NOTAS DE FÍSICA

VOLUME X

Nº 9

APROXIMAÇÃO PONDERADA DE FUNÇÕES CONTÍNUAS POR POLINÔMIOS

por

Leopoldo Nachbin

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71

RIO DE JANEIRO

1962

Notas de Física - Volume X - Nº 9

APROXIMAÇÃO PONDERADA DE FUNÇÕES CONTÍNUAS POR POLINÔMIOS

Leopoldo Nachbin
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Universidade do Brasil
Rio de Janeiro, Brasil

(Recebido em 29 de maio de 1962)

A teoria clássica da aproximação contem vários resultados profundos da Matemática, mas a sua organização em uma teoria geral ainda é uma tarefa a ser realizada. Alguns dos seus problemas fundamentais, nessa direção, continuam de pé.

Historicamente, a introdução dos espaços vetoriais topológicos localmente convexos e o teorema de Hahn-Banach, em suas várias formas, conduziu a uma enorme simplificação de certos aspectos da teoria da aproximação, correntes no fim do século passado e no início deste século, o que foi possível graças, sobretudo, aos trabalhos pioneiros em Análise Funcional, de S. Banach e F. Riesz.

Posteriormente, os trabalhos de M. H. Stone, sôbre a teoria de Weierstrass, de N. Wiener, sôbre a análise e a síntese harmônica, e de I. M. Gelfand, a respeito das álgebras de Banach, colocaram em devido relevo o aspecto algébrico de certos ramos da teoria da aproximação, como parte de um movimento moderno de algebrização da Análise.

Presentemente, as fontes principais dos problemas mais atraentes da teoria da aproximação são as equações diferenciais parciais, as variedades analíticas, complexas ou reais, e diferenciáveis, a análise harmônica e as álgebras de operadores.

É de esperar-se que certas extensões adequadas do conceito de convexidade local, aliadas a uma melhor compreensão do papel dos métodos algébricos em Análise, conduzam a uma organização razoável da teoria da aproximação e à solução de vários de seus problemas.

Na presente exposição, sôbre o problema de Bernstein, iremos nos limitar ao caso de funções reais, uma vez que o caso de funções complexas ainda apresenta dificuldades, não completamente elucidadas fora do caso auto-adjunto. As questões que trataremos podem ser reformuladas em termos de álgebras de operadores em espaços vetoriais topológicos, passando a ter sentido, como já ocorre notoriamente com o teorema de Weierstrass-Stone, no caso não comutativo. Não abordaremos, porém, tal aspecto da teoria, que ainda se encontra em estágio preliminar e fragmentário.

Esta conferência expositória, realizada no Terceiro Colóquio Brasileiro de Matemática, que teve lugar no Instituto de Matemática da Universidade do Ceará, Fortaleza, em junho de 1961, contem alguns resultados obtidos pelo autor, no período em que esteve como professor visitante na Brandeis University, em Waltham, Massachusetts, U.S.A. Um resumo de tais resultados apareceu em nota do autor citada na Bibliografia.

1. Motivação

Consideremos um problema de aproximação clássico da teoria da integração, que conduz, de modo natural, ao tipo de problema de aproximação para funções contínuas que discutiremos na presente exposição, tipo êsse que se apresenta, também, de várias outras formas importantes, sôbre as quais, porém, não nos deteremos.

Dada uma medida positiva μ no espaço euclideano $\underline{R}^n$, tal que todos os polinômios reais de n variáveis reais sejam de potências p-ésimas μ-integráveis, condição essa independente de p, então, no espaço $\underline{\mathcal{L}}^p(\mu)$ das funções reais em $\underline{R}^n$ de potências p-ésimas μ-integráveis, onde $1 \leqslant p < \infty$, temos a considerar a sub-álgebra $\mathcal{P}_n$ dos polinômios reais de n variáveis reais. Um problema de aproximação natural, que ocorre em muitas situações importantes, consiste em saber-se se $\underline{\mathcal{P}}_n$ é denso em $\underline{\mathcal{L}}^p(\mu)$. Pelo teorema de Hahn-Banach, tal equivale a perguntar sob que condições

$$\int x^m f(x) \, d\mu(x) = 0, \quad m \in \underline{N}^n \text{ arbitrário},$$

$$f \in \underline{\mathcal{L}}^q(\mu), \; 1/p + 1/q = 1,$$

onde $\underline{N}$ é o conjunto dos inteiros naturais 0, 1, 2, ..., implicam que $f(x) = 0$ em quasi todo $\underline{R}^n$, ou seja, em que hipóteses referentes a μ, toda função $f \in \underline{\mathcal{L}}^q(\mu)$ fica determinada pelos seus momentos

$$c_m = \int x^m f(x) \, d\mu(x), \quad m \in \underline{N}^n.$$

Quando o suporte S de μ é compacto, basta que notemos que a álgebra $\mathscr{C}(S)$ das funções reais contínuas em S é densa em $\underline{\mathscr{L}}^p(\mu|S)$ e que, em virtude do teorema de aproximação de Weierstrass, a álgebra $\mathscr{P}_n|S$ é densa em $\mathscr{C}(S)$, para que possamos concluir que $\underline{\mathscr{P}}_n$ é denso em $\underline{\mathscr{L}}^p(\mu)$. Quando, porém, não supomos que o suporte seja compacto, êsse raciocínio passa a ser inaplicável e, efetivamente, $\underline{\mathscr{P}}_n$ pode deixar de ser denso em $\underline{\mathscr{L}}^p(\mu)$.

<u>EXEMPLO 1</u>. Consideremos uma medida positiva μ na reta $\underline{R}$, cujo suporte esteja contido no conjunto $\underline{Z}$ de todos os inteiros. Para cada x, seja $\mu_x \geqslant 0$ a massa concentrada em $x \in \underline{Z}$, de modo que, se f fôr μ-integrável, então

$$\int f\,d\mu = \sum\left\{ f(x)\,\mu_x,\ x \in \underline{Z} \right\}.$$

Para que $\mathscr{P}_1$ esteja contido em $\underline{\mathscr{L}}^p(\mu)$, devemos precisamente ter

$$\sum\left\{\left|x^m\right| \mu_x,\ x \in \underline{Z}\right\} < +\infty, \qquad m \in \underline{N},$$

o que equivale a que, para cada m = 0, 1, 2, ..., a sucessão $\left\{x^m \mu_x,\ x \in \underline{Z}\right\}$ seja limitada. Se $\left\{\varphi_x,\ x \in \underline{Z}\right\}$ fôr uma sucessão de números reais tal que $\left|\varphi_x\right| \leqslant K\,\mu_x$ para todo $x \in \underline{Z}$ e um certo $K \geqslant 0$, então

$$\varphi(f) = \sum\left\{ \varphi_x\, f(x),\quad x \in \underline{Z} \right\}$$

define uma forma linear contínua sôbre $\underline{\mathscr{L}}^p(\mu)$ (no caso $p > 1$ devido a $\sum \mu_x < +\infty$). Para que φ anule-se sôbre $\underline{\mathcal{P}}_1$, deveremos ter

$$\sum \left\{ \varphi_x x^m, \ x \in \underline{Z} \right\} = 0, \qquad m \in \underline{N}.$$

Se $\varphi \neq 0$, ou seja, se $\varphi_x \neq 0$ para algum $x \in \underline{Z}$, então $\underline{\mathcal{P}}_1$ não será denso em $\underline{\mathcal{L}}^p(\mu)$. Para darmos um exemplo de uma tal situação, seja F uma função real, infinitamente diferenciável, par, periódica de período 1, na reta real $\underline{R}$. Essa função tem uma série de Fourier, que converge uniformemente, juntamente com todas as suas diferenciadas. Portanto, se $\left\{\varphi_x, \ x \in \underline{Z}\right\}$ for a sucessão dos coeficientes de Fourier de F, a expressão dos mesmos por meio das derivadas de F mostra-nos que, para cada m = 0, 1, 2, ..., a sucessão $\left\{x^m \varphi_x, \ x \in \underline{Z}\right\}$ é limitada. Por outro lado, se admitirmos que F e todas as suas derivadas são nulas na origem, teremos

$$\sum \left\{\varphi_x x^m, \ x \in \underline{Z}\right\} = 0, \quad m \in \underline{N}.$$

Finalmente, se $F \neq 0$, então ao menos um de seus coeficientes de Fourier será diferente de 0. Tomando, pois, $\mu_x = |\varphi_x|$, $x \in \underline{Z}$, obteremos o exemplo desejado.

<u>EXEMPLO 2</u>. No exemplo precedente, a medida considerada em $\underline{R}$ é discreta. Outro exemplo, em que a medida é contínua, é o seguinte. Tomemos

$$d\mu(x) = \exp\left(-|x|^\alpha\right) dx$$

em $\underline{R}$, onde $\alpha > 0$. É claro que $\underline{\mathcal{P}}_1 \subset \underline{\mathcal{L}}^p(\mu)$ para $1 \leqslant p < \infty$. Verifica-se que $\underline{\mathcal{P}}_1$ é denso em $\underline{\mathcal{L}}^p(\mu)$ se e só se $\alpha \geqslant 1$. Portanto, o caso $0 < \alpha < 1$

fornece o exemplo em vista.

Não obstante tais exemplos, em certos casos de destaque ainda podemos provar que $\underline{\mathcal{P}}_n$ é denso em $\underline{\mathcal{L}}^p(\mu)$, através de um raciocínio semelhante ao acima indicado na hipótese de μ possuir um suporte compacto, e que, na realidade, é uma generalização de tal raciocínio, como passamos a expor.

S é uma parte fechada de $\underline{R}^n$, donde resulta a sua compacidade local. Seja $\underline{K}(S)$ a álgebra das funções reais contínuas em S, de suportes compactos. Indiquemos com $\underline{\mathcal{C}}_\infty(S)$ a álgebra de Banach das funções reais contínuas em S, nulas no infinito, munida da norma do supremo. Como $\underline{K}(S)$ está contida em $\underline{\mathcal{C}}_\infty(S)$ e $K(S)$ é densa em $\underline{\mathcal{L}}^p(\mu|S)$, resulta fàcilmente que $\underline{\mathcal{P}}_n$ será densa em $\underline{\mathcal{L}}^p(S)$ desde que sejam satisfeitas as duas condições seguintes, ω sendo uma certa função real contínua em S:

a) Qualquer que seja o polinômio $P \in \underline{\mathcal{P}}_n$, o produto por de sua restrição a S pertence a $\underline{\mathcal{C}}_\infty(S)$ (o que se exprime dizendo que é rapidamente decrescente no infinito, sôbre S) e o conjunto

$$\left\{(P|S).\omega;\ P \in \underline{\mathcal{P}}_n\right\}$$

é denso em $\underline{\mathcal{C}}_\infty(S)$ (o que se exprime dizendo que ω é uma função peso fundamental em S). Daí resulta que ω nunca se anula em S.

b) $1/\omega$ é de potência p-ésima integrável relativamente a $\mu|S$.

Com efeito, se $f \in \underline{K}(S)$, donde $f\omega \in \underline{K}(S)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $P \in \underline{\mathcal{P}}_n$ tal que

$$|f(x)\,\omega(x) - P(x)\,\omega(x)| \leq \varepsilon, \qquad x \in S,$$

donde

$$\int |f(x) - P(x)|^p \, d\mu(x) \leq \varepsilon \cdot \int 1/|w(x)|^p \, d\mu(x) .$$

Consequentemente, a aderência de $\underline{\mathcal{P}}_n$ em $\underline{\mathcal{L}}^p(\mu|S)$ contem $\underline{K}(S)$, logo é idêntica a $\underline{\mathcal{L}}^p(\mu|S)$. (O mesmo raciocínio se aplicaria se substituíssemos S por uma parte localmente fechada de $\underline{R}^n$ contendo o suporte de μ, que, em particular, pode ser $\underline{R}^n$). O caso do suporte compacto corresponde a podermos tomar $w = 1$.

Dêsse modo, como em vários outros problemas de aproximação envolvendo espaços de funções integráveis, reduzimos um problema de densidade a outro problema de densidade paralelo e análogo, envolvendo, porém, funções contínuas e normas dadas por supremos, em lugar de funções integráveis e normas expressas por integrais.

EXEMPLO 3. Consideremos os polinômios de Hermite na reta

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2) =$$

$$= (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} - \ldots$$

para n = 0, 1, 2, ..., que se apresentam como autofunções da equação diferencial do tipo Sturm-Liouville

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

correspondentes aos autovalores $\lambda = 0, 2, 4, \ldots$ (outras equações diferenciais dando lugar a questões da teoria da aproximação análogas às que vamos indicar). Tais polinômios cumprem a relação de ortogonalidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\, H_n(x) \exp(-x^2)dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & (m = n), \end{cases}$$

na qual é de notar-se que cada polinômio real de uma variável real pertence a $\mathcal{L}^2(\mu)$, onde

$$d\mu(x) = \exp(-x^2)dx .$$

Portanto, o sistema dos <u>polinômios normalizados de Hermite</u>

$$(2^n\, n!\, \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}\, H_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

é ortonormal em $\mathcal{L}^2(\mu)$; ou, o que equivale, o sistema das <u>funções de Hermite</u>

$$\underline{H}_n(x) = (2^n n!\, \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \exp(-x^2/2)\, H_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

é ortonormal no espaço $\mathcal{L}^2(\underline{R})$ das funções de quadrados integráveis relativamente à medida de Lebesgue na reta $\underline{R}$. Surge, então, o problema de saber-se se o sistema dos polinômios normalizados de Hermite, ou, o que equivale, se o sistema das funções de Hermite, são sistemas ortonormais completos, ou seja, bases ortonormais nos espaços respectivos, em qual caso toda função f de $\mathcal{L}^2(\underline{R})$ tem o seu desenvolvimento de Fourier em série de funções de Hermite

$$f(x) \cong \sum \left\{ a_n\, \underline{H}_n(x),\ n \in \underline{N} \right\},$$

$$a_n = (f \mid \underline{H}_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \underline{H}_n(x) dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

como também f é univocamente determinada por sua série de Fourier--Hermite, que converge para f em $\mathcal{L}^2(\underline{R})$. O fato do sistema ortonormal dos polinômios normalizados de Hermite ser completo equivale a dizer-se que $\mathcal{P}_1$ é denso em $\mathcal{L}^2(\mu)$. Portanto, a propriedade das funções de Hermite constituirem uma base ortonormal em $\mathcal{L}^2(\underline{R})$ (o que é fundamental no estudo espectral da transformação de Fourier em $\mathcal{L}^2(\underline{R})$ visto que tal transformação é um operador unitário cujas autofunções são precisamente as funções de Hermite), é uma consequência da observação de que, se tomarmos

$$\omega(x) = \exp(-cx^2)$$

então as condições a) e b) acima enunciadas são satisfeitas, desde que $0 < c < 1/2$.

