

QUATERNIONS ESPINORES E CURVATURA RIEMANNIANA NO  
ESPAÇO TEMPO

C. Marcio do Amaral  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro

(Recebido a 6 de Junho de 1968)

1. INTRODUÇÃO

Os espinores têm papel fundamental na física moderna, particularmente devido ao fato de que segundo a relatividade restrita, as leis da natureza devem ser Lorentz-covariantes, isto é, as descrições matemáticas dessas leis devem ter forma invariante por transformações de Lorentz próprias, ortócronas, inomogêneas. Como decorrência, os campos regidos por essas equações devem ser elementos dos espaços vetoriais das representações do grupo de Lorentz e, portanto, devem ser tensores ou espinores.

Os espinores foram descobertos por E. Cartan em 1913, mas foi somente em 1929 que Van der Waerden criou uma notação útil para a álgebra espinorial, análoga à álgebra tensorial da relatividade especial. Em 1933 Infield e Van der Waerden desenvolveram a análise espinorial de modo covariante, paralelo à análise

tensorial no espaço Riemann. A linha de Infeld-Van der Waerden foi seguida em um trabalho publicado em 1953 por Bade e Jehle <sup>1</sup> e posteriormente ampliado por Parke <sup>2</sup> e Jehle em 1965, que formularam espinorialmente equações de onda, covariantes pelo grupo homogêneo de Lorentz. Em 1957 P. Bergman <sup>3</sup> publicou um importante trabalho sobre espinores a duas componentes em relatividade geral. Nesse trabalho desenvolveu uma teoria espinorial, nos moldes da linha Infeld-Van der Waerden de 1933, onde introduziu matrizes hermitianas, que são generalizações das matrizes de Pauli. Tais matrizes contêm a estrutura geométrica do espaço riemanniano da relatividade geral. Essas matrizes determinam unívocamente o tensor métrico, mas dado o tensor métrico as matrizes ficam determinadas a menos de uma transformação local independente da transformação de coordenadas. A formulação matricial de Bergmann permite a descrição do campo gravitacional de modo bastante conveniente. Foi, entretanto, somente com R. Penrose <sup>4</sup>, em 1960, que a moderna teoria da gravitação reconheceu e explorou com profundidade as vantagens do cálculo espinorial a duas componentes.

Recentemente <sup>5</sup> foi estabelecida a conexão entre o formalismo de Bergmann e o de Penrose. Por outro lado é possível formular a teoria especial da relatividade por meio de quaternions e assim o fez F. Klein em 1911. Desde essa época até recentemente não surgiram esforços importantes no sentido de se aprofundar a aplicação dos quaternions à relatividade, se bem que os houvesse no sentido de aplicá-los às teorias quânticas. Em 1964,

surgiu um trabalho de P. Rastall <sup>6</sup>, onde o autor formulou a álgebra e a análise dos quaternions de Hamilton de modo conveniente e os aplica à relatividade restrita e ao espaço-tempo riemanniano, mas Rastall explora de modo pouco extenso a correlação entre quaternions e espinores, restringindo-se aos espinores de primeira ordem. Há também interessantes trabalhos de Sachs <sup>7</sup>, que a partir dos trabalhos de Bergmann estabelece equações do campo gravitacional mais gerais que as equações de Einstein.

O objetivo do presente trabalho é estabelecer de modo claro, e completo, desde as noções básicas, o papel dos quaternions na teoria da relatividade; é alargar a conexão entre as formulações espinorial e quaterniônica da relatividade. Para isso formula-se, por meio de quaternions, a teoria dos espinores a duas componentes, de modo natural, independente de qualquer apêlo à teoria das representações. Mostra-se a conexão entre o formalismo de Bergmann e a formulação tetrada da relatividade e demonstra-se que a formulação matricial de Bergmann se identifica à formulação quaterniônica quando trabalhamos com uma base quaterniônica adequada. Torna-se evidente que a formulação por quaternions contém simultaneamente a representação tensorial real e a correspondente representação espinorial hermitica da relatividade.

## II. ÁLGEBRA DE QUATERNIONS

Como T. Kahan <sup>8</sup>, definiremos a álgebra de quaternions como uma álgebra, sôbre um corpo comutativo, com uma base de quatro elementos,  $1, u, v, w$  que respeita a tabela de multiplicação seguinte:

$\begin{matrix} 2^a \text{ Fator} \\ 1^a \text{ Fator} \end{matrix}$	1	u	v	w
1	1	u	v	w
u	u	$1\alpha$	w	$\alpha v$
v	v	-w	$1\beta$	$-\beta u$
w	w	$-\alpha v$	$\beta u$	$-\alpha\beta 1$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são elementos do corpo e  $\alpha\beta \neq 0$ . A base  $1, u, v, w$  é chamada base canônica. Escolhendo-se novas bases obteremos álgebras isomorfas. Para o nosso trabalho adotaremos o corpo dos complexos e escolheremos como base conveniente para os nossos objetivos os quaternions  $\dot{\sigma}^0, \dot{\sigma}^1, \dot{\sigma}^2, \dot{\sigma}^3$  correlacionados à base canônica do seguinte modo:

$$\dot{\sigma}^0 = 1, \quad \dot{\sigma}^1 = u, \quad \dot{\sigma}^2 = v, \quad \dot{\sigma}^3 = -iw.$$

Imporemos  $\alpha$  e  $\beta$  iguais à unidade multiplicativa do corpo.

Então:

$$(\dot{\sigma}^0)^2 = 1 = \dot{\sigma}^0, \quad (\dot{\sigma}^1)^2 = 1, \quad (\dot{\sigma}^2)^2 = 1$$

$$(\dot{\sigma}^3)^2 = (-iw)^2 = -(w)^2 = -(-\alpha\beta) = +1$$

A base  $\dot{\sigma}^\alpha$ , ( $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ), é constituída de elementos cujo quadrado vale  $1 = \dot{\sigma}^0$ . Os quaternions introduzidos são também

chamados biquaternions de Hamilton. Um quaternion  $A$  é então uma quádrupla ordenada de complexos  $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ , e chamaremos de  $A_\alpha$  à componente  $\alpha$  do quaternion

$$A = \sum_{\alpha=0}^3 A_\alpha \hat{\sigma}^\alpha = (A_0, A_1, A_2, A_3). \quad (1.II)$$

A igualdade de dois quaternions é definida pela igualdade das componentes de mesmo índice:

$$A = B \iff A_\alpha = B_\alpha$$

O quaternion zero é aquele em que  $A_\alpha = 0$ , para todo  $\alpha$ . Se  $\lambda$  é um complexo qualquer, então:

$$\lambda A = (\lambda A_0, \lambda A_1, \lambda A_2, \lambda A_3). \quad (2.II)$$

A soma de dois quaternions  $A, B$  é definida pela soma das componentes, isto é:

$$e \left. \begin{aligned} A + B &= (A_0 + B_0, A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3) \\ A - B &= A + (-1)B \end{aligned} \right\} \quad (3.II)$$

Com a operação de soma, e multiplicação por um escalar, os quaternions, constituem um espaço vetorial de dimensão quatro sobre o corpo dos complexos.

Os quaternions também respeitam as propriedades associativa e distributiva:

$$\left. \begin{aligned} A(BC) &= (AB)C \\ (A + B)C &= AC + BC ; \quad C(A + B) = CA + CB \end{aligned} \right\} \quad (4.II)$$

A tabela de multiplicação de quaternions nos mostra que a ál

gebra de quaternions não é comutativa.

Vamos impor que os quaternions de base  $\dot{\sigma}^\alpha$  satisfaçam, além da normalização a 1, às propriedades:

$$\dot{\sigma}^k \dot{\sigma}^l + \dot{\sigma}^l \dot{\sigma}^k = 0 \quad (5.II)$$

$$k \neq l, \quad k, l \neq 0$$

$$\text{e } \dot{\sigma}^k \dot{\sigma}^l = i \dot{\sigma}^m; \quad (6.II)$$

onde  $k, l, m$  são uma permutação cíclica de 1, 2, 3.

