

Tempa vojaĝo kaj geodezioj en ĝenerala relativeco Viagem no tempo e geodésicas em relatividade geral

Resumo

Ĉe la Ĝenerala Relativeco, en homogenaj metriko de Som-Raychaudhuri, ni studas geodeziojn de la tri tipoj: tempa, nula, kaj spaca, speciale la malmulte konatajn samtempajn. Ni ankaŭ studas ne-geodezian cirklan movadon kun konstanta rapido, speciale fermitajn kurbojn de tempa tipo, kaj movadon de vojaĝanto al estinto.

Na Relatividade Geral, na métrica homogênea de Som-Raychaudhuri, estudamos as geodésicas dos três tipos: tempo, nulo e espaço, em particular as pouco conhecidas de simultaneidade. Estudamos também movimento circular não geodético com velocidade constante, em particular curvas fechadas do tipo tempo, e movimento de viajante ao passado.

1 Enkonduko

Ĉu estas ebla, ke vojaĝanto revenas al deirpunkto en antaŭa momento? Teknike dirante, ĉu estas ebla kauza malobeo? Newtona mekaniko respondas *ne*, sed Ĝenerala Relativeco respondas *jes*. Ŝajnas ke Gödel [1] unue priskribis sistemon kun tio ebleco. Aliaj fizikaj sistemoj, nomitaj modeloj de Gödela tipo, estis poste studitaj. En ili, la materio povas reveni al estinto, sed havante kelkan ne-gravitacion akcelon. Tio estas, ĝia movado estus *ne-geodezia*.

Ĉi tiu artikolo studas geodeziajn kaj ne-geodeziajn movadojn en speciala modelo de Gödela tipo: la universo de Som-Raychaudhuri [2]. Ni priskribas la geodeziojn de la tri tipoj: tempa, nula, kaj spaca. El la spaca tipo, ni priskribas specialan okazon: la samtempajn geodeziojn, kiuj entenas nur samtempajn najbarajn eventojn en la elektitaj koordinatoj. Ni montras ke kauza malobeo ne estas, se la movado estas geodezia. Ni poste studas specialan klason de ne-geodezia movado, kaj prezentas movadojn kun reveno al estinto.

La linielemento de Som-Raychaudhuri estas skribita en la formo [2]

1 Introdução

Será possível que um viajante retorne ao ponto de partida em um momento anterior ao da partida? Em termos técnicos, será possível uma violação da causalidade? A mecânica Newtoniana responde *não*, mas a relatividade geral responde *sim*. Parece que Gödel [1] foi quem primeiro descreveu um sistema com essa possibilidade. Outros sistemas físicos, chamados modelos tipo Gödel, foram depois estudados. Neles, a matéria pode retornar ao passado, porém tendo alguma aceleração não-gravitacional. Isto é, seu movimento seria *não-geodético*.

Este artigo estuda movimentos geodéticos e não-geodéticos em um particular modelo tipo Gödel: o universo de Som-Raychaudhuri [2]. Descrevemos as geodésicas dos três tipos: tempo, nulo, e espaço. Dentre o tipo espaço, descrevemos um caso especial: as geodésicas de simultaneidade, que contêm somente eventos vizinhos simultâneos nas coordenadas escolhidas. Mostramos que não há violação de causalidade nos movimentos geodéticos. Estudamos então uma classe especial de movimentos não-geodéticos, e apresentamos movimentos de matéria com retorno ao passado.

O elemento de linha de Som-Raychaudhuri na é escrito na forma [2]

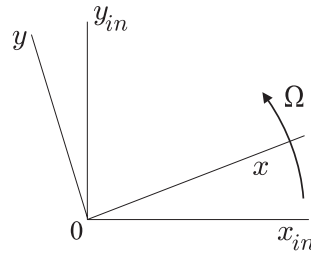
$$\epsilon(ds)^2 = [cdt - (\Omega r^2/c)d\varphi]^2 - (dr)^2 - r^2(d\varphi)^2 - (dz)^2, \quad (1)$$

kie $\epsilon = +1, 0, -1$ por intervaloj de tempa tipo, aŭ nula, aŭ spaca, respektive. Laŭ la ĝenerala relativeco, la materio rilata al tiu metriko estas elektra polvo, kun unuformaj masdenso kaj ŝargedenso. La polvo restas relative al la spaca teksaĵo, kaj la Lorentza forto en iu ŝargo estas nula.

Ĉar $g_{00} = 1$, la koordinathorloĝoj estas normhorloĝoj. La kinematika parametro de rotacio valoras Ω , kaj estas spactempe konstanta. Do najbare al origino la spaca teksaĵo $[r, \varphi, z]$ rotacias kun angula rapido $\Omega = \text{konst}$ ĉirkaŭ akso z , relative al inercia kompasoj. Ni supozas $\Omega > 0$, implicante rotacion de teksaĵo en malhora direkto, kiel figuro 1 montras. Tamen, tiu elekto ne implicas fizikan limigon.

onde $\epsilon = +1, 0, -1$ para intervalos tipo tempo, ou nulo, ou espaço, respectivamente. Segundo a relatividade geral, a matéria relacionada a esta métrica é poeira eletricamente carregada, com densidades de massa e de carga uniformes. A poeira está parada relativamente à trama espacial, e a força de Lorentz em cada carga é nula.

Como $g_{00} = 1$, os relógios de coordenada são relógios padrão. O parâmetro cinemático de rotação vale Ω , e é espaçotemporalmente constante. Então na vizinhança da origem a trama espacial $[r, \varphi, z]$ gira com velocidade angular $\Omega = \text{const}$ em torno do eixo z , relativamente a uma bússola de inércia. Nós supomos $\Omega > 0$, implicando rotação da trama no sentido anti-horário, como a figura 1 mostra. Entretanto, essa escolha não implica limitação física.



Figuro 1: Najbare la origino, la spaca teksaĵo de Som-Raychaudhuri $[x, y]$ rotacias kun angula rapido Ω relative al spaca teksaĵo $[x_{in}, y_{in}]$, en malhora direkto.

Figura 1: Na vizinhança da origem, a trama espacial de Som-Raychaudhuri $[x, y]$ roda com velocidade angular Ω relativamente a uma trama inercial $[x_{in}, y_{in}]$, no sentido anti-horário.

En la sekvanta sekcio ni komencas solvi geodeziajn ekvaciojn. En sekcio 3 ni studas la geodeziojn (helicaĵojn) de la tri tipoj, ĉirkaŭ la akso z , kaj en 4 la samtempajn geodeziojn (rektajn). En sekcio 5 ni studas cirklaĵojn movadojn de vojaĝanto al sia pasinto. Kaj en 6 ni konkludas kaj prezentas interesajn konsiderojn. Sekve ni difinas kelkajn utilajn kvantojn, kiuj estos detalataj en [4].

Distanco inter du najbaraj punktoj en spaca teksaĵo:

Na seção seguinte nós começamos a resolver as equações geodéticas. Na seção 3 estudamos as geodésicas (helicoidais) dos três tipos, em torno do eixo z , e na 4 as geodésicas (retilíneas) de simultaneidades. Na seção 5 estudamos movimentos circulares de um viajante ao seu passado. E na 6 concluímos e apresentamos considerações interessantes. A seguir nós definimos algumas quantidades úteis, que serão detalhadas em [4].

Distância entre dois pontos vizinhos na trama espacial:

$$dL := \sqrt{(g_{0i}g_{0j}/g_{00} - g_{ij})dx^i dx^j}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Atentu ke dL nuliĝas nur se la du punktoj koincidas.

