U; $\langle T, f \rangle = T(f)$ la valeur de $T \in \mathcal{D}'(U)$ sur $f \in \mathcal{D}(U)$; D_i la dérivation partielle du premier ordre sur R^n par rapport à la i-ième variable et $D_{ij} = D_i D_j$; $\int_X f$ l'intégrale de Lebesgue de f sur X; $\varkappa_X f$ la moyenne de f sur X, donc $\int_X f$ divisée par la mesure de X; sup ess f et inf ess f le supremum et l'infimum essentiels de f sur X modulo des ensembles négligeables (de mesure nulle); $\mathcal{L}^p_{loc}(U)$ l'espace des fonctions réelles mesurables sur U à puissance p-ième localement intégrable; $\mathcal{L}^p_c(U)$ le sous-espace de celles à support compact ($1 \leqslant p \leqslant \infty$; inter

---

* À paraître au Séminaire Bourbaki, Faculté des Sciences de Paris.

** Actuellement professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

prétation usuelle pour $p=\infty$). Notons que

$$\mathcal{L}^2_c(U)\subset\mathcal{L}^2_{loc}(U)\subset\mathcal{L}^1_{loc}(U)\subset\mathcal{D}'(U) .$$

Si $T\in\mathcal{D}'(U)$, on posera

$$T' = \text{grad } T = (D_1 T, \ldots, D_n T)\in\left[\mathcal{D}'(U)\right]^n ;$$

et si $\mathcal{X}\subset\mathcal{D}'(U)$, on écrira $T'\in\mathcal{X}$ pour indiquer que $D_1 T,\ldots,D_n T\in\mathcal{X}$. Si $T = (T_1,\ldots, T_n)\in\left[\mathcal{D}'(U)\right]^n$, on posera

$$T' = \text{div } T = D_1 T_1 + \ldots + D_n T_n \in \mathcal{D}'(U) ;$$

pour $S\in\mathcal{D}'(U)$, on posera

$$ST = (ST_1, \ldots, ST_n)\in\left[\mathcal{D}'(U)\right]^n$$

si les produits $ST_1, \ldots, ST_n\in\mathcal{D}'(U)$ ont un sens. Le produit scalaire usuel sur R^n et la norme associée seront notés $(\cdot|\cdot)$ et $\|\cdot\|$. $B_x(r)$ est la boule fermée de centre $x\in R^n$ et de rayon $r\geqslant 0$; $Q_x(h)$ est le cube fermé de centre $x\in R^n$ et de cotés de longueur $h\geqslant 0$ parallèles aux axes. Si $f, g: U\to R^n$ sont deux fonctions, $(f|g): U\to R$ est la fonction $x\rightsquigarrow(f(x)|g(x))$. Si $a: U\to\mathcal{L}(R^n)$, où $\mathcal{L}(R^n)$ est l'algèbre normée des endomorphismes linéaires de R^n identifiés aux matrices réelles carrées d'ordre n, et $f: U\to R^n$, on notera $af: U\to R^n$ la fonction $x\rightsquigarrow a(x) f(x)$ et $a^{-1}: U\to\mathcal{L}(R^n)$ la fonction $x\rightsquigarrow\left[a(x)\right]^{-1}$ (pourvu que $a(x)$ soit partout inversible). La fonction $u: U\to R$ est höldérienne si, à tout compact $K\subset U$, correspond $h = h(K) > 0$ tel que

$$\sup_{x,\, y\in K,\, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|^h} < \infty .$$

2. Le théorème de de Giorgi-Nash

Soit a: $U \to \mathcal{L}(R^n)$ une fonction mesurable dont la valeur

$$a(x) = \{a_{ij}(x)\} \in \mathcal{L}(R^n)$$

est une matrice symétrique positive pour tout $x \in U$. On suppose que $a(x)$ est partout inversible et que a et a^{-1} sont localement bornées; donc, pour tout compact $K \subset U$, il existe $L = L(K) \geqslant 1$ tel que

$$L^{-1} \cdot (t|t) \leqslant (a(x)\, t|t) \leqslant L \cdot (t|t) \text{ si } t \in R^n,\ x \in K . \tag{1}$$

On considérera l'opérateur différentiel linéaire uniformément elliptique div (a∘grad).

$$u \to (au')' = \sum_{i=1}^{n} D_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, D_j\, u \right). \tag{2}$$