De um modo mais geral, o fato de $\mathcal{P}_n$ ser denso em $\mathcal{L}^p(\mu)$, onde μ é uma medida positiva em $\underline{R}^n$ tal que

$$\int \exp(p\|x\|)\, d\mu(x) < \infty$$

e $x \longrightarrow \|x\|$ é uma norma em $\underline{R}^n$, resulta da observação conhecida, sobre a qual voltaremos mais adiante, de que

$$\omega(x) = \exp(-\|x\|)$$

é um peso fundamental em $\underline{R}^n$; o que, por sua vez, é um caso particular do fato de que

$$\omega(x) = \exp(-\|x\|^{\alpha}) \qquad (\alpha > 0)$$

é um peso fundamental em $\underline{R}^n$ se e só se $\alpha \geq 1$ (ver Exemplo 2 e Exemplo 4).

Considerações análogas às do Exemplo 3 se repetem a propósito dos polinômios de Laguerre no intervalo $[0, +\infty]$ relativamente à medida $d\mu(x) = \exp(-x)dx$.

2. Notações

Indicaremos com $\underline{P}_n$ a álgebra dos polinômios reais de n variáveis reais. $\underline{R}$ e $\underline{C}$ indicarão os sistemas dos números reais e complexos. $\underline{N}$ e $\underline{Z}$ representarão os sistemas dos inteiros naturais 0, 1, 2, ... e de todos os inteiros. $\underline{R}^n$, $\underline{C}^n$, $\underline{N}^n$ e $\underline{Z}^n$ serão os produtos cartesianos respectivos, de n fatores iguais.

Sendo E um espaço uniformizável separado (espaço completamente regular), indicaremos com $\underline{\mathscr{C}}(E) = \underline{\mathscr{C}}(E, R)$ a álgebra das funções reais contínuas em E. A topologia natural de $\underline{\mathscr{C}}(E)$ será a topologia da convergência uniforme sôbre as partes compactas de E, definida pela família de seminormas $\{p_K\}$ em $\underline{\mathscr{C}}(E)$, onde $K \subset E$ é compacta e

$$p_K(f) = \sup\left\{|f(x)|; \quad x \in K\right\}, \qquad f \in \underline{\mathscr{C}}(E).$$

Se $\underline{N}$ fôr uma parte fechada de E, então $\underline{\mathscr{C}}_N(E) = \underline{\mathscr{C}}_N(E, \underline{R})$ indicará o ideal fechado de $\underline{\mathscr{C}}(E)$ formado pelas funções que se anulam sôbre N.

$\underline{\mathscr{C}}_b(E) = \underline{\mathscr{C}}_b(E, \underline{R})$ representará a álgebra de Banach das funções reais contínuas limitadas em E, onde a norma é definida pelo supremo, ou seja

$$\|f\| = \sup\left\{|f(x)|; \quad x \in E\right\}, \qquad f \in \underline{\mathscr{C}}_b(E).$$

Sendo E um espaço localmente compacto, $\underline{\mathscr{C}}_\infty(E) = \underline{\mathscr{C}}_\infty(E, \underline{R})$ in dicará a sub-álgebra de Banach de $\mathscr{C}_b(E)$ das funções que se anulam no infinito.

$\underline{K}(E) = \underline{K}(E, \underline{R})$ designará o ideal denso de $\mathscr{C}_\infty(E)$ formado pelas funções de suportes compactos.

Usaremos as notações $\mathscr{C}(E, \underline{C})$, $\mathscr{C}_N(E, \underline{C})$, $\mathscr{C}_b(E, \underline{C})$, $\mathscr{C}_\infty(E, \underline{C})$ e $\underline{K}(E, \underline{C})$ para indicar os conceitos correspondentes aos prececentes, no caso de funções complexas.

3. O problema clássico de aproximação de Bernstein

Passaremos a indicar uma das formulações do problema de aproximação de Bernstein, em sua versão clássica.

Dada $\omega \in \mathscr{C}(\underline{R}^n)$, diz-se que essa função é <u>rapidamente decrescente no infinito</u> em $\underline{R}^n$ quando $\underline{\mathscr{P}}_n \omega \subset \mathscr{C}_\infty(\underline{R}^n)$, ou seja quando todo polinômio real em $\underline{R}^n$ multiplicado por ω dá uma função que se anula no infinito. É equivalente requerer-se que todo polinômio real em $\underline{R}^n$ vezes ω dê uma função limitada. Nessas duas condições, em lugar de um polinômio arbitrário, basta que consideremos monômios quaisquer.

O problema clássico de aproximação de Bernstein consiste em determinar-se condições necessárias e suficientes às quais deve satisfazer $\omega \in \mathscr{C}_\infty(\underline{R}^n)$ suposta rapidamente decrescente no infinito, para que $\underline{\mathscr{P}}_n \omega$ seja denso em $\mathscr{C}_\infty(\underline{R}^n)$. Quando tal ocorre, diz-se que a função ω é um <u>peso fundamental</u>. Para isso, é necessário que ω nunca se anule em $\underline{R}^n$, pois se ω se anulasse num ponto t, a aderência de $\underline{\mathscr{P}}_n \omega$ estaria contida no ideal fechado próprio de $\mathscr{C}_\infty(\underline{R}^n)$ formado pelas funções nulas em t e, portanto tal aderência não seria igual a $\underline{\mathscr{C}}_\infty(\underline{R}^n)$. O fato, porém, de $w \in \underline{\mathscr{C}}(\underline{R}^n)$ ser rapidamente decrescente no infinito e nunca se anular não basta para que essa função seja um peso fundamental.

EXEMPLO 4. Em $\underline{R}^n$, tomemos

$$w_\alpha(x) = \exp(-\|x\|^\alpha), \qquad x \in \underline{R}^n ,$$

onde $\alpha > 0$ e $x \longrightarrow \|x\|$ é uma norma em $\underline{R}^n$. Então w_α é uma função real contínua em $\underline{R}^n$, rapidamente decrescente no infinito, estritamente positiva em todos os pontos de $\underline{R}^n$. Demonstra-se que w_α é um peso fundamental se e só se $\alpha \geqslant 1$.

Se w fôr um peso fundamental e $\lambda \in \underline{R}$, $\lambda \neq 0$, então λw será também um peso fundamental. Notemos que, como um peso fundamental nunca se anula, podemos, em dadas situações, supô-lo estritamente positivo em todos os pontos, bastando considerar o peso fundamental w ou então $-w$. Indicaremos com $\underline{\mathfrak{B}}_n$ o conjunto de todas as funções reais contínuas que sejam pesos fundamentais em $\underline{R}^n$ e que sejam estritamente positivas em todos os seus pontos.

PROPOSIÇÃO 1. Se $w_1, w_2 \in \underline{\mathscr{C}}(\underline{R}^n)$, $|w_1| \leqslant |w_2|$, w_1 nunca se anula em $\underline{R}^n$ e w_2 fôr um peso fundamental, então w_1 será um peso fundamental.

Demonstração. Seja Φ uma forma linear contínua em $\mathscr{C}_\infty(R^n)$. Definamos a forma linear contínua ψ em $\mathscr{C}_\infty(R^n)$ por

$$\psi(f) = \Phi(f\, w_1/w_2), \qquad f \in \mathscr{C}_\infty(R^n).$$

Supondo-se que Φ se anule sôbre $\mathcal{P}_n\, \omega_1$, então Ψ se anulará sôbre $\mathcal{P}_n\, \omega_2$, donde $\Psi = 0$. Daí resulta que Φ se anulará sôbre $\mathcal{K}(R^n)$ e, portanto, sôbre $\mathcal{C}_{\infty}(R^n)$, visto que $\mathcal{K}(R^n)$ é denso em $\mathcal{C}_{\infty}(R^n)$, donde $\Phi = 0$, o que demonstra que $\mathcal{P}_n\, \omega_1$ é denso em $\mathcal{C}_{\infty}(R^n)$, isto é, ω_1 será um peso fundamental.

COROLÁRIO. Se $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{C}(R^n)$, nunca se anula em R^n, ω_1 coincide com ω_2 fora de um compacto e ω_2 fôr um peso fundamental, então ω_1 será um peso fundamental.

A Proposição 1, tão simples, envolve uma pequena surpresa. À primeira vista, a idéia intuitiva de $\omega \in \mathcal{C}(R^n)$ ser um peso fundamental parece significar que ω deve ser "suficientemente longe" de 0 para que $\mathcal{P}_n\, \omega$ possa ser denso em $\mathcal{C}_{\infty}(R^n)$. Por isso, o pensamento mais natural seria numa proposição do tipo seguinte: se ω_1, $\omega_2 \in \mathcal{C}(R^n)$, $|\omega_1| \leqslant |\omega_2|$, ω_1 fôr um peso fundamental e ω_2 fôr rapidamente decrescente no infinito, então ω_2 será um peso fundamental. Tal proposição, porém, é falsa e, em seu lugar, deve ser considerada a proposição acima demonstrada. A explicação, que aparecerá mais tarde de modo repetido e fundamental, reside na seguinte observação: o fato de $\omega \in \mathcal{C}(R^n)$, rapidamente decrescente no infinito e nunca nula, ser um peso fundamental é assegurada por condições de decrescimento no infinito "bastante rápido".

EXEMPLO 5. Na notação do exemplo 4, se $\alpha \geqslant \beta > 0$, podemos determinar $C > 0$ de modo que $\omega_\alpha \leqslant C\, \omega_\beta$. Supondo-se $\alpha \geqslant 1 > \beta > 0$, vemos que $\omega_1 \equiv \omega_\alpha > 0$ é um peso fundamental, mas que $\omega_2 \equiv C\, \omega_\beta > 0$ não é um peso fundamental, não obstante $\omega_1 \leqslant \omega_2$ e ω_2 ser rapidamente decrescente no infinito.

Notemos que a parte positiva do exemplo 4, consistente em afirmar que w_α é um peso fundamental desde que $\alpha \geq 1$, na realidade só é crucial para $\alpha = 1$, à vista da Proposição 1. De fato, se $\alpha \geq 1$, tomando $\beta = 1$ no Exemplo 5, podemos determinar $C > 0$ de modo que $w_\alpha \leq C\, w_1$ e, então, sabendo-se que w_α nunca se anula e que w_1 é um peso fundamental, daí resulta que w_α é um peso fundamental para todo $\alpha \geq 1$. Vejamos, pois, como se demonstra rapidamente que w_1 é um peso fundamental. Para tal, precisaremos dos dois lemas gerais seguintes, dos quais o segundo já é um fragmento (no caso complexo auto-adjunto) de uma proposição que estabeleceremos mais adiante a respeito do problema geral da aproximação de Bernstein (ver Proposição 10).

<u>LEMA 1</u>. <u>Dado o espaço localmente compacto</u> E, <u>seja</u> $\mathcal{Q}$ <u>uma sub-álgebra auto-adjunta, contendo</u> 1, <u>de</u> $\mathscr{C}_b(E, \underline{C})$. <u>A aderência de</u> $\mathcal{Q}$ <u>em</u> $\mathscr{C}_b(E, \underline{C})$ <u>conterá</u> $\mathscr{C}_\infty(E, \underline{C})$ <u>se e só se</u> $\mathcal{Q}$ <u>fôr separadora</u>.

<u>Demonstração</u>. Suponhamos $\mathcal{Q}$ separadora. Introduzamos a compactificação βE de Stone-Cech. $\mathcal{Q}$ identifica-se a uma subálgebra $\beta\mathcal{Q}$ de $\mathscr{C}(\beta E, \underline{C})$ e $\mathscr{C}_\infty(E, \underline{C})$ identifica-se ao ideal $\mathscr{C}_N(\beta E, C)$, onde N é o complementar de E em βE. Pelo teorema de Weierstrass-Stone, $\mathscr{C}_N(\beta E, \underline{C})$ está contido na aderência de $\beta\mathcal{Q}$ em $\mathscr{C}(\beta E, \underline{C})$, visto que $\beta\mathcal{Q}$ é autoadjunta, contém 1 e é separadora em E. Logo $\mathscr{C}_\infty(E, \underline{C})$ está contida na aderência de $\mathcal{Q}$ em $\mathscr{C}_b(E, \underline{C})$. A recíproca é clara.

<u>LEMA 2</u>. <u>Dado o espaço localmente compacto</u> E, <u>seja</u> $\mathcal{Q}$ <u>uma sub-álgebra auto-adjunta, contendo</u> 1 <u>e separadora de</u> $\mathscr{C}_b(E, \underline{C})$. <u>Se</u> $w \in \mathscr{C}_\infty(E, \underline{C})$

<u>não se anula em</u> E, <u>então</u> $\underline{\mathcal{Q}}\,w$ <u>está contida e é densa em</u> $\underline{\mathscr{C}}_{\infty}(E, \underline{C})$.

<u>Demonstração</u>. É patente que $\underline{\mathcal{Q}}\,w$ está contida em $\underline{\mathscr{C}}_{\infty}(E, \underline{C})$. Se $f \in \underline{K}(E, \underline{C})$, então $f/w \in \underline{K}(E, \underline{C}) \subset \underline{\mathscr{C}}_{\infty}(E, \underline{C})$, donde resulta que f/w pertence à aderência de $\underline{\mathcal{Q}}$ em $\underline{\mathscr{C}}_{b}(E, \underline{C})$, pelo Lema 1. Daí segue-se que f pertence à aderência de $\underline{\mathcal{Q}}\,w$ em $\underline{\mathscr{C}}_{b}(E, \underline{C})$, ou seja, em $\underline{\mathscr{C}}_{\infty}(E,\underline{C})$. Logo $\underline{K}(E, \underline{C})$ está contido na aderência de $\underline{\mathcal{Q}}\,w$ em $\underline{\mathscr{C}}_{\infty}(E, \underline{C})$. Basta, então, observar que $\underline{K}(E, \underline{C})$ é denso em $\underline{\mathscr{C}}_{\infty}(E, \underline{C})$.

<u>PROPOSIÇÃO 2</u>. <u>A função dada por</u>

$$w(x) = \exp(-\|x\|), \qquad x \in \underline{R}^n ,$$

<u>onde</u> $x \longrightarrow \|x\|$ <u>é uma norma em</u> $\underline{R}^n$, <u>é um peso fundamental</u>.