Atente que dL é nula somente se os dois pontos coincidem.

Intertempo de evento x^μ al evento $x^\mu + dx^\mu$:

Intertempo do evento x^μ para o evento $x^\mu + dx^\mu$:

$$dT := g_{0\mu} dx^\mu / (c\sqrt{g_{00}}). \quad (3)$$

Se la intervalo dx^μ estas de tempa tipo (aŭ nula), kaj se dT estas positiva, tiuokaze objekto (aŭ lumo) povas iri de x^μ al $x^\mu + dx^\mu$. Se tamen dT estas malpozitiva, la movado de objekto (aŭ lumo) estos de $x^\mu + dx^\mu$ al x^μ . Se dx^μ estas spaca, dT indikas la tempan ordon de eventoj por inercia observanto fiksata en la spaca teksaĵo en x^μ .

Ni faru rimarkon pri propra intertempo. Atentu ke $(ds)^2$ estas difinata per linielemento (1), sed la signumo de ds ne estas fiksata. Por $ds \neq 0$, ni interkonsentas

Se o intervalo dx^μ for tipo tempo (ou nulo), e se dT for positivo, então um objeto (ou luz) pode ir do evento x^μ para o evento $x^\mu + dx^\mu$. Se porém dT for negativo, o movimento do objeto (ou luz) será do evento $x^\mu + dx^\mu$ para o evento x^μ . Se dx^μ for tipo espaço, então dT indica a ordem temporal dos eventos para um observador inercial fixado na trama espacial em x^μ .

Façamos uma nota sobre intervalo de tempo próprio. Atente que $(ds)^2$ está definido pelo elemento de linha (1), porém o sinal de ds não está fixado. Para $ds \neq 0$, nós convencionamos

$$dT/ds \geq 0. \quad (4)$$

Speciale, en movadoj de tempa tipo $(ds)/c$ estas la intervalo $d\tau$ de pasita propratempo, do s pligrandiĝas dum la movado.

Rapido inter x^μ kaj $x^\mu + dx^\mu$:

Em particular, nos movimentos tipo tempo $(ds)/c$ é o intervalo $d\tau$ de tempo próprio decorrido, portanto s aumenta durante o movimento.

Velocidade entre x^μ e $x^\mu + dx^\mu$:

$$V := dL/|dT|. \quad (5)$$

Oni konstatas ke $V < c$ se kaj nur se dx^μ estas de tempa tipo.

Difinoj (2) kaj (3) implicas

Constata-se que $V < c$ se e somente se dx^μ for tipo tempo.

As definições (2) e (3) implicam

$$\epsilon(ds)^2 = (cdT)^2 - (dL)^2, \quad (6)$$

same kiel en speciala relativeco. Do dT , dL kaj V estas, respektive, intertempo, distanco kaj rapido, rilataj al movado de objekto (se $V < c$), en inercia referencsistemo restanta relative al la spaca teksaĵo, en evento x^μ ; alivorte, inercia referencsistemo fiksata al spaca teksaĵo en tiu punkto kaj en tiu momento.

Por la metriko de Som-Raychaudhuri, la distanco kaj la intertempo estas

exatamente como na relatividade especial. Então dT , dL e V são respectivamente intervalo de tempo, distância e velocidade relacionados ao movimento de um objeto (se $V < c$), em um referencial inercial parado relativamente à trama espacial, no evento x^μ ; em outras palavras, um referencial inercial fixado na trama espacial nesse ponto e nesse instante.

Para a métrica de Som-Raychaudhuri, a distância e o intertempo são

$$dL = \sqrt{(dr)^2 + (rd\varphi)^2 + (dz)^2}, \quad dT = dt - (\Omega r^2/c^2)d\varphi. \quad (7)$$

2 Ekvacioj de geodezioj

Linielemento (1) ne pendas de t, φ, z . Do la respondaj kovariantaj komponoj de la kvarrapido $u^\mu := dx^\mu/ds$ estas konstantaj, en geodezia movado: $u_0 = \eta$, $u_\varphi = -\beta$, $u_z = -\zeta$. Uzante $u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu$, rezultiĝas

$$\eta = cdt/ds - (\Omega r^2/c)d\varphi/ds, \quad (8)$$

$$-\beta = (-\Omega r^2/c)(cdt/ds) - (r^2 - \Omega^2 r^4/c^2)d\varphi/ds, \quad (9)$$

$$-\zeta = -dz/ds. \quad (10)$$

Atentu ke (7b) kaj (8) implicas

$$\eta = cdT/ds. \quad (11)$$

Pro konvencio (4), ĉiam $\eta \geq 0$.

Per rearanĝoj en (8)–(10), okazas

$$cdt/ds = \beta\Omega/c + \eta(1 - \Omega^2 r^2/c^2), \quad (12)$$

$$d\varphi/ds = \beta/r^2 - \eta\Omega/c, \quad (13)$$

$$dz/ds = \zeta. \quad (14)$$

Por havi dr/ds , ni metas (12)–(14) en linielemento (1), ricevante

$$(dr/ds)^2 = \mu^2 - r^2 \left(\frac{\beta}{r^2} - \frac{\eta\Omega}{c} \right)^2, \quad \mu := \sqrt{\eta^2 - \zeta^2 - \epsilon}. \quad (15)$$

Ĉar $\mu^2 = (dr/ds)^2 + r^2(d\varphi/ds)^2$, μ estas nula nur en movado paralela al la akso z .

Nun ni komencu integri (12)–(15). Unue ni kombinas (13) kun (15), ricevante

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \mu^2 \left(\frac{\beta}{r^2} - \frac{\eta\Omega}{c} \right)^{-2} - r^2. \quad (16)$$

La solvoj de (16) estas cirkloj,

$$r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi_0) = \rho^2, \quad \rho := \frac{c\mu}{2\eta\Omega}, \quad a := \sqrt{\rho^2 + \frac{c\beta}{\eta\Omega}}, \quad (17)$$

kie a kaj φ_0 estas respektive radiusa kaj angula pozicio de la cirkla centro, kaj ρ es-

2 Equações das geodésicas

O elemento de linha (1) independe de t, φ, z . Então as correspondentes componentes covariantes da quadri-velocidade $u^\mu := dx^\mu/ds$ são constantes, em um movimento geodético: $u_0 = \eta$, $u_\varphi = -\beta$, $u_z = -\zeta$. Usando $u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu$, resultam

Atente que (7b) e (8) implicam

Devido à convenção (4), sempre $\eta \geq 0$.

Mediante rearranjos em (8)–(10), ocorrem

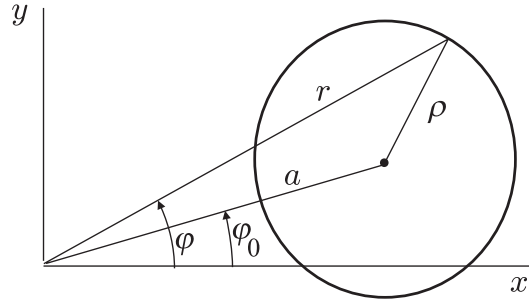
Para termos dr/ds , nós inserimos (12)–(14) no elemento de linha (1), obtendo

Como $\mu^2 = (dr/ds)^2 + r^2(d\varphi/ds)^2$, μ é nulo somente nos movimentos paralelos ao eixo z .

