CBPF-NF-002/06

Uma sugestão para o tratamento das dimensões na Teoria das Supercordas

*Gentil Lopes da Silva**

19 de janeiro de 2006

"Tudo isso, que à primeira vista parece excesso de irrazão, na verdade é o efeito da finura e da extensão do espírito humano e o método para encontrar verdades até então desconhecidas." **Voltaire (17ª Carta)**

Resumo: Neste trabalho mostramos uma técnica para transitar entre dimensões arbitrárias: seja no sentido de reduzir, quanto elevar, uma dimensão à outra. Cremos que o mesmo possa ser útil ao entendimento de algumas questões concernentes às dimensões na Teoria das Supercordas. Em resumo: provamos a possibilidade teórica (matemática) da *transposição* de dimensões.

1 Introdução

A teoria física das supercordas só possui consistência em um *espaço multidimensional* ([1]). Um dos campos de pesquisa desta teoria é o que estuda como estas dimensões estão inter-relacionadas com as três dimensões (espaciais) conhecidas. É exatamente neste contexto que situa-se o nosso trabalho, pois mostramos como podemos "conectar" um número arbitrário de dimensões.

O presente trabalho se constitui numa continuação do anterior ([6]), sendo aquele um pré-requisito para o entendimento deste, inclusive no que diz respeito a notações.

2 Uma construção simplificada da curva de Peano

O século XIX se iniciou com a descoberta de que curvas e funções não precisam ser do tipo bem comportado, o que até então se supunha. Peano† em 1890 mostrou até que ponto a matemática podia insultar o senso comum quando, tratando do aprofundamento dos conceitos de *continuidade* e *dimensão*, publica a sua famosa curva, proposta como cobrindo totalmente uma superfície plana quadrangular.

No presente trabalho construimos uma versão simplificada da curva de Peano, bem

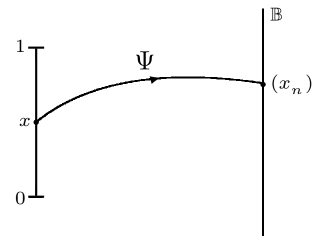
*Deptº de matemática da UFRR, email: gentil@dmat.ufrr.br

†Giuseppe Peano (1858 – 1932), natural de Cuneo, Itália, foi professor da Academia Militar de Turin, com grandes contribuições à Matemática. Seu nome é lembrado hoje em conexão com os *axiomas de Peano* dos quais dependem tantas construções rigorosas da álgebra e da análise.

como o quadrado hiper-mágico, uma espécie de “inversa” desta curva.

• Inicialmente vamos definir a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \Psi\colon\ [0,\,1] &\longrightarrow \mathbb{B} \\ x &\longmapsto (x_n) \end{aligned}$$



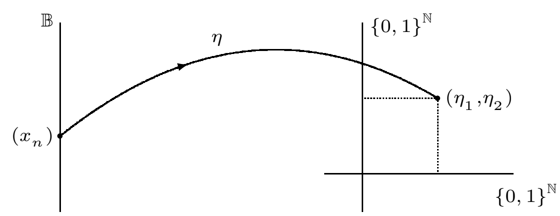
Onde associamos a cada $x \in [0,1]$ sua representação na base binária.

Ψ é uma bijeção. De fato, é injetiva porquanto se $x \neq y$, como a representação binária é única (ver [6]), resulta que $(x_n) \neq (y_n)$, isto é, $\Psi(x) \neq \Psi(y)$.

É sobrejetiva, porquanto dado $(x_n) \in \mathbb{B}$ esta é imagem, por Ψ, de $x = \sum \frac{x_n}{2^n} \in [0,\,1]$. Portanto Ψ admite inversa: Ψ^{-1}.

• Agora vamos definir uma aplicação (η), assim:

$$\begin{aligned} \eta\colon \mathbb{B} &\longrightarrow \{0,\,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,\,1\}^{\mathbb{N}} \\ (x_n) &\longmapsto \big(\eta_1(x_n),\, \eta_2(x_n)\big) \end{aligned}$$



Onde $\eta_i : \mathbb{B} \longrightarrow \{0,\,1\}^{\mathbb{N}}$ $(i = 1,\,2.)$ são dadas por

$$\eta_1\big((x_n)\big) = \eta_1(x_1x_2x_3\ldots) = (x_1x_3x_5\ldots)$$

$$\eta_2\big((x_n)\big) = \eta_2(x_1x_2x_3\ldots) = (x_2x_4x_6\ldots)$$

Isto é, η_1 toma de $\big(x_n\big)$ sua subseqüência de índices ímpares e η_2 toma de $\big(x_n\big)$ sua subseqüência de índices pares:

$$\begin{tikzcd} & (x_1x_3x_5x_7\ldots) \\ (x_1x_2x_3x_4x_5\ldots) \arrow[ur, "\eta_1"] \arrow[dr, "\eta_2"'] & \\ & (x_2x_4x_6x_8\ldots) \end{tikzcd}$$

Dizemos que a aplicação η **demultiplexa** a seqüência $\big(x_n\big)$.

A aplicação η é injetiva porquanto

$$\begin{aligned}\eta(x_n)=\eta(y_n) &\Rightarrow \big(\eta_1(x_n),\, \eta_2(x_n)\big)=\big(\eta_1(y_n),\, \eta_2(y_n)\big)\\ &\Rightarrow \big((x_1x_3x_5\ldots),\, (x_2x_4x_6\ldots)\big)=\big((y_1y_3y_5\ldots),\, (y_2y_4y_6\ldots)\big)\\ &\Rightarrow (x_1x_3x_5\ldots)=(y_1y_3y_5\ldots);\ (x_2x_4x_6\ldots)=(y_2y_4y_6\ldots)\\ &\Rightarrow (x_n)=(y_n).\end{aligned}$$

A aplicação η não é sobrejetiva. De fato, por exemplo o ponto

$$(0\,1\,1\,1\,1\ldots,\ 0\,1\,1\,1\,1\ldots)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

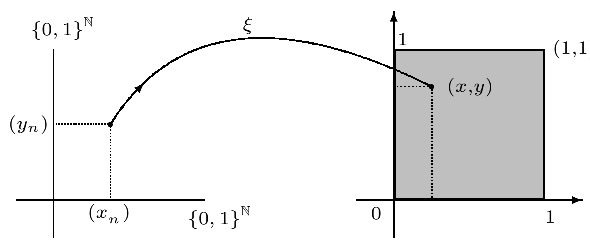
não é imagem de nenhum ponto do domínio. Portanto η não admite inversa.

- Agora vamos definir a aplicação ξ:

$$\begin{aligned}\xi\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbf{I}\times\mathbf{I}\\ \big((x_n),\,(y_n)\big) &\longmapsto (x,\,y)\end{aligned}$$

onde

$$(x,\,y)=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n},\,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{2^n}\Big)$$



A aplicação ξ não é uma bijeção. De fato, ξ não é injetiva (ver [6]).