<u>Demonstração</u>. É imediato que w é uma função real contínua rapidamente decrescente no infinito, sôbre $\underline{R}^n$. Seja Φ uma forma linear contínua em $\underline{\mathscr{C}}_{\infty}(\underline{R}^n)$ que se anule em $\underline{\mathcal{P}}_n w$, ou seja,

$$\Phi\left[x^m\, w(x)\right] = 0, \qquad m \in \underline{N}^n .$$

Usemos a notação $< z, x > = \sum z_r x_r$ e introduzamos a transformada de Fourier

$$F(z) = \Phi_x\left[\exp(i<z,x>)\,.\,w(x)\right], \qquad z \in \underline{C}^n ,$$

onde Φ é suposta extendida de modo natural a $\underline{\mathscr{C}}_{\infty}(R^n, \underline{C})$ e Φ_x indica que Φ é aplicada à expressão entre parentesis considerada como função de x apenas, z sendo um mero parâmetro. Vejamos para quais valores de z a expressão de $F(z)$ tem sentido, ou seja, a função de x à qual aplica-se Φ_x pertence a $\underline{\mathscr{C}}_{\infty}(R^n, \underline{C})$. Ora, se $z = t + iu$, onde

$t, u \in \underline{R}^n$, então

$$\exp(i < z, x>)\cdot w(x) = \exp(i < t, x >) \quad \exp(- <u, x> - \| x \|) .$$

No segundo membro, o primeiro fator tem módulo 1, logo é limitado para $x \in \underline{R}^n$. Quanto ao segundo fator, notemos que o mesmo se anula no infinito, como função de $x \in \underline{R}^n$, desde que $\| u \|' < 1$, onde $u \longrightarrow \|u\|'$ denota a norma dual sôbre $\underline{R}^n$, pois

$$- <u, x> - \|x\| \leqslant - (1 - \|u\|') \quad \|x\| .$$

Portanto, $F(z)$ é definida e evidentemente analítica pelo menos na faixa Ω de $\underline{C}^n$ em tôrno de $\underline{R}^n$ caracterizada por $\|u\|' < 1$. Pela hipótese de que Φ se anule em $\underline{\mathcal{P}}_n w$, todas as derivadas $D^m F(z)$ se anulam para $z = 0$. Logo $F(z)$ é identicamente nula em Ω e, em particular, $F(t) = 0$ para todo $t \in \underline{R}^n$, ou seja,

$$\Phi_x[\exp(i < t, x >) \omega(x)] = 0, \qquad t \in \underline{R}^n .$$

Ora, o espaço vetorial $\underline{\mathcal{Q}}$ gerado pelas funções

$$x \longrightarrow \exp(i <t, x>), \qquad t \in \underline{R}^n ,$$

é uma subálgebra, auto-adjunta, contendo 1 e separadora, de $\underline{\mathcal{C}}_b(\underline{R}^n, \underline{C})$. Aplicando o Lema 2, vemos que $\Phi = 0$. Logo $\underline{\mathcal{P}}_n w$ é denso em $\underline{\mathcal{C}}_\infty(\underline{R}^n)$.

4. Alguns critérios clássicos

A partir das Proposições 1 e 2, obtemos imediatamente o resultado seguinte, que é o critério clássico mais simples para que uma função seja um pêso fundamental.

PROPOSIÇÃO 3. Se $w \in \underline{\mathscr{C}}(\underline{R}^n)$ nunca se anula e se existe $K>0$ tal que

$$|w(x)| \leq K \cdot \exp(-\|x\|), \quad x \in \underline{R}^n ,$$

onde $x \longrightarrow \|x\|$ é uma norma em $\underline{R}^n$, então w é um peso fundamental.

Outro critério conhecido, mais geral do que o precedente, de demonstração mais delicada, é o seguinte.

PROPOSIÇÃO 4. Se $w \in \underline{\mathscr{C}}(\underline{R}^n)$ nunca se anula e se existe uma função $B \in \underline{\mathscr{C}}(\underline{R})$ estritamente positiva em todos os pontos, tal que

$$B(-t) = B(t) , \quad t \in \underline{R} ,$$

$\log 1/B(t)$ é uma função convexa de $\log t$ para $t > 0$

$$\int^{+\infty} 1/t^2 \log 1/B(t) \, dt = +\infty ,$$

$$|w(x)| \leq B(\|x\|), \quad x \in \underline{R}^n ,$$

onde $x \longrightarrow \|x\|$ é uma norma em $\underline{R}^n$, então w é um peso fundamental.

A Proposição 3 corresponde ao caso em que

$$B(t) = K \cdot \exp(-|t|), \quad t \in \underline{R} .$$

Outro critério clássico, que nos limitaremos a enunciar no caso $n = 1$, que empregaremos mais adiante, e cujo enunciado correspondente no caso $n \geq 1$ é claro, é o seguinte.

PROPOSIÇÃO 5. Se $w \in \underline{\mathscr{C}}(\underline{R})$ nunca se anula e se

$$\sum \left\{ 1/\sqrt[m]{M_m} \; ; \; m \geq 1 \right\} = +\infty ,$$

onde

$$M_m = \sup \left\{ |t^m w(t)| ; \quad t \in \underline{R} \right\}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

então w é um peso fundamental.

Notemos, a propósito da Proposição 5, que se $w \in \underline{\mathscr{C}}(\underline{R})$ e $[-\lambda, \lambda]$ fôr o menor intervalo fechado da reta extendida $\overline{\underline{R}}$ contendo o suporte de w, então $\sqrt[m]{M_m} \longrightarrow \lambda$ para $m \longrightarrow \infty$. De fato, de um lado $M_m \leqslant C\,\lambda^m$, onde C é o supremo de $|w|$ em $[-\lambda, \lambda]$. Daí resulta que

$$\lim.\ \sup.\ \sqrt[m]{M_m} \leqslant \lambda$$

em qualquer caso. Por outro lado, $M_m \geqslant |t^m w(t)|$ fornece-nos

$$\lim.\ \inf.\ \sqrt[m]{M_m} \geqslant \lambda.$$

Em particular, caso w nunca se anule, $\sqrt[m]{M_m} \longrightarrow \infty$ para $m \longrightarrow \infty$, isto é, o termo geral da série considerada na Proposição 5 tende para zero. Isso exclui a possibilidade de que a citada série seja divergente pelo motivo de que seu termo geral não tenda para zero e ilustra o fato de que a Proposição 5 não é banal. A Proposição 3, no caso n = 1, é um caso particular da Proposição 5, pois então aparece a série harmônica, que é divergente.

Existem várias demonstrações conhecidas das Proposições 3 e 4, as quais nos dispensaremos de apresentar aqui, sem o que nossa exposição se alongaria demasiadamente, motivo pelo qual vamos nos limitar a citar as excelentes monografias de Horvath e Mergelyan indicadas na Bibliografia.

Salientemos, apenas, que uma das demonstrações conhecidas da Proposição 5 consiste em obtê-la como corolário do teorema de Denjoy-Carleman seguinte, da teoria das funções quasi-analíticas: se f fôr uma função real infinitamente diferenciável num intervalo aberto I da reta $\underline{R}$, tal que

$$\sum \left\{ 1/\sqrt[m]{M_m};\ m \geq 1 \right\} = +\infty,$$

onde

$$M_m = \sup \left\{ |f^{(m)}(t)|;\ t \in I \right\}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

e se $f^{(m)}(a) = 0$ para $m = 0, 1, 2, \ldots$ num certo ponto $a \in I$, então $f = 0$ identicamente em I. Se admitirmos êsse teorema clássico (vêr as exposições de Carleman e Mandelbrojt citadas na Bibliografia), a Proposição 5 pode ser obtida de uma maneira análoga à que usámos para estabelecer as Proposições 2 e 3. Com efeito, da divergência da série citada no enunciado da Proposição 5, resulta que $M_m < \infty$ uma infinidade de vezes. Por outro lado, $M_m < \infty$ é consequência de $M_{m+1} < \infty$. Logo $M_m < \infty$ para $m = 0, 1, 2, \ldots$, ou seja ω é rapidamente decrescente no infinito. Seja Φ uma forma linear contínua em $\underline{\mathscr{C}}_{\infty}(\underline{R})$ que se anule em $\underline{\mathcal{P}}_1\,\omega$, isto é,

$$\Phi\left[x^m\,\omega(x)\right] = 0, \qquad m \in \underline{N}.$$

Introduzamos a transformada de Fourier

$$F(t) = \Phi_x\,[\exp(i\,t\,x)\cdot\omega(x)], \qquad t \in \underline{R},$$

à semelhança do que foi feito na demonstração da Proposição 2, salvo que, desta feita, limitamo-nos a valores reais do argumento de F(t). Notemos que F é definida e infinitamente diferenciável em $\underline{R}$ e que

$$F^{(m)}(t) = \Phi_x\left[\exp(i\,t\,x)\,(ix)^m\,\omega(x)\right], \qquad t \in \underline{R}, \quad m \in \underline{N},$$

pois ω é rapidamente decrescente no infinito. Ora

$$\left|F^{(m)}(t)\right| \leq \|\Phi\| \cdot M_m , \quad F^{(m)}(0) = 0 , \quad t \in \underline{R}, \quad m \in \underline{N} .$$

Pelo teorema de Denjoy-Carleman, vem $F = 0$ em $\underline{R}$, donde, pelo Lema 2, do mesmo modo que na demonstração de Proposição 2, tiramos $\Phi = 0$, o que estabelece a densidade de $\underline{\mathcal{P}}_1 \omega$ em $\underline{\mathcal{C}}_\infty(\underline{R})$. Essa demonstração indica a íntima relação existente entre o problema da aproximação de Bernstein e a teoria das funções quasi-analíticas, relação essa que ainda não foi exaustivamente explorada.

O problema consistente em determinar-se condições necessárias e suficientes para que $\omega \in \underline{\mathcal{C}}(\underline{R})$ seja um peso fundamental foi resolvido pela primeira vez, em completa generalidade, por Pollard (ver Bibliografia), que demonstrou o resultado fundamental seguinte.

<u>PROPOSIÇÃO 6.</u> <u>Se</u> $\omega \in \underline{\mathcal{C}}(\underline{R})$ <u>nunca se anula e é rapidamente decrescente no infinito, para que</u> ω <u>seja um peso fundamental e necessário e suficiente que</u>

$$\sup \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ p(t)}{1+t^2} \, dt = \infty ,$$

<u>onde</u> $\log^+ x$ <u>é igual a</u> $\log x$ <u>se</u> $x \geq 1$ <u>e a</u> 0 <u>se</u> $x \leq 1$, <u>o supremo sendo tomado sôbre todos</u> $p \in \underline{\mathcal{P}}_1$ <u>tais que</u>

$$|p(t)\,\omega(t)| \leq 1 , \quad t \in \underline{R} .$$

Aparentemente, o enunciado análogo ao teorema de Pollard acima, no caso geral $n \geq 1$ ainda não é tratado explicitamente na literatura. Esse teorema, além de outros semelhantes, já conhecidos, não obstante darem uma bonita solução ao problema clássico proposto por Bernstein, para a qual tanto contribuiram o próprio Bernstein e alguns de seus discípulos da escola russa, têm, por outro lado, o inconveniente de não conterem, de modo simples, as condições suficientes conhecidas como casos particulares, como, por exemplo, as Proposições 2, 3 e 4; nem se aplicarem facilmente em certas situações nas quais seria de se esperar que um resultado geral, como o teorema de Pollard, fosse a chave poderosa do problema particular em questão.

5. Outra versão do problema clássico de aproximação de Bernstein

Além da forma citada do problema clássico da aproximação de Bernstein, no caso das funções contínuas (§ 3), citemos outra versão do mesmo problema, um pouco mais geral, além de mais outra, suficientemente geral, capaz de englobar o problema que tomámos como motivação no § 1 e as formas discutidas no § 3 e no presente parágrafo. Não entraremos, porém, numa discussão ampla de tais casos mais gerais, nem abordaremos aqui o estudo de extensões dessas novas versões a casos de espaços mais gerais do que o de $\underline{R}^n$, a exemplo do que planejamos fazer nos parágrafos com a versão do problema de Bernstein descrita no § 3.

Dada uma função real ω (não necessàriamente contínua) em $\underline{R}^n$, introduzamos o subespaço vetorial $\mathscr{C}\omega(\underline{R}^n) = \mathscr{C}\omega(\underline{R}^n, R)$ de $\mathscr{C}(\underline{R}^n)$ das funções f tais que

$$\|f\|_\omega = \|f\omega\| = \sup\left\{|f(x)\,\omega(x)|\,;\; x \in \underline{R}^n\right\} < \infty,$$

semi-normado por $f \longrightarrow \|f\|_w$. Trata-se de um espaço normado no caso, que admitiremos, em que w nunca se anule (ou, de um modo mais geral, quando o conjunto dos pontos em que w se anula não tenha pontos interiores). Vamos indicar com $\underline{\mathscr{C}}w_{\infty}(\underline{R}^n) = \underline{\mathscr{C}}w_{\infty}(\underline{R}^n, \underline{R})$ o subespaço vetorial fechado de $\underline{\mathscr{C}}w(\underline{R}^n)$ formado pelas funções cujos produtos por w tendem para zero no infinito. Notemos que $\underline{\mathscr{C}}w(\underline{R}^n)$ reduz-se a $\underline{\mathscr{C}}_b(\underline{R}^n)$ quando $w = 1$. Sem alterar o espaço normado $\underline{\mathscr{C}}w(\underline{R}^n)$ e seu subespaço vetorial $\underline{\mathscr{C}}w_{\infty}(\underline{R}^n)$, podemos supor que $w \geqslant 0$, bastando, para isso, substituirmos w por $|w|$.

Notemos que $\underline{K}(\underline{R}^n)$ está contido em $\underline{\mathscr{C}}w(\underline{R}^n)$ se e só se w fôr localmente limitada e que, então, a aderência de $\underline{K}(\underline{R}^n)$ em $\underline{\mathscr{C}}w(\underline{R}^n)$ é $\underline{\mathscr{C}}w_{\infty}(\underline{R}^n)$. Passando a admitir a hipótese de que w seja localmente limitada, podemos supôr também, sem alterar o espaço normado $\underline{\mathscr{C}}w(\underline{R}^n)$ e seu subespaço vetorial $\underline{\mathscr{C}}w_{\infty}(\underline{R}^n)$, que w seja semicontínua superiormente, bastando, para tal, substituir $w \geqslant 0$ por sua envoltória semicontinua superiormente, que é <u>finita</u> em $\underline{R}^n$ visto que w é localmente limitada.

Por tais razões, vamos nos limitar ao caso de w semicontínua superiormente, tal que $w(x) > 0$ para todo $x \in \underline{R}^n$.

Notemos que $1 \in \underline{\mathscr{C}}w(\underline{R}^n)$ se e só se w fôr limitada.

Temos que $\underline{\mathscr{P}}_n \subset \underline{\mathscr{C}}w(\underline{R}^n)$ se e só se todo polinômio real em $\underline{R}^n$ multiplicado por w der uma função que tende para zero no infinito, o que exprimiremos ainda dizendo que w é rapidamente decrescente no infinito. Em outros termos, $\underline{\mathscr{P}}_n \subset \underline{\mathscr{C}}w(\underline{R}^n)$ equivale a $\underline{\mathscr{P}}_n \subset \underline{\mathscr{C}}w_{\infty}(\underline{R}^n)$.