Tout opérateur différentiel linéaire à coefficients distributions sur U est a priori défini sur $\mathcal{E}(U)$ et à valeurs dans $\mathcal{D}'(U)$. Dans le cas qui nous occupe, les a_{ij} sont mesurables et localement bornées, d'après (1): on peut considérer l'opérateur (2) comme défini sur l'espace vectoriel des $u \in \mathcal{D}'(U)$ telles que $u' \in \mathcal{L}^1_{loc}(U)$. Alors u est solution ou sous-solution suivant que $(au')' = 0$ ou $(au')' \geqslant 0$, c'est-à-dire que la distribution $(au')'$ est nulle ou une mesure positive. On a la formule

$$\langle (au')', f \rangle = - \int (au'|f')$$

pour $f \in \mathcal{D}(U)$ et u dans le domaine de (2). Il en résulte que u est une solution, ou une sous-solution, si et seulement si $\int (au'|f') = 0$ pour toute $f \in \mathcal{D}(U)$, ou $\int (au'|f') \leqslant 0$ pour toute $f \in \mathcal{D}(U)$, $f \geqslant 0$. Pour des raisons techniques, désormais on considérera seulement des solutions ou sous-solutions u telles que $u \in \mathcal{L}^2_{loc}(U)$,

$u' \in \mathcal{L}^2_{loc}(U)$; on supposera tacitement satisfaites ces deux conditions. Alors u est une solution, ou une sous-solution, si et seulement si $\int (au'|f') = 0$ pourvu que $f \in \mathcal{L}^2_c(U)$, $f' \in \mathcal{L}^2_c(U)$, ou $\int (au'|f') \leqslant 0$ pourvu que $f \in \mathcal{L}^2_c(U)$, $f' \in \mathcal{L}^2_c(U)$, $f \geqslant 0$.

Notons aussi la notions duale de <u>sur-solution</u>.

THÉORÈME 1 (de Giorgi-Nash). <u>Toute solution</u> u <u>de</u> $(au')' = 0$ <u>dans</u> U <u>est essentiellement höldérienne</u> (c'est-à-dire devient höldérienne, donc continue, après correction sur un ensemble négligeable).

Voir ci-dessous la démonstration de ce résultat fameux (§4).

3. <u>L'inégalité de Harnack-Moser</u>.

THÉORÈME 2 (Harnack-Moser). - U <u>étant connexe, à tout compact</u> $K \subset U$ <u>on peut associer</u> $c = c(K) > 1$ <u>dépendant aussi de l'opérateur et telle que, pour toute solution</u> $u \geqslant 0$ <u>de</u> $(au')' = 0$ <u>dans</u> U, <u>on ait</u>

$$\sup_K \text{ess}\, u \leqslant c \inf_K \text{ess}\, u \ .$$

L'essentiel de la démonstration sera indiqué aux paragraphes 6-7. D'après le théorème 1, on peut supposer u continue après correction sur un ensemble négligeable, donc remplacer sup ess et inf ess par sup et inf.

<u>Remarque</u>. A tout compact $K \subset U$, on peut aussi associer $c' = c'(K) > 0$ et $c'' = c''(K) > 0$, telles que, $u \geqslant 0$ étant une solution quelconque de $(au')' = 0$ dans U normalisée par $\inf_K \text{ess}\, u \leqslant 1 \leqslant \sup_K \text{ess}\, u$, alors $\frac{1}{c'} \leqslant u \leqslant c''$ presque partout sur K. En supposant que c, c' et c'' soient les plus petites possibles et K non-négligeable, on a

$$c = c' = c'' > 1 \ .$$

4. <u>Le théorème de de Giorgi-Nash à partir de l'inégalité de Harnack-Moser</u>.

LEMME 1. <u>Toute solution</u> u <u>de</u> $(au')' = 0$ <u>dans</u> U <u>est essentiellement localement bornée</u> (donc devient localement bornée après correction sur un ensemble négligeable).

Ce lemme (conséquence du théorème 1) est démontré directement (§ 5, proposition 3, corollaire) et utilisé dans la preuve du théorème 1.

LEMME 2. <u>Pour</u> $x \in U$, $r \geqslant 0$ <u>tels que</u> $B_x(r) \subset U$, <u>soit</u> $O_x(r)$ <u>l'oscilation</u> dans $B_x(r)$ <u>de la fonction localement bornée</u> $u\colon U \to R$. <u>Si, pour tout compact</u> $K \subset U$ <u>et tout</u> t, $0 < t < 1$, <u>il existe</u> T, $0 < T < 1$, et $\rho > 0$ <u>tels que</u> $B_x(\rho) \subset U$ <u>et</u> $O_x(tr) \leqslant T \cdot O_x(r)$ <u>si</u> $x \in K$ et $0 \leqslant r \leqslant \rho$, <u>alors</u> u <u>est höldérienne dans</u> U.