Se um quaternion é  $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ , o quaternion adjunto associado,  $\bar{A}$ , é aquele definido como:

$$\bar{A} = (A_0, -A_1, -A_2, -A_3) \quad (7.II)$$

Em particular  $\overline{\dot{\sigma}^0} = \dot{\sigma}^0$  e

$$\overline{\dot{\sigma}^k} = -\dot{\sigma}^k, \quad \text{se } k \neq 0$$

Dêsse modo,

$$\bar{A} = \sum_0^3 A_\alpha \overline{\dot{\sigma}^\alpha}.$$

É claro que  $\bar{\bar{A}} = A$ .

Se  $A$  e  $B$  são dois quaternions, então  $\overline{AB} = \bar{B}\bar{A}$ .

Se  $\lambda$  é um complexo e  $A$  um quaternion, então vale  $\overline{\lambda A} = \lambda \bar{A}$ .

O cálculo direto nos mostra a útil fórmula:

$$\sum_{\alpha=0}^3 \overline{\dot{\sigma}^\alpha} A \dot{\sigma}^\alpha = -2\bar{A}. \quad (8.II)$$

Como consequência, se  $A = \dot{\sigma}^0$ , virá

$$-2\dot{\sigma}^0 = \sum_{\alpha=0}^3 \overline{\dot{\sigma}^\alpha} \dot{\sigma}^\alpha$$

Quando não houver dúvidas, omitiremos a unidade  $\dot{\sigma}^0$ .

Uma outra fórmula útil é:

$$\sum_{\alpha=0}^3 \dot{\sigma}^{\alpha} \dot{\sigma}^{\beta} A \dot{\sigma}^{\alpha} = \sum_{\alpha=0}^3 \overline{\dot{\sigma}^{\alpha}} \dot{\sigma}^{\beta} \overline{A \dot{\sigma}^{\alpha}} = 4A_{\beta} \dot{\sigma}^{\beta}. \quad (9.II)$$

A norma de um quaternion é definida como sendo o produto de-  
le por seu adjunto.

Na base  $\{\dot{\sigma}^{\alpha}\}$ , a norma de A será:

$$A\bar{A} = (A_0)^2 - (A_1)^2 - (A_2)^2 - (A_3)^2. \quad (10.II)$$

Como corolário temos:

$$(AB)(\overline{AB}) = (A\bar{A})(B\bar{B})$$

isto é, a norma de um produto de dois quaternions é o produto das normas dos fatores.

Se um quaternion tem norma nula é se diz singular.

Se  $A\bar{A} = 1$ , o quaternion se denomina unimodular.

Se um quaternion A é não singular, define-se o quaternion inverso de A como  $A^{-1}$  tal que:

$$A^{-1} = \frac{\bar{A}}{A\bar{A}} \quad (11.II)$$

Se o quaternion é unimodular,  $A^{-1} = \bar{A}$ .

Da fórmula (11.II) vem:  $A^{-1} A = A A^{-1} = 1$ .

Uma outra consequência da fórmula (11.II) é que:  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ , desde que A e B tenham inversos.

Vamos definir um importante conceito que é o de quaternion hermitiano associado a um quaternion A:

$$A^+ = (A_0^*, A_1^*, A_2^*, A_3^*), \quad (12.II)$$

onde  $A_{\alpha}^*$  é o complexo conjugado da componente  $A_{\alpha}$  de A. Com essa

definição vê-se que  $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ .

Um quaternion será hermitiano se fôr igual ao seu hermitiano associado, isto é:  $A = A^\dagger$  e daí decorre que tôdas componentes de um quaternion hermitiano são reais. Definiremos quaternion complexo conjugado do quaternion  $A$ , ao quaternion

$$A^* = (A_0^*, A_1^*, -A_2^*, A_3^*) \quad (13.II)$$

Das definições (7.II), (12.II) e (13.II) resulta que

$$\overline{A^\dagger} = \overline{A^\dagger}; \quad \overline{A^*} = \overline{A^*}$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A; \quad (A^*)^* = A; \quad (AB)^* = A^* B^*$$

Se  $\lambda$  é um número complexo, valem também:

$$(\lambda A)^\dagger = \lambda^* A^\dagger; \quad (\lambda A)^* = \lambda^* A^*$$

$$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} \cdot A^{-1},$$

(14.II)

Esta última propriedade vale somente se  $\lambda \neq 0$  e  $\overline{AA} \neq 0$ .

Vamos introduzir uma métrica no espaço vetorial da álgebra dos quaternions por meio da definição do produto escalar de dois quaternions.

Define-se produto escalar de dois quaternions por:

$$\begin{aligned} A|B &= \frac{1}{2} (A\overline{B} + B\overline{A}) = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{BA}) = \\ &= \left( A_0 B_0 - \sum_{k=1}^3 A_k B_k \right) \hat{\sigma}^0 \end{aligned} \quad (15.II)$$

O produto escalar de dois quaternions é um quaternion proporcional a  $\hat{\sigma}^0$ .

Em particular,



$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^0 | \dot{\sigma}^0 &= \dot{\sigma}^0; & -\dot{\sigma}^k | \dot{\sigma}^k &= \dot{\sigma}^0 & \text{se } k \neq 0; \\ \text{e } \dot{\sigma}^\alpha | \dot{\sigma}^\beta &= 0 & & & \text{se } \alpha \neq \beta. \end{aligned}$$

Essas propriedades nos sugerem introduzir o "tensor métrico" no espaço dos quaternions como sendo:

$$\dot{g}^{\alpha\beta} = \dot{\sigma}^\alpha | \dot{\sigma}^\beta = \dot{\sigma}^\beta | \dot{\sigma}^\alpha = \dot{g}^{\beta\alpha} \quad (16.II)$$

De modo explícito:

$$\dot{g}^{00} = 1, \dot{g}^{kk} = -1 \quad (k \neq 0) \quad \text{e} \quad \dot{g}^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{se } \alpha \neq \beta.$$

Com auxílio dos  $\dot{g}^{\alpha\beta}$  podemos definir os  $\dot{g}_{\alpha\beta}$  por meio do sistema de equações:

$$\sum_0^3 \dot{g}^{\alpha\beta} \dot{g}_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \quad (17.II)$$

onde  $\delta_\gamma^\alpha$  é zero se  $\alpha \neq \gamma$  e vale 1 se  $\alpha = \gamma$ .

A resolução do sistema (17.II) nos dará:

$$\dot{g}_{00} = 1; \quad \dot{g}_{kk} = -1, \quad \text{se } k \neq 0; \quad \dot{g}_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{se } \alpha \neq \beta.$$

Com auxílio dos  $\dot{g}^{\alpha\beta}$  podemos introduzir componentes covariantes e contravariantes de um quaternion.

De fato:

$$\begin{aligned} A|B &= \left( \sum_0^3 A_\alpha \dot{\sigma}^\alpha \right) | \left( \sum_0^3 B_\beta \dot{\sigma}^\beta \right) = \\ &= \sum_{\alpha, \beta=0}^3 A_\alpha B_\beta \dot{\sigma}^\alpha | \dot{\sigma}^\beta = \\ &= \dot{\sigma}^0 \sum_{\alpha, \beta=0}^3 A_\alpha B_\beta \dot{g}^{\alpha\beta} = \left( \sum_{\alpha=0}^3 A_\alpha B^\alpha \right) \dot{\sigma}^0 \quad (18.II) \end{aligned}$$

Para obter êsse resultado, usamos o fato de que  $(A+B)|C = A|C + B|C$ , e introduzimos a definição

$$B^\alpha = \sum_{\beta} \dot{g}^{\alpha\beta} B_\beta \quad (19.II)$$

Com a (19.II) estabelecemos a conexão entre componente covariante,  $B_\beta$ , de um quaternion e componente contravariante  $B^\alpha$  deêse quaternion.

Se invertermos a fórmula (19.II) obteremos:

$$B_\beta = \sum_{\lambda} \dot{g}_{\beta\lambda} B^\lambda \quad (20.II)$$

De um modo mais compacto, podemos escrever:

$$B^\alpha = \dot{\sigma}^\alpha |B \quad (19'.II)$$

Analogamente teremos  $\dot{\sigma}_\alpha |B = B_\alpha$ , onde fizemos

$$\dot{\sigma}_\alpha = \sum_{\beta} \dot{g}_{\alpha\beta} \dot{\sigma}^\beta \quad (21.II)$$

Em geral, passaremos a omitir o sinal de somatório quando referido a um índice covariante e outro contravariante, repetidos.