Indiquemos com $\underline{\mathcal{O}}(\underline{R}^n) = \underline{\mathcal{O}}(\underline{R}^n, \underline{R})$ o subespaço vetorial de $\underline{\mathcal{C}}(\underline{R}^n)$ das funções f que são lentamente crescentes no infinito, isto é, tais que, para cada f, existam constantes $K > 0$ e $m > 0$ verificando

$$|f(x)| \leqslant K\,(1 + \|x\|)^m \;, \quad x \in \underline{R}^n \;,$$

onde $x \longrightarrow \|x\|$ é uma norma em $\underline{R}^n$. Notemos que $\underline{\mathcal{P}}_n \subset \underline{\mathcal{O}}\,(\underline{R}^n)$; e que $\underline{\mathcal{P}}_n \subset \underline{\mathcal{C}}w(\underline{R}^n)$, ou seja $\underline{\mathcal{P}}_n \subset \underline{\mathcal{C}}w_{\infty}(\underline{R}^n)$, equivale a $\underline{\mathcal{O}}\,(\underline{R}^n) \subset \underline{\mathcal{C}}w(\underline{R}^n)$, ou seja a $\underline{\mathcal{O}}\,(\underline{R}^n) \subset \underline{\mathcal{C}}w_{\infty}(\underline{R}^n)$. É claro que $\underline{K}(\underline{R}^n) \subset \underline{\mathcal{O}}\,(\underline{R}^n)$. Portanto, supondo w rapidamente decrescente no infinito, a aderência de $\underline{\mathcal{O}}\,(\underline{R}^n)$ em $\underline{\mathcal{C}}w(\underline{R}^n)$ é $\underline{\mathcal{C}}\,w_{\infty}(\underline{R}^n)$. Além disso, sob a hipótese de que w seja rapidamente decrescente no infinito, constata-se a equivalência das hipóteses seguintes: a) a aderência de $\underline{\mathcal{P}}_n$ em $\underline{\mathcal{C}}w(\underline{R}^n)$ contem $\underline{K}(\underline{R}^n)$; b) a aderência de $\underline{\mathcal{P}}_n$ em $\underline{\mathcal{C}}w(\underline{R}^n)$ contem $\underline{\mathcal{O}}\,(\underline{R}^n)$; c) $\underline{\mathcal{P}}_n$ é denso em $\underline{\mathcal{C}}\,w_{\infty}(\underline{R}^n)$.

O problema clássico da aproximação de Bernstein, em sua segunda versão, consiste em, dada uma função real semicontinua superiormente w, estritamente positiva em todos os pontos de $\underline{R}^n$ e rapidamente decrescente no infinito, determinar condições necessárias e suficientes para que $\underline{\mathcal{P}}_n$ seja denso em $\underline{\mathcal{C}}\,w_{\infty}(\underline{R}^n)$. Em virtude do que dissémos há pouco, isso equivale a determinarmos condições necessárias e suficientes para que $\underline{K}(\underline{R}^n)$ esteja contido na aderência de $\underline{\mathcal{P}}_n$ em $\underline{\mathcal{C}}w(\underline{R}^n)$; ou para que $\underline{\mathcal{O}}\,(\underline{R}^n)$ esteja contido na aderência de $\underline{\mathcal{P}}_n$ em $\underline{\mathcal{C}}\,w(\underline{R}^n)$.

Observemos, o que se verifica facilmente, que, se $w \in \underline{\mathcal{C}}(\underline{R}^n)$, $w(x) > 0$ para todo $x \in \underline{R}^n$ e w fôr rapidamente decrescente no infinito, então $\underline{\mathcal{P}}_n$ será denso em $\underline{\mathcal{C}}\,w_{\infty}(\underline{R}^n)$ se e só se w fôr um peso fundamental. Para uma tal função <u>contínua</u> w, as duas versões do pro blema de Bernstein são equivalentes. Nêsse sentido, esta nova versão do problema de Bernstein é mais geral do que a anterior, pois, na situação presente, w pode ser descontínua, ao passo que a formulação anterior só tinha sentido no caso de w ser contínua. No fundo, porém, as duas versões se equivalem.

De uma maneira mais geral ainda, seja $\underline{\mathcal{F}}$ um espaço vetorial semi-normado de funções reais em $\underline{R}^n$, satisfazendo às duas condições seguintes:

a) $\underline{K}(\underline{R}^n)$ está contido e é denso em $\underline{\mathcal{F}}$. Além disso, se, para cada parte compacta $K \subset \underline{R}^n$, indicarmos com $\underline{K}(\underline{R}^n, K)$ o subespaço vetorial de $\underline{K}(\underline{R}^n)$ das funções de suportes contidos em K, sendo $\underline{K}(\underline{R}^n, K)$ normado pelo supremo, então a aplicação identidade de $\underline{K}(\underline{R}^n, K)$ em $\underline{\mathcal{F}}$ é contínua (o que traduz-se dizendo que a aplicação identidade de $\underline{K}(\underline{R}^n)$ em $\underline{\mathcal{F}}$ é contínua desde que $\underline{K}(\underline{R}^n)$ seja munido de sua topologia natural de limite indutivo de Dieudonné-Schwartz).

b) $\underline{\mathcal{P}}_n$ está contido em $\underline{\mathcal{F}}$.

Nessas circunstâncias, uma formulação ainda mais geral do problema de aproximação de Bernstein sôbre $\underline{R}^n$, que engloba os problemas de aproximação apontados no §1, no §3 e no início do presente parágrafo, consiste em determinar condições necessárias e suficientes para que $\underline{\mathcal{P}}_n$ seja denso em $\underline{\mathcal{F}}$, ou, o que equivale, para que $\underline{K}(\underline{R}^n)$ esteja contido na aderência de $\underline{\mathcal{P}}_n$ em $\underline{\mathcal{F}}$.

Um problema análogo apresenta-se quando, em lugar de supormos $\underline{\mathcal{F}}$ um espaço semi-normado, admitimos, de modo mais geral, que $\underline{\mathcal{F}}$ seja um espaço vetorial topológico localmente convexo, o que corresponde a tomarmos vários pesos, em lugar de um só. Iremos, porém, refreiar-nos de examinar mais de perto tais generalizações.

6. O teorema de Weierstrass-Stone

Antes de abordarmos o estudo do problema generalizado da aproximação de Bernstein, façamos uma breve revisão do problema generalizado da aproximação de Weierstrass, ou seja do teorema de Weierstrass-Stone.

Consideremos um espaço uniformizável separado E. Dada uma sub-álgebra $\underline{\mathcal{Q}}$ de $\underline{\mathcal{C}}(E)$, a qual, para simplificar, suporemos conter 1, o problema generalizado da aproximação de Weierstrass consiste em descrever a aderência de $\underline{\mathcal{Q}}$ em $\underline{\mathcal{C}}(E)$; e, em particular, em saber quando $\underline{\mathcal{Q}}$ é densa em $\underline{\mathcal{C}}(E)$.

A álgebra $\underline{\mathcal{Q}}$ induz uma relação de equivalência, que designaremos por $E/\underline{\mathcal{Q}}$, em E, desde que definamos $x' \sim x''$ se $x', x'' \in E$ e $f(x') = f(x'')$ qualquer que seja $f \in \underline{\mathcal{Q}}$. Então, $f \in \underline{\mathcal{C}}(E)$ pertencerá à aderência de $\underline{\mathcal{Q}}$ em $\underline{\mathcal{C}}(E)$ se e somente se f fôr constante em toda classe de equivalência segundo $E/\underline{\mathcal{Q}}$; e, em particular, $\underline{\mathcal{Q}}$ será densa em $\underline{\mathcal{C}}(E)$ se e somente se $\underline{\mathcal{Q}}$ fôr separadora em E, isto é, $E/\underline{\mathcal{Q}}$ fôr a identidade. Tal resultado geral constitui o teorema de Weierstrass-Stone. Em virtude da topologia usada sôbre $\underline{\mathcal{C}}(E)$ ser a da convergência uniforme sôbre as partes compactas, a demonstração do teorema de Weierstrass-Stone, no caso geral de E ser uniformizável separado, reduz-se imediatamente ao caso em que E é compacto.

7. O problema genralizado de aproximação de Bernstein

Seja N uma parte fechada de um espaço uniformizável separado

E. Consideremos uma subálgebra $\underline{\mathcal{Q}}$, contendo 1, de $\underline{\mathcal{C}}(E-N)$ (não de $\underline{\mathcal{C}}(E)$!) e um sub-espaço vetorial $\underline{\mathcal{W}}$ do ideal fechado $\underline{\mathcal{C}}_N(E)$. Admitamos que $\underline{\mathcal{W}}$ seja um $\underline{\mathcal{Q}}$-módulo, no sentido de que multiplicando, em E - N, uma função qualquer de $\underline{\mathcal{Q}}$ por uma função qualquer de $\underline{\mathcal{W}}$, obtemos uma função em $E-N$ que coincide, em $E-N$, com uma (e, portanto, uma só) função de $\underline{\mathcal{W}}$; isto é, na realidade, que o sub-espaço vetorial $\underline{\mathcal{W}}|E-N$, restrição de $\underline{\mathcal{W}}$ a $E-N$, seja um $\underline{\mathcal{Q}}$-módulo. Exprimiremos isso escrevendo, simbolicamente, $\underline{\mathcal{Q}}\,\underline{\mathcal{W}} \subset \underline{\mathcal{W}}$, quando na realidade deveríamos escrever $\underline{\mathcal{Q}}\cdot\underline{\mathcal{W}}|E-N \subset \underline{\mathcal{W}}|E-N$.

O problema generalizado de aproximação de Bernstein consiste em procurar descrever a aderência de $\underline{\mathcal{W}}$ em $\underline{\mathcal{C}}(E)$, ou seja, em $\underline{\mathcal{C}}_N(E)$, sob tais condições, ou seja, sabendo-se que $\underline{\mathcal{W}}$ é um $\underline{\mathcal{Q}}$-módulo; e, em particular, em saber quando $\underline{\mathcal{W}}$ é denso em $\underline{\mathcal{C}}_N(E)$.

<u>EXEMPLO 6</u>. Mostremos em que sentido o problema generalizado de aproximação de Bernstein contem, como caso particular, o problema clássico de Bernstein indicado no § 3. Consideremos a compactificação de Alexandroff, E, de $\underline{R}^n$, obtida pelo acréscimo do ponto do infinito. Tomemos N como sendo o conjunto reduzido ao ponto do infinito. Ponhamos $\underline{\mathcal{Q}} = \underline{\mathcal{P}}_n$. Dada $w \in \underline{\mathcal{C}}(\underline{R}^n)$ rapidamente decrescente no infinito, se extendermos cada função de $\underline{\mathcal{P}}_n\, w$ a E, de modo a respeitar a continuidade, ou seja definindo-a como igual a 0 no infinito, obteremos um sub-espaço vetorial $\underline{\mathcal{W}}$ de $\underline{\mathcal{C}}_N(E)$, que é um $\underline{\mathcal{Q}}$-módulo. O problema de saber-se quando w é um peso fundamental equivale ao problema de investigar-se quando $\underline{\mathcal{W}}$ é denso em $\underline{\mathcal{C}}_N(E)$. De um modo mais geral, o problema de saber-se qual é a aderência de $\underline{\mathcal{P}}_n\, w$ em $\underline{\mathcal{C}}_\infty(\underline{R}^n)$ equivale ao problema de determinar-se a aderência de $\underline{\mathcal{W}}$ em $\underline{\mathcal{C}}_N(E)$.

Existem dois casos particulares do problema generalizado de aproximação de Bernstein, que merecem uma menção nêste instante.

EXEMPLO 7. Suponhamos que N seja vazio e que $\underline{\mathcal{A}} = \underline{\mathcal{W}}$, na notação acima introduzida. Recaímos, então, na situação que caracteriza o problema generalizado de aproximação de Weierstrass. É nesse sentido que a teoria da aproximação de Bernstein contem, como caso especial, a teoria da aproximação de Weierstrass, de modo que os resultados a serem deduzidos a propósito do problema generalizado de aproximação de Bernstein deverão compreender o teorema de Weierstrass-Stone.

EXEMPLO 8. Suponhamos que N seja vazio e que $\underline{\mathcal{A}}$ se reduza às funções constantes. $\underline{\mathcal{W}}$ é, então, o sub-espaço vetorial mais geral de $\underline{\mathcal{C}}(E)$. Em tais condições gerais, não podemos esperar uma descrição simples e interessante da aderência de $\underline{\mathcal{W}}$, a não ser através da informação que nos proporciona o teorema de Hahn-Banach, ou seja, que $f \in \underline{\mathcal{C}}(E)$ pertence à aderência de $\underline{\mathcal{W}}$ em $\underline{\mathcal{C}}(E)$ se e sòmente se toda forma linear contínua em $\underline{\mathcal{C}}(E)$, dada por uma medida concentrada numa parte compacta de E, que se anule sôbre $\underline{\mathcal{W}}$, necessàriamente se anule também em f.

Num certo sentido, o problema generalizado de aproximação de Bernstein é excessivamente geral, pois compreende como caso particular uma situação muito geral, como a do Exemplo 8. Na realidade, o que iremos fazer, ao abordarmos o problema generalizado de Bernstein, consiste em reduzir o caso geral ao caso particular do Exemplo 8, através do conceito de <u>tipo finito</u>, que passaremos a apresentar.

Retornemos, pois, ao problema generalizado. $\mathcal{Q}$ induz uma relação de equivalência $E/\mathcal{Q}$ em $E - N$ (não em E!), desde que definamos $x' \sim x''$ se $x', x'' \in E - N$ e $f(x') = f(x'')$ qualquer que seja $f \in \mathcal{Q}$. Se $f \in \underline{\mathcal{C}}(E)$ e f pertence à aderência de $\underline{w}$ em $\underline{\mathcal{C}}(E)$, é claro que, para toda parte X de E, a restrição $f|X$ pertencerá à aderência em $\underline{\mathcal{C}}(X)$ do sub-espaço vetorial $\underline{w}|X$, restrição de $\underline{w}$ a X. Diremos que $\underline{w}$ é do <u>tipo finito</u> sob $\mathcal{Q}$ quando, reciprocamente, $f \in \underline{\mathcal{C}}(E)$ pertence necessariamente à aderência de $\underline{w}$ em $\underline{\mathcal{C}}(E)$ desde que a restrição $f|X \cup N$ pertença à aderência em $\underline{\mathcal{C}}(X \cup N)$ de $\underline{w}|X \cup N$, qualquer que seja a classe de equivalência X segundo $E/\mathcal{Q}$. Em outros termos, o fato de $\underline{w}$ ser de tipo finito sob $\mathcal{Q}$ significa que podemos decidir quando f de $\underline{\mathcal{C}}(E)$ pertence à aderência em $\underline{\mathcal{C}}(E)$ de $\underline{w}$ através da informação de que cada $f|X \cup N$ pertence à aderência em $\underline{\mathcal{C}}(X \cup N)$ de $\underline{w}|X \cup N$, qualquer que seja a classe de equivalência X segundo $E/\mathcal{Q}$.