La réciproque est fausse: les fonctions satisfaisant aux conditions du lemme forment un sous-ensemble <u>strict</u> de l'ensemble des fonctions höldériennes sur U (ce qui donne une précision supplémentaire au théorème 1). Pour la démonstration facile, voir de Giorgi [1], Moser [8] p. 587, et [7] p. 465 (on fixe $t = 1/2$).

<u>Démonstrations du théorème 1 à partir du théorème 2</u>. Soit u une solution de $(au')' = 0$ dans U. Pour $x \in U$, $r > 0$ tels que $B_x(r) \subset U$, soient

$$M_x(r) = \operatorname*{sup\,ess}_{B_x(r)} u, \quad m_x(r) = \operatorname*{inf\,ess}_{B_x(r)} u \quad \text{et} \quad O_x(r) = M_x(r) - m_x(r) \ ,$$

d'après le lemme 1. Le théorème 2, pour l'ouvert U' et le compact

K' donnés par les boules ouvertes et fermées de centre x et de rayons r et tr ($0 < t < 1$ fixé), donne une constante $c' > 1$ correspondant à l'inégalité de HM pour U' et K'. Les solutions $v = h - u$, pour $h = M_x(r)$, et $v = u - h$, pour $h = m_x(r)$, de $(av')' = 0$, sont essentiellement positives dans U'. Le théorème 2 pour U' et K' donne

$$M_x(r) - m_x(tr) \leqslant c'\left[M_x(r) - M_x(tr)\right] \text{ et } M_x(tr) - m_x(r) \leqslant c'\left[m_x(tr) - m_x(r)\right] .$$

Par addition, on a

$$O_x(tr) \leqslant T' \cdot O_x(r) \text{ où } T' = \frac{c' - 1}{c' + 1} .$$

Si $K \subset U$ est compact et si $\rho > 0$ est tel que $B_x(\rho) \subset U$ si $x \in K$, il existe c telle que $c' \leqslant c$ si $x \in K$, $0 < r \leqslant \rho$. Donc

$$O_x(tr) \leqslant T \cdot O_x(r) \text{ si } x \in K,\ 0 < r \leqslant \rho, \text{ où } T = \frac{c - 1}{c + 1} .$$

On peut supposer u continue après correction sur un ensemble négligeable, parce que $O_x(t^m r) \leqslant T^m \cdot O_x(r)$ ($m = 1, 2, \ldots$) entraîne $O_x(r) \to 0$ si $r \to 0$, pour tout $x \in U$. On applique alors le lemme 2.

5. __Quelques propriétés des solutions et sous-solutions__.

PROPOSITION 1. __Si__ $v = f(u)$, $v \in \mathcal{L}^2_{loc}(U)$, $v' \in \mathcal{L}^2_{loc}(U)$, $f : R \to R$, __alors__ v __est une sous-solution de__ $(av')' = 0$ __sous une des deux hypothèses suivantes__:

(a) u __est une solution de__ $(au')' = 0$ __dans__ U __et__ f __est convexe__;

(b) u __est une sous-solution de__ $(au')' = 0$ __dans__ U __et__ f __est croissante convexe__.

En fait, si $f \in \mathcal{E}(R)$ et si f' et f'' sont bornées, $f'(u)$ et $f''(u)$ sont mesurables bornées. On a au sens des distributions

$$[f(u)]' = f'(u)u', \ [f'(u)]' = f''(u)u'$$

et

$$(av')' = [af'(u)u']' = (au')\, f'(u) + (au'|u')\, f''(u) .$$

Or $(au'|u') \geqslant 0$ d'après (1). Donc $(av')' \geqslant 0$ si $(au')' = 0$, $f'' \geqslant 0$, ou si $(au')' \geqslant 0$, $f' \geqslant 0$, $f'' \geqslant 0$. Le cas général résulte d'un passage à la limite sur f.