Vamos começar a integrar (12)–(15). Primeiro combinamos (13) com (15), obtendo

As soluções da (16) são círculos,

onde a e φ_0 são respectivamente as posições radial e angular do centro do círculo, e ρ é o raio,



Figuro 2: La cirklo (17) por okazo $a > \rho$. La cirklo estas orta projekcio de geodezia trajektorio, en ebena $z = \text{konst}$.

Figura 2: O círculo (17) para o caso $a > \rho$. Ele é a projeção ortogonal de trajetória geodética em um plano $z = \text{const}$.

tas la radiuso, kiel figuro 2 montras. Ĉar μ en (15b) ne pendas de β , ankaŭ la radiuso ρ ne pendas.

Do ĉiu geodezia trajektorio estas desegnata en cirkla cilindro kun radiuso ρ kaj akso paralela al akso z , je distanco a . Tio estas montrata en figuro 2 por $a > \rho$, ekvivalente $\beta > 0$. Figuro 3 montras aliajn okazojn, por kelkaj valoroj de β . Se $\beta = 0$, tial $a = \rho$, kaj la trajektorio krucas la akson z . Se $\beta < 0$, la cilindro cirkaŭas la akson. En speciala okazo $\beta = -c\mu^2/(4\eta\Omega)$, okazas $a = 0$, tio estas, la akso de cilindro estas la akso z .

Oni konstatas ke la kalkuloj de geodezioj kun $a = 0$ estas tre simplaj. Ili estas faritaj en la sekvanta sekcio. Ĉar [7] montris ke la linelemento (1) estas spactempe homogena, ni povas forkonduki geodeziojn kun $a = 0$ al iu regiono de spactempo. Sekcio 4 studos malkune la interesan okazon $a \rightarrow \infty$.

3 Geodezio kun $a = 0$

Substituante $a = 0$, $r = \rho = \text{konst}$, kaj $\beta = -c\mu^2/(4\eta\Omega)$ en (12)–(14), ni ricevas

$$\frac{cdt}{ds} = \frac{\eta^2 + \zeta^2 + \epsilon}{2\eta}, \quad \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{2\eta\Omega}{c}, \quad \frac{dz}{ds} = \zeta. \quad (18)$$

Ĉar la kvociento $dz/d\varphi$ estas konstanta, ni konstatas ke la paŝo de la cirkla helica tra-

como a figura 2 mostra. Como μ na (15b) não depende de β , tampouco o raio ρ depende.

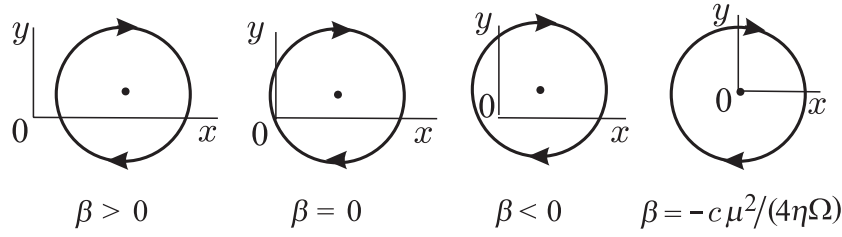
Então toda trajetória geodética está desenhada em um cilindro circular com raio ρ e eixo paralelo ao eixo z , a uma distância a . Isso está mostrado na figura 2 para $a > \rho$, equivalentemente $\beta > 0$. A figura 3 mostra outros casos, para alguns valores de β . Se $\beta = 0$, então $a = \rho$, e a trajetória cruza o eixo z . Se $\beta < 0$, o cilindro circunda o eixo. No caso especial $\beta = -c\mu^2/(4\eta\Omega)$, ocorre $a = 0$, ou seja, o eixo do cilindro é o eixo z .

Constata-se que os cálculos de geodésicas com $a = 0$ são muito simples. Eles estão feitos na seção seguinte. Como [7] mostrou que o elemento de linha (1) é espaçotemporalmente homogêneo, nós podemos transportar as geodésicas com $a = 0$ para qualquer região do espaçotempo. A seção 4 estudará separadamente o interessante caso $a \rightarrow \infty$.

3 Geodésica com $a = 0$

Substituindo $a = 0$, $r = \rho = \text{konst}$, e $\beta = -c\mu^2/(4\eta\Omega)$ em (12)–(14), obtemos

Como o cociente $dz/d\varphi$ é constante, nós tratamos que o passo da trajetória helicóide cir-



Figuro 3: Orta sekcio de cirkla cilindro subtenante geodezian trajektorion. La pozicio de la cilindra akso relative al akso z (origino 0) pendas de β . Sago indikas direkton de pligrandiĝo de T en geodezio.

Figura 3: Seção reta de cilindro circular que suporte uma trajetória geodética. A posição do eixo do cilindro com relação ao eixo z (a origem 0) depende de β . A flecha indica o sentido do aumento de T na geodésica.

jektorio estas konstanta.

Ĉar la direkto de Ω estas malhora, la malpozitiva signumo en (18b) implicas ke la geodezia parametro s pligrandiĝas en la hora direkto. Do (4) diras ke la tempa parametro T ankaŭ pligrandiĝas en la hora direkto. Tio estas jam indikita en figuro 3.

Ni integras (18b) farante φ variu de 0 al -2π kaj ricevas Δs , la pligrandiĝon de s dum unu kompleta helicero. Poste, uzante (18a) kaj (18c) ni ricevas Δt kaj Δz akumulitaj en unu helicero:

$$\Delta\varphi = -2\pi, \quad \Delta s = \frac{\pi c}{\eta\Omega}, \quad \Delta t = \frac{\pi}{2\Omega} \left(1 + \frac{\epsilon + \zeta^2}{\eta^2} \right), \quad \Delta z = \frac{\pi\zeta c}{\eta\Omega}. \quad (19)$$

Por kompleti la priskribon de ĉi tiuj geodezioj, ni uzas (17b) por ricevi la radiuson de la cirkla helico,

$$\rho = \frac{c}{2\Omega} \sqrt{1 - \frac{\epsilon + \zeta^2}{\eta^2}}. \quad (20)$$

Por prezenti pli klaran priskribon, ni substituas parametrojn η kaj ζ kun aliaj pli familiaraj. Uzante (6) kaj (11) ni ricevas la rapidon V difinita en (5) kiel funkcio de η , kaj ĝian inverson, montritan en figuro 4:

$$V/c = \sqrt{1 - \epsilon/\eta^2}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{\epsilon(1 - V^2/c^2)}}; \quad (21)$$

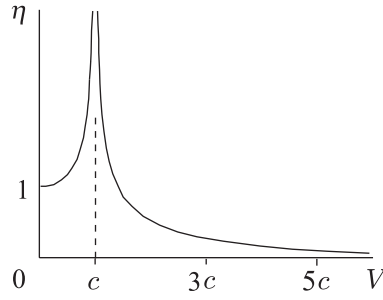
cular é constante.

Como o sentido de Ω é anti-horário, o sinal negativo na (18b) implica que o parâmetro geodético s aumenta no sentido horário. Então a (4) diz que também o parâmetro temporal T aumenta no sentido horário. Isso já fora indicado na figura 3.

Nós integramos a (18b) fazendo φ variar desde 0 até -2π e obtemos Δs , o aumento de s durante uma espira completa. Depois, usando (18a) e (18c) nós obtemos Δt e Δz acumulados em uma espira:

Para completar a descrição destas geodésicas, nós usamos (17b) para obter o raio da hélice circular,

Para apresentarmos uma descrição mais clara, nós substituímos os parâmetros η e ζ por outros mais familiares. Usando (6) e (11) nós obtemos a velocidade V definida em (5) em função de η , e sua inversa, mostrada na figura 4:



Figuro 4: Rilato (21) inter parametroj η kaj V .