ξ é sobrejetiva porquanto dado $(x,\,y)=\big(\sum\frac{x_n}{2^n},\,\sum\frac{y_n}{2^n}\big)\in\mathbf{I}\times\mathbf{I}$ este ponto é imagem, por ξ, do ponto $\big((x_n),\,(y_n)\big)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Compondo as aplicações anteriores, temos a seguinte curva de Peano:

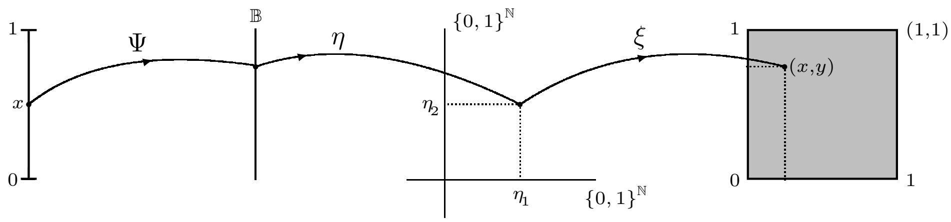
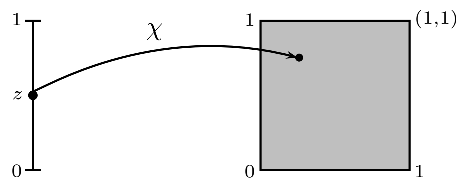


Figura 1: Curva de Peano Simplificada

Resumindo, temos



onde

$$\begin{aligned} \chi\colon \mathbf{I} &\longrightarrow \mathbf{I}\times\mathbf{I} \\ z &\longmapsto (x,y) \end{aligned}$$

é tal que

$$\begin{aligned} \chi = \xi\circ\eta\circ\Psi \quad \Rightarrow \quad \chi(z) &= \big(\xi\circ\eta\circ\Psi\big)(z) = \big(\xi\circ\eta\big)\big(\Psi(z)\big) \\ &= \xi\big(\eta(\Psi(z))\big) \end{aligned}$$

Exemplos:

(**1**) Calcule a imagem, por χ, de $z = 0,8$.

Desenvolvendo $0,8$ na base 2, temos: $0,8 = (1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\ldots)_2$. Então $\Psi(0,8) = (1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\ldots)$. Acompanhe pela figura 1.

Aplicamos η à seqüência anterior:

$$\begin{tikzcd} & (1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\ldots) \\ (1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\ldots) \arrow[ur, "\eta_1"] \arrow[dr, "\eta_2"'] & \\ & (1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\ldots) \end{tikzcd}$$

Temos $\big(\eta_1,\eta_2\big) \in \{0,\,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,\,1\}^{\mathbb{N}}$. Agora aplicamos ξ ao ponto $\big(\eta_1,\eta_2\big)$: $\xi\big((\eta_1,\eta_2)\big) = (x,y)$, onde

$$x = y = \frac{1}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \cdots = \frac{2}{3}$$

Portanto $\chi(0,8) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

(**2**) Calcule a imagem, por χ, de $z = 0,3$.

Desenvolvendo $0,3$ na base 2, temos: $0,3 = (0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\ldots)_2$. Então $\Psi(0,3) = (0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\ldots)$. Aplicamos η à seqüência anterior:

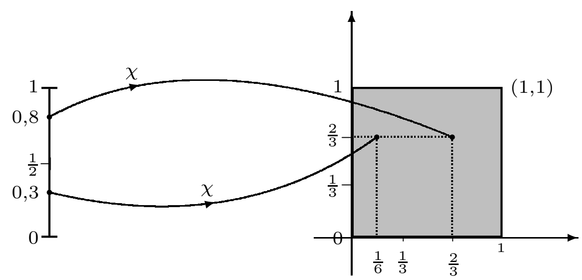
$$\begin{tikzcd}
 & (0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\ldots) \\
(0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\ldots) \arrow[ur, "\eta_1"] \arrow[dr, "\eta_2"'] & \\
 & (1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\ldots)
\end{tikzcd}$$

Agora aplicamos ξ ao ponto (η_1, η_2): $\xi\big((\eta_1, \eta_2)\big) = (x,\, y)$, onde

$$x = \frac{0}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \cdots = \frac{1}{6}$$

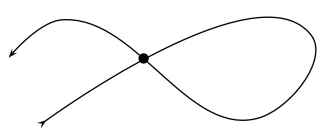
$$y = \frac{1}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \cdots = \frac{2}{3}$$

Portanto $\chi(0,3) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$. No gráfico temos



2.1 Os pontos de auto-interseção na curva de Peano

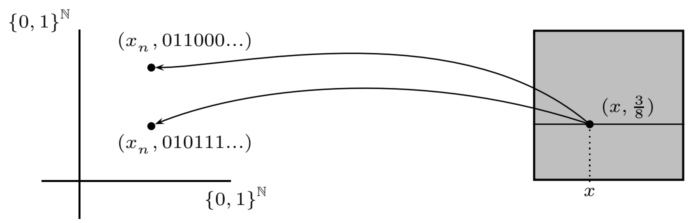
Agora mostraremos como encontrar os pontos de auto-interseção na curva de Peano:



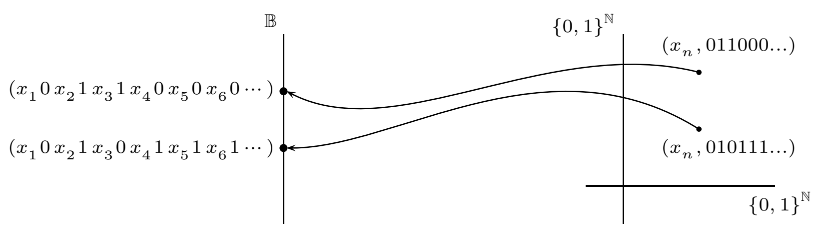
Por exemplo consideremos as igualdades:

$$\frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \cdots = \frac{3}{8} = \frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \cdots$$

Na figura seguinte escolhemos o ponto $\left(x, \frac{3}{8}\right)$, isto é, fixamos a ordenada (altura) enquanto a abscissa pode variar.



Os dois ponto no diagrama à esquerda são imagens de pontos distintos em $\mathbb{B}$, assim:



Devemos escolher a seqüência (x_n) de tal modo que $(x_1 0 x_2 1 x_3 0 x_4 1 x_5 1 x_6 1 \cdots) \in \mathbb{B}$. Por exemplo, a a seqüência nula $(0\,0\,0\,0\ldots)$ satisfaz este requisito. Deste modo os dois pontos seguintes

$$(0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\ldots) = \frac{5}{32}$$

$$(0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\ldots) = \frac{13}{192}$$

são tais que

$$\Psi\left(\frac{5}{32}\right) = \Psi\left(\frac{13}{192}\right) = \left(0, \frac{3}{8}\right).$$

Vejamos mais um exemplo:

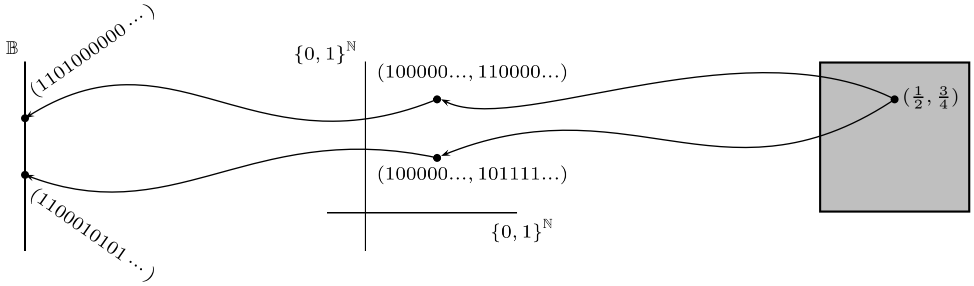
Exemplo: Encontrar os pontos do intervalo que são levados no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Temos as seguintes alternativas:

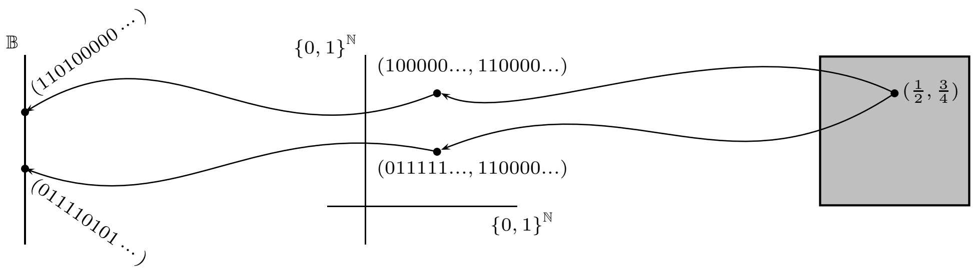
$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \to \begin{cases} \text{VV}: (1\,0\,0\,0\,0\ldots, 1\,1\,0\,0\,0\ldots) \longrightarrow (1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\ldots) \\ \text{VF}: (1\,0\,0\,0\,0\ldots, 1\,0\,1\,1\,1\ldots) \longrightarrow (1\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\ldots) \\ \text{FV}: (0\,1\,1\,1\,1\ldots, 1\,1\,0\,0\,0\ldots) \longrightarrow (0\,1\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,1\ldots) \\ \text{FF}: (0\,1\,1\,1\,1\ldots, 1\,0\,1\,1\,1\ldots) \longrightarrow (0\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,1\,1\ldots) \end{cases}$$

Onde: V significa a verdadeira codificação (da fração) em binário e F a falsa.

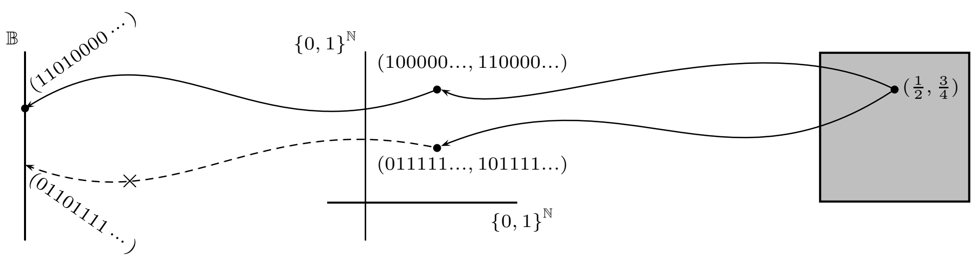
Sendo assim temos:



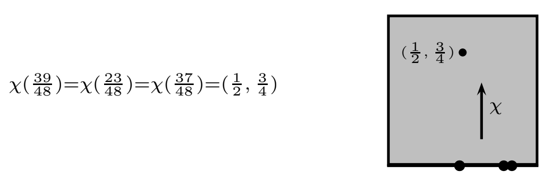
concluimos que $\chi\left(\frac{39}{48}\right) = \chi\left(\frac{37}{48}\right) = \left(\frac{1}{2},\, \frac{3}{4}\right)$. Da alternativa seguinte



concluimos que $\chi\left(\frac{39}{48}\right) = \chi\left(\frac{23}{48}\right) = \left(\frac{1}{2},\, \frac{3}{4}\right)$. Da alternativa seguinte



concluimos que $\chi\left(\frac{39}{48}\right) = \left(\frac{1}{2},\, \frac{3}{4}\right)$. Resumindo, temos



Nesta figura tomamos o intervalo unitário coincidindo com a aresta inferior do quadrado.

Observe que a curva de Peano (χ) pode ser vista de uma outra perspectiva (ainda mais paradoxal): Transfere todos os pontos da aresta inferior do quadrado para o quadrado, sem deixar lugar vazio no quadrado (χ é sobrejetiva) e ainda guarda até três pontos da aresta numa mesma posição do quadrado!.

Sendo $(x,\, y)$ um ponto do quadrado temos as seguintes conclusões:

1ª) Se ambas as coordenadas, x e y, forem frações diádicas então, neste ponto são colocados três pontos da aresta do quadrado. De outro modo: a curva passa três vezes por pontos com ambas as coordenadas frações diádicas;

2ª) Se ambas as coordenadas, x e y, não forem frações diádicas então, neste ponto é colocado apenas um ponto da aresta do quadrado. De outro modo: a curva passa uma única vez em pontos com ambas as coordenadas não diádicas;

3ª) Se apenas uma das coordenadas, x ou y, é uma fração diádica então, neste ponto é colocado dois pontos da aresta do quadrado. De outro modo: a curva passa duas vezes em pontos com apenas uma coordenada fração diádica;

4ª) O conjunto dos pontos de auto-interseção da curva é infinito enumerável e denso no quadrado.

3 O quadrado hiper-mágico

A seguir construiremos um objeto matemático (tão *patológico* quanto a curva de Peano) o qual, em conjunto com a curva de Peano, nos permitirá transitar entre dimensões arbitrárias.

Definição 1 (Quadrado hiper-mágico)**.** *Chama-se quadrado hiper-mágico num espaço métrico* $\big(M,\, d\big)$*, com* M *um quadrado (unitário), a uma aplicação contínua* $\varphi\colon M \to \mathbf{I}$ *injetiva e não sobrejetora.* $\mathbf{I}$ *é um intervalo unitário.*

O que há de paradoxal no quadrado hiper-mágico é que conseguimos transferir todos os pontos do quadrado para sua aresta inferior (ou qualquer outra), sem sobrepor um ponto a outro e ainda sobram infinitos buracos (lacunas) na aresta!

O quadrado hiper-mágico resume-se na composição das aplicações mostradas na figura a seguir:

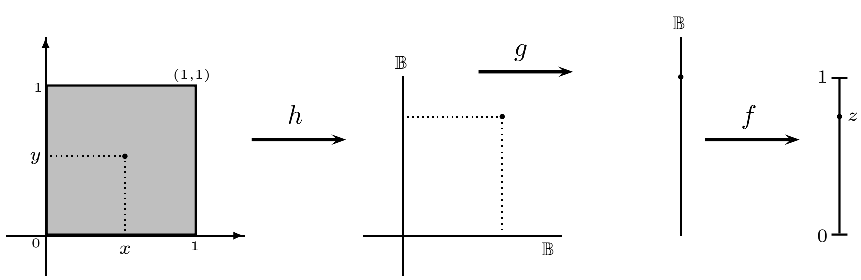


Figura 2: Quadrado hiper-mágico

Onde:

$$\begin{aligned} h\colon \mathbf{I}\times\mathbf{I} &\longrightarrow \mathbb{B}\times\mathbb{B}\\ (x,\,y) &\longmapsto \big((x_n),(y_n)\big)\end{aligned}$$

Associa a cada ponto $(x,\,y)$ do quadrado sua representação binária em $\mathbb{B}\times\mathbb{B}$.

Da unicidade da representação binária resulta que h é uma bijeção.