PROPOSITION 2. _Si_ $x \in U$, $0 < r < R$, $B_x(R) \subset U$, _alors_

$$\int_{B_x(r)} \|u'(t)\|^2\, dt \leqslant \frac{4L^4}{(R-r)^2} \int_{B_x(R)} u(t)^2\, dt ,$$

_où_ $L = L[B_x(R)]$ _d'après (1), sous une des deux hypothèses suivantes:_

(a) u _est une solution de_ $(au')' = 0$ _dans_ U;

(b) $u \geqslant 0$ _est une sous-solution de_ $(au')' = 0$ _dans_ U.

La démonstration classique très simple (|7|, p. 459) consiste à prendre $f = g^2 u$ dans $\int (au'|f') = 0$ ou $\int (au'|f') \leqslant 0$ suivant le cas (a) ou (b), où $g \in \mathcal{L}_c^\infty(U)$, $g' \in \mathcal{L}_c^\infty(U)$, donc $f \in \mathcal{L}_c^2(U)$, $f' \in \mathcal{L}_c^2(U)$. Un petit calcul, utilisant (1), l'inégalité de Schwarz et un choix de g, prouve la proposition.

LEMME 3. _Si_ $u \geqslant 0$ _est une sous-solution de_ $(au')' = 0$ _dans_ U _et_ $v = u^p \in \mathcal{L}^2_{loc}(U)$ _pour un certain_ $p \geqslant 1$, _alors_ v _est une sous-solution de_ $(av')' = 0$ _dans_ U.

En fait, soit $f: R \to R$ telle que $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$, $f(x) =$

$= x^p$ si $x \geqslant 0$. On a $v = f(u)$. Pour $t \geqslant 0$, soit f_t: $R \to R$ telle que $f_t(x) = f(x)$ si $x \leqslant t$, $f_t(x)$ est l'ordonnée au point d'abscisse x de la droite tangente à f au point d'abscisse t si $x > t$. Posons $v_t = f_t(u)$. On a $v_t \in \mathcal{L}^2_{loc}(U)$ parce que $f_t \leqslant f$ et $v_t' = f_t'(u)\, u' \in \mathcal{L}^2_{loc}(U)$ parce que f_t' est bornée. D'après la proposition 1-(b), v_t est une sous-solution. En appliquant la proposition 2-(b) avec v_t à la place de u et faisant $t \to \infty$, on déduit que $v' \in \mathcal{L}^2_{loc}(U)$. D'après la proposition 1-(b), v est une sous-solution.

PROPOSITION 3. <u>Si</u> k <u>et</u> K <u>sont des compacts de</u> R^n, <u>où</u> k <u>est contenu à l'intérieur de</u> K <u>et</u> $K \subset U$, <u>il existe</u> $c = c(k, K) > 0$ <u>dépendant aussi de l'opérateur, telle que, sous une des deux hypothèses (a) et (b) de la proposition 2, on ait</u>

$$|u(y)| \leqslant c \times \left\{ \int_K u(t)^2 \, dt \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \underline{\text{presque partout pour}}\ y \in k\ .$$

En fait [13, 7 p. 461], il suffit de prendre $k = B_x(\rho)$, $K = B_x(2\rho)$. Admettons (b). Rappelons l'inégalité classique de Sobolev: si $w \in \mathcal{L}^2_{loc}(U)$, $w' \in \mathcal{L}^2_{loc}(U)$, $B_x(r) \subset U$, alors

$$\left\{ \frac{1}{r^n} \int_{B_x(r)} w(t)^{2s} dt \right\}^{1/s} \leqslant c_n \left\{ \frac{1}{r^{n-2}} \int_{B_x(r)} \|w'(t)\|^2 dt + \frac{1}{r^n} \int_{B_x(r)} w(t)^2 \, dt \right\},$$

où $c_n > 0$ dépend seulement de n et $s = n/(n-2)$ (on supposera $n > 2$, ce qui n'est pas une restriction essentielle). Le fait que l'intégrale à gauche soit finie n'est pas une hypothèse, mais une conséquence. En combinant ceci, où $w \geqslant 0$ est une sous-solution dans U, avec la proposition 2-(b), où $0 < r \leqslant R \leqslant 2r < 2\rho$, on trouve

$$\left\{\frac{1}{r^n}\int_{B_x(r)} w(t)^{2s}\,dt\right\}^{1/s} \leqslant c'\left\{1+\frac{r^2}{(R-r)^2}\right\}\times\left\{\frac{1}{R^n}\int_{B_x(R)} w(t)^2 dt\right\}, \quad (3)$$