<u>EXEMPLO 9</u>. Retomemos as notações do Exemplo 6. Suponhamos, além disso, que w nunca se anule em $\underline{R}^n$. Notemos que $\mathcal{Q}$ é separadora em $E - N$, ou seja, cada classe de equivalência segundo $E/\mathcal{Q}$ reduz-se a um ponto de $\underline{R}^n$. Se $f \in \mathcal{C}_N(E)$, é claro que $f|\{x\} \cup N$ pertence a $\underline{w}|\{x\} \cup N$, qualquer que seja $x \in \underline{R}^n$, pois w nunca se anula em $\underline{R}^n$. Portanto, nêste exemplo, $\underline{w}$ será de tipo finito sob $\mathcal{Q}$ se e somente se w fôr um peso fundamental. Se supuzermos, então, que w não seja um peso fundamental (Exemplo 4), teremos um caso em que $\underline{w}$ não é de tipo finito sob $\mathcal{Q}$.

A denominação de <u>tipo finito</u> tem a sua origem na circunstância de que, então, podemos descrever a aderência de $\underline{w}$ por seu comportamento em E, ou seja à distância finita. No caso geral, em que não se verifique necessariamente a condição de tipo finito, a descrição da aderência de $\underline{\mathscr{W}}$ dependerá de condições que, vagamente, indicaremos como sendo do tipo Stone-Cech misturadas com questões de analiticidade mas que, na realidade, não se encontram ainda bem exploradas na literatura do assunto. O estudo do problema de Bernstein, fóra do caso de tipo finito, mal está esboçado.

PROPOSIÇÃO 7. Se N fôr vazio, $\underline{\mathscr{W}}$ será de tipo finito sob $\mathcal{Q}$.

Essa proposição, no seu caso geral, é consequência imediata do caso especial em que E é compacto, o qual será estabelecido mais adiante (Proposição 9).

A exemplo do teorema de Weierstrass-Stone e pelo fato da topologia usada sôbre $\mathscr{C}(E)$ ser a da convergência uniforme sôbre as partes compactas, em lugar de considerarmos o caso geral de um espaço uniformizável separado E, é suficiente que tratemos o caso em que E seja compacto. Ora, então $E - N$ é localmente compacto. Além disso, $\mathscr{C}_N(E)$ identifica-se, como álgebra de Banach, a $\mathscr{C}_\infty(E-N)$, de modo que $\underline{\mathscr{W}}$ identifica-se ao sub-espaço vetorial $\underline{\mathscr{W}}|E-N$ de $\mathscr{C}_\infty(E-N)$. Notemos que $\underline{\mathscr{W}}|E-N$ é um $\mathcal{Q}$-módulo, sem necessidade do esclarecimento feito a propósito de $\underline{\mathscr{W}}$ ser um $\mathcal{Q}$-módulo, pois as funções de $\underline{\mathscr{W}}|E-N$ e $\mathcal{Q}$ são todas definidas no mesmo conjunto, a saber $E-N$. Mudando, então, de notação e passando a designar com E e $\underline{\mathscr{W}}$ o que estávamos indicando com $E-N$ e $\underline{\mathscr{W}}|E-N$, somos levados a reformular o problema generalizado de aproximação de Bernstein, num espaço localmente compacto, do modo seguinte.

Dado um espaço localmente compacto E, consideremos uma sub-álgebra $\mathcal{Q}$, contendo 1, de $\mathscr{C}(E)$ e um sub-espaço vetorial $\underline{\mathscr{W}}$ de $\mathscr{C}_\infty(E)$. Admitamos que $\mathcal{Q}\,\underline{\mathscr{W}} \subset \underline{\mathscr{W}}$, isto é, que $\underline{\mathscr{W}}$ seja um $\mathcal{Q}$-módulo. O problema generalizado de aproximação de Bernstein num espaço localmente compacto consiste em procurar descrever a aderência de $\mathscr{W}$ em $\mathscr{C}_\infty(E)$ sob tais condições, isto é, sabendo-se que $\mathscr{W}$ é um $\mathscr{Q}$-módulo; e, em particular, em saber quando $\mathscr{W}$ é denso em $\mathscr{C}_\infty(E)$.

Sob tal forma, o problema clássico do § 3 é um caso particular patente, desde que tomemos $E = \underline{R}^n$, $\mathscr{Q} = \mathscr{P}_n$ e $\mathscr{W} = \mathscr{P}_n\, \omega$, onde $\omega \in \mathscr{C}(\underline{R}^n)$ é rapidamente decrescente no infinito.

No caso localmente compacto, $\mathscr{Q}$ induz uma relação de equivalência $E/\mathscr{Q}$ em E, cujas classes de equivalência são fechadas em E, logo localmente compactas. Dizer-se que $\mathscr{W}$ é de tipo finito sob $\mathscr{Q}$ significa dizer-se que $f \in \mathscr{C}_\infty(E)$ pertence à aderência de $\mathscr{C}_\infty(E)$ de $\mathscr{W}$ se (e só se) $f|X \in \mathscr{C}_\infty(X)$ pertence à aderência em $\mathscr{C}_\infty(X)$ de $\mathscr{W}|X$, qualquer que seja a classe de equivalência X segundo $E/\mathscr{Q}$.

A partir dêste instante, vamos nos limitar ao problema generalizado de aproximação de Bernstein no caso localmente compacto, em virtude dos motivos acima expostos, por simplicidade. Os resultados que enunciaremos no caso localmente compacto traduzem-se instantaneamente em proposições no caso uniformizável separado. Deixaremos aos cuidados do leitor a tarefa de explicitar tais enunciados no caso geral.

Terminemos êste parágrafo com a seguinte proposição, cuja demonstração é muito simples e será omitida.

<u>PROPOSIÇÃO 8</u>. <u>Consideremos um espaço localmente compacto</u> E, <u>uma sub-álgebra</u> $\mathscr{Q}$, <u>contendo</u> 1, <u>de</u> $\mathscr{C}(E)$ <u>e um sub-espaço vetorial</u> $\mathscr{W}$ <u>de</u> $\mathscr{C}_\infty(E)$ <u>que seja um</u> $\mathscr{Q}$-<u>módulo. Então</u>:

1) <u>Para que</u> $\mathscr{W}$ <u>seja denso em</u> $\mathscr{C}_\infty(E)$ <u>é necessário que, para ca-</u>

da $x \in E$, exista algum $\omega \in \underline{\omega}$ tal que $\omega(x) \neq 0$. Se $\mathcal{Q}$ fôr separadora e $\underline{\omega}$ fôr de tipo finito sob $\mathcal{Q}$, essa condição é suficiente.

2) Se $\underline{\omega}$ tiver um gerador $\omega \in \mathcal{C}(E)$ como $\mathcal{Q}$-módulo, isto é se $\underline{\omega} = \mathcal{Q}\omega$, para que $\underline{\omega}$ seja denso em $\mathcal{C}_{\infty}(E)$ é necessário que ω nunca se anule e que $\mathcal{Q}$ seja separadora. Se $\underline{\omega}$ fôr de tipo finito sob $\mathcal{Q}$, essas condições são suficientes.

8. Alguns casos particulares do problema de Bernstein

Antes de abordarmos alguns resultados gerais, referentes ao problema generalizado de aproximação de Bernstein, estabeleçamos diretamente uns resultados mais simples, que já constituem um fragmento da idéia da teoria geral e que são casos particulares dos teoremas que demonstraremos mais adiante.

PROPOSIÇÃO 9 Sejam E um espaço compacto, $\mathcal{Q}$ uma sub-álgebra, contendo 1, de $\mathcal{C}(E)$ e $\underline{\omega}$ um sub-espaço vetorial de $\mathcal{C}(E)$ que seja um $\mathcal{Q}$-módulo. Então $\underline{\omega}$ é de tipo finito sob $\mathcal{Q}$.

Demonstração. Indiquemos com π a aplicação contínua de E sôbre o espaço quociente compacto F de E módulo $E/\mathcal{Q}$. Dada $g \in \mathcal{C}(E)$, suponhamos que, para toda classe de equivalência $X \in F$, verifique-se que $g|X$ pertence à aderência de $\underline{\omega}|X$ em $\mathcal{C}(X)$; ou seja, que, fixado $\varepsilon > 0$, para todo $X \in F$ haja $\omega_X \in \underline{\omega}$ tal que

$$|\omega_X(x) - g(x)| < \varepsilon, \qquad x \in X .$$

O conjunto

$$K_X = \left\{ x \in E;\ |\omega_X(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon \right\}$$

é compacto e disjunto de X. Logo $\pi(K_X)$ é compacto, contido em F e não contem o ponto X de F. Pela propriedade da interseção finita, existem $X_1, \ldots, X_s \in F$ tais que

$$\pi\left(K_{X_1}\right) \cap \ldots \cap \pi\left(K_{X_s}\right) = \emptyset$$

Pelo teorema da partição contínua da unidade num espaço compacto, logo normal, sejam $\alpha_i \geqslant 0$ funções reais contínuas em F tais que α_i anule-se sôbre $\pi\left(K_{X_i}\right)$, $i = 1,\ldots s$, e $\sum \alpha_i = 1$ em F. Consideremos as funções reais contínuas $\varphi_i = \alpha_i \pi \geqslant 0$, $i = 1,\ldots, s$, em E, que verificam $\sum \varphi_i = 1$. Afirmamos que

$$(1) \qquad | \sum \varphi_i(x)\, \omega_{X_i}(x) - g(x)| < \varepsilon, \qquad x \in E.$$

Essa desigualdade é uma consequência de

$$(2) \qquad \varphi_i(x)|\omega_{X_i}(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon, \qquad x \in E,\ i = 1,\ldots,s,$$

e da observação de que, para cada $x \in E$, (2) é válida no sentido estrito para ao menos um $i = 1,\ldots s$. De fato, se

$$(3) \qquad |\omega_{X_i}(x) - g(x)| < \varepsilon,$$

então (2) é clara. Em caso contrário a (3), temos que $x \in K_{X_i}$, donde $\varphi_i(x) = 0$, e (2) ainda é verdadeira. Além disso, êsse raciocínio mostra-nos que, se $\varphi_i(x) > 0$, então (3) é verdadeira, de modo que (2) vale no sentido estrito, bastando, então acrescentarmos que, dado $x \in E$, de $\sum \varphi_i = 1$ resulta que $\varphi_i(x) > 0$ para ao menos um

$i = 1,\ldots s$. Tendo, então, demonstrado (1), para cada $\delta > 0$ determinemos $f_1,\ldots,f_s \in \mathcal{A}$ tais que

$$|\varphi_i(x) - f_i(x)| < \delta, \qquad x \in E, \quad i = 1,\ldots,s,$$

pelo teorema de Weierstrass-Stone, pois cada φ_i, $i = 1,\ldots,s$, é constante em cada classe de equivalência em E. Escolhendo δ suficientemente pequeno, teremos

$$|\sum f_i(x)\, w_{X_i}(x) - g(x)| < \varepsilon, \qquad x \in E,$$

ou seja,

$$\| \sum f_i\, w_{X_i} - g \| < \varepsilon .$$

Basta, então, notarmos que

$$\sum f_i \; w_{X_i} \in \underline{\mathcal{A}}\, \underline{\mathcal{W}} \subset \underline{\mathcal{W}}$$

para concluirmos a demonstração.

A título de motivação das hipóteses feitas nas duas proposições seguintes, teçamos os seguintes comentários. Dado um espaço localmente compacto E, sejam $\underline{\mathcal{A}}$ uma sub-álgebra, contendo 1, de $\underline{\mathcal{C}}(E)$ e $\underline{\mathcal{W}}$ um sub-espaço vetorial de $\underline{\mathcal{C}}_{\infty}(E)$. Notemos que $\underline{\mathcal{A}}\,\underline{\mathcal{W}} \subset \underline{\mathcal{W}}$ implica que $\underline{\mathcal{A}}\,\underline{\mathcal{W}} \subset \underline{\mathcal{C}}_{\infty}(E)$. Se fixarmos $\underline{\mathcal{W}}$, para que $\underline{\mathcal{A}}\,\underline{\mathcal{W}} \subset \underline{\mathcal{C}}_{\infty}(E)$ qualquer que seja $\underline{\mathcal{A}}$, é necessário e suficiente que $\underline{\mathcal{W}} \subset \underline{\mathcal{K}}(E)$. Por outro lado, se fixarmos $\underline{\mathcal{A}}$, para que $\underline{\mathcal{A}}\,\underline{\mathcal{W}} \subset \underline{\mathcal{C}}_{\infty}(E)$ qualquer que seja $\underline{\mathcal{W}}$ é necessário e suficiente que $\underline{\mathcal{A}} \subset \underline{\mathcal{C}}_b(E)$. Tais comentários chamam a nossa atenção sôbre dois casos extremos, um no qual $\underline{\mathcal{A}} \subset \underline{\mathcal{C}}_b(E)$ e o outro no qual $\underline{\mathcal{W}} \subset \underline{\mathcal{K}}(E)$.

PROPOSIÇÃO 10. Sejam E um espaço localmente compacto, $\mathcal{Q}$ uma sub-álgebra, contendo 1, de $\mathcal{C}_b(E)$ e $\mathcal{W}$ um sub-espaço vetorial de $\mathcal{C}_\infty(E)$ que seja um $\mathcal{Q}$-módulo. Então $\mathcal{W}$ é de tipo finito sob $\mathcal{Q}$.

Demonstração. Passemos à compactificação de Stone-Cech, βE, de E. Então $\mathcal{C}_b(E)$ identifica-se a $\mathcal{C}(\beta E)$, de modo que $\mathcal{Q}$ identifica-se a uma sub-álgebra $\beta\mathcal{Q}$, contendo 1, de $\mathcal{C}(\beta E)$. Por outro lado, $\mathcal{C}_\infty(E)$ identifica-se a $\mathcal{C}_N(\beta E)$, onde N é o complementar de E em βE, de modo que $\mathcal{W}$ se identifica a um sub-espaço vetorial $\beta\mathcal{W}$ de $\mathcal{C}_N(\beta E)$. Notemos que $\beta\mathcal{W}$ é um $\beta\mathcal{Q}$-módulo. $\beta\mathcal{Q}$ determina uma relação de equivalência $\beta E/\beta\mathcal{Q}$ em βE, a qual induz $E/\mathcal{Q}$ em E. Seja $g \in \mathcal{C}_\infty(E)$ tal que, qualquer que seja a classe de equivalência X em E segundo $E/\mathcal{Q}$, a restrição $g|X$ pertença à aderência de $\mathcal{W}|X$ em $\mathcal{C}_\infty(X)$. Notemos que a extensão contínua βg de g a βE, que se anula sôbre N, é tal que, qualquer que seja a classe de equivalência X em βE segundo $\beta E/\beta\mathcal{Q}$, a restrição $\beta g|X$ pertence à aderência de $\beta\mathcal{W}|X$ em $\mathcal{C}(\beta E)$. Pela Proposição 9, $\beta\mathcal{W}$ é de tipo finito sob $\beta\mathcal{Q}$. Logo βg pertence à aderência de $\beta\mathcal{W}$ em $\mathcal{C}(\beta E)$, donde resulta que g pertence à aderência de $\mathcal{W}$ em $\mathcal{C}_b(E)$, ou seja, em $\mathcal{C}_\infty(E)$.

No estabelecimento da proposição seguinte, necessitaremos do lema clássico abaixo indicado, sôbre partições contínuas da unidade num espaço uniformizável separado, não necessàriamente normal.