### III. REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE QUATERNIONS

As regras de multiplicação (5.II) e (6.II), juntamente com a normalização imposta aos quaternions básicos  $\dot{\sigma}^\alpha$ , permite o estabelecimento de um isomorfismo com as matrizes de Pauli adicionadas da matriz unidade. Especificando melhor, vamos estabelecer a correspondência isomórfica seguinte:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^0 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; & \dot{\sigma}^1 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \\ \dot{\sigma}^2 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; & \dot{\sigma}^3 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (1.III)$$

Escritos os quaternions de base  $\dot{\sigma}^\alpha$  na forma matricial (1.III), um quaternion qualquer, A, terá por matriz representativa:

$$A = A_\alpha \dot{\sigma}^\alpha = \begin{pmatrix} A_0 + A_3 & A_1 - iA_2 \\ A_1 + iA_2 & A_0 - A_3 \end{pmatrix} \quad (2.III)$$

Tôdas fórmulas do capítulo anterior são exprimíveis matricialmente e, em particular

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_0 - A_3 & -A_1 + iA_2 \\ -A_1 - iA_2 & A_0 + A_3 \end{pmatrix} \quad (3.III)$$

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} A_0^* + A_3^* & A_1^* - iA_2^* \\ A_1^* + iA_2^* & A_0^* - A_3^* \end{pmatrix} \quad (4.III)$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_0^* + A_3^* & A_1^* + iA_2^* \\ A_1^* - iA_2^* & A_0^* - A_3^* \end{pmatrix} \quad (5.III)$$

Se  $A = A^\dagger$ , então todos  $A_\alpha$  que aparecem na matriz são reais. Se transpusermos a matriz e tomarmos a sua complexa conjugada, ela não se altera.

O quaternion transposto de um quaternion A é:

$$A^T = \begin{pmatrix} A_0 + A_3 & A_1 + iA_2 \\ A_1 - iA_2 & A_0 - A_3 \end{pmatrix} \quad \text{isto é,}$$

$$A^T = (A_0, A_1, -A_2, A_3) \quad (6.III)$$

Um quaternion será simétrico se  $A^T = A$  e então  $A_2 = 0$ .

A rigor, deveríamos denotar a matriz representativa de um quaternion  $A$ , (na base  $\hat{\sigma}^\alpha$ ), por  $M(A)$ , mas não o faremos, por ser clara a identificação de  $A$  com  $M(A)$ .

Se calcularmos o determinante de  $A$ , obteremos:

$$\det A = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 \quad (7.III)$$

Mas então  $\hat{\sigma}^0(\det A) = A\bar{A}$ , que é a norma de  $A$ .

Se somarmos as matrizes  $A$  e  $\bar{A}$ , dadas respectivamente em (2.III) e (3.III), obteremos:

$$A + \bar{A} = \hat{\sigma}^0 \left[ 2A_0 \right] = \hat{\sigma}^0 \cdot (\text{tr} A) \quad (8.III)$$

sendo  $\text{tr} A$  o traço da matriz que representa  $A$  na base  $\{\hat{\sigma}^\alpha\}$ .

Analogamente, obteríamos como matriz associada ao quaternion, inverso de  $A$ , a matriz inversa daquela associada a êsse quaternion. Veremos que a forma matricial dos quaternions é fundamental na correlação entre quaternions e espinores.

#### IV. QUATERNIONS DE LORENTZ

Um evento no quadri-espaco da relatividade especial pode ser caracterizado por quatro reais ordenados,  $X^\mu$ , ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ), coordenadas cartesianas ortogonais desse evento.

A coordenada  $X^0$  é temporal e as demais são espaciais. A métrica a ser usada é definida pelo tensor simétrico real  $g_{\mu\nu}$  covariante, definido pela assinatura (+ - - -). Sabemos que as coordenadas covariantes são obtidas das contravariantes por meio do  $g_{\mu\nu}$ , isto é:

$$X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu \quad (1.IV)$$

Ao  $g_{\mu\nu}$  associamos o tensor métrico contravariante  $g^{\mu\nu}$ , tal que:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = g^\nu_\rho \quad (2.IV)$$

Vamos definir quaternion de Lorentz como sendo um quaternion hermitiano cujas componentes  $A_\alpha$  se transformam como as componentes  $X_\mu$  de um quadri-vector de universo. Se  $(a^\mu_\nu)$  é uma transformação de Lorentz, então:

$$\left. \begin{aligned} X'_\mu &= X_\nu a^{-1\nu}_\mu \\ A'_\rho &= A_\sigma a^{-1\sigma}_\rho \end{aligned} \right\} \quad (3.IV)$$

sendo  $(a^{-1\sigma}_\rho)$  a matriz inversa da matriz  $(a^\mu_\nu)$ .

Somente consideraremos transformações de Lorentz homogêneas, próprias, ortócronas, que denominaremos restritas.

Um evento do espaco tempo da relatividade restrita será frequentemente chamado de evento de universo.

Seja o quaternion de Lorentz:

$$X = X_{(\mu)} \dot{\sigma}^{\mu}$$

(onde escreveremos o índice da componente quaterniônica entre parênteses, afim de diferenciá-lo dos índices de universo ou dos índices espinoriais, que aparecerão posteriormente).

Também podemos escrevê-lo na forma:

$$X = (X_{(0)}, X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)})$$

Se tomarmos o seu adjunto,  $\bar{X}$ , obteremos:

$$\bar{X} = (X_{(0)}, -X_{(1)}, -X_{(2)}, -X_{(3)})$$

mas  $X_{(\alpha)} = \dot{g}_{\alpha\beta} X^{(\beta)}$ , logo,

$$\bar{X} = (X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}) \quad (4.IV)$$

A definição de quaternion de Lorentz nos diz que as componentes dêsse quaternion se transformam como componentes de um quadrivetor. Logo, se o quaternion de Lorentz  $X$  é a representação quaterniônica de um quadrivetor de universo, covariante,  $\bar{X}$  será a representação do quadrivetor contravariante correspondente. A operação de adjunção está associada à operação de mudança de variância. Um outro aspecto importante está contido no fato de que ao dizermos que as componentes do quaternion de Lorentz se transformam como componentes de um quadrivetor de universo, estaremos dizendo que o índice quaterniônico ( $\mu$ ) se comporta como o índice de universo  $\mu$ , mas isto somente quanto às componentes quaterniônicas  $X_{(\mu)}$ , já que os quaternions  $\dot{\sigma}^{\mu}$  são matrizes, numéricas, fixas e que, portanto, não se transformam. Disso tu-

do decorre que numéricamente o tensor métrico quaterniônico,  $\hat{g}^{\mu\nu}$  coincide com o tensor métrico de universo,  $g^{\mu\nu}$ . Essa coincidência numérica não prevalece quando passarmos ao espaço curvo.

Uma interpretação geométrica que surge de imediato é a de que as matrizes  $\hat{\sigma}^\mu$  se comportam como quatro direções fixas no espaço de universo, independentes do ponto e a essas direções referimos os quadrivetores. Na realidade, estamos comparando dois espaços em essência distintos, um de quaternions e outro de quadrivetores da relatividade especial, e estamos impondo que a lei matemática de transformação das componentes do quaternion de Lorentz seja a mesma que aquela do quadrivector que o representa no espaço de universo.

Um quadrivector de universo de componentes covariantes  $X_\mu$  será escrito na imagem quaterniônica, como sendo o quaternion de Lorentz:

$$X = X_{(\mu)} \hat{\sigma}^\mu$$

As componentes quaterniônicas  $X_{(\mu)}$  coincidem com as componentes  $X_\mu$ . Uma transformação de Lorentz restrita, (própria, ortócrona, homogênea), leva os  $X_\mu$  em  $X'_\mu$  tal que:

$$X'_\mu = X_\nu a^{-1\nu}_\mu \quad (5.IV)$$

onde  $(a^{-1\nu}_\mu)$  é a inversa da transformação de Lorentz  $(a^\mu_\nu)$ , restrita.