où $c' = 2^{n+2} L^2 c_n$, $L = L\left[B_x(2\rho)\right]$. Prenons une suite $r_o > r_1 > \dots$ telle que $r_o = 2\rho$, $r_{i+1} \leqslant 2r_i$, $r_i \to r$, $\frac{r_i}{r_{i-1} - r_i}$ reste bornée, par exemple $r_i = \rho(1+2^{-i})$. Appliquons le lemme 3 et (3) avec $w = u^{s^i}$, d'une façon répétée. On trouve $A_i \leqslant d^i (A_{i-1})^s$ ($i = 0, 1, \dots$) où

$$A_i = \frac{1}{(r_i)^n}\int_{B_s(r_i)} \left[u(t)\right]^{2s^i} dt$$

et $d > 1$ est une constante. On aura

$$A_i \leqslant d^{i+(i-1)s+\dots+s^{i-1}} (A_o)^{s^i}, \text{ d'où } A_i \leqslant \left\{d^{s/(s-1)^2} A_o\right\}^{s^i}.$$

En prenant la racine s^i-ième et faisant $i \to \infty$, on trouve

$$u(y)^2 \leqslant d^{s/(s-1)^2} (2\rho)^{-n} \int_{B_x(2\rho)} u(t)^2\,dt \text{ presque partout pour } y \in B_x(\rho),$$

ce qui prouve la proposition 3-(b). En admettant (a), on applique la proposition 3-(b) à $v = f(u)$, où $f \in \mathcal{E}(R)$, $f \geqslant 0$, $f'' \geqslant 0$, $f(t) \leqslant |t|$ et $f'(t) = 1$ en dehors d'un compact. Par passage à la limite, en faisant $f(t) \longrightarrow |t|$, on obtient la proposition 3-(a).

COROLLAIRE. <u>On a le lemme 1. En plus, toute sous-solution</u> u <u>de</u> $(au')' = 0$ <u>dans</u> U <u>essentiellement localement bornée inférieurement est aussi essentiellement localement bornée supérieurement</u>.

6. Réduction de l'inégalité de Harnack-Moser au cas local.

LEMME 4. Considérons des nombres réels tels que:

1° $0 \leqslant m_i \leqslant M_i \leqslant c_i\ m_i$ et $c_i \geqslant 1$ $(i = 1, \ldots, s)$;

2° pour toute partition $I \cup J = \{1, \ldots, s\}$ de l'ensemble des entiers $1, \ldots, s$ où $I \cap J = \emptyset$, $I \neq \emptyset$, $J \neq \emptyset$ il existe $i \in I$, $j \in J$, tels que les intervalles fermés $[m_i, M_i]$ et $[m_j, M_j]$ s'intersectent. Alors $M \leqslant cm$, où $M = \sup\{M_i\}$, $m = \inf\{m_i\}$, $c = c_1 \ldots c_s$.

LEMME 5. Soient $(U_t)_{t \in T}$, $(V_t)_{t \in T}$ deux familles d'ouverts de R^n, où V_t est à adhérence compacte $K_t = \overline{V}_t$, $K_t \subset U_t \subset U$, $\bigcup_{t \in T} V_t = U$ et U est connexe. Si l'inégalité de Harnack-Moser est vraie pour tout couple U_t, K_t, elle est vraie aussi pour U, K, où $K \subset U$ est compact.

En fait, supposons K connexe non-vide (parce qu'on peut remplacer K par un compact connexe non-vide plus grand, contenu dans U) et soit $K \subset V_{t_1} \cup \ldots \cup V_{t_s}$ où K intersecte tout V_{t_i}. Il existe une constante $c_i > 1$ rendant l'inégalité de HM valable pour U_{t_i}, K_{t_i}. Posons $M_i = \sup_{K_{t_i}} \mathrm{ess}\ u$, $m_i = \inf_{K_{t_i}} \mathrm{ess}\ u$ où $u \geqslant 0$ est une solution de $(au')' = 0$ dans U. Le lemme 4 s'applique.

7. Le cas local de l'inégalité de Harnack-Moser.

On écrira $Q(h)$ au lieu de $Q_o(h)$, si le centre du cube est à l'origine. Posons

$$F(p, h) = \left\{ \chi_{Q(h)}\ u^p \right\}^{1/p}$$

si $u \geqslant 0$ est mesurable sur U, $h > 0$, $Q(h) \subset U$, $p \in R$, $p \neq 0$ (la définition usuelle de $F(0, h)$ étant inutile ici). $F(p, h)$ est fonction croissante de p (inégalité de Hölder), tendant vers le supremum et l'infimum essentiels de u sur $Q(h)$ pour $p \to +\infty$ et $p \to -\infty$. Par la suite, on supposera $Q(4) \subset U$, et on indiquera par c_1, $c_1(p)$, ... des constantes strictement positives dépendant seulement le l'opérateur et éventuellement de p. On admettra que $n > 2$, ce qui n'est pas une restriction essentielle. Le théorème 2 est une conséquence des deux propositions suivantes.