LEMA 3. Sejam E um espaço uniformizável separado e K_i, $i = 1,\ldots,s$, partes compactas de E tais que $K_1 \cap \ldots \cap K_s = \emptyset$. Então existem funções reais contínuas $\alpha_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,s$, em E tais que cada α_i se anule sôbre K_i, $i = 1,\ldots,s$, e $\sum \alpha_i = 1$ em E.

Demonstração. Apliquemos o teorema clássico da partição contínua da unidade ao espaço $K = K_1 \cup \dots \cup K_s$, que é compacto, logo normal. Existem funções reais contínuas $\beta_i \geqslant 0$ em K tais que β_i se anule sôbre K_i, $i = 1, \dots, s$, e $\sum \beta_i = 1$ em K. Usemos o lema clássico, assegurando-nos que, num espaço uniformizável separado, toda função real contínua, definida numa parte compacta, pode ser extendida a uma função real contínua, definida em todo o espaço. Seja, então, $\alpha_1 \geqslant 0$ uma função real contínua em E tal que $\alpha_1 \leqslant 1$, $\alpha_1|K = \beta_1$. Suponhamos ter definido as funções reais contínuas $\alpha_i \geqslant 0$ em E de modo que $\alpha_1 + \dots + \alpha_r \leqslant 1$ em E e $\alpha_i|K = \beta_i$, $i = 1, \dots, r$. Se $r \leqslant s - 2$, notemos que $0 \leqslant \beta_{r+1} \leqslant 1 - (\beta_1 + \dots + \beta_r) = 1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_r)|K$, de modo que podemos determinar uma função real contínua $\alpha_{r+1} \geqslant 0$ em E tal que $\alpha_{r+1} \leqslant 1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_r)$, $\alpha_{r+1}|K = \beta_{r+1}$. Se $r = s - 1$, tomemos $\alpha_s = 1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{s-1})$ e notemos que $\alpha_s \geqslant 0$, $\alpha_s|K = \beta_s$, o que completa a demonstração por indução.

Outra forma de reduzir-se o lema ao teorema da partição contínua da unidade em espaços compactos, consiste em passar-se de E à sua compactificação de Stone-Cech, βE.

PROPOSIÇÃO 11. Sejam E um espaço localmente compacto, $\mathcal{Q}$ uma sub-álgebra, contendo 1, de $\mathcal{C}(E)$ e $\mathcal{W}$ um sub-espaço vetorial de $\mathcal{K}(E)$ que seja um $\mathcal{Q}$-módulo. Então $\mathcal{W}$ é de tipo finito sob $\mathcal{Q}$.

Demonstração. A demonstração desta proposição será uma extensão da apresentada no caso da Proposição 9. Indiquemos com π a aplicação contínua de E no espaço $\mathcal{C}(\mathcal{Q})$, produto cartesiano de R por si mesmo $\mathcal{Q}$-vezes, ou seja, espaço das funções reais sôbre $\mathcal{Q}$, aplicação que a cada

$x \in E$ associa o ponto $\pi(x) = \{f(x)\}$, $f \in \underline{\mathcal{Q}}$, de $\underline{\mathcal{C}}(\underline{\mathcal{Q}})$. Notemos que a relação de equivalência, definida por π sôbre E, coincide com $E/\underline{\mathcal{Q}}$, de modo que as classes de equivalência em E segundo $E/\underline{\mathcal{Q}}$ correspondem-se biunivocamente com as imagens recíprocas $\pi^{-1}(y)$, $y \in \pi(E)$. Dada $g \in \underline{\mathcal{C}}_{\infty}(E)$, suponhamos que, para toda classe de equivalência $X = \pi^{-1}(y)$, $y \in \pi(E)$, verifique-se que $g|X$ pertence à aderência de $\underline{\omega}|X$ em $\underline{\mathcal{C}}_{\infty}(X)$; ou seja, que, fixado $\varepsilon > 0$, para todo $y \in \pi(E)$, haja $\omega_y \in \underline{\omega}$ tal

$$|\omega_y(x) - g(x)| < \varepsilon \,, \qquad x \in \pi^{-1}(y).$$

O conjunto

$$K_y = \{x \in E;\ |g_y(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}$$

é compacto e disjunto de $\pi^{-1}(y)$. Logo $\pi(K_y)$ é compacto, contido em $\pi(E)$ e não contém y. Pela propriedade da interseção finita, existem $y_1, \ldots, y_s \in \pi(E)$ tais que

$$\pi\left(K_{y_1}\right) \cap \ldots \cap \pi\left(K_{y_s}\right) = \emptyset \,.$$

Pelo Lema 3, sejam $\alpha_i \geqslant 0$ funções reais contínuas em $\pi(E)$ tais que α_i se anule sôbre $\pi\left(K_{y_i}\right)$, $i = 1, \ldots, s$, e $\sum \alpha_i = 1$ em $\pi(E)$. Consideremos as funções reais contínuas $\varphi_i = \alpha_i\, \pi_i$, $i = 1, \ldots, s$, em E, que verificam $\sum \varphi_i = 1$. Afirmamos que

$$\left| \sum \varphi_i(x)\, \omega_{y_i}(x) - g(x)\right| < \varepsilon, \qquad x \in E.$$

A comprovação desta desigualdade é análoga a uma feita no decorrer da demonstração da Proposição 9 e será omitida. Seja K uma parte compacta em E tal que

$$|g(x)| < \varepsilon, \quad \omega_{y_i}(x) = 0, \qquad x \in E - K, \qquad i = 1, \ldots s.$$

Para cada $\delta > 0$, determinemos $f_1, \ldots, f_s \in \underline{\mathcal{Q}}$ tais que

$$|\varphi_i(x) - f_i(x)| < \delta \;, \quad x \in K, \quad i = 1,\ldots,s,$$

pelo teorema de Weierstrass-Stone, pois φ_i, $i = 1,\ldots,s$, é constante em cada classe de equivalência em E. Escolhendo δ suficientemente pequeno, teremos

$$|\sum f_i(x)\, w_{y_i}(x) - g(x)| < \varepsilon, \qquad x \in K.$$

Ora, tal desigualdade é verdadeira não só em K, mas também fora de K, ou seja,

$$\| \sum \; f_i \, w_{y_i} - g \| < \varepsilon \;.$$

Basta, então, que notemos que

$$\sum \; f_i \, w_{y_i} \in \underline{\mathcal{Q}}\, \underline{w} \subset \underline{w}$$

para concluir a demonstração.

As Proposições 9, 10 e 11 são casos particulares da proposição seguinte, que se apresentará mais adiante como um caso particular natural do Teorema 6 (correspondendo, exatamente, ao caso em que podemos concluir que uma certa série de termos positivos é divergente, pois seu termo geral não tende para 0; vêr a observação após o Teorema 5). Deixaremos aos cuidados do leitor a demonstração da Proposição 12, no estilo das que apresentámos para as precedentes.

PROPOSIÇÃO 12. Sejam E um espaço localmente compacto, $\mathcal{Q}$ uma sub-álgebra, contendo 1, de $\mathcal{C}(E)$ e $\mathcal{W}$ um sub-espaço vetorial de $\mathcal{C}_{\infty}(E)$ que seja um $\mathcal{Q}$-módulo. Se, quaisquer que sejam $f \in \mathcal{Q}$, $w \in \mathcal{W}$, verificar-se que f é limitada no suporte de w, então $\mathcal{W}$ será de tipo finito sob $\mathcal{Q}$.

Terminemos êste parágrafo tecendo uns comentários a respeito da relação mútua entre essas proposições. A Proposição 9 é caso particular evidente da Proposição 10, ou da Proposição 11, ou da Proposição 12, correspondendo ao caso de E ser compacto. Por outro lado, a Proposição 10 foi aqui apresentada como consequência da Proposição 9, motivo pelo qual demos uma demonstração direta da Proposição 9, que é ligeiramente mais simples do que a demonstração da Proposição 11, em lugar de apresentarmos a Proposição 9 e, portanto, a Proposição 10, como casos particulares da Proposição 11. Notemos que não apresentámos, porém, a Proposição 11 como consequência da Proposição 9. Nas demonstrações das Proposições 9, 10 e 11 (além de 12), fizemos uso do teorema de Weierstrass-Stone. Por outro lado, a Proposição 9 e, consequentemente, cada uma das Proposições 10, 11 e 12, contém como caso particular o teorema de Weierstrass-Stone, bastando, para ver-se isso, aplicar a Proposição 9 sob a hipótese de que $\mathcal{Q} = \mathcal{W}$. Portanto, o teorema de Weierstrass-Stone equivale a cada uma das Proposições 9, 10, 11 e 12. Finalmente, notemos que as Proposições 9, 10, 11 e 12 são consequências do resultado mais simples que estabeleceremos a propósito do problema generalizado de aproximação de Bernstein, a saber, o critério exponencial (ver Corolário ao Teorema 4).

9. Alguns teoremas gerais

No presente parágrafo, iremos indicar, sistematicamente, com E um espaço localmente compacto, com $\mathcal{Q}$ uma sub-álgebra, contendo 1, de $\mathscr{C}(E)$ e com $\mathscr{W}$ um sub-espaço vetorial de $\mathscr{C}_{\infty}(E)$, sendo $\mathscr{W}$ um $\mathcal{Q}$-módulo, isto é, $\mathcal{Q}\mathscr{W} \subset \mathscr{W}$.

As Proposições 10, 11 e 12 (bem como a Proposição 9, mas de um modo mascarado, pois nela supomos a compacidade, que faz esvanecer o infinito) mostram-nos que certas condições de comportamento no infinito, das funções de $\mathcal{Q}$ e $\mathscr{W}$, garantem-nos que $\mathscr{W}$ seja de tipo finito sob $\mathcal{Q}$. Uma análise do espírito das Proposições 10, 11 e 12 e das condições clássicas suficientes para que uma função seja um peso fundamental, tais como as Proposições 3, 4 e 5, indicam-nos que o fato de $\mathscr{W}$ ser de tipo finito sob $\mathcal{Q}$ deve, normalmente, ser assegurado por condições de decrescimento suficientemente rápido no infinito, das funções de $\mathscr{W}$ em relação às funções de $\mathcal{Q}$, ou alternativamente, por condições de crescimento suficientemente lento no infinito, das funções de $\mathcal{Q}$ em relação às funções de $\mathscr{W}$. Com o objetivo de estabelecermos resultados precisos e mais gerais em tal direção, comecemos com o lema preliminar seguinte.

LEMA 4. *Sejam T um espaço topológico separado, $\mathcal{K}$ uma coleção de partes compactas de T cuja interseção é vazia, $\mathcal{R}$ uma coleção de relações de equivalências sôbre T tais que:*

(1) *Se $R \in \mathcal{R}$, o saturado $R(K)$ de toda parte compacta K de T é fechado*

(2) *Se $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$, existe $R \in \mathcal{R}$ tal que, em T^2, o gráfico de R*

<u>esteja contido nos gráficos de</u> R_1 e R_2.

(3) <u>Se</u> $x, y \in T$, $x \neq y$, <u>existe</u> $R \in \underline{\mathcal{R}}$ <u>tal que</u> x e y <u>não sejam</u> R <u>-equivalentes</u>.

Então existe $R \in \underline{\mathcal{R}}$ tal que

$$\bigcap \left\{ R(K); \quad K \in \underline{\mathcal{K}} \right\} = \emptyset .$$

<u>Demonstração</u>. Se $R \in \underline{\mathcal{R}}$, ponhamos

$$L_R = \bigcap \left\{ R(K); \quad K \in \underline{\mathcal{K}} \right\} ,$$

que é um conjunto fechado, por (1). Ponhamos, também,

$$L = \bigcap \left\{ L_R; \quad R \in \underline{\mathcal{R}} \right\} = \bigcap \left\{ R(K); \; K \in \underline{\mathcal{K}}, \; R \in \underline{\mathcal{R}} \right\} ,$$

que também é fechado. Afirmamos que $L \subset K$ qualquer que seja $K \in \underline{\mathcal{K}}$. De fato, sejam $x \in L$, $K \in \underline{\mathcal{K}}$. Então $x \in R(K)$, ou seja, $R(x) \bigcap K \neq \emptyset$, para toda $R \in \underline{\mathcal{R}}$. Por compacidade e por (2), existe y pertencente a $R(x) \bigcap K$ qualquer que seja $R \in \underline{\mathcal{R}}$. (3) implica que $x = y$, donde obtemos $x \in K$, como queríamos. Isso prova que $L \subset K$ qualquer que seja $K \in \underline{\mathcal{K}}$, donde $L = \emptyset$. Fixemos um $K \in \underline{\mathcal{K}}$, visto que $\underline{\mathcal{K}}$ não é vasio. Por compacidade e por (2), de $L = \emptyset$ obtemos que $L_R \bigcap K = \emptyset$ para uma certa $R \in \underline{\mathcal{R}}$. Isso implica que $L_R = \emptyset$, pois L_R é R-saturada e uma R-classe de equivalência contida em L_R estaria, também, contida em $R(K)$ e, portanto intersectaria K, contra a hipótese de que $L_R \bigcap K = \emptyset$.

<u>COROLÁRIO</u>. <u>Sejam</u> $T = \prod \{T_i; \; i \in I\}$ <u>um produto cartesiano de espaços topológicos separados e</u> $\underline{\mathcal{K}}$ <u>uma coleção de partes compactas de</u> T, <u>cuja interseção é vasia. Então existe uma parte finita</u> N <u>de</u> I <u>tal que, sendo</u>

$$\pi_N: \prod \{T_i;\ i \in I\} \longrightarrow \prod \{T_i;\ i \in N\}$$

<u>a projeção natural de produto em sub-produto, então</u>

$$\bigcap \{\pi_N(K);\ \ K \in \underline{K}\} = \emptyset .$$

<u>Demonstração</u>. Para toda parte finita N de I, seja R_N a relação de equivalência em T dada por

$$x\ R_N\ y \text{ vale se e só se } \pi_N(x) = \pi_N(y), \quad x, y \in T,$$

e ponhamos

$$\underline{R} = \{R_N;\ \ N \subset I \text{ finito}\}$$

Como π_N é contínua, se $K \subset T$ fôr compacta, $\pi_N(K)$ será compacta, logo fechada, de modo que

$$R_N(K) = \pi_N^{-1}\ \pi_N(K)$$

será fechada. A condição (1) do Lema 4 é, pois, satisfeita. As condições (2) e (3) são evidentes. Logo há uma parte finita N de I tal que

$$\bigcap \{\pi_N^{-1}\ \pi_N(K);\ \ K \in \underline{K}\} = \emptyset ,$$

ou seja,

$$\pi_N^{-1}\left[\bigcap \{\pi_N(K);\ K \in \underline{K}\}\right] = \emptyset ,$$

ou ainda

$$\bigcap \{\pi_N(K);\ \ K \in \underline{K}\} = \emptyset .$$

Com o objetivo de enunciar o próximo teorema, introduzamos as seguintes notações.