A aplicação

$$\begin{aligned} g\colon \quad \mathbb{B}\times\mathbb{B} &\longrightarrow \mathbb{B}\\ \big((x_n),(y_n)\big) &\longmapsto (x_1\,y_1\,x_2\,y_2\,x_3\,y_3\ldots)\end{aligned}$$

executa uma **multiplexagem** das seqüências (x_n) e (y_n).

Vamos mostrar que g é injetiva mostrando que $g(x)=g(y)\Rightarrow x=y$. De fato, sejam as seqüências: $(x_n)=g(x)=g(y)=(y_n)$.

(x_n) e (y_n) são imagens, por g, dos pares de seqüências

$$\begin{aligned} x=(u_1\,u_2\,u_3\ldots,\,v_1\,v_2\,v_3\ldots) &\quad\xmapsto{g}\quad (u_1\,v_1\,u_2\,v_2\,u_3\,v_3\ldots)=(x_1\,x_2\,x_3\ldots)\\ y=(z_1\,z_2\,z_3\ldots,\,t_1\,t_2\,t_3\ldots) &\quad\xmapsto{g}\quad (z_1\,t_1\,z_2\,t_2\,z_3\,t_3\ldots)=(y_1\,y_2\,y_3\ldots)\end{aligned}$$

Como $(x_n)=(y_n)$ segue que

$$\begin{aligned} u_1=z_1,\quad u_2=z_2,\quad u_3=z_3,\ldots &\quad\Rightarrow\quad (u_n)=(z_n)\\ v_1=t_1,\quad v_2=t_2,\quad v_3=t_3,\ldots &\quad\Rightarrow\quad (v_n)=(t_n)\end{aligned}$$

portanto $x=y$.

Esta aplicação não é sobrejetora, por exemplo o ponto $(\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots)\in\mathbb{B}$ não é imagem, por g, de nenhum ponto de $\mathbb{B}\times\mathbb{B}$. De fato, suponha, ao contrário, que isto aconteça; isto é que exista um ponto $\big((x_n),\,(y_n)\big)\in\mathbb{B}\times\mathbb{B}$ tal que $g\big((x_n),\,(y_n)\big)=(\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots)$, sendo assim resulta

$$(x_1\,y_1\,x_2\,y_2\,x_3\,y_3\ldots)=(\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots)$$

então,

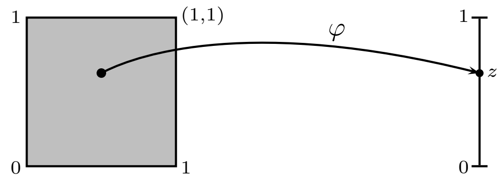
$$\begin{aligned} x_1=0,\quad x_2=1,\quad x_3=1,\quad x_4=1,\ldots &\quad\Rightarrow\quad (x_n)=(0\,1\,1\,1\,1\ldots)\\ y_1=1,\quad y_2=0,\quad y_3=0,\quad y_4=0,\ldots &\quad\Rightarrow\quad (y_n)=(1\,0\,0\,0\,0\ldots)\end{aligned}$$

Logo,

$$\big((x_n),\,(y_n)\big)=\big((0\,1\,1\,1\,1\ldots),\,(1\,0\,0\,0\,0\ldots)\big)\in\mathbb{B}\times\mathbb{B},$$

o que contradiz a construção (definição) de $\mathbb{B}$.

Definimos a aplicação f como $f=\Psi^{-1}$ (ver pág. 2), resultando assim que f é uma bijeção. Resumindo, temos



onde

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbf{I}\times\mathbf{I} &\longrightarrow \mathbf{I}\\ (x,\,y) &\longmapsto z \end{aligned}$$

é tal que

$$\begin{aligned} \varphi = f\circ g\circ h \quad\Rightarrow\quad \varphi(x,\,y) &= \big(f\circ g\circ h\big)(x,\,y)\\ &= (f\circ g)\big(h(x,\,y)\big)\\ &= f\Big(g\big(h(x,\,y)\big)\Big) \end{aligned}$$

Exemplos:

(**1**) O centro do quadrado é transformado em que ponto de $\mathbf{I}$?. Isto é, calcule $\varphi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Acompanhe pela figura 2: Temos $(1\,0\,0\,0\,0\,0\,\ldots)_2 = \frac{1}{2}$. Então

$$h\Big(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\Big) = (1\,0\,0\,0\,0\,0\,\ldots,\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,\ldots)$$

Aplicando g a este ponto obtemos:

$$\begin{tikzcd} (1\,0\,0\,0\,0\,0\,\ldots) \arrow[dr] & \\ & (1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,\ldots) \\ (1\,0\,0\,0\,0\,0\,\ldots) \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

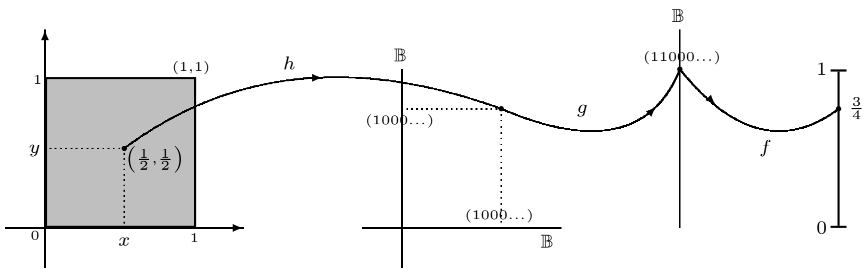
logo

$$g\big((1\,0\,0\,0\,0\,0\,\ldots,\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,\ldots)\big) = (1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots) \in \mathbb{B}.$$

Agora entregamos a seqüência $(1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots)$ a f, isto é

$$f(1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots) = \frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{0}{2^3}+\frac{0}{2^4}+\frac{0}{2^5}+\cdots = \frac{3}{4}$$

Finalmente, $\varphi\big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big) = \frac{3}{4}$. Geometricamente, temos



(**2**) Calcule $\varphi\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Temos $\frac{1}{3} = (0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots)_2$. Então

$$h\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = (0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots, 0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots)$$

Aplicando g a este ponto obtemos:

$$\begin{matrix}(0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots) & \searrow & \\ & g & (0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\ldots) \\ (0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots) & \nearrow & \end{matrix}$$

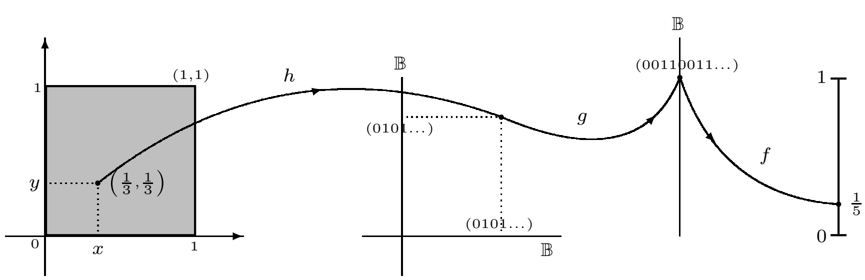
Logo,

$$g\big((0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots, 0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots)\big) = (0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\ldots)$$

Entregando esta última seqüência a f, temos

$$\begin{aligned} f(0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\ldots) &= \frac{0}{2^1}+\frac{0}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{0}{2^5}+\frac{0}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\cdots \\ &= \left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^{11}}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^{12}}+\cdots\right) \\ &= \frac{2}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Portanto $\varphi\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{5}$. Geometricamente, temos