Então o quaternion  $X = X_{(\mu)} \hat{\sigma}^\mu$  se transforma no quaternion

$$X' = a^{-1\nu}_\mu X_{(\nu)} \hat{\sigma}^\mu = X'_{(\mu)} \hat{\sigma}^\mu \quad (6.IV)$$

A realidade dos quadrivetores de universo se traduz na realidade das componentes  $X_{(\mu)}$  e como a matriz  $(a^{\mu}_{\nu})$  é real, teremos:

$$X^{\dagger} = X, \quad \text{logo} \quad X'^{\dagger} = X' \quad (7.IV)$$

Os quaternions de Lorentz são hermitianos como decorrência da realidade dos quadrivetores associados e da hermiticidade da base quaterniônica  $\hat{\sigma}^{\mu}$ .

Se tomarmos a norma de  $X'$ , obteremos:

$$X' \bar{X}' = (X'_{(0)})^2 - \sum_{k=1}^3 (X'_{(k)})^2$$

Como essa é a norma do quadrivetor associado e como a transformação de Lorentz conserva a norma dos quadrivetores de universo, teremos:

$$X' \bar{X}' = (X'_{(0)})^2 - \sum_{k=1}^3 (X'_{(k)})^2 =$$

$$= (X_{(0)})^2 - \sum_{k=1}^3 (X_{(k)})^2 = X\bar{X} \quad (8.IV)$$

Concluimos que um quaternion de Lorentz tem a norma invariante por uma transformação de Lorentz.

A (7.III) nos dá:

$$X' \bar{X}' = \det X' = \det X = \text{invariante} \quad (9.IV)$$

O determinante de um quaternion de Lorentz é um invariante por uma transformação de Lorentz restrita. Na forma matricial específica, associada à base  $\hat{\sigma}^{\mu}$  da álgebra de quaternions, os



quaternions de Lorentz  $X'$  e  $X$  se escrevem:

$$X' = \begin{pmatrix} X'_{(0)} + X'_{(3)} & X'_{(1)} - iX'_{(2)} \\ X'_{(1)} + iX'_{(2)} & X'_{(0)} - X'_{(3)} \end{pmatrix} \quad (10.IV)$$

e

$$X = \begin{pmatrix} X_{(0)} + X_{(3)} & X_{(1)} - iX_{(2)} \\ X_{(1)} + iX_{(2)} & X_{(0)} - X_{(3)} \end{pmatrix} \quad (11.IV)$$

As matrizes (10.IV) e (11.IV) são quaternions de Lorentz na forma matricial e a transformação da matriz (11.IV) na matriz (10.IV) é uma transformação induzida pela transformação de Lorentz ( $a^\mu_\nu$ ), restrita, que atua no espaço dos quadrivetores de  $\underline{u}$  niverso.

A menos da transformação trivial  $X' = \pm X$ , a relação entre  $X'$  e  $X$  pode ser escrita na forma:

$$\left. \begin{aligned} X' &= \pm Q X Q^\dagger, \\ Q\bar{Q} &= \delta^0_0 \end{aligned} \right\} \quad (12.IV)$$

com

É claro que na (12.IV) a hermiticidade é preservada.

Vamos considerar apenas o sinal + para correspondermos às transformações restritas de Lorentz.

Então podemos escrever:

$$X' = Q X Q^\dagger = X'_{(\mu)} \delta^\mu = a^{\mu\nu} X_{(\nu)} \delta^\mu \quad (13.IV)$$

É possível provar o que uma transformação restrita de Lorentz

$(a^\mu_\nu)$ , induz um quaternion unimodular  $Q$  que satisfaz à (13.IV).

Da equação (13.IV) obtemos:

$$X' \bar{X}' = Q X \bar{X} \bar{Q} = \text{norm}(X) Q \bar{Q} = \text{norm}(X) \dot{\sigma}^0,$$

então:

$(\text{norm}(X')) = \text{norm}(X)$ , o que coincide com a (8.IV).

A equação (13.IV) permite exprimir  $(a^\mu_\nu)$  em função de  $Q$  e reciprocamente.

De fato:

$$X' = Q X Q^\dagger = Q X_{(\mu)} \dot{\sigma}^\mu Q^\dagger = X_{(\mu)} Q \dot{\sigma}^\mu Q^\dagger \quad (14.IV)$$

Por outro lado, como  $X'$  é quaternion de Lorentz, vale:

$$X' = a^{-1\lambda}_\nu X_{(\lambda)} \dot{\sigma}^\nu = X'_{(\nu)} \dot{\sigma}^\nu \quad (15.IV)$$

Igualando (14.IV) a (15.IV) e levando em conta que  $X_{(\mu)}$  é arbitrário, obteremos:

$$Q \dot{\sigma}^\mu Q^\dagger = a^{-1\mu}_\nu \dot{\sigma}^\nu \quad (16.IV)$$

Multiplicando-se escalarmente ambos membros por  $\dot{\sigma}_\beta$ , virá:

$$Q \dot{\sigma}^\mu Q^\dagger | \dot{\sigma}_\beta = a^{-1\mu}_\beta \quad (17.IV)$$

Essa fórmula nos dá o elemento de matriz de Lorentz  $a^{-1\mu}_\beta$ , quando conhecemos a  $Q$  unimodular que satisfaz à (13.IV).

De (16.IV), multiplicando-a por  $\dot{\sigma}^\mu$  e somando nos  $\mu$ , virá:

$$\sum_{\mu=0}^3 \dot{\sigma}^\mu Q \dot{\sigma}^\mu Q^\dagger = \sum_{\mu=0}^3 \dot{\sigma}^\mu a^{-1\mu}_\nu \dot{\sigma}^\nu \quad (18.IV)$$

Com a (9.II), podemos escrever:

$$4Q_0 Q^\dagger = \sum_{\mu, \nu=0}^3 a^{-1\mu}_\nu \dot{\sigma}^\mu \dot{\sigma}^\nu$$

Tomemos o hermitiano dessa expressão e obteremos:

$$4Q_0^* Q = \sum_{\mu, \nu=0}^3 a^{-1\mu}_\nu \dot{\sigma}^\nu \dot{\sigma}^\mu, \quad (19.IV)$$

onde supomos  $Q_0 \neq 0$ , o que é possível desde que, por hipótese, vale a condição de unimodularidade, isto é:

$$Q\bar{Q} = (Q_0)^2 - \sum_{k=1}^3 (Q_k)^2 = \dot{\sigma}^0$$

Se tomarmos o adjunto da (19.IV), vem:

$$4Q_0^* \bar{Q} = \sum_{\mu, \nu=0}^3 a^{-1\mu}_\nu \overline{\dot{\sigma}^\mu} \overline{\dot{\sigma}^\nu} \quad (20.IV)$$

O produto de (20.IV) por (19.IV), levando em conta que  $\bar{Q}Q = \dot{\sigma}^0$ , dará  $(Q_0^*)^2$  em função da transformação  $(a^{-1\mu}_\nu)$ , dos  $\dot{\sigma}^\mu$  e seus adjuntos. Isso mostra que há, para cada transformação de Lorentz  $(a^\mu_\nu)$ , restrita, duas possíveis matrizes,  $\pm Q$ , unimodulares, tais que:

$$X' = Q X Q^\dagger$$

onde  $X'$  e  $X$  são quaternions de Lorentz.

Um quaternion de Lorentz importante é o quaternion que corresponde ao quadrivector gradiente. Vamos defini-lo como:

$$\partial = \dot{\sigma}^\mu \partial_{(\mu)} \quad (21.IV)$$

onde

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu}$$

Esse quaternion  $\partial$  é um quaternion formal. Pela própria definição  $\partial$  respeita a (13.IV), isto é:

$$\partial^\nu = Q \partial Q^\dagger = \dot{\sigma}^\mu \partial_{(\mu)} = a^{-1\nu}{}_\mu \dot{\sigma}^\nu \partial_{(\nu)} \quad (22.IV)$$

O quaternion  $Q$  não depende de  $X^\mu$ , logo:

$$\partial^\nu = Q \partial Q^\dagger = Q \dot{\sigma}^\mu \partial_{(\mu)} Q^\dagger = Q \dot{\sigma}^\mu Q^\dagger \partial_{(\mu)} \quad (23.IV)$$

O produto escalar de dois quaternions de Lorentz é um invariante. Realmente, se  $y$  e  $z$  são dois quaternions de Lorentz, o seu produto escalar será por (15.II):

$$y|z = \frac{1}{2} (y\bar{z} + z\bar{y}) = \left( y_{(0)} z_{(0)} - \sum_{k=1}^3 y_{(k)} z_{(k)} \right) \dot{\sigma}^0$$

Como  $y' = Q y Q^\dagger$ ,  $z' = Q z Q^\dagger$ .

