

CBPF - CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
Rio de Janeiro

Notas de Física

CBPF-NF-006/17

May 2017

Schwarz-Christoffel: piliero en rivero
Schwarz-Christoffel: um pilar num rio

F.M. Paiva and A.F.F. Teixeira



Schwarz-Christoffel: piliero en rivero

Schwarz-Christoffel: um pilar num rio

F.M. Paiva

Departamento de Física, Campus Humaitá II, Colégio Pedro II
Rua Humaitá 80, 22261-001 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

Resumo

La transformoj de Schwarz-Christoffel mapas, konforme, la superan kompleksan duon-ebenon al regiono limigita per rektaj segmentoj. Ĉi tie ni priskribas kiel konvene kunigi mapon de la suba duon-ebeno al mapo de la supera duon-ebeno. Ni emfazas la bezonon de klara difino de angulo de kompleksa nombro por tiu kunigo. Ni diskutas kelkajn ekzemplojn kaj donas interesan aplikon pri movado de fluido.

As transformações de Schwarz-Christoffel mapeiam conformemente o semiplano superior complexo em uma região delimitada por segmentos retos. Aqui descrevemos como acoplar convenientemente um mapa do semiplano inferior ao mapa do semiplano superior. Enfatizamos a necessidade de clara definição de ângulo de um complexo para esse acoplamento. Discutimos alguns exemplos e damos uma interessante aplicação em movimento de fluido.

1 Enkonduko

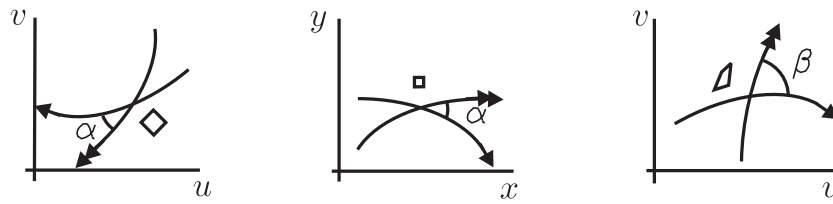
Ni konsideru mapojn de kartezia ebena z , aŭ de *regiono* el ĝi. Ili asocioj, al ĉiu punkto $z = [x,y]$ de la regiono, unu *imagan* punkton $w = [u,v]$ en kartezia ebena w .

Niaj mapoj estos tre specialaj: ili estos *konfomaj*. Per tiuj mapoj, du linioj en ebena z kiuj krucas je angulo α havos imagojn krukantajn je la sama α . Sekvas, ke tiuj transformoj mapas malgrandan geometrian bildon en alia malgranda geometria bildo kun sama formo, tamen ĝenerale kun alia orientiĝo kaj alia grandeco [1, paĝo 541]. Figuro 1 montras mapon konforman kaj alian nekonforman.

1 Introduução

Vamos considerar mapas do plano cartesiano z , ou de *uma região* dele. Eles associarão, a cada ponto $z = [x,y]$ da região, um ponto *imagem* $w = [u,v]$ em um plano cartesiano w .

Nossos mapas serão muito especiais: eles serão *conformes*. Nestes mapas, duas linhas no plano z que se cruzem com ângulo α terão imagens se cruzando também com α . Segue-se que estas transformações mapeiam uma pequena figura geométrica em outra pequena figura geométrica com a mesma forma, embora geralmente com outra orientação e outro tamanho [1, página 541]. A figura 1 mostra um mapa conforme e outro não-conforme.



Figuro 1: Centre, krucaĵo de du linioj en ebena $[x,y]$, kaj malgranda kvadrato; maldekstre, iliaj imagoj per iu konforma mapo; dekstre, iliaj imagoj per iu ne-konforma mapo, estante $\beta \neq \alpha$.
 Figura 1: No centro, cruzamento de duas linhas no plano $[x,y]$, e um pequeno quadrado; à esquerda, suas imagens via algum mapa conforme; à direita, suas imagens via algum mapa não-conforme, sendo $\beta \neq \alpha$.

Je ajn mapo (konforma aŭ ne), la koordinatoj u kaj v de ĉiu imaga punkto estas funkcioj de koordinatoj x kaj y de la responde antaŭ-imaga punkto: $u = u(x,y)$ kaj $v = v(x,y)$. Demando: kiujn matematikajn propretojn tiuj funkcioj u kaj v havas, tial ke la mapo $[x,y] \rightarrow [u,v]$ estu konforma? Respondo: kondiĉojn de Cauchy-Riemann [2, p. 46],

Em qualquer mapa (conforme ou não), as coordenadas u e v de cada ponto imagem são funções das coordenadas x e y do correspondente ponto pré-imagem: $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$. Pergunta: quais propriedades matemáticas estas funções u e v têm, para que o mapa $[x,y] \rightarrow [u,v]$ seja conforme? Resposta: as condições de Cauchy-Riemann [2, p. 46],

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Ekzemple, la mapo $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$ estas konforma, kontraŭe $u(x,y) = x + y$, $v(x,y) = x - y$ ne estas.

Por exemplo, o mapa $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$ é conforme, enquanto que $u(x,y) = x + y$, $v(x,y) = x - y$ não o é.

Oportune, kondiĉoj (1) implicas, ke u kaj v ambaŭ estas *harmoniaj* funkcioj:

A propósito, as condições (1) implicam u e v serem funções *harmônicas*, ambas:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad \Delta v \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \tag{2}$$

Se du harmoniaj funkcioj, u kaj v , plenumas kondiĉojn (1), oni diras ke v estas *harmonia dualo* de u , kaj ke u estas harmonia dualo de $-v$. Harmoniaj funkcioj havas tre interesajn proprecojn, kaj ni bedaŭras ke ni ne povas haltigi por plezuriĝi pri tio [3, p. 508].

Se duas funções harmônicas, u e v , cumprem as condições (1), diz-se que v é *dual harmônica* de u , e que u é dual harmônica de $-v$. As funções harmônicas têm propriedades muito interessantes, e lamentamos não podermos nos deter para apreciá-las [3, p. 508].

Ni uzos la kompleksan kalkulon, por faciligi traktadon de konformaj mapoj. Por tio, al ĉiu punkto $z = [x,y]$ de la karteza ebena z ni asocios la kompleksan nombron $z = x + iy$; same, al ĉiu punkto $w = [u,v]$ de la karteza ebena w ni asocios la kompleksan nombron $w = u + iv$. Plue, havante paron de ajn realaj funkcioj, $u(x,y)$ kaj $v(x,y)$, ni difinos la kom-

Usaremos o cálculo complexo, para facilitar o tratamento dos mapas conformes. Para tal, a cada ponto $z = [x,y]$ do plano cartesiano z associaremos o número complexo $z = x + iy$; igualmente, a cada ponto $w = [u,v]$ do plano cartesiano w associaremos o número complexo $w = u + iv$. Mais ainda, tendo um par de funções reais quaisquer, $u(x,y)$ e $v(x,y)$, defi-

pleksan funkcion $w(x,y) = u(x,y) + i v(x,y)$; ĉi tiu funkcio asocias, al ĉiu punkto $[x,y]$ en la ebena z , unu punkton $[u,v]$ en la ebena w .

Se funkcio $u(x,y)$ estas harmonia, kaj se $v(x,y)$ estas ĝia harmonia dualo, tiuokaze la funkcio $w(x,y) = u(x,y) + i v(x,y)$ estos dirita *kompleksa konforma*. Okazas, ke se ni anstataŭigas x per $\frac{1}{2}(z + z^*)$ kaj y per $\frac{1}{2i}(z - z^*)$ en la kompleksa konforma funkcio $w(x,y)$, ni aperigos la *analitikan funkcion* $w(z)$, libera de z^* (la konjugato de z).

Ni memoru, ke iu kompleksa nombro Ω skribiĝas en polara formo kiel $\Omega = \rho e^{i\alpha}$, estante ρ reala ne-negativa. La angulo α , ankaŭ reala, indikas la *orientiĝon* de la vektoro $0 \rightarrow \Omega$ en la kompleksa ebena. *En ĉi tiu teksto* ni konvencias $\alpha \in (-\pi, \pi]$ kaj skribas $\alpha = \angle \Omega$.

Ni ankaŭ memoru, ke se $\Omega = \Omega_1 \Omega_2$, tio estas, $\rho e^{i\alpha} = (\rho_1 e^{i\alpha_1})(\rho_2 e^{i\alpha_2})$, tiel $\rho = \rho_1 \rho_2$ kaj $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$; se ĉi tiu sumo estas ekstere la intervalo $(-\pi, \pi]$, ni devos adicii aŭ subtrahi 2π , por havi la konvenciitan α .

2 Schwarz-Christoffel

Gravan familion, SC, de analitikaj mapoj $w(z)$ studis Schwarz kaj Christoffel, sendepende. Por priskribi ĝin, ni komencas kun difino: funkcio $w(z)$ estas dirita SC se ĝia *derivado* havas formon [1, p. 550]

$$\frac{dw}{dz} = \frac{C}{(z - x_1)^{k_1} (z - x_2)^{k_2} \dots (z - x_n)^{k_n}}, \quad (3)$$

kie C estas kompleksa aŭ reala konstanto, kaj x_i kaj k_i estas realaj konstantoj. Notu ke dw/dz estas analitika, kaj ke punktoj x_i , en reala akso de ebena z , estas singularaj punktoj por la funkcio (3); pli specife, ili kutime estos branĉepunktoj.

La funkcio dw/dz determinas en ebena w la *formon* (angulojn kaj distancojn) de la imago de ajn figuro en ebena z . La funkcio indikas ankaŭ la *orientiĝon* de la imago, sed ne indikas la lokon de la imago en ebena w . Vidu figuron 2.

niremos a função complexa $w(x,y) = u(x,y) + i v(x,y)$; esta função associa, a cada ponto $[x,y]$ do plano z , um ponto $[u,v]$ no plano w .