3.1 Como encontrar buracos (lacunas) na aresta do quadrado

Mostraremos agora como encontrar pontos na aresta $[\,0,\,1\,]\times\{0\}$ que não são imagens, por φ, de pontos do quadrado. Inicialmente observe que sendo f uma bijeção a cada buraco em $\mathbb{B}$ corresponde um buraco em $[\,0,\,1\,]$. Para construir um buraco no intervalo basta construir um em $\mathbb{B}$, como por exemplo, $\mathbb{B} \ni (0\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots) = \frac{5}{12} \in [\,0,\,1\,]$. O diagrama a seguir sugere como construir uma quantidade infinita de buracos:

$$\begin{cases} (0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\ldots) \\ (0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots) \end{cases} \rightarrow (0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots) \in \mathbb{B}$$

$$\begin{cases} (0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\ldots) \\ (0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots) \end{cases} \rightarrow (0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots) \in \mathbb{B}$$

$$\begin{cases} (0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\ldots) \\ (0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots) \end{cases} \rightarrow (0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots) \in \mathbb{B}$$

Os pontos à direita não são imagens, por g, de pontos de $\mathbb{B}\times\mathbb{B}$, por conseguinte suas imagens, por f, são vazios (buracos) em $[\,0,\,1\,]$.

De modo geral, para "gerar" um buraco na aresta tome no quadrado um ponto $(x,\,y)$ no qual apenas uma das coordenadas é fração diádica. Sendo assim temos as seguintes possibilidades:

$$(x,\,y)\colon\ \begin{cases} V\colon \mathbb{B}\times\mathbb{B} \\ F\colon \mathbb{B}\times\{0,\,1\}^{\mathbb{N}} \ \text{ ou } \ \{0,\,1\}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{B} \end{cases}$$

A verdadeira (V) codificação do par $(x,\,y)$ está no conjunto $\mathbb{B}\times\mathbb{B}$ e a falsa (F) em $\mathbb{B}\times\{0,\,1\}^{\mathbb{N}}$ se y for a fração diádica ou em $\{0,\,1\}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{B}$ se x for a fração diádica. Pois bem, a codificação verdadeira vai para um ponto da aresta (ou do intervalo) e a falsa "vai" para um buraco.

Esclarecendo melhor: Dado $(x,\,y)\in\mathbf{I}^2$ no qual x ou (exclusivo) y é fração diádica temos, para este ponto, uma codificação legítima $(x_n,\,y_n)$ e uma espúria $(x'_n,\,y'_n)$. Temos que (x'_n) ou (y'_n) (dependendo de quem seja fração diádica se x ou se y) tem todos os termos iguais a 1 a partir de alguma posição, enquanto que a outra seqüência, não sendo oriunda de uma fração diádica, tem um 0 e também um 1 em posições arbitrariamente grandes. Logo ao se multiplexar $(x'_n,\,y'_n)$ resulta um ponto em $\mathbb{B}$ e a este um buraco na aresta.

Se no par $(x,\,y)$ tivermos duas coordenadas diádicas, teremos as seguintes possibilidades:

$$(x,\,y)\colon\ \begin{cases} V\,V\colon \mathbb{B}\times\mathbb{B} \ \rightarrow\ \text{gera ponto} \\ V\,F\colon \mathbb{B}\times\{0,\,1\}^{\mathbb{N}} \ \rightarrow\ \text{gera buraco} \\ F\,V\colon \{0,\,1\}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{B} \ \rightarrow\ \text{gera buraco} \\ F\,F\colon \{0,\,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,\,1\}^{\mathbb{N}} \ \Rightarrow \notin \mathbb{B}. \end{cases}$$

Sendo $(x,\, y)$ um ponto do quadrado temos as seguintes conclusões:

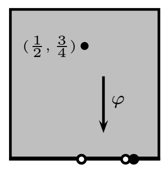
$1^{\underline{a}}$) Se ambas as coordenadas, x e y, forem frações diádicas então este ponto vai para um ponto da aresta e "gera" dois buracos;

$2^{\underline{a}}$) Se ambas as coordenadas, x e y, não forem frações diádicas então este ponto vai para um ponto do intervalo e não "gera" nenhum buraco;

$3^{\underline{a}}$) Se apenas uma das coordenadas, x ou y, é uma fração diádica então este ponto vai para um ponto do intervlo e "gera" um buraco;

$4^{\underline{a}}$) o conjunto dos buracos é infinito enumerável, porquanto o conjunto dos pontos $(x,\, y) \in \mathbf{I}^2$ com coordenadas diádicas é enumerável.

Exemplo: Tendo em conta o exemplo dado à pág. 6 o ponto $\left(\frac{1}{2},\, \frac{3}{4}\right)$ vai, por φ, para o ponto $\frac{39}{48}$ e gera os buracos $\frac{23}{48}$ e $\frac{37}{48}$, assim:



Pode ser provado que o conjunto destes buracos é denso na aresta do quadrado (ou ainda, no intervalo $[\,0,\, 1\,]$). Isto significa que, fixado arbitrariamente um ponto da aresta, ou este é um buraco ou arbitrariamente próximo deste encontra-se um buraco.

Não é difícil mostrar que todas as aplicações definidas anteriormente são contínuas.

4 A curva de Peano no cubo

De modo inteiramente análogo, podemos construir uma curva de Peano χ entre o intervalo unitário e o cubo unitário $[0,\, 1]^3$, assim:

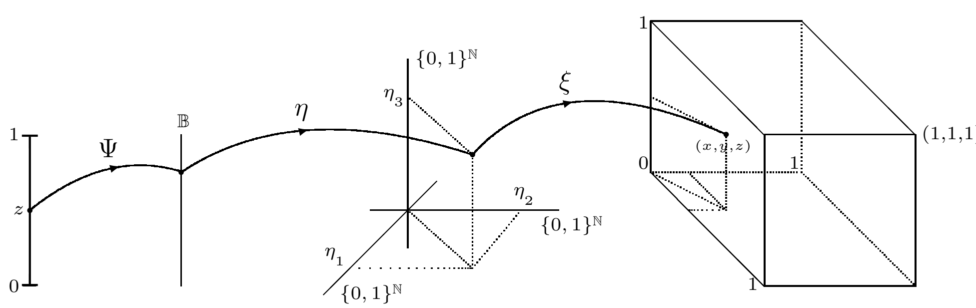


Figura 3: Curva de Peano no Cubo

Nesta figura η faz uma demultiplexagem de uma seqüência $\left(x_n\right) \in \mathbb{B}$. Isto é, η toma uma seqüência (x_n) e a separa em três subseqüências

$$\eta\big((x_n)\big) = \big(\eta_1(x_n), \eta_2(x_n), \eta_3(x_n)\big)$$

Então podemos tomar:

$$\eta_1(x_1x_2x_3\ldots) = (x_1x_4x_7x_{10}\ldots)$$
$$\eta_2(x_1x_2x_3\ldots) = (x_2x_5x_8x_{11}\ldots)$$
$$\eta_3(x_1x_2x_3\ldots) = (x_3x_6x_9x_{12}\ldots)$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & (x_1x_4x_7x_{10}\ldots) \\ (x_1x_2x_3x_4x_5\ldots) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & (x_2x_5x_8x_{11}\ldots) \\ & (x_3x_6x_9x_{12}\ldots) \end{tikzcd}$$

Exemplos:

(**1**) Calcule a imagem, por χ, de $x = 0,5$.