Então,  $\bar{z}' = \overline{Q^\dagger z Q} = \bar{Q}^\dagger \bar{z} \bar{Q}$ ,

logo:

$$\begin{aligned} y'|z' &= \frac{1}{2} (y' \bar{z}' + z' \bar{y}') = \\ &= \frac{1}{2} (Q y Q^\dagger \bar{Q}^\dagger \bar{z} \bar{Q} + Q z Q^\dagger \bar{Q}^\dagger \bar{y} \bar{Q}) = \\ &= \frac{1}{2} (Q y \bar{z} \bar{Q} + Q z \bar{y} \bar{Q}) = \frac{1}{2} Q (y\bar{z} + z\bar{y}) \bar{Q} = \\ &= \frac{1}{2} Q \left( y_{(0)} z_{(0)} - \sum_{k=1}^3 y_{(k)} z_{(k)} \right) \dot{\sigma}^0 \bar{Q} = \\ &= \frac{1}{2} \left( y_{(0)} z_{(0)} - \sum_{k=1}^3 y_{(k)} z_{(k)} \right) \dot{\sigma}^0 = y|z \quad (24.IV) \end{aligned}$$

Como consequência imediata,  $z\bar{z}$  é um invariante Lorentziano.

Formalmente também se pode mostrar que:

$$\partial|\partial = \frac{1}{2} (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial) = \left( \partial_0\partial_0 - \sum_{k=1}^3 \partial_k\partial_k \right)$$

e

$$\partial|A = \frac{1}{2} (\partial\bar{A} + A\bar{\partial})$$

são invariantes lorentzianos.

Devemos notar que  $A\bar{\partial}$  quer dizer  $\overline{\partial A}$ .

## V. QUATERNIONS - ESPINORES

Um quaternion  $E$  é idempotente se

$$E.E = E \quad (1.V)$$

Se tomarmos a adjunta da equação supra, obteremos:

$$\bar{E}.\bar{E} = \bar{E} \quad (2.V)$$

logo, o adjunto de um idempotente é idempotente. O quaternion nulo e o quaternion  $\dot{\sigma}^0$  são idempotentes e os chamaremos de idempotentes triviais.

Seja o idempotente  $E = E_{(\alpha)} \dot{\sigma}^\alpha$ . A equação (1.V) ficará:

$$(E_{(\alpha)} \dot{\sigma}^\alpha) (E_{(\beta)} \dot{\sigma}^\beta) = E_{(\gamma)} \dot{\sigma}^\gamma \quad (3.V)$$

Desenvolvendo (3.V) e igualando os coeficientes dos  $\dot{\sigma}^\gamma$  em ambos membros da igualdade, obteremos:

$$\left. \begin{aligned} E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 &= E_0 \\ E_1(1-2E_0) &= 0 \\ E_2(1-2E_0) &= 0 \\ E_3(1-2E_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.V)$$

Se  $E_1 = E_2 = E_3 = 0$ , o sistema (4.V) nos dá  $E_0 = 0$  ou  $E_0 = 1$ , mas êsses são os casos dos idempotentes triviais:

$$0 = (0, 0, 0, 0) \quad \text{e} \quad \overset{\circ}{\sigma} = 1 = (1, 0, 0, 0).$$

Se  $1 - 2E_0 = 0$ , então  $E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 = 1/4$  - os  $E_k$ , com  $k \neq 0$ , não podem ser simultaneamente nulos. Êsse é o caso dos idempotentes não triviais.

Salvo indicação específica, utilizaremos somente os idempotentes não triviais.

Se o idempotente  $E$  é não trivial, isto é, se:

$$E_0 = 1/2 ; \quad \sum_{k=1}^3 (E_k)^2 = \frac{1}{4} \quad (5.V)$$

Então

$$E + \bar{E} = \overset{\circ}{\sigma} \quad (6.V)$$

Multiplicando (6.V) por  $\bar{E}$ , obteremos:

$$E\bar{E} + \bar{E}\bar{E} = \bar{E}$$

mas por (2.V),  $\bar{E}\bar{E} = \bar{E}$ , logo:

$$\bar{E}E = E\bar{E} = 0 \quad (7.V)$$

Todo idempotente não trivial satisfaz às equações (6.V) e (7.V).

Sobre o conjunto dos quaternions estão definidas as operações de soma de quaternions e produto de quaternions. Com a operação de soma, os quaternions constituem um grupo aditivo, comutativo. Com a operação de produto, que goza das propriedades associativa e distributiva, o conjunto dos quaternions passa a ser um anel. Como esse anel tem  $\hat{\sigma}^0$  por unidade multiplicativa, diz-se um anel com elemento unidade. O anel dos quaternions não é comutativo. Chamaremos o anel dos quaternions de  $R$ . Um subconjunto de  $R$  que seja também um anel se chama subanel de  $R$ .

Se  $r$  é um elemento do anel  $R$  e  $R'$  é um subanel de  $R$  e se para todo  $r' \in R'$  valer  $r'r \in R'$ , então o conjunto dos  $r'r$  se diz um ideal à esquerda, gerado por  $r$ . Analogamente se define o ideal gerado à direita e em geral eles diferem.

Se os elementos de um anel  $R$  podem ser representados de modo único, por  $n$  elementos  $I_\alpha$  dêsse mesmo  $R$ , na forma de uma combinação linear, isto é, se

$$r = \sum_{\alpha=1}^n r_\alpha I_\alpha,$$

onde  $I_\alpha \in R$  e  $r_\alpha$  é um escalar do corpo sobre o qual o anel é definido, então esse anel será uma álgebra de ordem  $n$  e os  $I_\alpha$  constituem uma base da álgebra.

Os quaternions com que estamos trabalhando, constituem uma álgebra não comutativa, de ordem quatro, sobre o corpo dos complexos e a base escolhida é constituída pelos  $\hat{\sigma}^\alpha$ .

Sobre o anel  $R$  dos quaternions vamos definir o ideal gerado

à esquerda pelo idempotente  $E$ , não trivial, como sendo o conjunto dos quaternions  $\varphi$  definidos por:

$$\left. \begin{aligned} \varphi E &= \varphi \\ E + \bar{E} &= 1 = \dot{\sigma}^0 \end{aligned} \right\} \quad (8.V)$$

Se introduzirmos na primeira equação de (8.V) a segunda, vamos obter:

$$\varphi(1-\bar{E}) = \varphi$$

ou

$$\varphi \bar{E} = 0 \quad (9.V)$$

Um quaternion qualquer pode sempre ser decomposto na soma de um quaternion pertencente ao ideal gerado à esquerda pelo idempotente  $E$  e de um quaternion pertencente ao ideal à esquerda gerado pelo seu adjunto  $\bar{E}$ .

De fato, a equação (6.V) nos dá  $E + \bar{E} = \dot{\sigma}^0$  e então se  $A$  é um quaternion arbitrário, podemos escrevê-lo como:

$$A = A\dot{\sigma}^0 = A(E+\bar{E}) = AE + A\bar{E} = A_E + A_{\bar{E}} \quad (10.V)$$

A unicidade da decomposição é facilmente demonstrável.

Os idempotentes  $E$  e  $\bar{E}$  são projetores e separam os ideais gerados por êles, de tal modo, que somente têm como elemento comum o quaternion nulo. De fato:

$$A_E \cdot E = (AE)E = AE = A_E \quad (11.V)$$

$$A_E \cdot \bar{E} = (AE)\bar{E} = A \cdot 0 = 0 \quad (12.V)$$

Vamos definir quaternion-espinoz de primeira ordem, contra variante,  $\varphi$ , a todo quaternion que satisfaça às equações (8.V) e que se transforme como:



$$\varphi' = Q \varphi \quad (13.V)$$

quando um quaternion de Lorentz sofre a transformação restrita  $X' = Q X Q^\dagger$ .

Então um quaternion-espinoz satisfaz simultaneamente às equações:

$$\left. \begin{aligned} \varphi E &= \varphi \\ \varphi' &= Q \varphi \end{aligned} \right\} \quad (14.V)$$

onde  $E$  é um idempotente diferente de zero e da unidade  $\dot{\sigma}^0$ .