PROPOSITION 4. <u>Il existe</u> $c_1(p)$ <u>pour</u> $p > 1$ <u>telle que, si</u> $u \geqslant 0$ <u>est une sous-solution de</u> $(au')' = 0$ <u>dans</u> U, <u>on ait</u>

$$\sup_{Q(1)} \text{ess}\ u \leqslant c_1(p) \cdot F(p, 2) .$$

PROPOSITION 5. <u>Il existe</u> $c_2(p)$ <u>pour</u> $0 < p < s = n/(n-2)$ <u>telle que, si</u> $u \geqslant 0$ <u>est une sur-solution de</u> $(au')' = 0$ <u>dans</u> U, <u>on ait</u>

$$F(p, 2) \leqslant c_2(p) \times \inf_{Q(1)} \text{ess}\ u .$$

Par suite, en prenant $p = (1+s)/2$, on aura l'inégalité de HM pour U et $Q(1)$. Par des translations et des homothéties, ceci entraîne le théorème 2, d'après le lemme 5, paragraphe 6.

<u>Aperçu de la preuve de la proposition 4</u>. Soient $0 < h' < h \leqslant 2h' \leqslant 4$. On utilise l'inégalité $\int (au'|f') \leqslant 0$ pour $f \in \mathcal{L}_c^2(U)$, $f' \in \mathcal{L}_c^2(U)$. On remarque que $u \in \mathcal{L}_{loc}^{\infty}(U)$ après correction sur un ensemble négligeable (proposition 3, corollaire, § 5). On choix convenable de f et un calcul où l'on utilise (1) et l'inégalité de Scharwz [8] (p. 583-584) entraînent

$$\int_{Q(h')} \|v'(t)\|^2\, dt \leqslant c_3 \times \left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 \left(\frac{2}{h-h'}\right)^2 \int_{Q(h)} v(t)^2 dt \text{ où } v = u^k,$$

$k > 1/2$.

Ceci et l'inégalité de Sobolev donnent, en posant $p = 2k$,

$$F(sp, h') \leqslant c_4 \times \left(\frac{h}{h'} - 1\right)^{-2/p} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{2/p} F(p, h) \text{ où } p > 1. \qquad (4)$$

Posons $p_i = s^i p$, $h_i = 1 + 2^{-i}$ $(i = 0, 1, \ldots)$, où $p > 1$. Appliquons (4) en remplaçant p par p_i, h par h_i, h' par h_{i+1}. Par applications répétées, où $F(p_o, h_o) = F(p, 2)$, on aura

$$F(p_{i+1}, h_{i+1}) \leqslant c_1(p) \cdot F(p,2) ,$$

ce qui donne la proposition 4 pour $i \to \infty$.

<u>Aperçu de la preuve de la proposition 5</u>. On peut supposer que $\inf_U u > 0$ (parce qu'on peut remplacer u par $u + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$, et faire $\varepsilon \to 0$). La difficulté principale dans la démonstration consiste à établir l'inégalité (4.6) [8] p. 586, c'est-à-dire

$$F(q, 3) \leqslant c_5 \cdot F(-q, 3) \qquad (5)$$

où $q > 0$ dépend seulement de l'opérateur. En effet, l'inégalité

$$\int (au' | f') \geqslant 0, \quad \text{où} \quad f = g^2/u, \quad g \in \mathcal{L}_c^2(U), \quad g' \in \mathcal{L}_c^2(U) ,$$

entraîne, par un petit calcul où l'on utilise (1) et l'inégalité de Schwarz,

$$\int g^2 \|v'\|^2 \leqslant 4L^4 \int \|g'\|^2$$

où $v = \log u$, $L = L[Q(4)]$ et g a son support dans $Q(4)$. Un choix convenable de g prouve que $\int_Q \|v'\|^2 \leqslant c_6 . h^{n-2}$ pour tout sous-cube $Q \subset Q(3)$ de côtés de longueur $h > 0$ parallèles aux axes. On applique une inégalité de Poincaré [8] p. 579 pour toute w pour laquelle les intégrales en question existent

$$\int_Q (w-m)^2 \leqslant (h/\pi)^2 \int_Q \|w'\|^2 \quad \text{où} \quad m = \chi_Q\, w \ .$$