Se a função $u(x,y)$ for harmônica, e se $v(x,y)$ for sua dual harmônica, então a função $w(x,y) = u(x,y) + i v(x,y)$ será dita *complexa conforme*. Ocorre que, se nós substituirmos $x \rightarrow \frac{1}{2}(z + z^*)$ e $y \rightarrow \frac{1}{2i}(z - z^*)$ na função complexa conforme $w(x,y)$, faremos aparecer a *função analítica* $w(z)$, desprovida de z^* (o complexo conjugado de z).

Relembremos que um número complexo Ω se escreve na forma polar como $\Omega = \rho e^{i\alpha}$, sendo ρ real não-negativo. O ângulo α , também real, indica a *orientação* do vetor $0 \rightarrow \Omega$ no plano complexo. *Neste texto* nós convencionamos $\alpha \in (-\pi, \pi]$ e escrevemos $\alpha = \angle \Omega$.

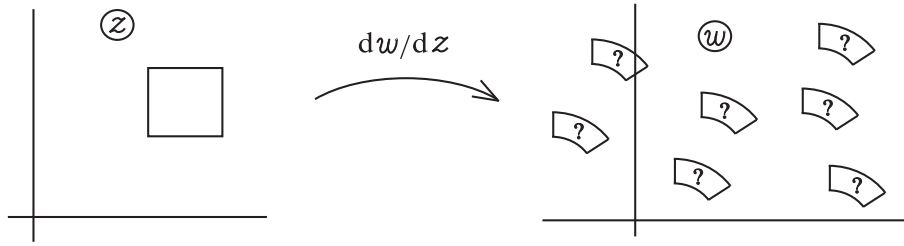
Relembremos também que se $\Omega = \Omega_1 \Omega_2$, isto é, $\rho e^{i\alpha} = (\rho_1 e^{i\alpha_1})(\rho_2 e^{i\alpha_2})$, então $\rho = \rho_1 \rho_2$ e $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$; se esta soma estiver fora do intervalo $(-\pi, \pi]$, deveremos adicionar ou subtrair 2π , para termos o α convencionado.

2 Schwarz-Christoffel

Uma importante família, SC, de mapas analíticos $w(z)$ foi estudada por Schwarz e Christoffel, separadamente. Para descrevê-la, começamos com uma definição: uma função $w(z)$ é dita SC se sua *derivada* tiver forma [1, p. 550]

onde C é uma constante complexa ou real, e os x_i e k_i são constantes reais. Note que dw/dz é analítica, e que os pontos x_i , no eixo real do plano z , são pontos de singularidade para a função (3); mais especificamente, eles em geral serão pontos de ramificação.

A função dw/dz determina no plano w a *forma* (ângulos e distâncias) da imagem de qualquer figura do plano z . A função indica também a *orientação* da imagem, porém não indica a localização da imagem no plano w . Veja a figura 2.



Figuro 2: Tutsola, la derivaĵo dw/dz ne decidas kiun, el la figuroj en ebena w , estas la imago de la kvadrato en ebena z , per la mapo $w(z)$.

Figura 2: Sozinha, a derivada dw/dz não decide qual, dentre as figuras no plano w , é a imagem do quadrado no plano z , pelo mapa $w(z)$.

La mapo $w(z)$ estas havita per malderivo de (3), kaj adicio de nova kompleksa konstanto, K :

O mapa $w(z)$ é obtido por integração indefinida da (3), e adição de uma nova constante complexa, K :

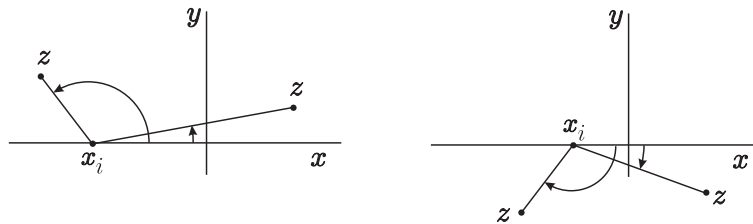
$$w(z) = C \int \frac{dz}{(z - x_1)^{k_1} (z - x_2)^{k_2} \dots (z - x_n)^{k_n}} + K. \tag{4}$$

Ekv. (4) elektas, el la nefinia kvanto da eblaj solvoj de (3), tion kion oni volas.

A (4) seleciona, dentre a infinita quantidade de possíveis soluções da (3), aquela que se deseje.

En figuro 3, la punkto x_i estas en la akso x ; notu, ke se la punkto z estas en la supera duon-ebeno de z , tio estas, $\Im(z) > 0$, tial ĉiam okazos $0 < \angle(z - x_i) < \pi$; kaj notu, ke se z estas en la suba duon-ebeno, t.e., $\Im(z) < 0$, tial ĉiam okazos $-\pi < \angle(z - x_i) < 0$. Tiuj asertoj veriĝas se nur la konvencio uzita estas $\alpha \in (-\pi, \pi]$.

Na figura 3, o ponto x_i está no eixo x ; note que se um ponto z estiver no semiplano superior de z , isto é, $\Im(z) > 0$, ocorrerá sempre $0 < \angle(z - x_i) < \pi$; e note que se z estiver no semiplano inferior, isto é, $\Im(z) < 0$, ocorrerá sempre $-\pi < \angle(z - x_i) < 0$. Estas afirmações são verdadeiras somente se a convenção usada for $\alpha \in (-\pi, \pi]$.



Figuro 3: Maldekstre, z estas en la supera duon-ebeno, okazante $0 < \angle(z - x_i) < \pi$; dekstre, z estas en la suba duon-ebeno, okazante $-\pi < \angle(z - x_i) < 0$.

Figura 3: À esquerda, z está no semiplano superior, ocasionando $0 < \angle(z - x_i) < \pi$; à direita, z está no semiplano inferior, ocasionando $-\pi < \angle(z - x_i) < 0$.

Ni konvencias, ke la x_i estu aranĝitaj tiel ke $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, kaj ni limigas nian studon al okazoj $-2 \leq k_1 + k_2 + \dots + k_n \leq 2$.

Convencionamos que os x_i sejam ordenados do modo $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, e limitamos nosso estudo aos casos $-2 \leq k_1 + k_2 + \dots + k_n \leq 2$.

En la du sekvantaj sekcioj ni montros, ke ĉiu SC mapas orientitan horizontalan rektan

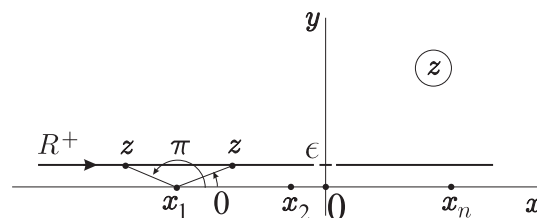
Nas duas seções seguintes mostraremos que toda SC mapeia uma reta horizontal orien-

R^+ , kuŝanta iomete *super* linio $y = 0$, en orientita linio farita de rektaj segmentoj, en la ebena w . Plue, tiu sama esprimo $w(z)$ mapas orientitan horizontalan rektan R^- , kuŝanta iomete *sub* linio $y = 0$, en *alia* linio ankaŭ farita de rektaj segmentoj. Ni opinias, ke la analizo de la mapoj de R^+ kaj de R^- estas la kulmino de la studo de transformoj de Schwarz-Christoffel.

Indas rememori, ke ‘ĉiuj punktoj’ en nenio en kompleksaj ebenaĵoj estas unu sola punkto, skribita ∞ . En nia teksto, la imago de tiu punkto $z = \infty$ estos skribita w_∞ . En la mapo de la supera duon-ebeno, la imago de najbaro de punkto x_i skribiĝos w_i , kontraŭe en la mapo de suba duon-ebeno ĝi skribiĝos W_i .

3 Mapo SC de rekto R^+

Ni nun priskribos la mapon de la supera duon-ebeno de z , farita per elektita funkcio SC. Tiu duon-ebeno enhavas nur punktojn kun $y > 0$, do ĝi ne enhavas la realan akson $y = 0$. Ni unue serĉas la formon de la imago, per $w(z)$, de horizontala rekto R^+ kuŝanta *infinitesime super* la rekto $y = 0$ de la ebena z . Por tio, ni supozas punkton z iranta en la rekto $z = x + i\epsilon$, estante ϵ *pozitiva* infinitesimo, de $x = -\infty$ al $x = +\infty$, kiel figuro 4 montras. Kaj ni konstruos la imagon $w(R^+)$ de tiu movado, en la ebena w .



Figuro 4: Punkto z trakuras rektan R^+ en la signalita direkto, estante ϵ *pozitiva* infinitesimo; kiam z pasas super x_1 , la angulo de $(z - x_1)$ malmilte ŝanĝas de π al 0.

Figura 4: O ponto z percorre R^+ no sentido indicado, sendo ϵ infinitésimo *positivo*; quando z passa sobre x_1 , o ângulo de $(z - x_1)$ muda bruscamente de π para 0.

tada R^+ , disposta ligeiramente *acima* da linha $y = 0$, em uma linha orientada composta por segmentos retos, no plano w . Mais ainda, essa mesma expressão $w(z)$ mapeia uma reta horizontal orientada R^- , disposta ligeiramente *abaixo* da linha $y = 0$, em *outra* linha orientada composta também por segmentos retos. Em nossa opinião, a análise dos mapas de R^+ e de R^- é o ponto mais alto do estudo das transformações de Schwarz-Christoffel.

Vale lembrar que ‘todos os pontos’ no infinito em planos complexos são um só ponto, denotado ∞ . Em nosso texto, a imagem desse ponto $z = \infty$ será denotada w_∞ . No mapa do semiplano superior, a imagem da vizinhança de um ponto x_i se escreverá w_i , enquanto que no mapa do semiplano inferior ela se escreverá W_i .