A equação  $\varphi E = \varphi$  é covariante por transformação restrita de Lorentz.

De fato, se  $\varphi E = \varphi$ , então:

$$Q \varphi E = Q \varphi = \varphi',$$

logo:

$$\varphi' E = \varphi' \quad (15.V)$$

Pela (15.V) vê-se que o quaternion-espinoz transformado,  $\varphi'$ , pertence ao mesmo ideal a que  $\varphi$  pertence.

A liberdade de escolha do idempotente  $E$  pode ser utilizada para os nossos objetivos em relatividade e escolheremos os idempotentes:

$$E_{\pm} = \frac{1}{2} (\dot{\sigma}^0 \pm \dot{\sigma}^3) \quad (16.V)$$

Dessa fórmula decorre que:

$$\bar{E}_{\pm} = \frac{1}{2} (\dot{\sigma}^0 \mp \dot{\sigma}^3) = E_{\mp} \quad (17.V)$$

A escolha do idempotente corresponde à escolha do particular ideal a que o quaternion-espinoz  $\varphi$  deve pertencer, mas a lei de

transformação dos quaternions-espinores deve ser  $\varphi' = Q\varphi$ , qualquer que seja o ideal a que  $\varphi$  pertença.

Matricialmente:

$$E_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (18.V)$$

e

$$E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indicaremos os quaternions-espinores gerados pelos  $E_+ = 1/2(\dot{\sigma}^0 + \dot{\sigma}^3)$  por  $\varphi_+$  e aqueles pertencentes ao ideal gerado por  $E_- = 1/2(\dot{\sigma}^0 - \dot{\sigma}^3)$ , indicaremos por  $\varphi_-$ .

De

$$\varphi_+ E_+ = \varphi_+ \frac{1}{2} (\dot{\sigma}^0 + \dot{\sigma}^3) = \varphi_+$$

vem:

$$\varphi_+ \dot{\sigma}^3 = \varphi_+ \quad (19.V)$$

Analogamente:

$$\varphi_- \dot{\sigma}^3 = -\varphi_- \quad (20.V)$$

Com a escolha dos idempotentes  $E_+$  e  $E_-$  indicados em (16.V), temos um modelo conveniente para a descrição dos espinores da relatividade.

O quaternion-espinor  $\varphi_+ = \varphi_{+(\alpha)} \dot{\sigma}^\alpha$  deve satisfazer à equação (19.V), isto é:

$$(\varphi_{+(\alpha)} \dot{\sigma}^\alpha) \dot{\sigma}^3 = \varphi_{+(\beta)} \dot{\sigma}^\beta \quad (21.V)$$

A equação (21.V) estabelece a dependência de duas componentes  $\varphi_{+(\beta)}$  em termos das outras duas. Vamos escolher as componentes  $\varphi_{+(0)}$  e  $\varphi_{+(1)}$  como as independentes. Com essa escolha  $\varphi_+$  se escreverá:

$$\begin{aligned}\varphi_+ &= \varphi_{+(0)} \dot{o}^0 + \varphi_{+(1)} \dot{o}^1 - i\varphi_{+(1)} \dot{o}^2 + \varphi_{+(0)} \dot{o}^3 = \\ &= \varphi_{+(0)} [\dot{o}^0 + \dot{o}^3] + \varphi_{+(1)} [\dot{o}^1 - i\dot{o}^2].\end{aligned}\quad (22.V)$$

Matricialmente a equação (22.V) se escreverá:

$$\varphi_+ = \begin{pmatrix} 2\varphi_{+(0)} & 0 \\ 2\varphi_{+(1)} & 0 \end{pmatrix} \quad (23.V)$$

A partir da fórmula (20.V), obteremos análogamente:

$$\varphi_- = \varphi_{-(0)} [\dot{o}^0 - \dot{o}^3] + \varphi_{-(1)} [\dot{o}^1 + i\dot{o}^2] \quad (24.V)$$

e matricialmente:

$$\varphi_- = \begin{pmatrix} 0 & 2\varphi_{-(1)} \\ 0 & 2\varphi_{-(0)} \end{pmatrix} \quad (25.V)$$

Para os quaternions-espinores de primeira ordem poderemos escolher, arbitrariamente, o ideal gerado por  $E_+$  ou aquele gerado por  $E_-$ . Ambos ideais têm a mesma propriedade de transformação (14.V). A correspondência entre os quaternions espinores e os espinores propriamente ditos, (que frequentemente chamaremos de espinores de Infeld-Van der Waerden), não é biunívoca a essa arbitrariedade no ideal a escolher sugere, segundo Rastall, que possamos associar a cada um deles sistemas diferentes, ambos com a mesma propriedade de transformação espinorial.

Para representar espinores de 1ª ordem, propriamente ditos, por meio de quaternions espinores, devemos escolher um dos dois ideais e vamos escolher o ideal gerado por  $E_+$  à esquerda. Com essa escolha estabelecemos uma correspondência biunívoca en

tre os espinores e os quaternions espinores  $\varphi_+$ .

Se usassemos os ideais gerados à direita apenas teríamos uma reestruturação na correspondência biunívoca entre os espinores e os quaternions-espinores de 1ª ordem contravariante.

Em (22.V), tomando-se o adjunto de  $\varphi_+$ , virá:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_+ &= \varphi_{+(0)} [\dot{\sigma}^0 - \dot{\sigma}^3] + \varphi_{+(1)} [-\dot{\sigma}^1 + i\dot{\sigma}^2] = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2\varphi_{+(1)} & 2\varphi_{+(0)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (26.V)$$

Se tomarmos o adjunto do  $\varphi_-$  em (20.V), teremos:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_- &= \varphi_{-(0)} [\dot{\sigma}^0 + \dot{\sigma}^3] + \varphi_{-(1)} [\dot{\sigma}^1 - i\dot{\sigma}^2] = \\ &= \begin{pmatrix} 2\varphi_{-(0)} & 2\varphi_{-(1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (27.V)$$

Se estabelecermos o isomorfismo:

$$\begin{pmatrix} \phi_+^1 \\ \phi_+^2 \end{pmatrix} \iff \varphi_+ = \begin{pmatrix} 2\varphi_{+(0)} & 0 \\ 2\varphi_{+(1)} & 0 \end{pmatrix} \quad (28.V)$$

então, estaremos associando isomórficamente os quaternions espinores de primeira ordem contravariantes a vetores coluna a duas componentes. Nesse formalismo de vetores coluna o espinor dado por (14.V) se escreverá:

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi_+^1 \\ \phi_+^2 \end{pmatrix} E_+ &= \begin{pmatrix} \phi_+^1 \\ \phi_+^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \phi_+^{1'} \\ \phi_+^{2'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Q_1^1 & Q_2^1 \\ Q_1^2 & Q_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_+^1 \\ \phi_+^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (14'.V)$$

onde representamos  $Q$  pela matriz de elementos  $Q_{AB}$  com  $A; B = 1, 2$ .

A representação matricial do idempotente  $E_+$  usado na definição dos quaternions espinores de 1ª ordem é dada pela (18.V).

Do mesmo modo que estabelecemos o isomorfismo (28.V), vamos estabelecer a correspondência biunívoca entre o quaternion  $\bar{\varphi}_+$  e a matriz linha:

$$\left( \phi_{+1} \quad \phi_{+2} \right) \longleftrightarrow \bar{\varphi}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2\varphi_{+(1)} & 2\varphi_{(0)} \end{pmatrix} (29.V)$$

Se observarmos a fórmula (28.V), vemos que:

$$\phi_{+1} = -\phi_{+2}^2; \quad \phi_{+2} = \phi_{+1}^1 (30.V)$$

Se ao quaternion  $\varphi_+$  associamos o vetor coluna (28.V), então ao quaternion  $\bar{\varphi}_+$  associamos o vetor linha (29.V). Acontece que as relações (30.V) são exatamente aquelas que ocorrem entre as componentes covariantes e contravariantes de um espinor de 1ª ordem no cálculo espinorial ordinário. Independentemente desse fato, o cálculo matricial associa aos vetores linha uma variancia contrária à que associa aos vetores coluna, (usualmente chamados contravariantes).