Pour $w = v$, on a donc

$$\chi_Q|v-m| \leqslant \left\{\chi_Q(v-m)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant c_7 \text{ où } m = \chi_Q\, v \text{ et } Q \subset Q(3) \ .$$

Ceci permet d'appliquer un lemme de John-Nirenberg (§8), où $w = v = \log u$, $k = c_7$. En posant $q = \alpha/k$, on obtient

$$\chi_{Q(3)}\, u^q \times \chi_{Q(3)}\, u^{-q} \leqslant \beta^2$$

ce qui prouve (5). Finalement, par une répétition du raisonnement utilisé dans la preuve de la proposition 4, on voit que

$$F(-q, 3) \leqslant c_8 \times \inf_{Q(1)} \text{ess}\ u, \quad F(p, 2) \leqslant c_9(p) \times F(q, 3) \quad (0 < p < s). \tag{6}$$

La proposition 5 résulte alors de (5) et (6).

8. <u>Le lemme de John-Nirenberg.</u>

LEMME 6 (JOHN-NIRENBERG). <u>Il existe des constantes</u> $\alpha > 0$, $\beta > 0$ <u>dépendant seulement de n, ayant la propriété suivante. Soient</u> w <u>une fonction réelle intégrable sur</u> $Q_a(H)$, $H > 0$, <u>et</u> $k > 0$. <u>Supposons que, pour tout sous-cube</u> $Q \subset Q_a(H)$ <u>de côtés non nuls parallèles aux axes, il existe</u> $w_Q \in R$ <u>telle que</u> $\chi_Q|w - w_Q| \leqslant k$. <u>Alors</u> $|w|^p$ <u>est intégrable sur</u> $Q_a(H)$ <u>pour tout</u> $p \geqslant 1$ <u>et il existe</u> $w_o \in R$ <u>telle que</u>

$$\chi_{Q_a(H)}\, e^{(\alpha/k)|w-w_o|} \leqslant \beta, \quad \text{d'où} \quad \chi_{Q_a(H)}\, e^{(\alpha/k)w} \times \chi_{Q_a(H)}\, e^{-(\alpha/k)w} \leqslant \beta^2 \ .$$

La dernière inégalité résulte, par multiplication, des deux inégalités qu'on obtient à partir de la précédente en remarquant que $e^x \leqslant e^{|x|}$, $e^{-x} \leqslant e^{|x|}$. Pour la démonstration du lemme, voir [3], lemma 1, (3).

9. Commentaires.

Le théorème 1 est dû à de Giorgi [1]. Légèrement plus tard, Nash [10] prouvait un résultat analogue pour l'équation parabolique

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \sum_{i=1}^{n} D_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t, x) \times D_j \, u(t, x) \right\}$$

(contenant comme cas particulier l'équation elliptique du théorème 1), d'une façon indépendante, par des méthodes différentes. Le théorème 2, classique et dû à Harnack pour l'équation de Laplace, est dû à Moser [8] sous la forme indiquée. Moser [9] vient d'étendre le théorème 2 à l'équation (7) sous l'hypothèse (1), avec $a(t, x)$ à la place de $a(x)$, où $x \in U \subset R^n$, $0 < t < T$. Auparavant, Moser avait donné une démonstration du théorème 1 basée sur une forme affaiblie de l'inégalité de Harnack [7] théorème 2 . Au lieu de considérer des solutions tronquées sup (u, k), comme de Giorgi, où u est une solution de $(au')' = 0$, Moser utilise des puissances u^p, plus commodes en vue de l'inégalité de Sobolev. Dans les deux cas, on considère des fonctions $f(u)$ qui sont des sous-solutions ou des sur-solutions. Comme dans les démonstrations usuelles de la régularité des solutions, le raisonnement de Moser est itératif, mais il porte sur le comportement de $F(p, h) = \left\{\chi_{Q(h)} \, u^p\right\}^{1/p}$ pour p positif ou négatif. Il reste à savoir si la méthode des solutions tronquées donne le théorème 2. L'extension des théorèmes 1 et 2 aux équations linéaires d'ordre arbitraire à coefficients distributions reste ouverte.