3 Mapa SC da reta R^+

Descreveremos agora o mapa do semiplano superior de z , feito por uma função SC escolhida. Esse semiplano contém somente os pontos com $y > 0$, portanto ele não contém o eixo real x . Primeiramente buscamos a forma da imagem, sob $w(z)$, de uma reta horizontal R^+ jazendo *um infinitésimo acima* da reta $y = 0$ do plano z . Para isso, supomos um ponto z percorrendo a reta $z = x + i\epsilon$, sendo ϵ um infinitésimo *positivo*, desde $x = -\infty$ até $x = +\infty$, como a figura 4 mostra. E vamos construir a imagem $w(R^+)$ desse movimento, no plano w .

Komence ni konsideras la angulojn de

Inicialmente consideramos os ângulos de

ambaŭ flankoj de la derivaĵo (3), elektante (tio gravas!) la valoron $k_i \angle(z - x_i)$ por la angulo $\angle(z - x_i)^{k_i}$:

$$\angle[dw(z)/dz] = \angle C - k_1 \angle(z - x_1) - k_2 \angle(z - x_2) - \dots - k_n \angle(z - x_n). \quad (5)$$

Dum $z = x + i\epsilon$ trakuras de $x = -\infty$ al tre proksima al x_1 , ĉiuj anguloj $\angle(z - x_i)$ en (5) valoras π , do

$$\angle[dw(z)/dz] = \angle C - \pi \sum k_i \quad \text{se } x < x_1; \quad (6)$$

tial $\angle[dw(z)/dz]$ estas konstanta en la intervalo $x \in (-\infty, x_1)$. Tio implicas, ke la imaga kurbo $w(z)$ estu rekta segmento en la komenca peco $w_\infty \rightarrow w_1$, kun *orientiĝo* $\alpha_0 = \angle C - \pi \sum k_i$. La apendico A pravigas tiun valoron por la orientiĝo.

Figuroj 4 kaj 5 montras, ke kiam z pasas super x_1 , la angulo $\angle(z - x_1)$ bruske mal-kreskas de π al nulo, kontraŭe la aliaj anguloj $\angle(z - x_i)$ ne ŝanĝas; tio okazigas bruskan ŝanĝon $k_1\pi$ de la direkto de $w(R^+)$ en punkto w_1 . Notu, ke tiu ŝanĝo estas pozitiva se $k_1 > 0$, kaj estas negativa se $k_1 < 0$.

Post z pasas super x_1 kaj iras en la direkto de x_2 , ĉiuj anguloj $\angle(z - x_i)$ estas konstantaj; tio farigas, ke la imago $w_1 \rightarrow w_2$ denove estu rekta segmento.

Resume, la paso de z super iu x_i faras la orientiĝon de la nova rekta segmento en ebena w ŝanĝi $k_i\pi$ relative al la orientiĝo de la antaŭa segmento [1, p. 552].

Fine, post z pasas super x_n , la lasta x_i de la sinsekvo, okazas ke ĉiuj anguloj $\angle(z - x_i)$ estas nulaj, do

$$\angle[dw(z)/dz] = \angle C \quad \text{se } x > x_n; \quad (7)$$

tio signifas, ke la orientiĝo de la imaga kurbo $w(z)$ de la rekto R^+ en la fina peco $w_n \rightarrow w_\infty$ estas $\alpha_n = \angle C$. Vidu figuron 5.

ambos membros da derivada (3), escolhendo (isso é importante!) o valor $k_i \angle(z - x_i)$ para o ângulo $\angle(z - x_i)^{k_i}$:

Enquanto $z = x + i\epsilon$ percorre desde $x = -\infty$ até bem próximo a x_1 , todos os ângulos $\angle(z - x_i)$ na (5) valem π , assim

portanto $\angle[dw(z)/dz]$ é constante no intervalo $x \in (-\infty, x_1)$. Isso implica a curva imagem $w(z)$ ser um segmento reto no trecho inicial $w_\infty \rightarrow w_1$, com *orientação* $\alpha_0 = \angle C - \pi \sum k_i$. O apêndice A justifica esse valor para a orientação.

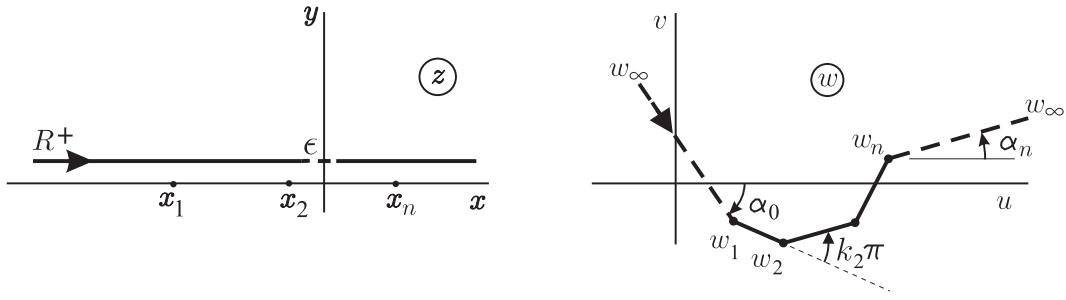
As figuras 4 e 5 mostram que, quando z passa sobre x_1 , o ângulo $\angle(z - x_1)$ diminui bruscamente de π para zero, enquanto que os demais ângulos $\angle(z - x_i)$ não mudam; isso ocasiona uma brusca mudança $k_1\pi$ da direção de $w(R^+)$ no ponto w_1 . Note que essa mudança é positiva se $k_1 > 0$, e é negativa se $k_1 < 0$.

Depois que z passa sobre x_1 e vai na direção de x_2 , todos os ângulos $\angle(z - x_i)$ são constantes; isso faz a imagem $w_1 \rightarrow w_2$ ser novamente um segmento reto.

Em suma, a passagem de z sobre algum x_i faz a orientação do novo segmento reto no plano w mudar $k_i\pi$ relativamente à orientação do segmento anterior [1, p. 552].

Finalmente, após z passar sobre x_n , o último x_i da sequência, ocorre que todos os ângulos $\angle(z - x_i)$ são nulos, portanto

isso significa que a orientação da curva imagem $w(z)$ da reta R^+ no trecho final $w_n \rightarrow w_\infty$ é $\alpha_n = \angle C$. Veja a figura 5.



Figuro 5: Orientita rekto R^+ kuŝas iomete super la rekto $y = 0$, kiu entenas n punktojn x_i . En la ebena w , oni havas la imagon de R^+ per mapo (4). En ĉiu vertico w_i la ŝanĝo de direkto estas $k_i\pi$. La anguloj $\alpha_0 = \angle C - \pi \sum k_i$ kaj $\alpha_n = \angle C$ indikas la orientiĝon de la komenca kaj de la fina peco de la imago.

Figura 5: A reta orientada R^+ jaz ligeiramente acima da reta $y = 0$, que contém n pontos x_i . No plano w , tem-se a imagem de R^+ por um mapa (4). Em cada vértice w_i a mudança de direção é $k_i\pi$. Os ângulos $\alpha_0 = \angle C - \pi \sum k_i$ e $\alpha_n = \angle C$ indicam a orientação do trecho inicial e do trecho final da imagem.

Havante ĉiujn ŝanĝojn $k_i\pi$ de orientiĝo de tiu imaga kurbo, ni konsideru 4 malsamajn tipojn de mapo $w(R^+)$, laŭ la valoro $|\sum k_i\pi|$ estu plieta ol π , egala al π , inter π kaj 2π , aŭ egala al 2π :

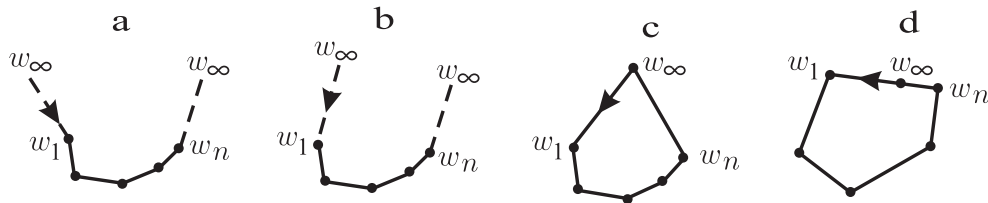
- tipo **a**: se $|\sum k_i| < 1$;
- tipo **b**: se $|\sum k_i| = 1$;
- tipo **c**: se $1 < |\sum k_i| < 2$; kaj
- tipo **d**: se $|\sum k_i| = 2$.

Figuro 6 montras unu imagon por ĉiu tipo, kaj sekcioj de 5 al 8 donos unu ekzemplon de ĉiu tipo.

Tendo todas as mudanças $k_i\pi$ de orientação dessa curva imagem, vamos considerar 4 diferentes tipos de mapa $w(R^+)$, segundo o valor $|\sum k_i\pi|$ for menor que π , igual a π , entre π e 2π , ou igual a 2π :

- tipo **a**: se $|\sum k_i| < 1$;
- tipo **b**: se $|\sum k_i| = 1$;
- tipo **c**: se $1 < |\sum k_i| < 2$; e
- tipo **d**: se $|\sum k_i| = 2$.

A figura 6 mostra uma imagem para cada tipo, e as seções de 5 a 8 darão um exemplo de cada tipo.



Figuro 6: Tipoj de imago de orientita rekto R^+ . En tipoj **a** kaj **b** la imago w_∞ estas en ne-finio; tio implicas, ke la pecoj $w_\infty \rightarrow w_1$ kaj $w_n \rightarrow w_\infty$ estas ne-finie longaj. En tipoj **c** kaj **d** la imago w_∞ estas en finia regiono de ebena w .

Figura 6: Tipos de imagem da reta orientada R^+ . Nos tipos **a** e **b** a imagem w_∞ está no infinito; isso implica os trechos $w_\infty \rightarrow w_1$ e $w_n \rightarrow w_\infty$ serem infinitamente longos. Nos tipos **c** e **d** a imagem w_∞ está na região finita do plano w .