Desenvolvendo $0,5$ na base 2, temos $(1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots)_2 = \frac{1}{2}$.
Então $\Psi(0,5) = (1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots)$. Agora aplicamos η à seqüência anterior, assim

$$\eta_1(1000000\ldots) = (1000000\ldots)$$
$$\eta_2(1000000\ldots) = (0000000\ldots)$$
$$\eta_3(1000000\ldots) = (0000000\ldots)$$

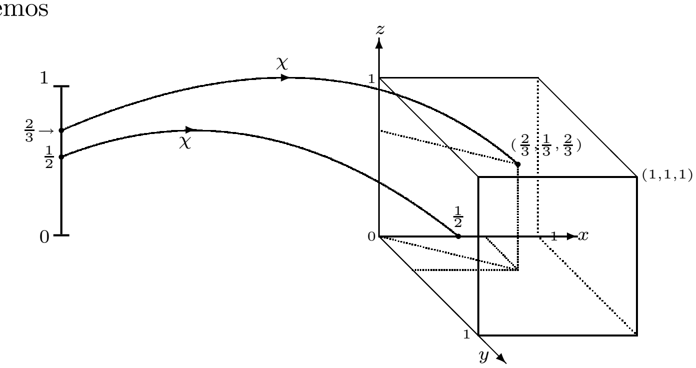
Agora aplicamos ξ ao ponto (η_1, η_2, η_3): $\xi\big((\eta_1, \eta_2, \eta_3)\big) = (x, y, z)$, obtendo $\chi\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$.

(**2**) Calcule a imagem, por χ, de $x = 2/3$.

Desenvolvendo $2/3$ na base 2, obtemos $\frac{2}{3} = (1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots)_2$. Então $\Psi(2/3) = (1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots)$. Aplicamos η à seqüência anterior:

$$\eta_1(1010101010\ldots) = (1010101\ldots)$$
$$\eta_2(1010101010\ldots) = (0101010\ldots)$$
$$\eta_3(1010101010\ldots) = (1010101\ldots)$$

Agora aplicamos ξ ao ponto (η_1, η_2, η_3): $\xi\big((\eta_1, \eta_2, \eta_3)\big) = (x, y, z)$, obtendo $\chi\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
Graficamente, temos



(**3**) Encontre todos os pontos do intervalo que são transferidos, por χ, para o centro do cubo. Isto é, resolva a equação $\chi(x) = \left(\frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right)$.

Temos as seguintes alternativas:

$$\left(\frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right) \to \begin{cases} \text{VVV}: (1\,0\,0\,0\ldots,\, 1\,0\,0\,0\ldots,\, 1\,0\,0\,0\ldots) \longrightarrow (1\,1\,1\ \mathbf{0\,0\,0}\,0\,0\,0\ldots) \\ \text{VVF}: (1\,0\,0\,0\ldots,\, 1\,0\,0\,0\ldots,\, 0\,1\,1\,1\ldots) \longrightarrow (1\,1\,0\ \mathbf{0\,0\,1}\,0\,0\,1\ldots) \\ \text{VFV}: (1\,0\,0\,0\ldots,\, 0\,1\,1\,1\ldots,\, 1\,0\,0\,0\ldots) \longrightarrow (1\,0\,1\ \mathbf{0\,1\,0}\,0\,1\,0\ldots) \\ \text{VFF}: (1\,0\,0\,0\ldots,\, 0\,1\,1\,1\ldots,\, 0\,1\,1\,1\ldots) \longrightarrow (1\,0\,0\ \mathbf{0\,1\,1}\,0\,1\,1\ldots) \\ \text{FVV}: (0\,1\,1\,1\ldots,\, 1\,0\,0\,0\ldots,\, 1\,0\,0\,0\ldots) \longrightarrow (0\,1\,1\ \mathbf{1\,0\,0}\,1\,0\,0\ldots) \\ \text{FVF}: (0\,1\,1\,1\ldots,\, 1\,0\,0\,0\ldots,\, 0\,1\,1\,1\ldots) \longrightarrow (0\,1\,0\ \mathbf{1\,0\,1}\,1\,0\,1\ldots) \\ \text{FFV}: (0\,1\,1\,1\ldots,\, 0\,1\,1\,1\ldots,\, 1\,0\,0\,0\ldots) \longrightarrow (0\,0\,1\ \mathbf{1\,1\,0}\,1\,1\,0\ldots) \\ \text{FFF}: (0\,1\,1\,1\ldots,\, 0\,1\,1\,1\ldots,\, 0\,1\,1\,1\ldots) \longrightarrow (0\,0\,0\ \mathbf{1\,1\,1}\,1\,1\,1\ldots) \end{cases}$$

Destas, apenas uma combinação (FFF) não pertence a $\mathbb{B}$, portanto não é oriunda da codificação de nenhum ponto do intervalo $[\,0,\, 1\,]$, sendo assim temos:

$$\chi\Big(\frac{49}{56}\Big) = \chi\Big(\frac{43}{56}\Big) = \chi\Big(\frac{37}{56}\Big) = \chi\Big(\frac{31}{56}\Big) = \chi\Big(\frac{25}{56}\Big) = \chi\Big(\frac{19}{56}\Big) = \chi\Big(\frac{13}{56}\Big) = \Big(\frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\Big)$$

Sendo $(x,\, y,\, z)$ um ponto do cubo temos as seguintes conclusões:

1ª) Se as três coordenadas, x, y e z, forem frações diádicas então, neste ponto são colocados sete pontos da aresta do cubo. De outro modo: a curva passa sete vezes por pontos com as três coordenadas diádicas;

2ª) Se apenas duas coordenadas forem frações diádicas então, neste ponto são colocados quatro pontos da aresta do cubo. De outro modo: a curva passa quatro vezes por pontos com duas coordenadas diádicas;

3ª) Se apenas uma coordenada for fração diádica então, neste ponto são colocados dois pontos da aresta do cubo. De outro modo: a curva passa duas vezes por pontos com uma coordenada diádica;

4ª) Se nenhuma das coordenadas é diádica então, neste ponto é colocado um único ponto da aresta do quadrado. De outro modo: a curva passa uma única vez em pontos com nenhuma coordenada diádica;

5ª) O conjunto dos pontos de auto-interseção da curva é infinito enumerável e denso no cubo.

5 O cubo hiper-mágico

A exemplo do que foi feito para o quadrado também podemos transferir todos os pontos do cubo para uma de suas arestas. Sendo que esta transformação cumpre as mesmas condições que a do quadrado: é contínua, injetiva e não sobrejetiva.

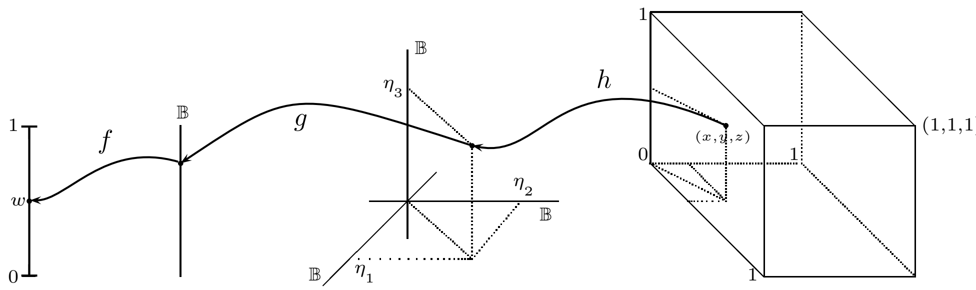


Figura 4: Cubo hiper-mágico

Exemplos:

(**1**) Calcule $\varphi\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$.