Figura 4: Relação (21) entre os parâmetros η e V .

atentu ke V estas konstanta.

Ni uzas ankaŭ la angulon $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, ke la orientita trajektorio faras kun ebenoj $z = \text{konst}$:

atente que V é constante.

Nós usamos também o ângulo $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, que a trajetória orientada faz com os planos $z = \text{const}$:

$$\tan \alpha := dz / \sqrt{(dr)^2 + (r d\varphi)^2}. \quad (22)$$

Ĉar ĉi tie $r = \text{konst}$, tial $\tan \alpha := dz / |\rho d\varphi|$. Uzante geodeziajn ekvaciojn (18b,c), kaj (20)–(22), ni ricevas

Como aqui $r = \text{const}$, então $\tan \alpha := dz / |\rho d\varphi|$. Usando as equações geodéticas (18b,c), e (20)–(22), obtemos

$$\zeta = \frac{\eta V}{c} \sin \alpha. \quad (23)$$

Do, uzante parametroj V kaj α , la varioj (19) en unu kompleta helicero kaj la radiuso (20) reskribiĝas

Assim, usando os parâmetros V e α , as variações (19) em uma espira completa e o raio (20) se reescrevem

$$\Delta\varphi = -2\pi, \quad \Delta s = \frac{\pi c}{\Omega} \sqrt{\epsilon(1 - V^2/c^2)}, \quad \Delta t = \frac{\pi}{\Omega} (1 - \frac{V^2}{2c^2} \cos^2 \alpha), \quad \Delta z = \frac{\pi V}{\Omega} \sin \alpha, \quad (24)$$

$$\rho = \frac{V}{2\Omega} \cos \alpha. \quad (25)$$

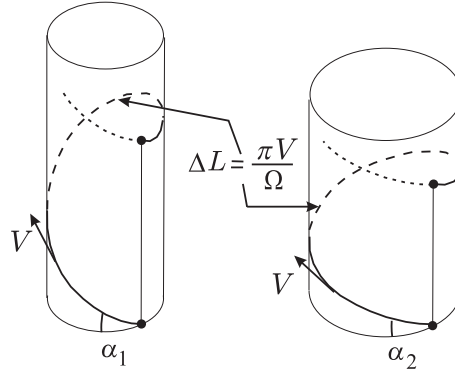
Ekvacioj (25) kaj (24d) diras ke la radiuso ρ kaj la paŝo $|\Delta z|$ de helico pendas lineare de la konstanta rapido V ; sed ρ plietiĝas se $|\alpha|$ pligrandiĝas, kvankam $|\Delta z|$ pligrandiĝas. Integrate (7a) por unu kompleta helicero, uzante ekvaciojn (18) de geodezioj kaj (23) kaj (25), ni ricevas

As equações (25) e (24d) dizem que o raio ρ e o passo $|\Delta z|$ da hélice dependem linearmente da velocidade constante V ; mas ρ diminui com $|\alpha|$, enquanto que $|\Delta z|$ aumenta. Integrando (7a) para uma espira completa, utilizando as equações (18) das geodésicas e (23) e (25), nós obtemos

$$\Delta L = \frac{\pi V}{\Omega}, \quad (26)$$

montrante ke la longo de helicerio ne pendas de la klino α . Do trajektorio similas risorton. Fakte, premante risorton, la paŝo $|\Delta z|$ plietigās proporcie al pligrandiĝo de radiuso ρ . Tio permesas facile konstrui geodeziajn trajektoriojn kun sama proporcio V/Ω , kiel figuro 5 montras.

mostrando que o comprimento de uma espira não depende da inclinação α . Então uma trajetória se assemelha a uma mola. De fato, comprimindo-se uma mola, o passo $|\Delta z|$ diminui proporcionalmente ao aumento do raio ρ . Isso permite facilmente construir trajetórias geodéticas com mesma razão V/Ω , como a figura 5 mostra.



Figuro 5: Heliceroj kun sama proporcio V/Ω havas la saman longon.

Figura 5: Espiras com mesma razão V/Ω têm o mesmo comprimento.

Ni kalkuku ankaŭ la intertempon $|\Delta T|$ okazantan en helicerio. Ĉar V estas konstanta, tial $|\Delta T| = \Delta L/V$, tio estas,

Vamos calcular também o intertempo $|\Delta T|$ ocorrido em uma espira. Como V é constante, então $|\Delta T| = \Delta L/V$, isto é,

$$|\Delta T| = \frac{\pi}{\Omega}. \tag{27}$$

Ni konstatas ke $|\Delta T|$ pendas nek de V nek de α . Vere, $|\Delta T|$ valoras la duonon de la periodo $2\pi/\Omega$ de loka rotacio de spaca teksaĵo relative al la inercia kompasoj.

Constatamos que $|\Delta T|$ não depende nem de V nem de α . Na verdade, $|\Delta T|$ vale a metade do período $2\pi/\Omega$ da rotação local da trama espacial com relação à bússola de inércia.

En la tri sekvantaj subsekcioj, ni konsideras malkune geodeziojn de tempa tipo, nula tipo, kaj spaca tipo.

Nas três subseções seguintes, nós consideramos separadamente as geodésicas tipo tempo, tipo nulo, e tipo espaço.

3.1 Geodezio de tempa tipo

3.1 Geodésica tipo tempo

Ek. (25) montras ke la radiuso ρ de helico estas proporcia al rapido V , kaj ρ plietigās se la klino α pligrandiĝas. Plu, $\rho < c/(2\Omega)$. En ĉi tiu limo, la movado estas plana. Aliflanke, se la klino estas maksimuma ($|\alpha| = \pi/2$), do la radiuso ρ estas nula, kaj la movado okazas en akso z . Tiuokaze, se $\zeta = 0$ do $V = 0$, indikante objekton restantan en akso z . Kiel ni kla-

A equação (25) mostra que o raio ρ da hélice é linearmente proporcional à velocidade V , e diminui se a inclinação α cresce. Além disso, $\rho < c/(2\Omega)$. Neste limite o movimento é plano. Por outro lado, se a inclinação for máxima ($|\alpha| = \pi/2$), então o raio ρ é nulo e o movimento ocorre no eixo z . Neste caso, se $\zeta = 0$ então $V = 0$, indicando um objeto parado no eixo z . Conforme nós esclarecemos na seção 2, nós podemos

rigis en sekcio 2, ni povas forkonduki ĉi tiun geodezion al iu regiono de spacotempo, do konstruante la geodeziojn de la polvo generanta graviton.

Ek. (24c) montras ke la intertempo Δt en unu kompleta helicero estas pozitiva, kaj valoras inter $\pi/(2\Omega)$ kaj π/Ω ; ĝi estas ju pli granda des malpli la rapido V estas granda, kaj des pli la trajektorio estas vertikala. Ni konstatas ke (24c) malpermesas kaŭzan malobeon en geodezioj de tempa tipo kaj nula tipo; ili ĉiam havas $\Delta t > 0$.