Por kompletigi la imagon de la rekto R^+ , ni nun kalkulas la longojn de la rektaj segmentoj, uzante (4),

Para completar a imagem da reta R^+ , calculamos agora os comprimentos dos segmentos retos, usando a (4),

$$|w_{i+1} - w_i| = |C| \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{(x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_n)^{k_n}} \right|. \quad (8)$$

Ĉar la funkcio $w(z)$ estas kontinua, la imagoj de la aliaj rektoj $y = \text{konst} > 0$ najbaraj al rekto $y = 0$ estas similaj al la imago de rekto R^+ , kiel ni konstatos en sekcioj de 5 al 8.

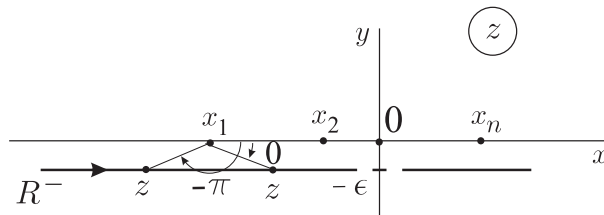
Como a função $w(z)$ é contínua, as imagens das demais retas $y = \text{const} > 0$ vizinhas à reta $y = 0$ são semelhantes à imagem da reta R^+ , como constataremos nas seções de 5 a 8.

4 Mapo SC de rekto R^-

Nun ni havigu la mapon de suba duon-ebeno de z uzante la saman esprimon (4) uzita por la supera duon-ebeno. Simile kiel antaŭe, ni komence serĉas la imagon de horizontala rekto R^- kuŝanta je infinitezime *negativa* ordinato $-\epsilon$ de ebena z . Vidu figuron 7.

4 Mapa SC da reta R^-

Vamos agora obter o mapa do semiplano inferior de z usando a mesma expressão (4) usada para o semiplano superior. Como anteriormente, inicialmente procuramos a imagem de uma reta horizontal R^- na ordenada *negativa* infinitesimal $-\epsilon$ do plano z . Veja a figura 7.



Figuro 7: Kiam z pasas sub x_1 en la signalita direkto, estante $-\epsilon$ *negativa* infinitezimo, la angulo de $(z - x_1)$ bruske ŝanĝas de $-\pi$ al 0.

Figura 7: Quando z passa sob x_1 no sentido indicado, e sendo $-\epsilon$ um infinitésimo *negativo*, o ângulo de $(z - x_1)$ muda bruscamente de $-\pi$ para 0.

Ni nun supozas punkton $z = x - i\epsilon$ iranta dekstren en rekto R^- , ekde $x = -\infty$. Inter $x = -\infty$ kaj $x = x_1$ ĉiuj anguloj $\angle(z - x_i)$ valoras $-\pi$, do la imago de komenca peco havas la konstantan orientiĝon (5)

Supomos agora um ponto $z = x - i\epsilon$ indo para a direita na reta R^- , desde $x = -\infty$. Entre $x = -\infty$ e $x = x_1$ todos os ângulos $\angle(z - x_i)$ valem $-\pi$, portanto a imagem do trecho inicial tem a orientação (5) constante

$$\angle[dw(z)/dz] = \angle C + \pi \sum k_i \quad \text{se } x < x_1. \quad (9)$$

Kiam z pasas sub x_1 , la angulo de $(z - x_1)$ bruske kreskas de $-\pi$ al nulo, kontraŭe la anguloj de la aliaj $(z - x_i)$ ne ŝanĝas; tio implicas ŝanĝon $-k_1\pi$ de orientiĝo de $w(R^-)$ en punkto W_1 . Ni notas, ke tiu ŝanĝo havas saman absolutan valoron, sed kontraŭan

Quando z passa sob x_1 , o ângulo de $(z - x_1)$ aumenta bruscamente de $-\pi$ para zero, enquanto que os ângulos dos demais $(z - x_i)$ não mudam; isso implica uma mudança $-k_1\pi$ da orientação de $w(R^-)$ no ponto W_1 . Notamos que essa mudança tem mesmo valor absoluto,

signumon, al la ŝanĝo en la responda imaga punkto w_1 de rekto R^+ .

Daŭrigante ni konstatas, ke en ĉiu imaga punkto W_i de rekto R^- la ŝanĝo de orientiĝo havas saman absolutan valoron, sed kontraŭan signumon, al de la responda imaga punkto w_i de rekto R^+ . Post z pasas sub x_n , ĉiuj anguloj $\angle(z - x_i)$ estas nulaj, do (5) re-skribiĝas

$$\angle[dw(z)/dz] = \angle C \quad \text{se } x > x_n; \tag{10}$$

tial ni vidas, ke la orientiĝo de la fina peco $W_n \rightarrow w_\infty$ de la imaga kurbo de rekto R^- valoras $\angle C$. Tiu valoro koincidas kun la orientiĝo (7) de la fina peco $w_n \rightarrow w_\infty$ de la imago de rekto R^+ .

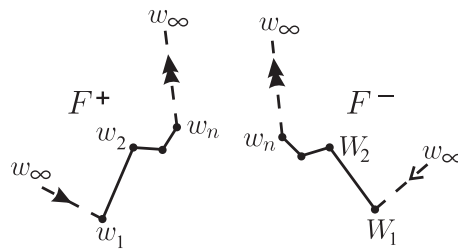
Per analizo de (8) ni konstatas, ke ĉiu longo $|W_{i+1} - W_i|$ egalas la respondan longon $|w_{i+1} - w_i|$. Do, la formo de imago de rekto R^- haviĝas per iu reflektado de la imago de rekto R^+ . Ĉar la orientiĝoj de la imagoj de peco $x_n \rightarrow \infty$ en rektoj R^+ kaj R^- koincidas (ambaŭ estas $\alpha_n = \angle C$), tial la reflektado okazas paralele al la fina rekta peco $w_n \rightarrow w_\infty$. Vidu figuron 8.

mas sinal oposto, ao da mudança no correspondente ponto imagem w_1 da reta R^+ .

Prosseguindo, constatamos que em cada ponto imagem W_i da reta R^- a mudança de direção tem mesmo valor absoluto, mas sinal oposto ao do correspondente ponto imagem w_i da reta R^+ . Depois que z passa sob x_n , todos os ângulos $\angle(z - x_i)$ são nulos, portanto a (5) se reescreve

vemos assim que a orientação do trecho final $W_n \rightarrow w_\infty$ da curva imagem da reta R^- vale $\angle C$. Esse valor coincide com a orientação (7) do trecho final $w_n \rightarrow w_\infty$ da imagem da reta R^+ .

Por análise de (8) constatamos que cada tamanho $|W_{i+1} - W_i|$ é igual ao correspondente tamanho $|w_{i+1} - w_i|$. Assim, a forma da imagem da reta R^- é obtida por alguma reflexão da imagem da reta R^+ . Como as orientações das imagens do trecho $x_n \rightarrow \infty$ nas retas R^+ e R^- coincidem (ambas são $\alpha_n = \angle C$), a reflexão ocorre paralelamente ao trecho reto final $w_n \rightarrow w_\infty$. Veja a figura 8.



Figuro 8: Se F^+ estas la *formo* de la imago de rekto R^+ , tial F^- estas la *formo* de la imago de responda rekto R^- ; oni vidas, ke F^- estas reflektado de F^+ en la direkto $w_n \rightarrow w_\infty$.

Figura 8: Se F^+ for a *forma* da imagem da reta R^+ , então F^- será a *forma* da imagem da correspondente reta R^- ; se vê que F^- é reflexão de F^+ na direção $w_n \rightarrow w_\infty$.

La sekvantaj kvar sekcioj prezentas ekzemplojn de la kvar tipoj de transformo $w(z)$ priskribitaj en sekcio 3. Sekcio 9 prezentas praktikan aplikon.

As 4 seções seguintes dão exemplos dos 4 tipos de transformações $w(z)$ descritos na seção 3, e a seção 9 apresenta uma aplicação prática.

5 Ekzemplo de tipo a

Se en (3) ni elektas $n = 1$, $C = 1$, $x_1 = 0$,

5 Um exemplo do tipo a

Se na (3) nós escolhermos $n = 1$, $C = 1$,

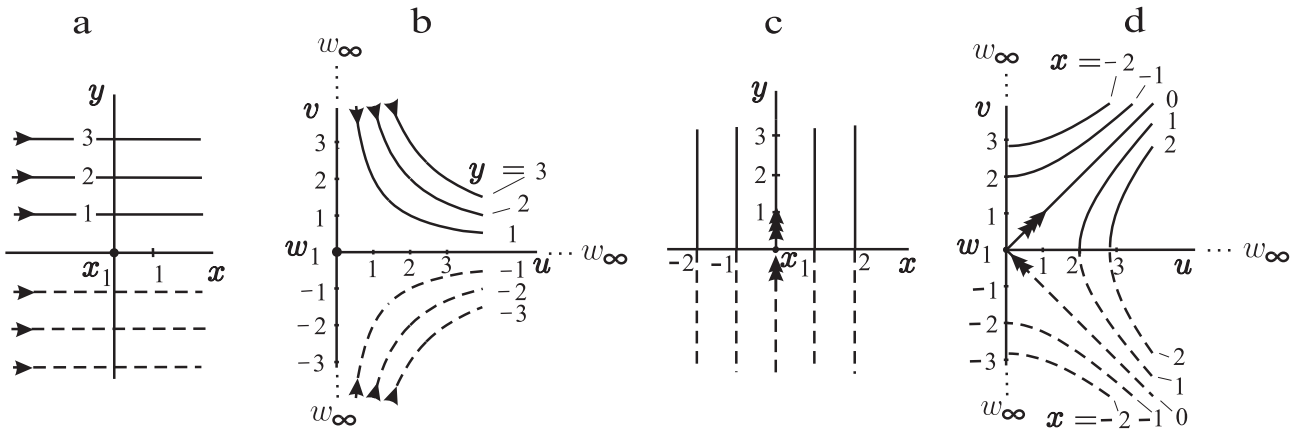
$k_1 = 1/2$, ni havos

| $x_1 = 0, k_1 = 1/2$, teremos

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z^{1/2}}, \Rightarrow w(z) = 2z^{1/2} + K; \tag{11}$$

elektante $K = 0$, ni havigas imagojn $w(z)$ kiel en figuro 9.

| escolhendo $K = 0$, obtemos imagens $w(z)$ como na figura 9.