Temos $\frac{1}{2} = (1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots)_2$. Logo

$$h\left(0,0,\frac{1}{2}\right) = (000000\ldots, 000000\ldots, 100000\ldots)$$

- Agora aplicamos, ao ponto anterior, g:

$$g\big((000000\ldots, 000000\ldots, 100000\ldots)\big) = (00100000\ldots)$$

- Agora aplicamos, à seqüência anterior, f. Então

$$f\big((00100000\ldots)\big) = \frac{0}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \cdots = \frac{1}{8}.$$

Portanto, $\varphi\left(0,0,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$.

(**2**) Calcule $\varphi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Temos $\frac{1}{2} = (1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots)_2$. Logo

$$h\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = (100000\ldots, 100000\ldots, 100000\ldots)$$

- Agora aplicamos, ao ponto anterior, g. Portanto

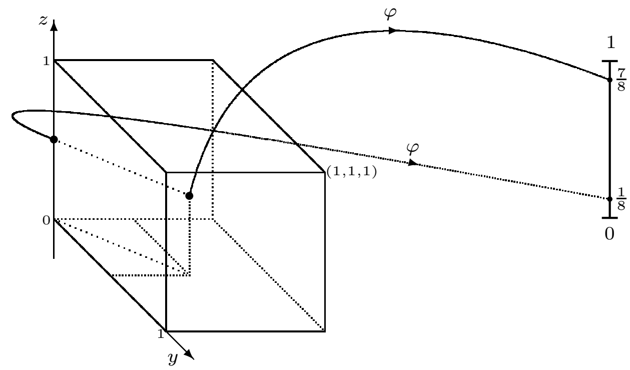
$$g\big((100000\ldots, 100000\ldots, 100000\ldots)\big) = (11100000\ldots)$$

- Agora aplicamos, à seqüência anterior, f. Então

$$f\big((11100000\ldots)\big) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Portanto, $\varphi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$.

Graficamente, temos



Deste exemplo e do exemplo (**3**) (pág. 15) concluimos que o centro do cubo vai para o ponto 7/8 e gera sete buracos na aresta do cubo (ou no intervalo unitário).

Observe que paradoxal: A exemplo do que ocorreu no quadrado hiper-mágico aqui também conseguimos, por φ, transferir o cubo para uma de suas arestas, com a "agravante" de que agora "mais" buracos serão gerados na aresta. Por exemplo um ponto $(x,\, y) \in \mathbf{I}^2$ com ambas as coordenadas diádicas gera dois buracos na aresta do quadrado; por outro lado um ponto $(x,\, y,\, z) \in \mathbf{I}^3$ com duas coordenadas diádicas gera quatro buracos na aresta do cubo e com três coordenadas diádicas gera sete buracos. Resumindo: estamos transferindo para a aresta um "volume" maior de pontos enquanto o número de lugares vazios na aresta aumenta.

Na figura a seguir transferimos, a título de exemplo, os oito vértices do cubo e mais o seu centro para a aresta $5-6$. A seguir mostramos os cálculos para transferir o vértice 1:

Vértices:

$$1:\,(1,\,0,\,0),\quad 2:\,(1,\,1,\,0),\quad 3:\,(1,\,1,\,1),\quad 4:\,(1,\,0,\,1)$$
$$5:\,(0,\,0,\,0),\quad 6:\,(0,\,1,\,0),\quad 7:\,(0,\,1,\,1),\quad 8:\,(0,\,0,\,1),\quad 9:\,\left(\tfrac{1}{2},\,\tfrac{1}{2},\,\tfrac{1}{2}\right).$$

- Imagens dos vértices por φ

$$1:\,(1,\,0,\,0) \longrightarrow \begin{array}{l} 1\,1\,1\,1\,1\ldots \\ 0\,0\,0\,0\,0\ldots \\ 0\,0\,0\,0\,0\ldots \end{array} \longrightarrow \mathbf{1\,0\,0}\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\ldots$$

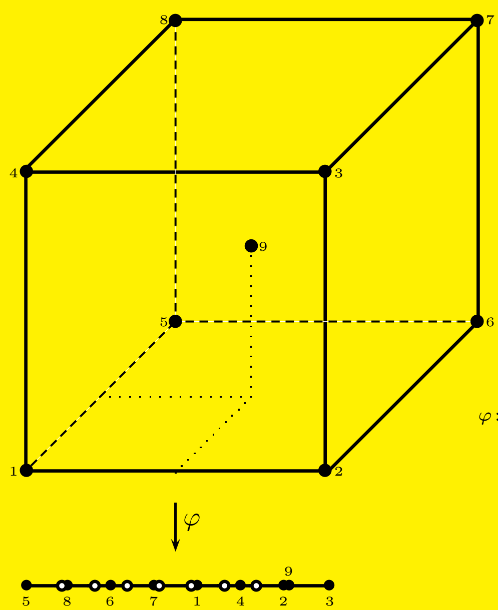
$$\varphi(1) = \frac{1}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{0}{2^8} + \frac{0}{2^9} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^3}} = \frac{4}{7} \simeq 0,5714$$

$$
2:\ (1,1,0) \begin{array}{l} \nearrow\ 1\,1\,1\,1\,1\ldots \bullet \searrow \\ \rightarrow\ 1\,1\,1\,1\,1\ldots \bullet \rightarrow \\ \searrow\ 0\,0\,0\,0\,0\ldots \bullet \nearrow \end{array} \mathbf{1\,1\,0}\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\ldots
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(2) &= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \frac{0}{2^9} + \cdots \\
&= \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \cdots\right) \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^3}} + \frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^3}} = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7} \simeq 0,8571
\end{aligned}
$$

Cubo Hiper-Mágico



$\varphi : [0,1]^3 \longrightarrow [0,1]$

"Tudo isso, que à primeira vista parece excesso de irrazão, na verdade é o efeito da finura e da extensão do espírito humano e o método para encontrar verdadesaté então desconhecidas." **Voltaire (17ª Carta)**

Gentil/2005

Nota: Os sete buracos constantes na aresta foram abertos pelo cntro do cubo.

Naturalmente que, o que foi feito para o quadrado e o cubo, se estende sem dificuldade ao "hipercubo".

6 Inserindo dimensões arbitrárias dentro de dimensões arbitrárias

As aplicações χ e φ, conjuntamente, nos permitem *inserir* dimensões arbitrárias "dentro" de dimensões arbitrárias. Por exemplo para inserir um cubo a dez dimensões em um cubo a três dimensões proceda assim:

$$[\,0,\,1\,]^{10} \xrightarrow{\varphi} [\,0,\,1\,] \xrightarrow{\chi} [\,0,\,1\,]^{3}$$

Para inserir um cubo a três dimensões em um cubo a 10 dimensões proceda assim:

$$[\,0,\,1\,]^{10} \xleftarrow{\chi} [\,0,\,1\,] \xleftarrow{\varphi} [\,0,\,1\,]^{3}$$

7 Possíveis aplicações na Teoria das Supercordas

Estivemos a imaginar possíveis aplicações práticas para estas construções*. Deixamos registrado aqui uma sugestão: a Teoria das Supercordas só possui consistência em um Universo *multidimensional*. O problema é saber como um Universo multidimensional se inter-relaciona com as dimensões conhecidas. Nossa sugestão (conjectura) é que as dimensões extras foram multiplexadas.