Parmi les justifications valables de l'intérêt de l'étude de la <u>régularité</u> des solutions des équations linéaires, à coefficients <u>irréguliers</u>, signalons son application à la preuve de la <u>régularité</u> des solutions des équations <u>non-linéaires</u>, mais <u>régulières</u>. En fait, considérons la fonctionnelle

$$J(u) = \int_U f(u'), \quad u: U \to R ,$$

où $f: R^n \to R$ est analytique et $L^{-1}\cdot(t|t) \leqslant \sum D_{ij} f(x) t_i t_j \leqslant L\cdot(t|t)$ pour $x \in R^n$, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in R^n$ arbitraires, $L \geqslant 1$ fixé. L'équation d'Euler de J s'écrit

$$(f' \circ u')' = \sum D_i \left[(D_j f)(D_1 u, \ldots, D_n u) \right] = 0 .$$

Dans les méthodes directes du Calcul des variations, on veut prouver que, si u, $D_i u$, $D_{ij} u \in \mathcal{L}^2_{loc}(U)$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ et si u est une extrémale de J, donc solution de l'équation d'Euler au sens des distributions (ce qui a un sens, parce que les $D_{ij} f(x)$ sont bornées, donc on a des inégalités $|D_i f(x)| \leqslant c' \| x \| + c''$), alors u est essentiellement analytique. Pour cela, on remarque que, si $t \in R^n$, $w = \frac{\partial u}{\partial t}$, on aura $(aw')' = \frac{\partial}{\partial t}(f' \circ u')' = 0$, où $a_{ij} = (D_{ij} f) \circ u'$. D'après le théorème 1, w est essentiellement höldérienne. On applique alors un théorème classique de Hopf-Stampacchia-Morrey, suivant lequel l'extrémale u est analytique si $D_1 u$, $\ldots$, $D_n u$ sont höldériennes. Le théorème 1 est donc un pont pour arriver a ce but d'analyticité. Voir les conférences de Morrey [5,6], Nirenberg [11], Stampacchia [13, 14], où l'on trouvera d'autres sources de la vaste littérature sur le sujet, ses origines et applications en calcul des variations et géométrie différentielle.

Littman, Stampacchia et Weinberger [4] utilisent les théorèmes 1 et 2 dans l'étude du problème de Dirichlet.

REMARQUE. Les articles 7 et 8 contiennent des fautes faciles à corriger. En particulier, signalons que les inégalités (5) et (6) de cet exposé correspondent aux inégalités (4.4), (4.5) et (4.6) de 8.

* * *

BIBLIOGRAPHIE

1. E. de Giorgi, Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari, Mem. Accad. Sc. Torino, Cl. Sc. fis. nat., Série 3, t. 3, 1957, p. 25-43.

2. L. Hörmander, Linear partial differential operators, Berlin, 1963.

3. F. John and L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, Comm. pure and appl. Math., t. 14, 1961, p. 415-426.

4. W. Litman, G. Stampacchia and H. F. Weinberger, Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients, Ann. Scuola norm. sup. Pisa (à paraître).

5. Charles B. Morrey, Some recent developments in the theory of partial differential equations, Bull. Amer. math. Soc., t. 68, 1962, p. 279 - 297.

6. Charles B. Morrey, Des résultats récents du calcul des variations, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, 1961/62, nº 5, 62. p. (Collège de France).

7. Jorgen Moser, A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, Comm. pure and appl. Math., t. 13, 1960, p. 457-468.

8. Jorgen Moser, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, Comm. pure and appl. Math., t. 14, 1961, p. 577-591.

9. Jorgen Moser, Article sur l'inégalité de Harnack dans le cas parabolique, à paraître.

10. J. Nash, Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, Amer. J. of Math., t. 30, 1958, p. 931-954.

11. L. Nirenberg, Some aspects of linear and nonlinear partial differential equations, Proceedings of the International congress of mathematicians, 1962, Stockholm, à paraître.

12. Laurent Schwartz, Théorie des distributions, tomes 1 (2e éd.) et 2. Paris, Hermann, 1951-1957 (Act. Scient. et Ind., 1091 - 1245 et 1122; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 9 et 10).

13. Guido Stampacchia, Equations elliptiques à données discontinues, Séminaire Schwartz, t.5, 1960/61: Equations aux dérivées partielles et interpolation, nº 4, 16 p.

14. Guido Stampacchia, Second order elliptic equations and boundary value problems, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1962, Stockholm, à paraître.

* * *