Figuro 9: **a** kaj **c** montras rektojn $y = \text{konst}$ kaj $x = \text{konst}$ en ebena z ; **b** kaj **d** montras la respondajn imagojn en ebena w per la transformo $w(z) = 2z^{1/2}$.

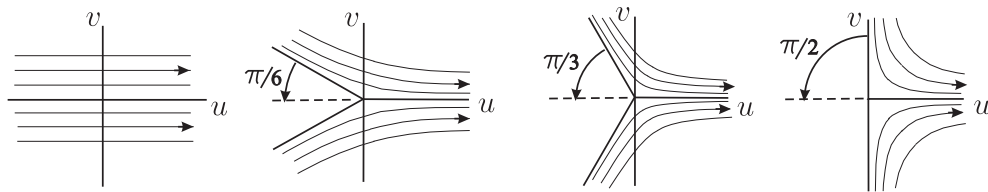
Figura 9: **a** e **c** mostram as retas $y = \text{const}$ e $x = \text{const}$ no plano z ; **b** e **d** mostram as correspondentis imagens no plano w via a transformação $w(z) = 2z^{1/2}$.

En figuro 9**b** ni vidas, ke la imago de R^+ trakuras de $v = +\infty$ al origino, poste iras al $u = +\infty$; tie ni vidas ankaŭ, ke la imago de R^- trakuras de $v = -\infty$ al origino, poste iras al $u = +\infty$. Notu, en figuro 9**d**, ke imagoj de rektoj $x = \text{konst} < 0$ estas malkontinuaĵ, kaj notu ke la imago de rekto $x = 0$ estas zigzaga en punkto w_1 , kaj fine notu ke imagoj de rektoj $x = \text{konst} > 0$ estas kontinuaĵ kaj ne-zigzagaj. Kontraŭe, la imagoj de ĉiuj horizontalaj rektoj ($y = \text{konst}$) estas kontinuaĵ; tio estos tre interesa kiam ni uzos tiajn mapojn por priskribi fluadon de likvoj, kiel en sekvantaj sekciojn.

Eble interesas akompani, paŝo post paŝo, konforman mapon ekde komenca formo ĝis la fina formo. Figuro 10 skizas kvar imagojn, per $dw/dz = 1/z^{k_1}$, de horizontalaj rektoj $y = \text{konst}$, por k_1 kreskanta ekde 0 ĝis $1/2$.

Vemos na figuro 9**b** que a imagem de R^+ percorre desde $v = +\infty$ até a origem, depois vai a $u = +\infty$; também vemos ali que a imagem de R^- corre desde $v = -\infty$ até a origem, depois vai a $u = +\infty$. Note, na figura 9**d**, que as imagens das retas $x = \text{const} < 0$ são descontínuas, e note que a imagem da reta $x = 0$ se quebra no ponto w_1 , e note ainda que as imagens das retas $x = \text{const} > 0$ são contínuas e não têm quebras. Contrariamente, as imagens de todas as retas horizontais ($y = \text{konst}$) são contínuas; isso será muito interessante quando usarmos tais mapas para descrever fluir de líquidos, como em seções a seguir.

Talvez interesse acompanhar, passo a passo, um mapa conforme desde a forma inicial até a forma final. A figura 10 esboça quatro imagens, por $dw/dz = 1/z^{k_1}$, de retas horizontais $y = \text{konst}$, para k_1 crescendo desde 0 até $1/2$.



Figuro 10: Imagoj de rektoj $y = \text{konst}$ per $dw/dz = 1/z^{k_1}$, kun k_1 sinsekve 0, $1/6$, $1/3$ kaj $1/2$.
 Figura 10: Imagens de retas $y = \text{const}$ segundo $dw/dz = 1/z^{k_1}$, com $k_1 = 0, 1/6, 1/3$ e $1/2$.

6 Ekzemplo de tipo b

En (3), kun $n = 2, C = 1, x_1 = -1, x_2 = 1, k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$, ni havigas

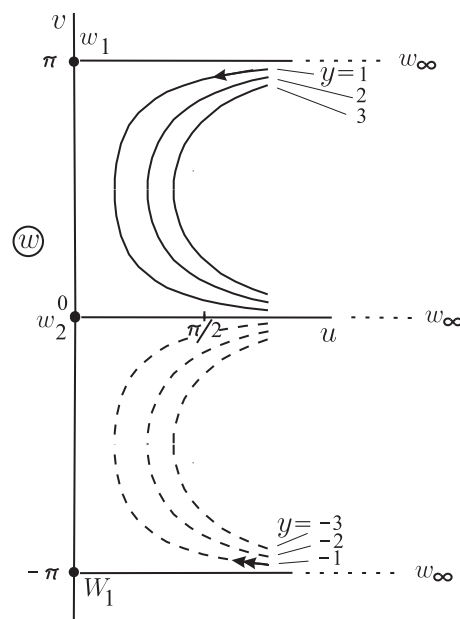
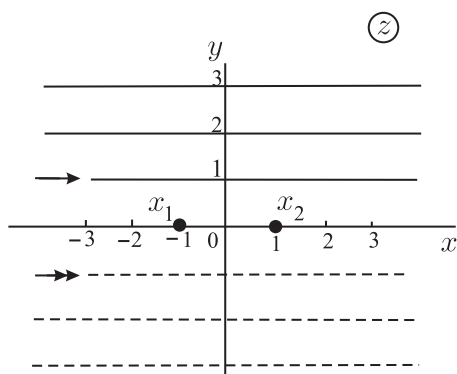
$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{(z+1)^{1/2}(z-1)^{1/2}}, \Rightarrow w(z) = \cosh^{-1}(z) + K. \tag{12}$$

Ni elektas $K = 0$ kaj havigas imagojn kiel en figuroj 11 kaj 12.

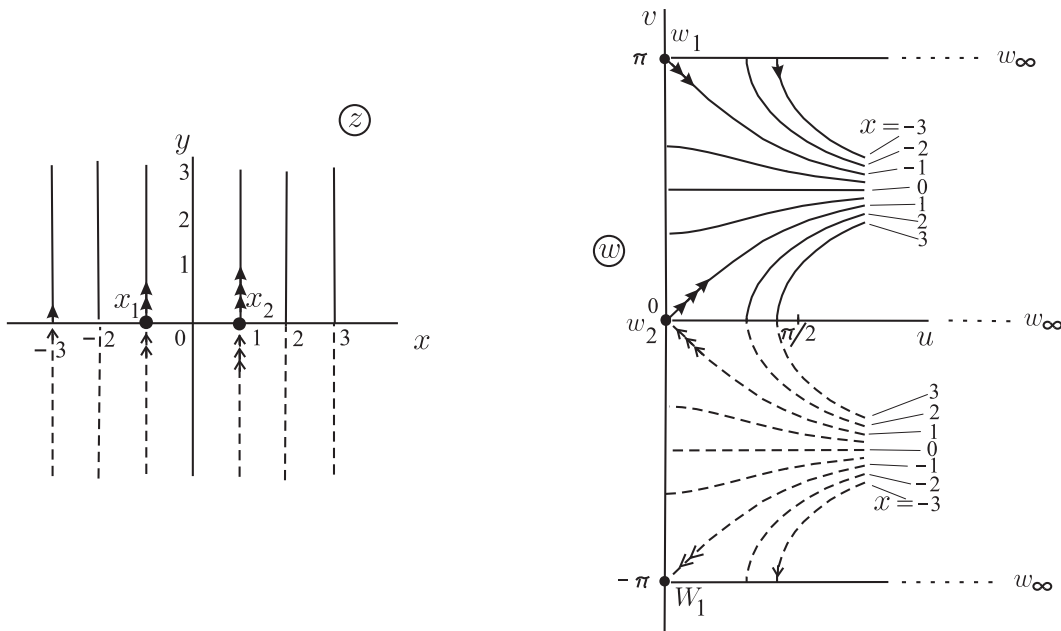
6 Um exemplo do tipo b

Na (3), com $n = 2, C = 1, x_1 = -1, x_2 = 1, k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$, obtemos

Escolhemos $K = 0$ e temos as imagens como nas figuras 11 e 12.



Figuro 11: Rektoj $y = \text{konst}$ en ebena z kaj iliaj imagoj per la mapo $w(z) = \cosh^{-1}(z)$.
 Figura 11: Retas $y = \text{const}$ no plano z e suas imagens via o mapa $w(z) = \cosh^{-1}(z)$.



Figuro 12: Rektoj $x = \text{konst}$ en ebena z kaj iliaj imagoj per la mapo $w(z) = \cosh^{-1}(z)$.
 Figura 12: Retas $x = \text{const}$ no plano z e suas imagens via o mapa $w(z) = \cosh^{-1}(z)$.

En figuro 11 ni vidas, ke la imago de R^+ venas horizontale de $u = +\infty$ ĝis $u = 0$, kun $v = \pi$, daŭrigas en la akso v ĝis la origino, kaj iras horizontale al $u = +\infty$ en la akso u . La imago de R^- venas horizontale de $u = +\infty$ ĝis $u = 0$, kun $v = -\pi$, daŭrigas en la akso v ĝis la origino, kaj iras horizontale al $u = +\infty$ en la akso u . Tiel, la imago de R^+ kaj R^- kun $x > x_2$ koincidas je la pozitiva parto de akso u .