En geodezioj de tempa tipo kun $r = \text{konst}$, (12) indikas ke dt/ds estas konstanta. Sed en geodezioj kun $r \neq \text{konst}$, dt/ds ne nur estas malkonstanta, sed estas malpozitiva en regionoj kun r sufiĉe granda. Tio signifas ke vojaĝanto kun tiu movado renkontas valorojn de t sinsekve plietaj en tiuj regionoj. Tamen, en unu kompleta helicero, la pozitivaj kontribuoj de dt/ds en regionoj kun malgrandaj r superas tiujn malpozitivajn kontribuojn, okazante pozitivan rezulton por Δt .

La paŝo $|\Delta z|$ de helico en (24d) estas proporcia al la rapido V , kaj estas ju pli granda des pli la trajektorio estas vertikala; ĝia maksimuma valoro estas $\pi c/\Omega$.

La propra intertempo $\Delta\tau := (\Delta s)/c$ en unu kompleta helicero estas en (24b):

$$\Delta\tau = \frac{\pi}{\Omega} \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (28)$$

Ni konstatas ke $\Delta\tau$ ne pendas de la klino α . Ankaŭ ke, en unu kompleta helicero, la propra intertempo (28) estas plieta ol la intertempo (27). Efektive, $(c\Delta\tau)^2 = (c\Delta T)^2 - (\Delta L)^2$.

3.2 Nula geodezio

Se $V = c$, (24)–(27) simpliĝas al

$$\Delta t = \frac{\pi}{2\Omega}(1 + \sin^2 \alpha), \quad \Delta z = \frac{\pi c}{\Omega} \sin \alpha, \quad \rho = \frac{c}{2\Omega} \cos \alpha, \quad \Delta L = \frac{\pi c}{\Omega}, \quad |\Delta T| = \frac{\pi}{\Omega}. \quad (29)$$

Ni konstatas ke la konstanta radiuso (29c) de luma helico estas malgranda se la klino

transportar esta geodésica para qualquer região do espaçotempo, assim construindo as geodésicas da poeira geradora da gravitação.

A equação (24c) mostra que o intertempo de coordenada Δt em uma espira completa é sempre positivo, e vale entre $\pi/(2\Omega)$ e π/Ω ; ele é tanto maior quanto menor for a velocidade V , e quanto mais vertical for a trajetória. Nós constatamos que (24c) não permite violação da causalidade nas geodésicas tipo tempo e tipo nulo: elas sempre têm $\Delta t > 0$.

Nas geodésicas tipo tempo com $r = \text{const}$, a (12) indica que dt/ds é constante. Porém nas geodésicas com $r \neq \text{const}$, dt/ds não somente é variável, como é negativo nas regiões com r suficientemente grande. Isso significa que um viajante com esse movimento encontra valores de t sucessivamente menores nessas regiões. Entretanto, em uma espira completa, as contribuições positivas de dt/ds nas regiões com r menores superam aquelas contribuições negativas com r maiores, ocasionando um resultado positivo para Δt .

O passo $|\Delta z|$ da hélice na (24d) é linearmente proporcional à velocidade V , e é tanto maior quanto mais vertical for a trajetória; seu máximo valor é $\pi c/\Omega$.

O intertempo próprio $\Delta\tau := (\Delta s)/c$ em uma espira completa está na (24b):

Nós constatamos que $\Delta\tau$ não depende da inclinação α . Também que, em uma espira completa, o intertempo próprio (28) é menor que o intertempo (27). Efetivamente, $(c\Delta\tau)^2 = (c\Delta T)^2 - (\Delta L)^2$.

3.2 Geodésica nula

Se $V = c$, (24)–(27) se simplificam para

$$\Delta t = \frac{\pi}{2\Omega}(1 + \sin^2 \alpha), \quad \Delta z = \frac{\pi c}{\Omega} \sin \alpha, \quad \rho = \frac{c}{2\Omega} \cos \alpha, \quad \Delta L = \frac{\pi c}{\Omega}, \quad |\Delta T| = \frac{\pi}{\Omega}. \quad (29)$$

Nós constatamos que o raio constante (29c) da hélice de luz é pequeno se a inclinação $|\alpha|$ for

$|\alpha|$ estas granda. Speciale, se $|\alpha| = \pi/2$, tial $\rho = 0$, kaj la movado de lumo estas en akso z . Aliflanke, la maksimuma diametro de helico estas $2\rho = c/\Omega$, okazanta se la movado estas plana. Do la horizonto de eventoj por iu observanto estas cilindra surfaco kun radiuso c/Ω , kies akso estas paralela al akso z kaj krucas la observanto [7].

Ekvacioj (29d) kaj (29e) prezentas la longon de luma helicero, kaj la intertempo por trakuri ĝin. Fine, (29a) montras ke en nulaj geodezioj ankaŭ ne estas kauza malobeo.

3.3 Geodezio de spaca tipo

Simile kiel en tempa kaj nula tipoj, la helica movadoj de spaca tipo povas iĝi rektaj, en akso z . Aliflanke, ne estas limesa supremo por radiuso ρ , kiu estas proporcia al rapido V . Ekvacioj (24) kaj (25) permesas spactempe fermitajn geodeziojn ($\Delta t = 0$). Ili ankaŭ permesas $\Delta t < 0$, sed tio ne implicas kauan malobeon, ĉar kurbo de spaca tipo ne respondas al movado de materio nek de lumo.

La propra longo $\Delta\lambda := \Delta s$ de helicero de spaca tipo estas en (24b), kun $\epsilon = -1$:

$$\Delta\lambda = \frac{\pi c}{\Omega} \sqrt{V^2/c^2 - 1}. \quad (30)$$

Tiu $\Delta\lambda$ estas plieta ol la longo $\Delta L = \pi V/\Omega$ de helicero. Efektive, $(\Delta\lambda)^2 = (\Delta L)^2 - (c\Delta T)^2$.

4 Samtempa geodezio

Samtempa geodezio en elektata molusko estas geodezio de spaca tipo ($\epsilon = -1$) kies infinitezimaj intervaloj dx^μ havas intertempo dT nulan [3, 4], do rapido $V \rightarrow \infty$. Atentante (8) oni vidas ke $\eta \rightarrow 0$, kaj $V\eta/c \rightarrow 1$, kaj do (17) implicas radiuson $\rho \rightarrow \infty$ kaj distancon $a \rightarrow \infty$. Tamen, la troaĵo $|a - \rho|$ povas esti limhava, kiel ni supozas en ĉi tiu sekcio.

grande. Em particular, se $|\alpha| = \pi/2$, então $\rho = 0$, e o movimento da luz ocorre no eixo z . Por outro lado, o máximo diâmetro de uma hélice é $2\rho = c/\Omega$, ocorrente se o movimento for plano. Portanto o horizonte de eventos para qualquer observador é uma superfície cilíndrica com raio c/Ω , cujo eixo é paralelo ao eixo z e passa pelo observador [7].

As equações (29d) e (29e) apresentam o comprimento de uma espira de luz, e o intertempo para percorrê-la. Finalmente, (29a) mostra que tampouco nas geodésicas nulas há violação de causalidade.

3.3 Geodésica tipo espaço

Como nos tipos tempo e nulo, os movimentos helicoidais do tipo espaço podem tornar-se retos, no eixo z . Por outro lado, não há limite superior para o raio ρ , que é linearmente proporcional à velocidade V . As equações (24) e (25) permitem geodésicas espaçotemporalmente fechadas ($\Delta t = 0$). Elas permitem também $\Delta t < 0$, porém isso não constitui violação de causalidade, pois uma curva tipo espaço não corresponde a movimento de matéria nem de luz.