Indiquemos com $\underline{B}_n$ o conjunto das funções reais contínuas, estritamente positivas em todos os pontos de $\underline{R}^n$, que sejam pesos fundamentaiś no sentido do problema clássico de Bernstein (§3).

Seja A um conjunto de geradores de $\mathcal{Q}$ como álgebra com unidade, de modo que $\mathcal{Q}$ coincide com o conjunto das $f \in \mathcal{E}(E)$ que podem ser escritas como

$$f = p(f_1, \ldots, f_r) ,$$

sendo $p \in \mathcal{P}_r$, $f_i \in A$, $i = 1,\ldots,r$ e $r = 1, 2, \ldots$ convenientemente escolhidos.

Seja, também, W um conjunto de geradores de $\mathcal{W}$ como $\mathcal{Q}$-módulo, de modo que $\mathcal{W}$ coincide com o conjunto das $\omega \in \mathcal{E}_\infty(E)$ que podem ser escritas como

$$\omega = f_1 \omega_1 + \ldots + f_r \omega_r ,$$

onde $f_i \in \mathcal{Q}$ e $\omega_i \in W$, $i = 1, \ldots, r$ e $r = 1, 2, \ldots$ são convenientemente escolhidos.

TEOREMA 1. Se, para cada sistema de geradores $f_1, \ldots, f_n \in A, \omega \in W$, existir $B \in \mathcal{B}_n$ tal que

$$|\omega(x)| \leq B\left[f_1(x), \ldots, f_n(x)\right], \qquad x \in E,$$

então $\mathcal{W}$ será de tipo finito sob $\mathcal{Q}$.

Demonstração. A demonstração desta proposição será uma extensão das expostas para as Proposições 9 e 11. Comecemos notando que, se $\omega \in \mathcal{W}$ e se X fôr uma classe de equivalência de E segundo $E/\mathcal{Q}$, existe $\omega' \in \mathcal{W}$ tal que $\omega|X = \omega'|X$ e ω' seja uma combinação linear finita, com coeficientes em $\underline{R}$ (e não apenas com coeficientes em $\mathcal{Q}$!) de elementos de W. Com efeito, temos

$$\omega = \sum f_i \, \omega_i, \quad f_i \in \underline{\mathcal{Q}}, \quad \omega_i \in W, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Seja c_i o valor constante de f_i sôbre X, $i = 1, \ldots, r$. Então $\omega' = \sum c_i \, \omega_i$ responde à asserção.

Tendo feito tal observação, indiquemos com π a aplicação contínua de E no espaço $\underline{\mathcal{C}}(A)$, produto cartesiano de $\underline{R}$ por si mesmo A vezes, ou seja, espaço das funções reais sôbre A, aplicação essa que a cada $x \in E$ associa a função real $\pi(x)$ sôbre A dada por $\pi(x)(f) = f(x)$ se $f \in A$. Notemos que a relação de equivalência, definida por π sôbre E, coincide com $E/\underline{\mathcal{Q}}$, de modo que as classes de equivalência em E segundo $E/\underline{\mathcal{Q}}$ correspondem-se biunivocamente com as imagens inversas $\pi^{-1}(y)$, $y \in \pi(E)$, pois A gera $\underline{\mathcal{Q}}$.

Dada $g \in \underline{\mathcal{C}}_{oo}(E)$, suponhamos que, para toda classe de equivalência $X = \pi^{-1}(y)$, $y \in \pi(E)$, verifique-se que $g|X$ pertence à aderência de $\underline{\omega}|X$ em $\underline{\mathcal{C}}_{oo}(X)$; ou seja, que, fixado $\varepsilon > 0$, haja $\omega_y \in \underline{\omega}$ para todo $y \in \pi(E)$ tal que

$$|\omega_y(x) - g(x)| < \varepsilon, \qquad x \in \pi^{-1}(y).$$

Em virtude da observação inicial, podemos supor que ω_y seja uma combinação linear finita, com coeficientes em $\underline{R}$, de elementos de W. O conjunto

$$K_y = \{x \in E;\ |\omega_y(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}$$

é compacto e disjunto de $\pi^{-1}(y)$. Logo $\pi(K_y)$ é compacto, contido em $\pi(E)$ e não contem y. Daí resulta que, sendo

$$\underline{\mathcal{K}} = \{\pi(K_y);\ y \in \pi(E)\},$$

a interseção de $\underline{\mathcal{K}}$ é vasia. Pelo corolário ao Lema 4, existem $f_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$, tais que, se Φ fôr a aplicação de E em $\underline{R}^n$ dada por

$$\Phi(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)), \qquad x \in E,$$

então

$$\bigcap \{\Phi[\pi(K_y)]; \ \ y \in \pi(E)\} = \emptyset .$$

Por compacidade, determinemos $y_i \in \pi(E)$, $i = 1, \ldots, s$, de modo que

$$\bigcap \left\{\Phi\left[\pi\left(K_{y_i}\right)\right]; \ \ i = 1, \ldots, s \right\} = \emptyset .$$

Em virtude de $\underline{R}^n$ ser um espaço normal e pelo método das partições contínuas da unidade, existem funções reais contínuas $\alpha_i \geq 0$ tais que α_i se anule sôbre $\Phi\left[\pi\left(K_{y_i}\right)\right]$, $i = 1, \ldots, s$, e $\sum \alpha_i = 1$ em $\underline{R}^n$. Consideremos as funções reais contínuas $\varphi_i = \alpha_i \Phi \geq 0$, $i = 1, \ldots, s$, em E, que verificam $\sum \varphi_i = 1$. Afirmamos que

$$(1) \qquad |\sum \varphi_i(x) \, w_{y_i}(x) - g(x)| < \varepsilon , \qquad x \in E .$$

Essa desigualdade é uma consequência de

$$(2) \qquad \varphi_i(x) \cdot |w_{y_i}(x) - g(x)| \leq \varepsilon \ \ \varphi_i(x), \ \ x \in E, \ \ i = 1, \ldots, s,$$

e da observação de que, para cada $x \in E$, (2) é válida no sentido estrito, para ao menos um $i = 1, \ldots, s$. De fato, se

$$(3) \qquad |w_{y_i}(x) - g(x)| < \varepsilon,$$

então (2) é clara. Em caso contrário a (3), temos que $x \in K_{y_i}$, donde $\varphi_i(x) = 0$ e (2) ainda é verdadeira. Além disso, êsse raciocínio mostra-nos que, se $\varphi_i(x) > 0$, então (3) é verdadeira, de modo que (2) vale no sentido estrito, bastando, então acrescentar que, dado $x \in E$, de $\sum \varphi_i = 1$ resulta que $\varphi_i(x) > 0$ para ao menos um $i = 1, \ldots, s$. Tendo, então, demonstrado (1), ou seja

$$\left|\sum \alpha_i\left[f_1(x), \ldots, f_n(x)\right] \cdot \omega_{y_i}(x) - g(x)\right| < \varepsilon, \quad x \in E,$$

como cada ω_{y_i}, $i = 1, \ldots, s$, é uma combinação linear finita, com coeficientes em $\underline{R}$, de elementos de W, podemos re-escrever essa desigualdade do seguinte modo

$$(4) \qquad \left|\sum \beta_j\left[f_1(x), \ldots, f_n(x)\right] \cdot \omega_j(x) - g(x)\right| < \varepsilon, \quad x \in E,$$

onde β_j, $j = 1, \ldots, m$, são combinações lineares finitas, com coeficientes em $\underline{R}$, de α_i, $i = 1, \ldots, s$, e, consequentemente, são limitadas em $\underline{R}^n$ e $\omega_j \in W$, $j = 1, \ldots, m$.

Pela hipótese do teorema, para cada $j = 1, \ldots, m$, há $B_j \in \underline{\mathcal{B}}_n$ tal que

$$(5) \qquad |\omega_j(x)| \leqslant B_j\left[f_1(x), \ldots, f_n(x)\right], \quad x \in E, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Além disso, como B_j é um peso fundamental em $\underline{R}^n$ e como $\beta_j B_j \in \underline{\mathcal{C}}_{\infty}(\underline{R}^n)$, dado $\delta > 0$, existe $p_j \in \underline{\mathcal{P}}_n$, $j = 1, \ldots, m$, tal que

$$|\beta_j(t) B_j(t) - p_j(t) B_j(t)| < \delta, \quad t \in \underline{R}^n, \quad j = 1, \ldots, m,$$

donde

$$(6) \qquad \left|\beta_j\left[f_1(x), \ldots, f_n(x)\right] \omega_j(x) - p_j\left[f_1(x), \ldots, f_n(x)\right]\omega_j(x)\right| < \delta,$$

$$x \in E, \ j = 1, \ldots, m,$$

em virtude de (5). Combinando (4) e (6) e escolhendo δ suficientemente pequeno, obtemos

$$\left|\sum p_j\left[f_1(x), \ldots, f_n(x)\right] \omega_j(x) - g(x)\right| < \varepsilon, \quad x \in E,$$

ou seja,

$$\left\|\sum p_j\,(f_1, \ldots, f_n)\, \omega_j - g\right\| < \varepsilon.$$

Basta, então, que notemos que

$$\sum p_j(f_1, \ldots, f_n)\, \omega_j \in \underline{\mathcal{Q}\omega} \subset \underline{\omega}$$

para concluir a demonstração.

Êsse teorema reduz a pesquisa de condições suficientes, que nos assegurem o caso de tipo finito no problema generalizado de aproximação de Bernstein, à determinação de condições suficientes para que uma função seja um peso fundamental no problema clássico de aproximação de Bernstein. Portanto, o problema de descrição de aderências, no caso geral, fica, assim reduzido ao problema de densidade, no caso de dimensão finita.

Passemos, agora, à redução do problema de descrição de aderências, no caso geral, ao problema de densidade, no caso uni-dimensional. Como no teorema de Weierstrass-Stone, bem como na maioria dos setores da teoria da aproximação, o caso geral deve reduzir-se ao caso unidimensional. No caso do problema de Bernstein, porém, a redução do caso geral ao caso unidimensional apresenta uma dificuldade adicional, que não ocorre na redução do caso geral ao de dimensão finita, sendo de notar-se, também, que algo é perdido na passagem ao caso unidimensional. Êsse fato é um aspecto das dificuldades analíticas maiores, que se associam ao problema de Bernstein, quando êle é comparado com o problema de Weierstrass.

Para efeitos do enunciado do Teorema 2, seja $\underline{\mathfrak{X}}$ um conjunto de funções reais contínuas, estritatamente positivas em todos os pontos de $\underline{R}$, tal que, para cada $n = 1, 2, \ldots$, se $B_i \in \underline{\mathfrak{X}}$, $i = 1, \ldots, n$, e B for a função real definida em $\underline{R}^n$ por

$$B(t) = \inf \left\{ B_1(t_1), \ldots, B_n(t_n) \right\}, \qquad t = (t_1, \ldots, t_n) \in \underline{R}^n,$$

então necessàriamente $B \in \underline{\mathcal{B}}_n$. De acôrdo com a Proposição 1, isso equivale a dizer-se que, para cada $n = 1, 2, \ldots$, se B fôr uma função real contínua, estritamente positiva em todos os pontos de $\underline{R}^n$, tal que

$$B(t) \leqslant B_i(t_i), \quad t = (t_1, \ldots, t_n) \in \underline{R}^n, \quad i = 1, \ldots, n,$$

então $B \in \underline{\mathcal{B}}_n$. Da definição de $\underline{\mathcal{I}}$, resulta que $\underline{\mathcal{I}} \subset \underline{\mathcal{B}}_1$. Não sabemos se $\underline{\mathcal{B}}_1$ possui a propriedade indicada para $\underline{\mathcal{I}}$. Se $\underline{\mathcal{I}}$ se referisse a $\underline{R}^n$, e não apenas a $\underline{R}$, teríamos um enunciado correspondente da propriedade acima descrita, que nos dispensaremos de mencionar explicitamente, pois será inútil para nós, bem como a questão de saber-se se $\underline{\mathcal{B}}_n$ possui tal propriedade.

<u>TEOREMA 2</u>. <u>Se, para cada par de geradores</u> $f \in A$, $\omega \in W$, <u>existir</u> $B \in \underline{\mathcal{I}}$ <u>tal que</u>

$$|\omega(x)| \leqslant B\left[f(x)\right], \qquad x \in E,$$

<u>então ω será de tipo finito sob $\mathcal{Q}$</u>.

<u>Demonstração</u>. De acôrdo com o Teorema 1, basta que mostremos que, para cada sistema de geradores $f_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$, $\omega \in W$, existe $B \in \underline{\mathcal{B}}_n$ tal que

$$|\omega(x)| \leqslant B\left[f_1(x), \ldots, f_n(x)\right], \qquad x \in E.$$

Por hipótese, existem $B_i \in \underline{\mathcal{I}}$, $i = 1, \ldots, n$, tais que

$$|\omega(x)| \leqslant B_i\left[f_i(x)\right], \quad x \in E, \ i = 1, \ldots, n,$$

resultando a asserção da propriedade de $\underline{\mathcal{I}}$.

Indiquemos um caso particular do Teorema 2. Para isso, seja $\underline{B}_n$ o subconjunto de $\underline{\mathcal{B}}_n$, das funções B tais que $B^a \in \underline{\mathcal{B}}_n$ qualquer que seja o expoente real $a > 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Notemos que, se $a \geqslant 1$ e

$B \in \underline{\mathfrak{B}}_n$, então $B^{\alpha}/B = B^{\alpha-1}$ é limitada, donde resulta que $B^{\alpha} \in \underline{\mathfrak{B}}_n$, pela Proposição 1. Se $0 < \alpha < 1$ e $B \in \underline{\mathfrak{B}}_n$, não resulta necessàriamente que $B^{\alpha} \in \underline{\mathfrak{B}}_n$ (ver Exemplo 10 abaixo). Portanto, $\underline{B}_n$ é uma parte própria de $\underline{\mathfrak{B}}_n$.

<u>TEOREMA 3</u>. <u>Se, para cada par de geradores</u> $f \in A$, $\omega \in W$, <u>existir</u> $B \in \underline{B}_1$ <u>tal que</u>

$$|\omega(x)| \leq B[f(x)], \qquad x \in E$$

<u>então ω será de tipo finito sob $\mathcal{Q}$</u>.