Kiel en antaŭa ekzemplo (tipo a), ĉiuj horizontaj rektoj en ebena z havas kontinuajn imagojn, kiel montras figuro 11. Denove, ne ĉiuj vertikalaj rektoj en ebena z havas kontinuajn imagojn, kiel montras figuro 12; nur imagoj de rektoj kun $x \geq 1$ estas kontinuaj.

Na figura 11 vemos que a imagem de R^+ vem horizontalmente de $u = +\infty$ até $u = 0$, com $v = \pi$, permanece no eixo v até a origem, e vai horizontalmente a $u = +\infty$ no eixo u . A imagem de R^- vem horizontalmente de $u = +\infty$ até $u = 0$, com $v = -\pi$, permanece no eixo v até a origem, e vai horizontalmente a $u = +\infty$ no eixo u . Portanto, as imagens de R^+ e R^- com $x > x_2$ coincidem na parte positiva do eixo u .

Como no exemplo anterior (tipo a), todas as retas horizontais no plano z têm imagem contínua, como mostra a figura 11. Novamente, nem todas as retas verticais no plano z têm imagem contínua, como mostra a figura 12; somente as imagens das retas com $x \geq 1$ são contínuas.

7 Ekzemplo de tipo c

Se en (3) ni elektas $n = 2$, $C = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $k_1 = k_2 = \frac{2}{3}$, ni havos

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{(z+1)^{2/3}(z-1)^{2/3}} \Rightarrow w(z) = -e^{i\pi/3} z F\left(1/2, 2/3; 3/2; z^2\right) + K, \quad (13)$$

kie F estas la hipergeometria funkcio donata

7 Um exemplo do tipo c

Se na (3) escolhermos $n = 2$, $C = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $k_1 = k_2 = \frac{2}{3}$, teremos

onde F é a função hipergeométrica dada pela

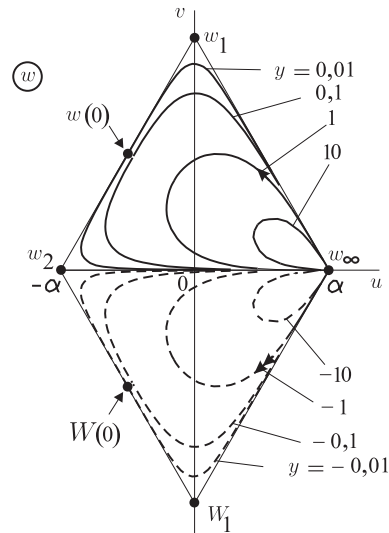
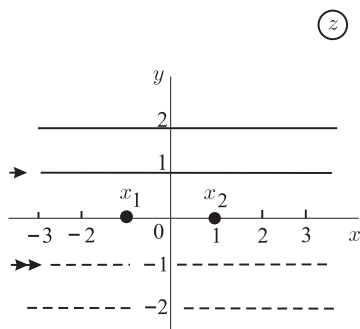
per la serio de Taylor [1, p. 179]

série de Taylor [1, p. 179]

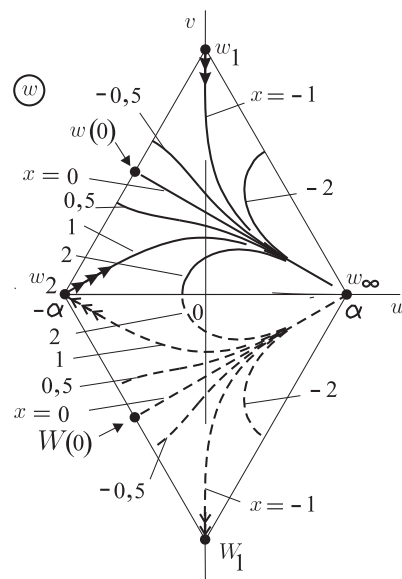
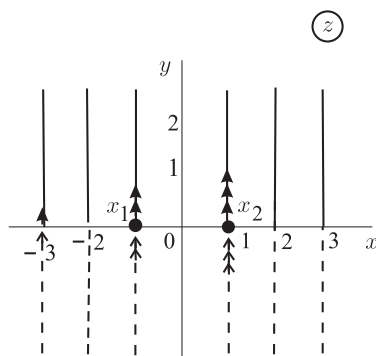
$$F(a,b;c;\zeta) = 1 + \frac{ab}{c}\zeta + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{\zeta^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{\zeta^3}{3!} + \dots \quad (14)$$

Plue, elektante la konstanto $K = \alpha e^{i2\pi/3}$ kun $\alpha = F\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; 1\right) \approx 2,1$ ni havigos, post iun da kalkuloj, $w_2 = -w_\infty$ kaj la mapojn montritajn en figuroj 13 kaj 14.

Escolhendo ainda $K = \alpha e^{i2\pi/3}$ com $\alpha = F\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; 1\right) \approx 2,1$ obtemos, depois de alguns cálculos, $w_2 = -w_\infty$ e os mapas mostrados nas figuras 13 e 14.



Figuro 13: Rektoj $y = \text{konst}$ en ebena z kaj iliaj imagoj en ebena w per la mapo (13).
 Figura 13: Retas $y = \text{konst}$ no plano z e suas imagens no plano w via o mapa (13).



Figuro 14: Rektoj $x = \text{konst}$ en ebena z kaj iliaj imagoj en ebena w per la mapo (13).
 Figura 14: Retas $x = \text{konst}$ no plano z e suas imagens no plano w via o mapa (13).

En figuro 13 ni vidas, ke la imagoj de R^+ kaj de R^- estas du egallateraj trianguloj. La horizontalaj lateroj koincidas, kaj estas la imagoj de R^+ kaj R^- kun $x > x_2$.

Kiel en antaŭaj du ekzemploj, ĉiu horizontala rekto en ebena z havas kontinuan imagon, kiel montras figuro 13. Denove, ne ĉiu vertikala rekto havas kontinuan imagon, kiel montras figuro 14.

8 Ekzemplo de tipo d

Se en (3) kun $n = 3$ ni uzos $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, k_1 = \frac{3}{4}, k_2 = \frac{1}{2},$ kaj $k_3 = \frac{3}{4},$ ni havos

$$\frac{dw}{dz} = \frac{C}{(z+1)^{3/4}z^{1/2}(z-1)^{3/4}} \Rightarrow w(z) = -2C e^{i\pi/4} z^{1/2} F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{5}{4}; z^2\right) + K, \quad (15)$$

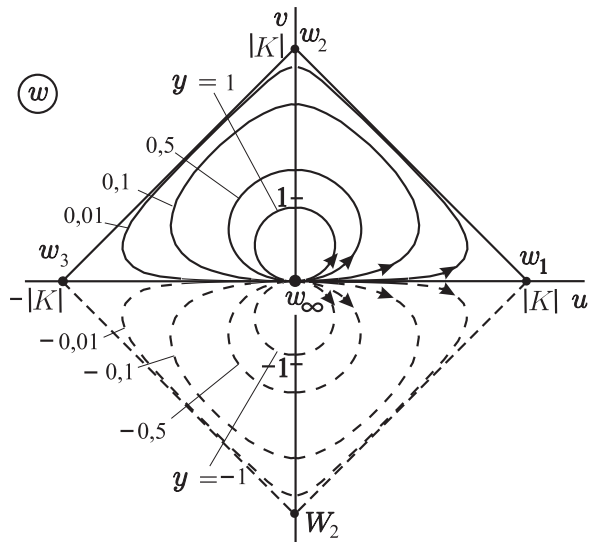
estante K konstanto, kaj estante F la hipergeometria funkcio kiel en (14). Ni elektas $C = 1$ kaj $K = i\sqrt{2} F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{5}{4}; 1\right) \approx 2,62i,$ kaj havigas imagojn kiel en figuroj 15 kaj 16.

Vemos, na figuro 13, que as imagens de R^+ e de R^- são dois triângulos equiláteros. Os lados horizontais coincidem, e são as imagens de R^+ e R^- com $x > x_2$.

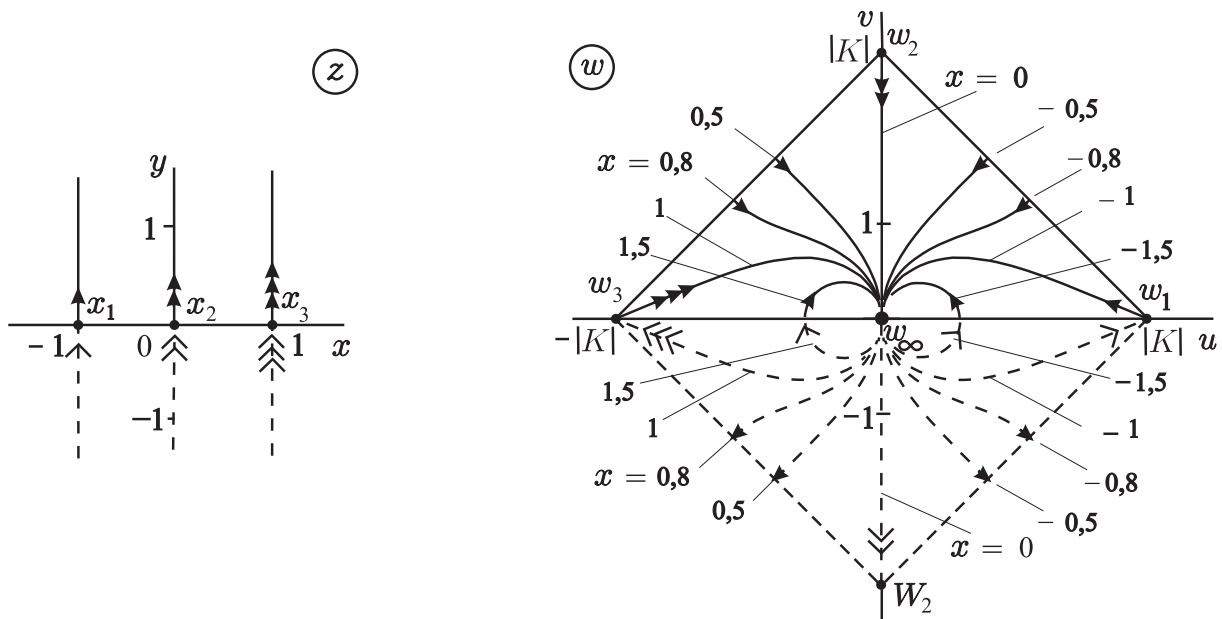
Como nos dois exemplos anteriores, toda reta horizontal no plano z tem imagem contínua, como mostra a figura 13. Novamente, nem toda reta vertical no plano z tem imagem contínua, como mostra a figura 14.