A lei de transformação dos  $\varphi_+$  é  $\varphi'_+ = Q \varphi_+$  e se tomarmos a adjunta desta equação obteremos  $\bar{\varphi}'_+ = \bar{\varphi}_+ \bar{Q}$ .

Como  $Q\bar{Q} = \dot{\sigma}^0$ , resulta que  $\bar{Q} = Q^{-1}$ , logo:

$$\bar{\varphi}'_+ = \bar{\varphi}_+ Q^{-1} \quad (31'.V)$$

Um quaternion de 1<sup>a</sup> ordem, covariante é um quaternion pertencente ao ideal gerado por  $E_+$  à esquerda e que se transforma como  $\bar{\varphi}_+$ , isto é:

$$\left( \begin{array}{cc} \phi'_{+1} & \phi'_{+2} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} \phi_{+1} & \phi_{+2} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \bar{Q}^{-1}_{11} & \bar{Q}^{-1}_{12} \\ \bar{Q}^{-2}_{11} & \bar{Q}^{-2}_{12} \end{pmatrix} \quad (31.V)$$

A lei de transformação para  $\left( \begin{array}{cc} \phi_{-1} & \phi_{-2} \end{array} \right)$  é a mesma.

Compactamente escreveremos a (31.V) como:

$$\bar{\phi}'_+ = \bar{\phi}_+ \bar{Q} = \bar{\phi}_+ Q^{-1} ; \quad \bar{Q} = Q^{-1} \quad (31''.V)$$

É claro que poderíamos escrever essa equação na forma quaternioniônica ordinária, usando-se a (26.V).

Se lembrarmos que a fórmula (7.III) nos dá  $\dot{\sigma}^0 = \bar{Q}Q = \dot{\sigma}^0(\det Q)$ , e se decomposermos em equações entre os elementos de matriz as equações matriciais (14'.V) e (31.V), obteremos respectivamente:

$$e \quad \left. \begin{array}{l} \phi^{A'}_+ = Q^A_B \phi^B_+ \\ \phi'_{+A} = \phi_B \bar{Q}^B_A \end{array} \right\} \quad (32.V)$$

onde  $A; B, = 1, 2$ . Mas essas são as equações usuais que definem os espinores de 1<sup>a</sup> ordem, contravariantes e covariantes.

Se considerarmos a definição de quaternion complexo (13.II), cuja forma matricial está dada em (15.III), e a aplicarmos aos

quaternions  $\varphi_+$  e  $\bar{\varphi}_+$ , obteremos os quaternions  $\varphi_+^*$  e  $\bar{\varphi}_+^* = \overline{\varphi_+^*}$ , que se transformam, (levando-se em conta as (14.II), (14'.V) e (31.V), como:

$$\varphi_+^{*'} = Q^* \varphi_+^* \quad (33.V)$$

$$\bar{\varphi}_+^* = \varphi_+^* \quad \bar{Q}^* = \varphi_+^* Q^{-1*} = \varphi_+^* (Q^*)^{-1} \quad (34.V)$$

Matricialmente obteremos

$$\begin{pmatrix} \phi_+^{*1'} \\ \phi_+^{*2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{*1} & Q^{*1} \\ Q^{*2} & Q^{*2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_+^{*1} \\ \phi_+^{*2} \end{pmatrix} \quad (33'.V)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{+1}^{*'} & \phi_{+2}^{*'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{+1}^* & \phi_{+2}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{-1*1} & Q^{-1*1} \\ Q^{-1*2} & Q^{-1*2} \end{pmatrix} \quad (34'.V)$$

Vamos estabelecer a convenção seguinte:

$$\begin{pmatrix} \phi^{*1} \\ \phi^{*2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \dot{\phi}^1 \\ \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}$$

onde o índice com pontuação, (também chamado índice p), indica que o quaternion considerado é o complexo conjugado do quaternion  $\begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix}$ .

Com essa convenção as equações (33'.V) e (34'.V) se escrevem:

$$\begin{pmatrix} \phi_+^1 \\ \phi_+^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{i1}^1 & q_{i2}^1 \\ q_{i1}^2 & q_{i2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_+^1 \\ \phi_+^2 \end{pmatrix} \quad (33''.V)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{+1}^1 & \phi_{+2}^1 \\ \phi_{+1}^2 & \phi_{+2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{+1} & \phi_{+2} \\ \phi_{+1} & \phi_{+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{i1}^{-1} & q_{i2}^{-1} \\ q_{i1}^{-2} & q_{i2}^{-2} \end{pmatrix} \quad (34''.V)$$

A lei de transformação de um quaternion espinor de 1<sup>a</sup> ordem, contravariante de índice  $p$  é dada pela (33.V) e se fôr covariante será dada pela (34.V). As fórmulas (33''.V) e (34''.V) são as expressões matriciais equivalentes.

Até aqui estabelecemos quatro tipos de quaternions espinores de 1<sup>a</sup> ordem pertencentes ao ideal gerado por  $E_+$  à esquerda. Poderíamos ter feito o mesmo para o ideal gerado por  $E_-$  à esquerda e com auxílio das fórmulas (25.V) e (27.V) obteríamos os quatro tipos de quaternions espinores:

$$\varphi_- = \begin{pmatrix} 0 & 2\varphi_{-(1)} \\ 0 & 2\varphi_{-(0)} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \psi_-^1 \\ \psi_-^2 \end{pmatrix} \quad (35.V)$$

$$\bar{\varphi}_- = \begin{pmatrix} 2\varphi_{-(0)} & 2\varphi_{-(1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \psi_{-1} & \psi_{-2} \end{pmatrix} \quad (36.V)$$

$$\varphi_-^* = \begin{pmatrix} 0 & 2\varphi_{-(1)}^* \\ 0 & 2\varphi_{-(0)}^* \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \psi_-^1 \\ \psi_-^2 \end{pmatrix} \quad (37.V)$$

$$\bar{\varphi}_-^* = \bar{\varphi}_-^* = \begin{pmatrix} 2\varphi_{-(0)}^* & 2\varphi_{-(1)}^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \psi_{-1} & \psi_{-2} \end{pmatrix}, \quad (38.V)$$



Para simplificar, passaremos a chamar os quaternions espinores de  $1^{\text{a}}$  espécie de  $q$  - espinores de  $1^{\text{a}}$  espécie e aos quaternions ordinários, simplesmente de quaternions. Os quatro tipos de  $q$  espinores supra se transformam segundo leis análogas àquelas vistas para os  $\varphi_+$ ,  $\bar{\varphi}_+$ ,  $\varphi_+^*$  e  $\bar{\varphi}_+^*$ .

Sabemos que, a menos do  $q$ -espinor nulo, os ideais gerados por  $E_+$  e  $E_-$  são separados. Para cada ideal podemos somar  $q$ -espinores do mesmo tipo ou multiplicá-los por um escalar, porque a lei de transformação da soma será a mesma das parcelas e o produto de um  $q$ -espinor por um escalar não altera a sua lei de transformação. Pela mesma razão não podemos somar dois  $q$ -espinores de tipos diferentes, se quisermos conservar a lei de transformação.

Os escalares, por extensão, serão chamados  $q$ -espinores de ordem zero.

O produto de dois  $q$ -espinores de primeira ordem não se transforma como um  $q$ -espinor de  $1^{\text{a}}$  ordem. Vamos construir  $q$ -espinores de  $2^{\text{a}}$  ordem por meio do produto de  $q$  espinores de  $1^{\text{a}}$  ordem. Se  $\varphi_+$  e  $\psi_+$  são dois  $q$ -espinores contravariantes, dados pela (28.V), êles se transformam como  $\varphi_+' = Q\varphi_+$ ;  $\psi_+' = Q\psi_+$ . Se fizermos o produto dêles e se os escrevermos matricialmente o produto ficará:

$$\begin{pmatrix} \varphi_+'^1 & 0 \\ \varphi_+'^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+'^1 & 0 \\ \psi_+'^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^1_1 & Q^1_2 \\ Q^2_1 & Q^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_+^1 & 0 \\ \varphi_+^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^1_1 & Q^1_2 \\ Q^2_1 & Q^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+^1 & 0 \\ \psi_+^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (39.V)$$

Por conveniência estamos escrevendo o q-espino de 1<sup>a</sup> ordem na sua representação por matriz quadrada.