<u>Demonstração</u>. De acôrdo com o Teorema 2, basta que mostremos que $\underline{B}_1$ tem a propriedade de $\underline{\mathfrak{Y}}$, indicada imediatamente antes do enunciado do mesmo teorema (caso particular de uma propriedade anàloga de $\underline{B}_n$, que nos dispensaremos de enunciar e justificar). De fato, sejam $B_i \in \underline{B}_1$, $i = 1, \ldots, n$. Ponhamos

$$B(t) = \inf \left\{ B_1(t_1), \ldots, B_n(t_n) \right\}, \qquad t = (t_1, \ldots, t_n) \in \underline{R}^n.$$

Lembremos que $\underline{\mathcal{E}}_{\infty}(\underline{R}^n)$ é o produto tensorial topológico de $\underline{\mathcal{E}}_{\infty}(\underline{R})$ por sí mesmo, n vezes, com o que queremos dizer, simplesmente, que $\underline{\mathcal{E}}_{\infty}(\underline{R}^n)$ é a aderência do seu sub-espaço vetorial gerado pelas funções da forma

$$f(t) = f_1(t_1) \ldots f_n(t_n), \; t = (t_1, \ldots, t_n) \in \underline{R}^n, \; f_i \in \underline{\mathcal{E}}_{\infty}(\underline{R}), \; i = 1, \ldots, n.$$

Dai resulta que, se ω_i, $i = 1, \ldots, n$, forem pesos fundamentais em $\underline{R}$ e ω fôr definida por

$$\omega(t) = \omega_1(t_1) \ldots \omega_n(t_n), \qquad t = (t_1, \ldots, t_n) \in \underline{R}^n,$$

então ω será um peso fundamental em $\underline{R}^n$. Portanto, da Proposição 1 e da desigualdade

$$B(t) \leqslant \left[B_1(t_1)\right]^{1/n} \cdots \left[B_n(t_n)\right]^{1/n}, \quad t = (t_1, \ldots, t_n) \in \underline{R}^n,$$

resulta que $B \in \underline{\mathcal{B}}_n$, como queríamos mostrar.

<u>EXEMPLO 10</u>. Mostremos que $\underline{B}_n$ é uma parte própria de $\underline{\mathcal{B}}_n$, através de um exemplo que nos foi comunicado por P. Malliavin, em carta de 19 de março de 1961. Vamos construir um contra-exemplo ao fato de que $B \in \underline{\mathcal{B}}_1$ deve implicar $B^{\alpha} \in \underline{\mathcal{B}}_1$, no caso $0 < \alpha < 1$. Um esboço da demonstração é o seguinte. Seja $\{I_n\}$ uma sucessão de intervalos abertos disjuntos, sendo I_n de extremidades R_n e $e^n R_n$, onde $\{R_n\}$ é crescente de modo bastante rápido. Indiquemos com μ a medida definida por

$$d\mu(t) = dt \text{ em } \bigcup I_n, \quad d\mu(t) = 0 \text{ em } \underline{R} - \bigcup I_n .$$

Ponhamos

$$\mu(t) = \int_0^t d\mu$$

Seja Λ a sucessão par tal que

$$m_\Lambda(t) = \sum \{1; \lambda \in \Lambda, \ |\lambda| \leqslant t\} = \text{ parte inteira de } \mu(t).$$

Ponhamos

$$\log B_1(x) = \int_0^\infty \log|1 + x^2 t^{-2}| \cdot d\mu(t),$$

$$\underline{\mathcal{O}}(\lambda) = \{x; \ |x - \lambda| < \exp(-\exp.\exp(\lambda))\},$$

$$\underline{\mathcal{O}} = \bigcup \{\underline{\mathcal{O}}(\lambda); \ \lambda \in \Lambda\}.$$

Definamos B contínua de modo que

$$B(x) = B_1(x), \quad x \in \underline{R} - \underline{\mathcal{O}},$$

(1) $$\log B(\lambda) = -h(\lambda) \log|\lambda|, \quad \lambda \in \Lambda,$$

onde h é uma função par que cresce para o infinito muito lentamente quando $|\lambda| \longrightarrow \infty$. Seja p_n o polinômio

$$p_n(z) = \prod \left\{(1 - z^2/\lambda^2); \quad |\lambda| < \tilde{R}_n e^n, \quad \lambda \in \Lambda \right\}.$$

Então

$$|p_n(x)\, B(x)| \leqslant 1, \qquad x \in \underline{R} ,$$

para todo n, desde que $\{R_n\}$ e h sejam escolhidos convenientemente. Pelo teorema de Pollard (Proposição 6), vemos que $B \in \underline{\mathcal{B}}_1$. Se considerarmos B^a e um polinômio p tal que

$$|p(x)\, B^a(x)| \leqslant 1, \quad x \in \underline{R} ,$$

p não pode ter mais de $a.m_\Lambda(\rho)$ zeros no círculo de centro na origem e raio ρ. Usando-se um argumento do tipo do módulo máximo, vemos que o comportamento de p resulta essencialmente da estimativa (1) acima, donde $B^a \in \underline{\mathcal{B}}_1$ falso, pelo teorema de Pollard. Essa situação é, naturalmente, patológica. Se tivermos a hipótese adicional

$$|B(x+t)/B(x)| = O(1), \qquad x \in \underline{R}, \quad |t| < 1,$$

é possível provar-se que $B \in \underline{\mathcal{B}}_1$ implica $B^a \in \underline{\mathcal{B}}_1$ para todo $a > 0$.

10. Algumas formas particulares dos critérios gerais

Vejamos algumas consequências interessantes, de aplicação prática mais acessível, do Teorema 3 combinado com os critérios clássicos indicados anteriormente (Proposições 3, 4 e 5). Manteremos o significado das notações E, $\underline{\mathcal{A}}$, $\underline{\mathcal{W}}$, A e W do parágrafo precedente.

LEMA 6. Seja $\mathfrak{T}$ o conjunto das $\omega \in \mathscr{C}(\underline{R})$ estritamente positivas em todos os pontos, para cada uma das quais existe $B \in \mathscr{C}(\underline{R})$ estritamente positiva em todos os pontos, tal que

$$B(-t) = B(t), \quad t \in \underline{R},$$

log 1/B (t) é uma função convexa de log t para $t > 0$,

$$\int^{+\infty} 1/t^2 \cdot \log 1/B(t) \cdot dt = +\infty,$$

$$|\omega(t)| \leqslant B(t), \quad t \in \underline{R}.$$

Então $\mathfrak{T} \subset \underline{B}_1$.

Demonstração. É claro que $\mathfrak{T} \subset \mathscr{B}_1$, pela Proposição 4. Além disso, se $\omega \in \mathfrak{T}$, então $\omega^a \in \mathfrak{T}$ para todo número real $a > 0$.

TEOREMA 4. Se, para cada par de geradores $f \in A$, $\omega \in W$, existir uma função $B \in \mathscr{C}(\underline{R})$, estritamente positiva em todos os pontos, tal que

$$B(-t) = B(t), \quad t \in \underline{R},$$

log 1/B(t) é uma função convexa de log t para $t > 0$,

$$\int^{+\infty} 1/t^2 \cdot \log 1/B(t) \cdot dt = +\infty,$$

$$|\omega(x)| \leqslant B[f(x)], \quad x \in E,$$

então ω será de tipo finito sob $\mathcal{Q}$.

Demonstração. Resulta imediatamente do Teorema 3 e do Lema 6.

COROLÁRIO. Se, para cada par de geradores $f \in A$, $\omega \in W$, existirem *números reais* K, $k > 0$, *tais que*

$$|\omega(x)| \leq K \cdot \exp\left[-k|f(x)|\right], \qquad x \in E,$$

então ω será de tipo finito sob $\mathcal{Q}$.

LEMA 7. *Seja* $\sum a_m$ *uma série de termos reais positivos, tais que existe um número real* $S > 0$ *para o qual* $a_{m+1} \leq S\, a_m$, $m = 1, 2, \ldots$. *Então*

(1) $$\sum \left\{ a_m ;\ m \geq 1 \right\} = +\infty$$

é, para cada $k = 1, 2, \ldots$, *equivalente a*

(1-k) $$\sum \left\{ a_{km} ;\ m \geq 1 \right\} = +\infty .$$

A demonstração é simples e clássica.

LEMA 8. *Seja* $\mathcal{Y}$ *o conjunto das* $\omega \in \mathcal{C}(\underline{R})$, *estritamente positivas em todos os pontos, tais que*

$$\sum \left\{ 1/\sqrt[m]{M_m} ;\quad m \geq 1 \right\} = +\infty ,$$

onde

$$M_m = \sup \left\{ |t^m \omega(t)| ;\qquad t \in \underline{R} \right\} , \qquad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Então $\mathcal{Y} \subset \underline{B}_1$.

Demonstração. É claro que $\mathcal{Y} \subset \underline{\mathcal{B}}_1$, pela Proposição 5. Tomemos $\omega \in \mathcal{Y}$ e um número real $a > 0$ e mostremos que $\omega^a \in \mathcal{Y}$, donde resultará o lema. Seja $k = 1, 2, \ldots$ tal que $1/k \leq a$. Pela Proposição 1, basta que mostremos que $z = \omega^{1/k} \in \mathcal{J}$. Ponhamos

$$N_m = \sup \left\{ |t^m z(t)| ; \quad t \in \underline{R} \right\} , \qquad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Temos que provar que

$$\sum b_m = + \infty , \qquad \text{onde} \qquad b_m = 1/\sqrt[m]{N_m} .$$

Ora,

$$b_m = a_{km}, \qquad \text{onde} \qquad a_m = 1/\sqrt[m]{M_m} ,$$

e $\left\{M_m\right\}$ é a sucessão definida no enunciado do Lema 8, de modo que iremos aplicar o Lema 7 para, da divergência de $\sum a_m$, concluirmos a divergência de $\sum b_m$. Notemos que $\omega \leqslant M_o$. Portanto, se $M_o \geqslant 1$, teremos

$$[\omega(t)]^{1/m} \leqslant \sqrt{M_o} \cdot [\omega(t)]^{1/m+1} ,$$

donde

$$a_{m+1} \leqslant \sqrt{M_o} \cdot a_m .$$

Se $M_o \leqslant 1$, então $\omega \leqslant 1$, donde

$$[\omega(t)]^{1/m} \leqslant [\omega(t)]^{1/m+1}$$

e, portanto $a_{m+1} \leqslant a_m$. Em qualquer hipótese, teremos

$$a_{m+1} \leqslant S\, a_m , \qquad S = \sup \left\{ \sqrt{M_o}, 1 \right\}$$

e o lema fica demonstrado.

<u>LEMA 9</u>. <u>Seja</u> $\left\{M_m\right\}$, $m = 0, 1, \ldots,$ <u>uma sucessão de números reais estritamente positivos. Ponhamos</u>

$$\omega(t) = \inf \left\{ M_m/|t^m| ; \quad m = 0, 1, 2, \ldots \right\} .$$

Se

$$\sqrt[m]{M_m} \longrightarrow +\infty \quad (m \longrightarrow \infty), \quad \sum \left\{1/\sqrt[m]{M_m}\ ;\ m \geqslant 1\right\} = +\infty,$$

então ω pertence ao conjunto $\mathfrak{F}$ do Lema 8.

Demonstração. Notemos que a continuidade de ω resulta de que

$$M_m/|t^m| \longrightarrow \infty \qquad (m \longrightarrow \infty),$$

uniformemente sôbre toda parte compacta de $\underline{R}$. Os pontos restantes a serem verificados são evidentes.

TEOREMA 5. Se, para cada par de geradores $f \in A$, $\omega \in W$, tivermos

$$\sum \left\{1/\sqrt[m]{M_m};\ \ m \geqslant 1\right\} = +\infty$$

onde

$$M_m = \sup \left\{|f(x)^m \omega(x)|;\quad x \in E\right\}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

então ω será de tipo finito sob $\mathcal{Q}$.

Demonstração. Podemos determinar uma sucessão $\left\{N_m;\ m = 0, 1, \dots\right\}$ de números reais tais que

$$N_m > 0, \quad N_m \geqslant M_m, \quad \sqrt[m]{N_m} \longrightarrow +\infty, \quad \sum 1/\sqrt[m]{N_m} = +\infty.$$

Ponhamos

$$B(t) = \inf \left\{N_m/|t^m|;\quad m = 0, 1, 2, \dots\right\}.$$

Pelos Lemas 8 e 9, $B \in \underline{B}_1$. Além disso,

$$|\omega(x)| \leqslant B[f(x)], \qquad x \in E,$$

e basta ter o Teorema 3 em conta.

O Teorema 5 foi demonstrado primeiramente por Malliavin, supondo que $\underline{\mathcal{Q}}$ seja separadora, que $\underline{\mathcal{W}}$ tenha apenas um gerador w, ou seja $W = \{w\}$, o qual nunca se anule, e que a série indicada para esse w e para toda $f \in A$ seja divergente, a conclusão sendo, em tal caso (ver Proposição 8) que $\underline{\mathcal{W}}$ é denso em $\mathcal{C}_{\infty}(E)$. O método de demonstração de Malliavin, porém, é diverso do adotado acima, não sendo claro como generalizar o método de Malliavin a fim de obter os Teoremas 1, 2, 3, 4 e 5. Tais teoremas e o conceito de tipo finito não figuram no trabalho de Malliavin.

<u>OBSERVAÇÃO</u>. O Teorema 5 contém como caso particular a Proposição 12. De fato, sob as hipóteses dessa proposição, é imediato que

$$\sum \left\{1/\sqrt[m]{M_m};\ m \geq 1\right\} = +\infty ,$$

para $f \in \underline{\mathcal{Q}}$, $w \in \underline{\mathcal{W}}$, pois o termo geral dessa série é limitado inferiormente por um número real estritamente positivo e, portanto, não tende para zero. Aliás, reciprocamente, se, quaisquer que sejam $f \in A$, $w \in W$, a série acima for divergente, devido ao fato de que seu termo geral não tende para zero, é fácil verificar que as hipóteses da Proposição 12 são satisfeitas. Em outros termos, a Proposição 12 corresponde precisamente ao caso de aplicabilidade do Teorema 5, em que é possível concluir a divergência da citada série porque seu termo geral não tende para zero. Notemos, igualmente, que a Proposição 12 resulta do corolário ao Teorema 4.

* * *

Bibliografia

1. BERNSTEIN, Leçons sur les propriétés extremales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle. Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions, Paris (1926).

2. CARLEMAN, Les fonctions quasi analytiques, Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions, Paris (1926).

3. GLIMM, A Stone-Weierstrass Theorem for C*-algebras, Annals of Mathematics, vol. 72 (1960).

4. HORVATH, Aproximación y funciones casi-analíticas, Universidad de Madrid, (1956).

5. MALLIAVIN, L'approximation polynomiale pondérée sur un espace localement compact, American Journal of Mathematics, vol. 81 (1959).

6. MANDELBROJT, General theorems of closure, The Rice Institute Pamphlet, Special Issue (1951).

7. MERGELYAN, Weighted approximation by polynomials, Uspehi Mathematiceskih Nauk (NS), vol. 11 (1956); American Mathematical Society Translations (Series 2), vol. 10 (1958).

8. NACHBIN, On the weighted polynomial approximation in a locally compact space, Proceedings of the National Academy of Sciences of U.S.A., vol. 47 (1961).

9. POLLARD, The Bernstein approximation problem, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 6 (1955).

10. SHOHAT-TAMARKIN, The problem of moments, American Mathematical Society Mathematical Surveys, New York (1943).

11. STONE, The generalized Weierstrass approximation theorem, Mathematics Magazine, vol. 21 (1948).

12. WERMER, Banach algebras and Analytic Functions, Advances in Mathematics, vol. 1, New York (1961).

* * *