8 Um exemplo do tipo d

Se na (3) com $n = 3$ nós usarmos $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, k_1 = \frac{3}{4}, k_2 = \frac{1}{2},$ e $k_3 = \frac{3}{4},$ teremos



Figuro 15: Rektoj $y = \text{konst}$ en ebena $z,$ kaj iliaj imagoj per la mapo (15).
 Figura 15: Retas $y = \text{const}$ no plano $z,$ e suas imagens via o mapa (15).



Figuro 16: Rektoj $x = \text{konst}$ en ebena z , kaj iliaj imagoj per la mapo (15)
 Figura 16: Retas $x = \text{const}$ no plano z , e suas imagens via o mapa (15).

En figuro 15 vidu, ke la imagoj de R^+ kaj R^- estas ortaj trianguloj. La horizontalaj hipotenuzoj koincidas, kaj estas la imagoj de R^+ kaj R^- kun $x < x_1$ kaj $x > x_3$.

Kiel en antaŭaj tri ekzemploj, ĉiu horizontala rekto en ebena z havas kontinuan imagon, kiel montras figuro 15. Denove, ne ĉiu vertikala rekto en ebena z havas kontinuan imagon, kiel montras figuro 16.

Na figura 15, veja que as imagens de R^+ e R^- são triângulos retângulos. As hipotenusas horizontais coincidem, e são as imagens de R^+ e R^- com $x < x_1$ e $x > x_3$.

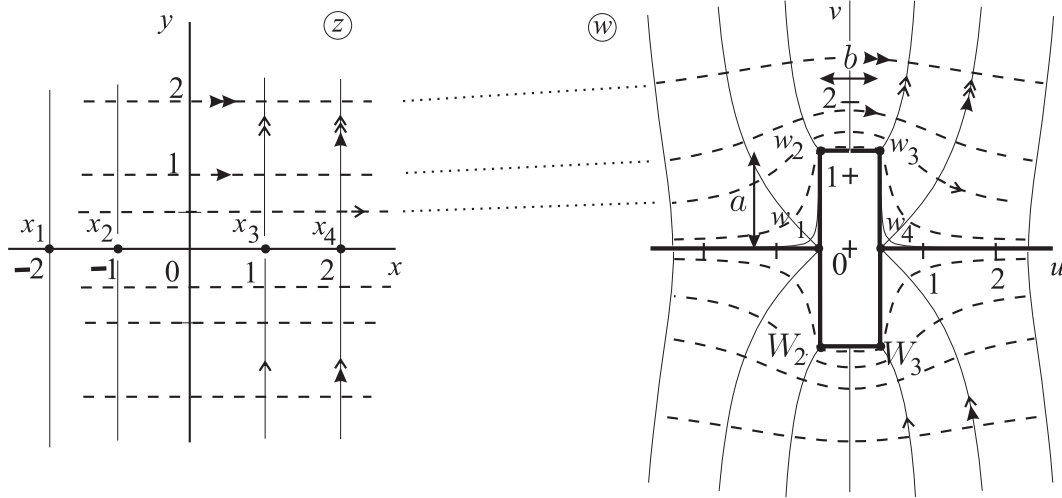
Como nos três exemplos anteriores, toda reta horizontal no plano z tem imagem contínua, como mostra a figura 15. Novamente, nem toda reta vertical no plano z tem imagem contínua, como mostra a figura 16.

9 Piliero en rivero

En figuroj de 9 al 15 ni vidas, ke la imago, en ebena w , de linioj $y = \text{konst}$ el ebena z , similiĝas al linioj de fluo de iu fluido. Tiu similiĝo ne estas akcidenta: vere, baza literaturo montras ke SC mapo generas liniojn de fluo de fluido limigita per rektaĵaj segmentoj. Ni nun prezentas ekzemplon de mapo SC, kiu simulas la movadon de akvo en kanalo kun ortangula piliero en ĝia bordo; la dimensioj de tiu piliero estas malgrandaj kompare al la larĝo de la kanalo. Ni perceptos, en figuro 17, ke ĉi tiu ekzemplo taŭgas ankaŭ por piliero en mezo de kanalo.

9 Um pilar em um rio

Nas figuras de 9 a 15 vemos que as linhas $y = \text{const}$ no plano w se assemelham a linhas de corrente de algum fluido. Essa semelhança não é acidental: na verdade, textos básicos mostram que um mapa SC gera linhas de corrente de fluido limitado por segmentos retos. Apresentamos agora um exemplo de mapa SC que simula o movimento de água em um canal com um pilar retangular em sua borda; as dimensões deste pilar são pequenas em comparação à largura do canal. Perceberemos, na figura 17, que este exemplo serve também para pilar no meio do canal.



Figuro 17: La supera (malsupera) duon-ebeno de z estas mapita en la supera (malsupera) duon-ebeno de w per (16).

Figura 17: O semiplano superior (inferior) de z é mapeado no semiplano superior (inferior) de w mediante a (16).

Por havi la ortan formon ni uzas kvar ortangulojn: $k_1 = k_4 = 1/2$ kaj $k_2 = k_3 = -1/2$. Ni elektas konvenajn x_i kaj C : $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $C = 1$. Tiel, el (3),

Para se ter a forma retangular usamos quatro ângulos retos: $k_1 = k_4 = 1/2$ e $k_2 = k_3 = -1/2$. Escolhemos x_i e C convenientes: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $C = 1$. Assim, a (3) dá

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{(z+2)^{1/2}(z+1)^{-1/2}(z-1)^{-1/2}(z-2)^{1/2}} = \left(\frac{z^2-1}{z^2-4}\right)^{1/2} \Rightarrow w(z) = E(z/2, 2) + K, \quad (16)$$

kie E estas la nekompleta eliptika integralaĵo de dua tipo [4, p. 170],

onde E é a integral elíptica incompleta do segundo tipo [4, p. 170],

$$E(Z, k) = \int_0^Z \frac{\sqrt{1-k^2\zeta^2} d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (17)$$

La grandoj $a := v_2 - v_1$ kaj $b := u_3 - u_2$ de la piliero estas

As dimensões $a := v_2 - v_1$ e $b := u_3 - u_2$ do pilar são

$$a = \int_1^2 \sqrt{\frac{x^2-1}{4-x^2}} dx \approx 1,3 \quad \text{e} \quad b = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{4-x^2}} dx \approx 0,8. \quad (18)$$

Figuro 17 respondas al valoro $K = 1,3i$ en ekv. (16), kaj montras imagojn de kelkaj horizontalaj kaj vertikalaj rektoj en ebena z . Tiu figuro estas pripensebla je du eblecoj: piliero ĉe bordo de kanalo, kaj piliero je mezo de kanalo. Fakte, se ni forigas la suban duon-

A figura 17 corresponde ao valor $K = 1,3i$ na eq. (16), e mostra imagens de algumas retas horizontais e verticais no plano z . Essa figura pode ser pensada sob duas possibilidades: pilar na borda do canal, e pilar no meio do canal. De fato, se eliminarmos o semiplano inferior de w ,

ebenon de w , tiel la supera duon-ebeno montras pilieron ĉe bordo de kanalo.

10 Komentoj

La uzado de ne-entjeraj potencoj k_i en (3) kaj (4) necesigas konvencion por angulo de komplekso. Ĉi tie ni proponis, ke anguloj estu montritaj en la intervalo $(-\pi, \pi]$; tio multe faciligas havigi imagojn de rektoj R^- (sekcio 4). Tamen, ĉi tiu konvencio ne estas universala; aliaj intervaloj ofte uzitaj estas $[0, 2\pi)$ kaj $(-\pi/2, 3\pi/2]$, ekzemple. Se iu el tiuj alternativaj konvencioj estas uzita, nia formulo (9) de angulo de derivaĵo indas esti modifita, same kiel la analizo farita en sekcio 4.

Plue, la konvencio $\alpha \in (-\pi, \pi]$ ne sufiĉas por precizigi la transformon $w(z)$ kiel en (3). Fakte, ankoraŭ estas iuj elektoj kiojn ni devas fari por havi la solvon kion ni volas. Ekzemple, se iu eksponento k_i estas m/n , kie m kaj n estas interprimoj (2 kaj 9, ekzemple), tiam $(z - x_i)^{m/n}$ havas n malsamajn eblajn orientiĝojn, el kiuj nur unu eble interesas al ni. En ĉi tiu teksto ni elektis ke la angulo $\angle(z - x_i)^{k_i}$ estas $k_1 \angle(z - x_i)$.

11 Konkludo

Komencante pri harmoniaj funkcioj, ni difinis SC mapojn. La interesa aspekto de tiaj mapoj estas, ke iliaj bordoj estas rektaj segmentoj. Ni tiam eksploris plurajn eblecojn de segmentoj, kaj klasifikis ilin je kvar tipoj: a, b, c, d. Ni montris ekzemplon el ĉiu tipo kaj poste ni komentis, ke tiaj mapoj memorigas nin pri movado de fluido. Tiam ni pripensis pli interesan ekzemplon de piliero en rivero, faritan per SC mapo.

Krom tiuj fizikaj aspektoj de SC mapoj, ni detale pridiskutis la difinon de angulo en tiuj mapoj. Tiu diskuto enmiksigis tra nia tuta artikolo. En sekcio 10 ni revenis al tiu diskuto kaj aldonis eĉ pli da detalojn.

então o semiplano superior mostra um pilar na borda do canal.