Por outro lado acredito que, para interpretarmos corretamente a realidade, basta que haja um "isomorfismo" (identidade) entre nossos modelos (matemáticos) e o pedaço da realidade em consideração. Isto é, não é necessário que a natureza se comporte exatamente tal qual nossos modelos.

Com estas técnicas (multiplexação/demultiplexação) não apenas fazemos uma transposição de dimensões (isto é, de um espaço em outro), como podemos transferir uma corda (ou uma p-brana) de uma dimensão à outra. Vejamos um exemplo do que estamos falando. Suponhamos que um ramo (pedaço) de uma corda (uma-brana) seja dado pelo gráfico da função $f\colon [0,\,1] \longrightarrow [0,\,1]$ dada por $f(x) = x^2$. Vamos transferir os cinco pontos seguintes desta curva, para a terceira dimensão $\big($para $[0,\,1]^3\big)$, assim

*Encontramos na internet um artigo intitulado: "Compressão de Imagens Usando Transformada de Wavelet e Curva de Peano-Hilbert."

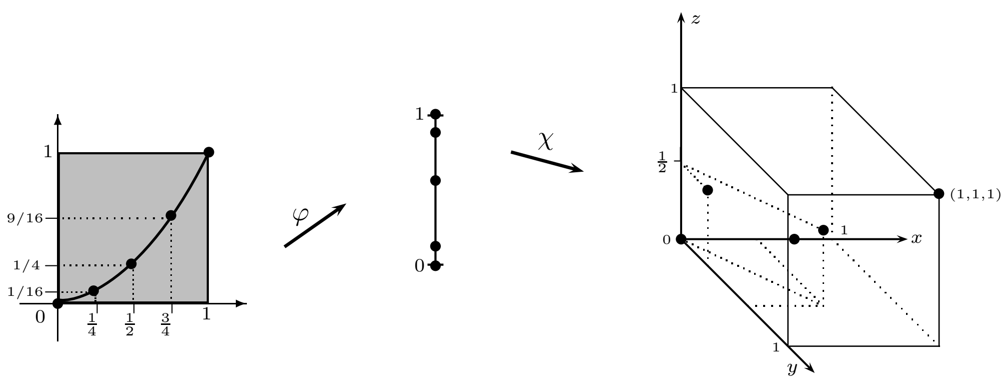
$$\big(0,\,0\big):\quad \begin{cases} 0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots \end{cases} \Rightarrow \quad 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots \quad \Rightarrow \begin{cases} 0\,0\,0\,0\,0\ldots,\ x=0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\ldots,\ y=0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\ldots,\ z=0 \end{cases}$$

$$\big(\tfrac{1}{4},\,\tfrac{1}{16}\big):\quad \begin{cases} 0\,1\,0\,0\,0\,0\ldots \\ 0\,0\,0\,1\,0\,0\ldots \end{cases} \Rightarrow \quad 0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\ldots \quad \Rightarrow \begin{cases} 0\,0\,0\,0\,0\ldots,\ x=0 \\ 0\,0\,1\,0\,0\ldots,\ y=\tfrac{1}{4} \\ 1\,0\,0\,0\,0\ldots,\ z=\tfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\big(\tfrac{1}{2},\,\tfrac{1}{4}\big):\quad \begin{cases} 1\,0\,0\,0\,0\,0\ldots \\ 0\,1\,0\,0\,0\,0\ldots \end{cases} \Rightarrow \quad 1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\ldots \quad \Rightarrow \begin{cases} 1\,1\,0\,0\,0\ldots,\ x=\tfrac{3}{4} \\ 0\,0\,0\,0\,0\ldots,\ y=0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\ldots,\ z=0 \end{cases}$$

$$\big(\tfrac{3}{4},\,\tfrac{9}{16}\big):\quad \begin{cases} 1\,1\,0\,0\,0\,0\ldots \\ 1\,0\,0\,1\,0\,0\ldots \end{cases} \Rightarrow \quad 1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\ldots \quad \Rightarrow \begin{cases} 1\,0\,0\,0\,0\ldots,\ x=\tfrac{1}{2} \\ 1\,0\,1\,0\,0\ldots,\ y=\tfrac{5}{8} \\ 1\,0\,0\,0\,0\ldots,\ z=\tfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\big(1,\,1\big):\quad \begin{cases} 1\,1\,1\,1\,1\,1\ldots \\ 1\,1\,1\,1\,1\,1\ldots \end{cases} \Rightarrow \quad 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\ldots \quad \Rightarrow \begin{cases} 1\,1\,1\,1\,1\ldots,\ x=1 \\ 1\,1\,1\,1\,1\ldots,\ y=1 \\ 1\,1\,1\,1\,1\ldots,\ z=1 \end{cases}$$



8 Apêndice/Partição dos naturais

Se quisermos retirar duas subseqüências de uma dada seqüência $\big(x_n\big)$ podemos nos valer dos seguintes conjuntos de índices:

$$\mathbb{N}_1 = \{1,\,3,\,5,\,7,\,\ldots\}$$
$$\mathbb{N}_2 = \{2,\,4,\,6,\,8,\,\ldots\}$$

Assim,

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & (x_1 x_3 x_5 x_7 \ldots) \\
(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \ldots) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & (x_2 x_4 x_6 x_8 \ldots)
\end{tikzcd}$$

Se quisermos retirar três subseqüências de uma dada seqüência podemos nos valer dos seguintes conjuntos de índices:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_1 &= \{1,\, 4,\, 7,\, 10,\, \ldots\} \\
\mathbb{N}_2 &= \{2,\, 5,\, 8,\, 11,\, \ldots\} \\
\mathbb{N}_3 &= \{3,\, 6,\, 9,\, 12,\, \ldots\}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & (x_1 x_4 x_7 x_{10} \ldots) \\
(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \ldots) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & (x_2 x_5 x_8 x_{11} \ldots) \\
 & (x_3 x_6 x_9 x_{12} \ldots)
\end{tikzcd}$$

É fácil inferir a regra de construção destes conjuntos.

Observamos que estes conjuntos (de índices) são disjuntos, dois a dois, e que a reunião dos mesmos resulta no conjunto dos naturais. Resumimos estas duas observações dizendo que estes conjuntos formam uma *partição* dos naturais.

Agradecimentos: A Deus por ter me concedido gestar e dar à luz a este trabalho. Isto é, assentar este tijolinho em sua magnanima obra.

Referências

[1] Greene, Brian. *O Universo Elegante*. Cia. das Letras, 2001.

[2] Gell-Mann, M. *O Quark e o Jaguar*. Rio de Janeiro, Rocco, 1996.

[3] Weinberg, S. *Sonhos de uma Teoria Final*. Rio de Janeiro, Rocco, 1996.

[4] Kaku, M. *Into the Eleventh Dimension*, in New Scientist, janeiro de 1997, p. 32.

[5] Lima, Elon Lages. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro:IMPA - CNPq,1993.

[6] Silva, Gentil Lopes. *O Mito das Ambigüidades nas Representações Decimais*, CBPF-NF-001/06.