O comprimento próprio $\Delta\lambda := \Delta s$ de uma espira tipo espaço está na (24b), com $\epsilon = -1$:

Esse $\Delta\lambda$ é menor que o comprimento $\Delta L = \pi V/\Omega$ da espira. Efetivamente, $(\Delta\lambda)^2 = (\Delta L)^2 - (c\Delta T)^2$.

4 Geodésica de simultaneidades

Geodésica de simultaneidades em um molusco escolhido é uma geodésica do tipo espaço ($\epsilon = -1$) cujos intervalos infinitesimais dx^μ têm intertempo dT nulo [3, 4], e portanto velocidade $V \rightarrow \infty$. Atentando (8) se vê que $\eta \rightarrow 0$, e $V\eta/c \rightarrow 1$, e portanto (17) implicam raio $\rho \rightarrow \infty$ e distância $a \rightarrow \infty$. Entretanto, a diferença $|a - \rho|$ pode ser finita, como nós vamos supor nesta seção.

Ĉar $a \neq 0$, la rezultoj de sekcio 3 ne validas ĉi tie. Do ni reiras al sekcio 2. Uzante difinon de α en (22), kaj uzante (13)–(15), ni ricevas $\zeta = \sin \alpha$ kaj $\mu = \cos \alpha$. Do ni difinas

Como $a \neq 0$, os resultados da seção 3 não valem aqui. Então retornamos à seção 2. Usando a definição de α em (22), e usando (13)–(15), nós obtemos $\zeta = \sin \alpha$ e $\mu = \cos \alpha$. Então nós definimos

$$D := \beta / \cos \alpha, \quad (31)$$

kaj reskribas (12)–(15) kiel

e reescrevemos (12)–(15) como

$$\frac{dt}{ds} = \frac{D\Omega}{c^2} \cos \alpha, \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{D}{r^2} \cos \alpha, \quad \frac{dz}{ds} = \sin \alpha, \quad \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = (1 - D^2/r^2) \cos^2 \alpha. \quad (32)$$

Ĉar $dT = 0$ en (6) implicas $|ds| = dL$, ekvacioj (32b,c,d) estas la bonkonataj ekvacioj de rekto en trispaco.

Como $dT = 0$ na (6) implica $|ds| = dL$, as equações (32b,c,d) são as bem conhecidas equações de uma reta no trispaco.

Fakte, ni kombinas (32b) kun (32d):

De fato, combinamos (32b) e (32d):

$$(d\varphi/dr)^2 = \frac{1}{r^2(r^2/D^2 - 1)}, \quad (33)$$

kies solvo estas

cujna solução é

$$r \cos(\varphi - \varphi_0) = D, \quad \varphi_0 = \text{const}. \quad (34)$$

Kiel figuro 6 montras, tiu solvo estas rekto kies distanco al akso z estas $|D|$. Tiu rekto estas projekcio de geodezia trajektorio en ebenoj $z = \text{konst}$.

Como a figura 6 mostra, essa solução é uma reta cuja distância ao eixo z é $|D|$. Essa reta é a projeção da trajetória geodética em planos $z = \text{const}$.

Ekvacio (32a) informas ke la vario de tempa koordinato t laŭlonge la trajektorio okazas unuforme. Kaj informas ke en movadoj paralelaj al akso z (tiuokaze $\alpha = \pm\pi/2$) la legaĵoj de t ne varias. Fine, komparante (32a) kun (32b), ni konstatas ke $d\varphi/dt > 0$.

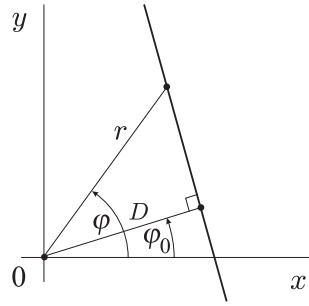
A equação (32a) informa que a variação da coordenada temporal t ao longo da trajetória ocorre de modo uniforme. E informa que nos movimentos paralelos ao eixo z (caso em que $\alpha = \pm\pi/2$) as leituras de t não variam. Finalmente, comparando (32a) com (32b), constatamos que $d\varphi/dt > 0$.

5 Reveno al estinto

Ni montris ke fermitaj trajektorioj de geodezioj de (1) estas cirkloj, kaj montris ke la direkto de movado estas mala al Ω , tio estas, ĝi estas hora. Ni montris ankaŭ ke neniuj geodezioj de tempa kaj nula tipo malobeas kauzecon. Nun ni montros ke (1) permesas vojaĝanton en ne-geodezia

5 Volta ao passado

Nós mostramos que as trajetórias fechadas das geodésicas da (1) são círculos, e que o sentido do movimento é oposto a Ω , ou seja, é horário. Mostramos também que nenhuma geodésica tipo tempo ou nulo permite violar a causalidade. Agora nós vamos mostrar que (1) permite viajante em movimento não-geodético violando a



Figuro 6: Rekto (34); ĝi estas projekcio, en ebena $z = \text{konst}$, de arko de cirkla helico kun nefinia radiuso.

Figura 6: A reta (34); ela é projeção, em plano $z = \text{const}$, de um arco de hélice circular com raio infinito.

movado, neobeante kauzecon. Pro matematika simpleco, ni konsideras nur cirklaajn movadojn en ebena $z = \text{konst}$, kun centro en akso z kaj rapido V konstanta.

Unue ni malkovru la direkton (horan aŭ malhoran) de movado de vojaĝanto. Por tio, sufiĉas konsideri ekvaciojn

causalidade. Por simplicidade matemática, vamos considerar somente movimentos circulares em plano $z = \text{konst}$, com centro no eixo z e velocidade V constante.

Primeiramente vamos descobrir o sentido (horário ou anti-horário) do movimento do viajante. Para isso, basta considerarmos as equações

$$V = r|d\varphi/dT|, \quad (5)$$

$$1 = dt/dT - (\Omega r^2/c^2) d\varphi/dT. \quad (7b)$$

Kun r kaj V konstantaj, tiuj ekvacioj implicas konstantecon de $d\varphi/dT$ kaj dt/dT . Rememoru ke kauza malobeo postulas ke la sumo Δt de infinitezimoj dt estu malpozitiva, en kompleta turno de vojaĝanto. Ĉar $\Delta t/\Delta T = dt/dT$, kaj ĉar $\Delta T > 0$, tial $dt/dT < 0$. Do (7b) implicas $d\varphi/dT < 0$. Do, inertia observanto fiksata en spaca teksaĵo, najbare la trajektorio, asertas ke la direkto de movado de vojaĝanto estas hora.

Nun ni malkovru la rilaton inter r kaj V por ke estu kaŭza malobeo. Por tio, sufiĉas postuli $dt/dT < 0$ kaj $V = -rd\varphi/dT$ en (7b); ni ricevas la kondiĉon por malobeo

Com r e V constantes, estas equações implicam a constância de $d\varphi/dT$ e dt/dT . Relembre que a violação da causalidade exige que a soma Δt dos infinitésimos dt seja negativa, em uma volta completa do viajante. Como $\Delta t/\Delta T = dt/dT$, e como $\Delta T > 0$, então $dt/dT < 0$. Portanto (7b) implica $d\varphi/dT < 0$. Assim, um observador inercial fixado na trama espacial, na vizinhança da trajetória, afirma que o sentido do movimento do viajante é horário.