10 Comentários

O uso de potências não-inteiras k_i em (3) e (4) força uma convenção para ângulo de um complexo. Aqui nós propusemos que os ângulos sejam indicados no intervalo $(-\pi, \pi]$; isso facilita muito obter imagens das retas R^- (seção 4). Entretanto, esta convenção não é universal; outros intervalos frequentemente usados são $[0, 2\pi)$ e $(-\pi/2, 3\pi/2]$, por exemplo. Se alguma dessas convenções alternativas for usada, nossa fórmula (9) de ângulo de derivada deve ser modificada, bem como a análise feita na seção 4.

Ainda mais, a convenção $\alpha \in (-\pi, \pi]$ não basta para desambiguar a transformação $w(z)$ como na (3). De fato, há ainda escolhas que devemos fazer para termos a solução que queremos. Por exemplo, se algum expoente k_i for m/n , onde m e n sejam primos entre si (2 e 9, por exemplo), então $(z - x_i)^{m/n}$ tem n possíveis orientações diferentes, dentre as quais talvez só uma nos interesse. Neste texto nós escolhemos que o ângulo $\angle(z - x_i)^{k_i}$ fosse $k_1 \angle(z - x_i)$.

11 Conclusão

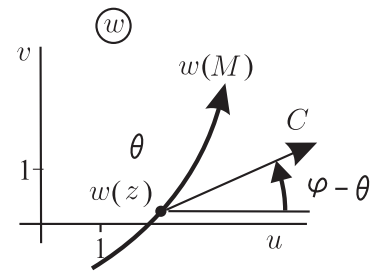
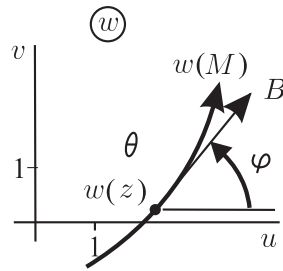
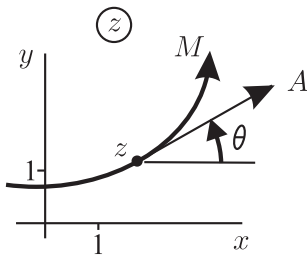
Iniciando com funções harmônicas, definimos mapas SC. O aspecto interessante de tais mapas é que suas bordas são segmentos de reta. Nós então exploramos várias possibilidades de segmentos, e os classificamos em quatro tipos: a, b, c, d. Nós mostramos exemplos de cada tipo e depois comentamos que tais mapas nos lembram movimentos de fluidos. Então conjecturamos um exemplo mais interessante de um pilar em um rio, feito por um mapa SC.

Além desses aspectos físicos dos mapas SC, nós discutimos detalhadamente a definição de ângulo nesses mapas. Essa discussão permeou todo nosso artigo. Na seção 10 nós voltamos a essa discussão e até apresentamos mais deta-

En sekvanta artikolo ni plu eksploros modeladon de fluido per SC mapoj. Ni donos pli interesajn ekzemplojn kaj studos kinematikajn detalojn kiel rapido, ktp.

A Noto pri $dw(z)/dz$

Bonkonate, en studo de realaj funkcioj $f(x)$, la valoro de derivaĵo $df(x)/dx$ en ĉiu punkto x estas la valoro de trigonometria tangento de angulo inter rekto tangenta al kurbo $y = f(x)$ kaj akso x . Populare, $dy(x)/dx = \tan \theta$. Demando: kion oni povas diri pri la responda derivaĵo $dw(z)/dz$, en okazo de funkcioj $w(z)$ analitikaj kompleksaj?



Figuro 18: Maldestre, ebena z kun kurbo M kaj geometria tangento A en punkto z . Centre, ebena w kun imaga kurbo $w(M)$ kaj geometria tangento B en imaga punkto $w(z)$. Dekstre, la orientiĝo C de la kompleksa nombro dw/dz en la imaga punkto $w(z)$.

Figura 18: À esquerda, o plano z com a curva M e a tangente geométrica A no ponto z . No centro, o plano w com a curva imagem $w(M)$ e a tangente geométrica B no ponto imagem $w(z)$. À direita, a orientação C do número complexo dw/dz no ponto imagem $w(z)$.

Indas pliprecizigi la demandon. Vidu, en figuro 18, kurbon M en kompleksa ebena z , kaj estu donata analitika funkcio $w(z)$; tiam ni havos, en la kompleksa ebena w , la kurbon $w(M)$, imagon de la kurbo M . Elektante punkton z en kurbo M , ni volas vidaĵon de la kompleksa nombro $dw(z)/dz$ en la imaga punkto $w(z)$.

Komence ni elektas punkton $z + dz$ en la kurbo M , najbare al la punkto z ; la imagoj de tiuj punktoj estas $w(z)$ kaj $w(z + dz)$, ambaŭ lokitaj en la imaga kurbo $w(M)$. Ni serĉas la vidaĵon de la kvociento (kompleksa nombro) $dw/dz = [w(z + dz) - w(z)]/dz$.

La infinitezima vektoro dz estas orient-

lhes.

Em um próximo artigo exploraremos mais a modelagem de fluido via mapas SC. Daremos exemplos mais interessantes e estudaremos detalhes cinemáticos tais como velocidade, etc.

A Uma nota sobre $dw(z)/dz$

É bem conhecido, no estudo das funções reais $f(x)$, que o valor da derivada $df(x)/dx$ em cada ponto x é o valor da tangente trigonométrica do ângulo entre a reta tangente à curva $y = f(x)$ e o eixo x . Popularmente, $dy(x)/dx = \tan \theta$. Pergunta: o que se pode dizer sobre a correspondente derivada $dw(z)/dz$, no caso das funções $w(z)$ complexas analíticas?

Convém melhor explicar a pergunta. Veja na figura 18 uma curva M no plano complexo z , e seja dada uma função analítica $w(z)$; teremos então no plano complexo w a curva $w(M)$, imagem da curva M . Escolhendo um ponto z na curva M , queremos uma visualização do número complexo $dw(z)/dz$ no ponto imagem $w(z)$.

Inicialmente escolhemos um ponto $z + dz$ na curva M , vizinho ao ponto z ; as imagens desses pontos são $w(z)$ e $w(z + dz)$, ambas localizadas na curva imagem $w(M)$. Buscamos a visualização do cociente $dw/dz = [w(z + dz) - w(z)]/dz$, um número complexo.

O vetor infinitesimal dz está orientado

ita kiel la geometria tangento A al la kurbo M en la punkto z . Simile, la infinitezima vektoro $dw = w(z + dz) - w(z)$ estas orientita kiel la geometria tangento B al la imaga kurbo $w(M)$ en la imaga punkto $w(z)$. Tial la modulo de dw/dz estas la kvociento de la moduloj de tiuj infinitezimaj vektoroj, kaj la orientiĝo de dw/dz estas la diferenco de la respondaj orientiĝoj; tio estas, $\angle(dw/dz) = \angle dw - \angle dz = \varphi - \theta$. Figura 18 montras la orientiĝon C de la kompleksa nombro $dw(z)/dz$.

Do la vektoro $dw(z)/dz$ ĝenerale ne estas same orientita kiel la geometria tangento B al imaga kurbo $w(M)$. Por ke la du orientiĝoj koincidas, bezonas okazi $\theta = 0$, tio estas, A bezonas esti *horizontala*. Okazas, ke linioj R^+ kaj R^- en transformoj de Schwarz-Christoffel estas horizontalaj rektoj, tiam la angulo de la derivaĵo dw/dz koincidas kun la klino de la imago de tiuj rektoj; ĉi tiu fakto estis uzita en sekcioj 3 kaj 4.

como a tangente geométrica A à curva M no ponto z . Igualmente, o vetor infinitesimal $dw = w(z + dz) - w(z)$ está orientado como a tangente geométrica B à curva imagem $w(M)$ no ponto imagem $w(z)$. Portanto o módulo de dw/dz é o cociente dos módulos desses vetores infinitesimais, e a orientação de dw/dz é a diferença das correspondentes orientações; isto é, $\angle(dw/dz) = \angle dw - \angle dz = \varphi - \theta$. A figura 18 mostra a orientação C do número complexo $dw(z)/dz$.

Portanto o vetor $dw(z)/dz$ geralmente não tem a mesma orientação que a tangente geométrica B à curva imagem $w(M)$. Para que as duas orientações coincidam, precisa ocorrer $\theta = 0$, isto é, A precisa ser *horizontal*. Acontece que as linhas R^+ e R^- nas transformações de Schwarz-Christoffel são retas horizontais, portanto o ângulo da derivada dw/dz coincide com a inclinação da imagem dessas retas; este fato foi usado nas seções 3 e 4.

Citaĵoj

- [1] F.B. Hildebrand, *Advanced Calculus for Engineers*, Prentice-Hall, Inc. (1957);
- [2] Konrad Knopp, *Teoría de Funciones*, Editorial Labor, S.A. (1956);
- [3] Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*, Clarendon Press-Oxford (1997);
- [4] H.B. Dwight, *Tables of integrals and other mathematical data*, 4th Ed. (1961).

NOTAS DE FÍSICA é uma pré-publicação de trabalho original em Física.
Pedidos de cópias desta publicação devem ser enviados aos autores ou ao:

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Área de Publicações
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150 – 4^o andar
22290-180 – Rio de Janeiro, RJ
Brasil
E-mail: alinecd@cbpf.br/valeria@cbpf.br
<http://portal.cbpf.br/publicacoes-do-cbpf>

NOTAS DE FÍSICA is a preprint of original unpublished works in Physics.
Requests for copies of these reports should be addressed to:

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Área de Publicações
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150 – 4^o andar
22290-180 – Rio de Janeiro, RJ
Brazil
E-mail: alinecd@cbpf.br/valeria@cbpf.br
<http://portal.cbpf.br/publicacoes-do-cbpf>