NOTAS DE FÍSICA

VOLUME X

N° 2

RÉSULTATS RÉCENTS ET PROBLÈMES DE NATURE ALGÉBRIQUE EN THÉORIE DE L'APPROXIMATION (RÉSUMÉ)

par

Leopoldo Nachbin

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71

RIO DE JANEIRO

1962

Notas de Física - Volume X - Nº 2

RÉSULTATS RÉCENTS ET PROBLÈMES DE NATURE ALGÉBRIQUE EN THÉORIE DE L'APPROXIMATION (RÉSUMÉ)*

Leopoldo Nachbin**
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Universidade do Brasil
Rio de Janeiro

(Reçu le 3 Septembre, 1962)

§ 1. La première partie de l'exposé concerne les algèbres et modules de fonctions différentiables, c'est-à-dire le problème d'approximation de Weierstrass pour les fonctions différentiables.

Soient E une variété m-différentiable et $\mathcal{E}^m(E)$ l'algèbre des fonctions réelles m-différentiables sur E, munie de la topologie de la convergence uniforme d'ordre m sur les parties compactes de E.

La structure des idéaux fermés de $\mathcal{E}^m(E)$ est connue (Whitney [6]).

La nature des sous-algèbres denses de $\mathcal{E}^m(E)$ est aussi connue (Nachbin[2]).

---

* Texte résumé d'une conférence au Congrès International des Mathématiciens, Stockholm, Suède, 15-22 Août, 1962, à paraitre sous forme complète dans les comptes rendus de cette réunion.

** Actuellement à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

D'une façon plus générale, $\mathcal{A}$ étant une sous-algèbre contenant 1 de $\mathcal{E}^m(E)$ et $\mathcal{W}$ étant un $\mathcal{A}$-sous-module de $\mathcal{E}^m(E)$, on se demande si l'adhérence de $\mathcal{W}$ pour la topologie précitée est identique à son adhérence pour la topologie de la convergence uniforme d'ordre m seulement sur les parties compactes de E sur chacune desquelles les fonctions de $\mathcal{A}$ soient constantes.

Des questions plus générales se posent pour les fonctions m-différentiables à valeurs vectorielles et pour des espaces m-différentiables au lieu de variétés m-différentiables, en vue des résultats connus dans le cas des fonctions continues.

La détermination (Nachbin[3]) de toutes les algèbres topologiques localement convexes admettant un calcul symbolique avec des fonctions réelles m-différentiables de variables réelles, faisant intervenir non seulement des algèbres locales mais aussi des algèbres semi-locales, nous amène à des conjectures qui restent à elucider.

§ 2. La deuxième partie de l'exposé concerne l'approximation polynomiale pondérée des fonctions continues, donc le problème d'approximation de Serge Bernstein pour des fonctions continues.

Soient E un espace uniformisable séparé, N une partie fermée de E, $\mathcal{A}$ une sous-algèbre contenant 1 de l'algèbre $\mathcal{C}(\complement N)$ des fonctions réelles continues sur l'ouvert complémentaire de N dans E, $\mathcal{W}$ un sous-espace vectoriel de l'idéal $\mathcal{C}_N(E)$ des fonctions réelles continues sur E s'annulant sur N tel que l'espace vectoriel

$\mathcal{W}|\complement N$, restriction de $\mathcal{W}$ à $\complement N$, soit un $\mathcal{A}$-module.

Le problème de Bernstein consiste à chercher, sous de telles conditions, une description de l'adhérence de $\mathcal{W}$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de E. On appele problème d'approximation de Weierstrass le cas particulier où N est vide.

On dit que $\mathcal{W}$ est de type fini sous $\mathcal{A}$ si l'adhérence de $\mathcal{W}$ pour la topologie précitée coincide avec son adhérence pour la topologie de la convergence uniforme seulement sur les parties compactes X de E contenant N telles que sur chaque $X \cap \complement N$ les fonctions de $\mathcal{A}$ soient constantes. On a toujours $\mathcal{W}$ de type fini sous $\mathcal{A}$ si N est vide.

On peut se poser le problème de Bernstein strict, consistant à trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on ait le cas de type fini.

Ce problème strict est résolu si E est la droite réelle R complétée par le point à l'infini et N est réduit au point à l'infini, $\mathcal{A}$ étant l'algèbre des polynômes sur R et $\mathcal{W}$ ayant un générateur partout non nul (Pollard[5]).

Des conditions suffisantes générales sont connues (Malliavin[1], Nachbin[4]).

Bien que le problème de Weierstrass soit complètement résolu par le théorème de Weierstrass-Stone, le problème de Bernstein général ou strict et ses rapports avec les fonctions vectorielles quasi-analytiques restent ouverts.

§ 3. Les deux parties de l'exposé sont des cas particuliers d'une même question, à savoir le problème de Bernstein pour les fonctions différentiables.

Ces questions se posent pour des algèbres de fonctions complexes non nécessairement auto-adjointes et se formulent en termes d'algèbres d'opérateurs sur des espaces vectoriels topologiques, de façon à avoir un sens dans le cas non-commutatif.

In faut remarquer que même le problème de Weierstrass n'est pas complètement résolu dans le cas général non nécessairement auto-adjoint et non nécessairement commutatif.

* * *

Bibliographie

1. MALLIAVIN, P. - L'approximation Polynomiale Ponderée sur un Espace Localement compact - American Journal of Mathematics, vol. 81 (1959).
2. NACHBIN, L. - Sur les Algèbres Denses de Fonctions Différentiables sur une Varieté - Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 228 (1949).
3. NACHBIN, L. - Algebras of Finite Differential Order and the Operational Calculus - Annals of Mathematics, vol. 70 (1959).
4. NACHBIN, L. - On the Weighted Polynomial Approximation in a Locally Compact Space - Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, vol. 47 (1961).
5. POLLARD, H. - The Bernstein Approximation Problem - Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 6 (1955).
6. WHITNEY, H. - On Ideals of Differentiable Functions - American Journal of Mathematics, vol. 70 (1948).

****
****