Vamos agora descobrir a relação entre r e V para que haja violação de causalidade. Para isso, basta exigir $dt/dT < 0$ e $V = -rd\varphi/dT$ em (7b); obtemos a condição para violação

$$Vr > c^2/\Omega. \quad (35)$$

Ni kalkulu Δt , la varion de koordinata tempo en unu kompleta turno. Ĝi estas

Vamos calcular Δt , a variação do tempo coordenada em uma volta completa. Ela é

$$\Delta t = \frac{2\pi r}{V} \left(1 - \frac{\Omega r V}{c^2} \right), \quad (36)$$

ke klare estas negativa se kaŭzeco estas malobeata, vidu (35).

Ni kalkulu ankaŭ la propra intertempo $\Delta\tau$ de vojaĝanto, en unu kompleta turno. Ĉar $\Delta\tau = \Delta T\sqrt{1 - V^2/c^2}$, kaj ĉar $\Delta T = 2\pi r/V$, tial

$$\Delta\tau = \frac{2\pi r}{V}\sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (37)$$

Tiu rezulto koincidas kun tio de speciala relativeco.

6 Konkludo

Ĉar la modelo de Som-Raychaudhuri estas homogena, izometra transformo forkondukas geodezion, de iu regiono de spacotempo al iu ajn regiono [8]. Speciale, rezultoj pri dL , dT kaj V estas nevariantaj per tiu forkonduko. Do, per simpla kalkulo, ni konstatis ke ĉiu geodezia trajektorio estas cirkla helico kun konstanta paŝo, kaj akso paralela al akso z . Ni konstatis ankaŭ ke la rapido V de movado estas konstanta, je direkto mala al Ω ; ĉar ni elektis $\Omega > 0$, tial la geodezia movado estas hora. La radiuso ρ de helico, la rapido V , kaj la angulo α de klino de geodezia trajektorio rilatas per (25), t.e. $\rho = (V/2\Omega)\cos\alpha$; tiu rilato klare postulas ekzisti maksimuma radiuso por geodezioj de tempa tipo.

Interesaj specialaj okazoj de helico estas: 1) Rekto en iu direkto, kaj nefinia rapido; ili estas la samtempaj geodezioj; 2) Rekto paralela al akso z , kun finia rapido; 3) Cirklo en ebena $z = \text{const}$; tiukaze $\rho = V/(2\Omega)$. En ĉi tiu lasta okazo (cirklo), estas la eblecoj: 1) $\rho = 0$, por geodezio de tempa tipo de restanta objekto, kiel la polvo de modelo; 2) $\rho < c/(2\Omega)$, por geodezio de tempa tipo; 3) $\rho = c/(2\Omega)$, por nula geodezio, tio estas, movado de lumo; 4) $\rho > c/(2\Omega)$, por geodezio de spaca tipo; 5) $\rho \rightarrow \infty$, por samtempa geodezio.

Ni montris ke geodezioj de (1) obeas

ke klare estas negativa se la causalidade forviolada, veja (35).

Vamos calcular também o intertempo próprio $\Delta\tau$ do viajante, em uma volta completa. Como $\Delta\tau = \Delta T\sqrt{1 - V^2/c^2}$, e como $\Delta T = 2\pi r/V$, então

Este resultado coincide com o da relatividade especial.

6 Conclusão

Como o modelo de Som-Raychaudhuri é homogêneo, uma transformação de isometria transporta uma geodésica, de alguma região do spacotempo para qualquer outra região [8]. Em particular, resultados sobre dL , dT e V são invariantes sob esse transporte. Assim, mediante um cálculo simples, constatamos que toda trajetória geodética é uma hélice circular com passo constante, e eixo paralelo ao eixo z . Constatamos também que a velocidade V do movimento é constante, no sentido contrário ao de Ω ; como escolhemos $\Omega > 0$, então o movimento geodético é horário. O raio ρ da hélice, a velocidade V e o ângulo α de inclinação da trajetória geodética relacionam-se por (25), isto é $\rho = (V/2\Omega)\cos\alpha$; essa relação claramente impõe existir um raio máximo para geodésicas tipo tempo.

Casos particulares interessantes da hélice são: 1) Reta em qualquer direção, e velocidade infinita; são as geodésicas de simultaneidades; 2) Reta paralela ao eixo z , com velocidade finita; 3) Círculo em plano $z = \text{const}$; neste caso $\rho = V/(2\Omega)$. Neste último caso (círculo) há as possibilidades: 1) $\rho = 0$, para geodésica tipo tempo de objeto parado, como a poeira primordial do modelo; 2) $\rho < c/(2\Omega)$, para geodésica tipo tempo; 3) $\rho = c/(2\Omega)$, para geodésica nula, isto é, movimento de luz; 4) $\rho > c/(2\Omega)$, para geodésica tipo espaço; 5) $\rho \rightarrow \infty$, para geodésica de simultaneidades.

Nós mostrámos que geodésicas da (1) não

kaŭzecon. Sed estas bonkonata[7] ke estas movadoj de akcelata materio kiuj neobeas. Serĉante tial movadojn, ni studis cirklon en ebena $z = \text{konst.}$ Ni montris ke nur movadoj kun hora direkto kaj $\rho > c^2/(V\Omega)$ malobeas kaŭzecon. Ĉi tiu minimuma radiuso estas la duoblo de maksimuma radiuso, $c/(2\Omega)$, por geodezio de tempa tipo.

Estas tre diskutita, akcepti modelon de universo permesanta vojaĝanto reveni al estinto. Meze de konsekvencoj de kaŭza malobeo, estas la perdo de libera volo. Estas ankaŭ malaj konkludoj, kiel tio rilata al direkto de movado. Fakte, vojaĝanto en *tournée* de reveno al estinto perceptas ke sia angula pozicio φ plietiĝas laŭ sia propratempo τ pligrandiĝas ($d\varphi/d\tau < 0$). Do, li asertas ke la direkto de sia movado estas hora. Ankaŭ inercia observanto fiksata en spaca teksaĵo, en punkto najbara al trajektorio, asertas ke la direkto de movado estas hora, poste vidi ke φ de vojaĝanto plietiĝas laŭ la propratempo τ_{obs} de observanto pligrandiĝas ($d\varphi/d\tau_{obs} < 0$).

Nun konsideru observanton restanta en centro de la cirklo, en $r = 0$. Li ne povas vidi rekte la movadon de vojaĝanto, ĉar la radiuso de la cirklo estas pligranda ol la diametro de geodeziaj trajektorioj de lumo, ke irus de vojaĝanto al observanto. Sed ni farigas ke imagoj de la movado estu sendataj al la centra observanto per optikaj fibroj radiuse etenditaj. Pro simetrio, la tempo de aliro de ĉiu imago de vojaĝanto al observanto estas la sama. Ĉar vojaĝanto en hora movado konstata valorojn de t pli kaj pli etaj, kaj la koordinathorloĝoj estas sinkronaj al la centra horloĝo per radiusaj rektoj, tial la centra observanto vidas vojaĝanto aliri kun $d\varphi/d\tau_{cen} > 0$, tio estas, en malhora direkto, laŭ la propratempo τ_{cen} de centra observanto pligrandiĝas. Se horloĝo de vojaĝanto estas filmata, la observanto vidas ke ĝi markas male la tempon, kaj vidas vojaĝanton marŝante dorse, kaj aŭdas lin

violam causalidade. Porém é bem sabido[7] que existem movimentos de matéria acelerada que violam. Procurando tais movimentos, estudamos círculo em plano $z = \text{const.}$ Nós mostramos que somente os movimentos com sentido horário e $\rho > c^2/(V\Omega)$ violam a causalidade. Este raio mínimo é o dobro do máximo raio, $c/(2\Omega)$, para uma geodésica tipo tempo.

É muito discutido, aceitar-se um modelo de universo que permita um viajante voltar ao passado. Entre as consequências da violação da causalidade, está a perda do livre arbítrio. Há também conclusões contraditórias, como aquela relacionada ao sentido do movimento. Com efeito, um viajante em *tournée* de volta ao passado percebe que sua posição angular φ diminui à medida que seu tempo próprio τ aumenta ($d\varphi/d\tau < 0$). Assim, ele afirma que o sentido do seu movimento é horário. Também um observador inercial fixado na trama espacial, em um ponto na vizinhança da trajetória, afirma que o movimento do viajante tem sentido horário, após ver que o φ do viajante diminui à medida que o seu tempo próprio τ_{obs} aumenta ($d\varphi/d\tau_{obs} < 0$).

Agora imagine um observador parado no centro do círculo, em $r = 0$. Ele não pode ver diretamente o movimento do viajante, pois o raio do círculo é maior que o diâmetro das trajetórias geodéticas da luz, que iriam do viajante até o observador. Porém nós fazemos com que imagens do movimento sejam enviadas ao observador central por meio de fibras óticas estendidas radialmente. Por simetria, o tempo de ida de cada imagem do viajante até o observador é o mesmo. Como o viajante em movimento horário constata valores de coordenada temporal t cada vez menores, e os relógios de coordenada estão sincronizados com o relógio central pelos caminhos radiais, então o observador central vê o viajante deslocar-se com $d\varphi/d\tau_{cen} > 0$, isto é, no sentido anti-horário, à medida que o tempo próprio τ_{cen} do observador central aumenta. Se o relógio do viajante for filmado, o observador o vê marcando o tempo ao contrário, assim como vê o viajante andando ‘de costas’ e o ouve falar ao contrário. Essas estranhas percepções aler-

paroli male. Tiuj strangaj perceptoj avertas la centran observanton, ke $d\varphi/d\tau_{obs} > 0$ estas nefidinda por aserti ke movado de vojaĝanto estas malhora.

Tiu paradoksa fakto estas klarigita se ni atentis al sinkrono de koordinathorloĝoj. En metriko (1), du koordinathorloĝoj fiksitaĵoj en la sama duonebena $\varphi = \text{konst}$ estas sinkronaj per iu vojo en la duonebena, kiel (7b) kun $d\varphi = 0$ montras. Speciale, koordinathorloĝoj fiksitaĵoj laŭlonge la cirkla trajektorio de vojaĝanto estas ĉiam sinkronaj al koordinathorloĝo de centra observanto en $r = 0$, per radiusaj vojoj. Tio ne implicas ke tiuj horloĝoj estas sinkronaj inter ili, per vojoj en la cirklo. Vere, ili ne estas. El du najbaraj horloĝoj, tiu kun plieta φ estas malfrua rilate la alia. Fakte, postulante samtempajn momentojn ($dT = 0$) al la horloĝoj, (7b) montras ke la horloĝo en plieta φ montras valoron $(\Omega r^2/c^2)d\varphi$ plieta ol de alia horloĝo. Do en unu kompleta turno en hora direkto, la akumulita malfruo estos $\Delta't := 2\pi\Omega r^2/c^2$.

Nun, pensu pri vojaĝanto kun tre malrapida cirkla movado ($V \ll c$), en hora direkto. Poste unu turno, li maljuniĝas $\Delta\tau \approx \Delta T = 2\pi r/V$. Sed loka tieulo maljuniĝas $\Delta t = \Delta T - \Delta't$, inter la du pasadoj de vojaĝanto. Tiu kvanto estas ordinare pozitiva, indikante maljuniĝo. Se tamen la rapido de vojaĝanto estas multe pli granda, tial ΔT estas multe plieta, kaj la malfruo $\Delta't$ estas la sama. Okazos $\Delta T < \Delta't$ se rapido de vojaĝanto obeas $Vr > c^2/\Omega$. Tiuokaze $\Delta t < 0$, indikante ke lokaj tieuloj juniĝis inter la du pasadoj.

tam o observador central de que $d\varphi/d\tau_{obs} > 0$ não é confiável para se afirmar que o movimento do viajante seja anti-horário.

Esse fato paradoxal é esclarecido se nós atentarmos à sincronia dos relógios de coordenada. Na métrica (1), dois relógios de coordenada fixados em um mesmo semiplano $\varphi = \text{konst}$ estão sincronizados por qualquer caminho no semiplano, conforme (7b) com $d\varphi = 0$ mostra. Em particular, os relógios de coordenada fixados ao longo da trajetória circular do viajante estão sempre sincronizados com o relógio de coordenadas do observador central em $r = 0$, por caminhos radiais. Isso não implica que esses relógios estejam sincronizados entre si, por caminhos sobre o círculo. Na verdade, eles não estão. De dois relógios vizinhos, aquele com φ menor está atrasado com respeito ao outro. De fato, impondo-se momentos simultâneos ($dT = 0$) aos relógios, a (7b) mostra que o relógio que tem φ menor está marcando o valor $(\Omega r^2/c^2)d\varphi$ menor que o outro relógio. Então em uma volta completa no sentido horário o atraso acumulado será $\Delta't := 2\pi\Omega r^2/c^2$.

Agora, pense num viajante com movimento circular bem lento ($V \ll c$), no sentido horário. Ao completar uma volta, ele terá envelhecido $\Delta\tau \approx \Delta T = 2\pi r/V$. Porém um habitante local terá vivido $\Delta t = \Delta T - \Delta't$, entre as duas passagens. Essa quantidade é geralmente positiva, indicando envelhecimento. Se porém a velocidade do viajante for muito maior, então ΔT será muito menor, enquanto o atraso $\Delta't$ se manterá igual. Ocorrerá $\Delta T < \Delta't$ se a velocidade do viajante obedecer $Vr > c^2/\Omega$. Nesse caso ocorrerá $\Delta t < 0$, indicando que os habitantes locais rejuvenesceram entre as duas passagens.

Citaĵoj

- [1] K. Gödel, *An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation*, Rev. Mod. Phys. **21** 477-480 (1949).
- [2] M.M. Som, A.K. Raychaudhuri, *Cylindrically symmetric charged dust distributions in rigid rotation in general relativity*, Proc. R. Soc. A **304** 81-86 (1968).

- [3] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Samtempaj geodezioj ĉe Švarcšild / Geodesics of simultaneities in Schwarzschild*, arXiv:1006.4654; CBPF-NF-012/10.
- [4] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *La relativeca tempo – II / The relativistic time – II*, baldaŭ aperonta en arXiv[physics] / a aparecer brevemente em arXiv[physics].
- [5] J.L. Anderson, *Principles of relativity physics*, Academic Press (1967).
- [6] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Doppleraj efikoj ĉe Schwarzschild / Efeitos Doppler em Schwarzschild*, arXiv:0912.1229; CBPF-NF-023/09.
- [7] F.M. Paiva, M.J. Rebouças, A.F.F. Teixeira, *Time travel in the homogeneous Som-Raychaudhuri universe*, Physics Letters A **126** 168-170 (1987).
- [8] F.M. Paiva, *O Universo de Som-Raychaudhuri, Geodésicas, Campos de Killing e Classificação invariante*, Tese de Mestrado CBPF (1988).