A (39.V), efetuada ficará:

$$\begin{pmatrix} \varphi_+^{1'} & \psi_+^{1'} & 0 \\ \varphi_+^{2'} & \psi_+^{1'} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_A^1 & \varphi_+^A & Q_B^1 & \psi_+^B & 0 \\ Q_A^2 & \varphi_+^A & Q_B^1 & \psi_+^B & 0 \end{pmatrix} \quad (40.V)$$

onde

$$Q_A^1 \varphi_+^A = Q_1^1 \varphi_+^1 + Q_2^1 \varphi_+^2$$

e

$$Q_B^1 \psi_+^B = Q_1^1 \psi_+^1 + Q_2^1 \psi_+^2$$

A fórmula (40.V) nos mostra que o produto de dois q-espinores de primeira ordem, contravariantes, sem índices p, pertencentes ao ideal gerado por  $E_+$  à esquerda não gera senão uma parte dos q-espinores de 2<sup>a</sup> ordem, contravariantes, sem índice p. Precisamos obter os elementos não nulos da 2<sup>a</sup> coluna da matriz (40.V) e os obteremos com o produto de q-espinores de primeira ordem, sem índice p gerados por  $E_-$  à esquerda.

De fato, a fórmula (35.V) nos permite escrever:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & \varphi_-^{1'} \\ 0 & \varphi_-^{2'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \psi_-^{1'} \\ 0 & \psi_-^{2'} \end{pmatrix} = \\ = & \begin{pmatrix} Q_1^1 & Q_2^1 \\ Q_1^2 & Q_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varphi_-^1 \\ 0 & \varphi_-^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^1 & Q_2^1 \\ Q_1^2 & Q_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \psi_-^1 \\ 0 & \psi_-^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

logo:

$$\begin{pmatrix} 0 & \varphi_-^{1'} & \psi_-^{2'} \\ 0 & \varphi_-^{2'} & \psi_-^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Q_A^1 \varphi_-^A & Q_B^2 \psi_-^B \\ 0 & Q_A^2 \varphi_-^A & Q_B^2 \psi_-^B \end{pmatrix} \quad (41.V)$$

Se somarmos (40.V) com (41.V), obteremos:

$$\begin{aligned} \varphi_+^i \psi_+^i + \varphi_-^i \psi_-^i &= \begin{pmatrix} \varphi_+^{1'} & \psi_+^{1'} & \varphi_-^{1'} & \psi_-^{2'} \\ \varphi_+^{2'} & \psi_+^{1'} & \varphi_-^{2'} & \psi_-^{2'} \end{pmatrix} = \\ &= Q\varphi_+ \quad Q\psi_+ + Q\varphi_- \quad Q\psi_- = \\ &= \begin{pmatrix} Q_A^1 \varphi_+^A & Q_B^1 \psi_+^B & Q_A^1 \varphi_-^A & Q_B^2 \psi_-^B \\ Q_A^2 \varphi_+^A & Q_B^1 \psi_+^B & Q_A^2 \varphi_-^A & Q_B^2 \psi_-^B \end{pmatrix} \quad (42.V) \end{aligned}$$

É importante observar que  $\varphi_-^A$  é independente de  $\varphi_+^A$ , o mesmo ocorrendo entre  $\psi_-^A$  e  $\psi_+^A$ . A equação (42.V) é, sob forma matricial, a lei de transformação do produto direto de dois espinores ordinários, a duas componentes, contravariantes, sem índices  $p$ , cada espinor se transformando como  $\varphi^i = Q\varphi$ .

Para formar  $q$ -espinores de  $2^a$  ordem não pudemos restringir a um dos ideais, (gerado por  $E_+$  ou por  $E_-$ ), mas necessitamos de elementos de ambos ideais.

A fórmula (42.V) pode ser escrita de modo mais conveniente se observarmos que:

$$Q_A^1 \varphi_-^A \quad Q_B^2 \psi_-^B = Q_A^1 \varphi_-^A \quad \psi_-^B \quad Q_B^T \quad 2$$

onde  $\psi_-^T$  é o transposto de  $\psi_-$  e  $Q_B^T$  é o elemento de matriz da matriz transposta de  $Q$ .

Com essa observação a (42.V) se escreverá

$$\psi'_+ \psi'_+ + \psi'_- \psi'_- = Q \left[ \psi_+ \psi_+^T + \psi_- \psi_-^T \right] Q^T \quad (42'.V)$$

Definiremos q-espinores de 2<sup>a</sup> ordem contravariante, sem índices p, a todo quaternion  $\psi$  que se transformar como:

$$\psi' = Q \psi Q^T$$

Usaremos frequentemente a notação  $\psi^{AB}$  para indicar as componentes de um q-espinores definido pela (43.V).

Qualquer outra combinação de produtos, como  $Q\psi_- Q\psi_+$ , etc. não geraria a lei (43.V).

Na forma matricial a (43.V) se escreverá:

$$\begin{pmatrix} \psi'_{11} & \psi'_{12} \\ \psi'_{21} & \psi'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^1_1 & Q^1_2 \\ Q^2_1 & Q^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^{11} & \psi^{12} \\ \psi^{21} & \psi^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^1_1 & Q^1_2 \\ Q^2_1 & Q^2_2 \end{pmatrix}^T \quad (43'.V)$$

A lei de transformação dos q-espinores de 2<sup>a</sup> ordem, covariantes se estabelece de modo análogo, partindo-se de:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'_+ \bar{\psi}'_+ + \bar{\psi}'_- \bar{\psi}'_- &= \bar{\psi}_+ \bar{Q} \bar{\psi}_+ \bar{Q} + \bar{\psi}_- \bar{Q} \bar{\psi}_- \bar{Q} = \\ &= \bar{Q}^T \left[ \bar{\psi}_+^T \bar{\psi}_+ + \bar{\psi}_-^T \bar{\psi}_- \right] \bar{Q} \end{aligned} \quad (44.V)$$

Com base nesse resultado definiremos um q-espinores de 2<sup>a</sup> ordem covariante, sem índices p a todo quaternion  $\psi$  que se transforma segundo a lei:

$$\psi' = \bar{Q}^T \psi \bar{Q}, \quad (45.V)$$

com  $Q\bar{Q} = \dot{\sigma}^0$ .

A notação  $\psi_{AB}$  será usada para indicar os elementos da matriz que representa o q espinor (45.V) isto é:

$$\begin{pmatrix} \psi'_{11} & \psi'_{12} \\ \psi'_{21} & \psi'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{-1} & Q^{-1} \\ Q^{-2} & Q^{-2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{-1} & Q^{-1} \\ Q^{-2} & Q^{-2} \end{pmatrix} \quad (45'.V)$$

Essa é exatamente a lei de transformação dos espinores covariantes de 2<sup>a</sup> ordem de cálculo espinorial ordinária quando na forma matricial.

Os q-espinores de 2<sup>a</sup> ordem contravariantes com índices p podem ser obtidos multiplicando-se  $\psi'_+{}^*$  por  $\psi'_+{}^*$  e somando-se com  $\psi'_-{}^*$   $\psi'_-{}^*$  ou tomando-se o complexo conjugado dos quaternions que respeitam à lei (43.V), isto é:

$$\psi^{*'} = Q^* \psi^* Q^{T*} = Q^* \psi^* Q^\dagger \quad (46.V)$$

Notaremos as componentes de um q espinor que satisfaz à lei de transformação por  $\psi^{\dot{A}\dot{B}}$ .

Por razões análogas definiremos q-quaternions de 2<sup>a</sup> ordem, covariantes com índices p a todo quaternion que se transformar segundo a lei:

$$\psi^{*'} = \bar{Q}^\dagger \psi^* \bar{Q}^*$$

O elemento de matriz que representa o q-espinor dado pela (47.V) será chamado  $\psi_{\dot{A}\dot{B}}$ .

Se efetuarmos o produto de  $Q\psi_+$  por  $\bar{\psi}_- \bar{Q}$ , obteremos:

$$\begin{aligned}
Q\varphi_+ \bar{\psi}_- \bar{Q} &= \begin{pmatrix} Q_{11}^1 & Q_{22}^1 \\ Q_{11}^2 & Q_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_+^1 & 0 \\ \varphi_+^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{-1} & \psi_{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{11}^1 & \bar{\psi}_{22}^1 \\ \bar{\psi}_{11}^2 & \bar{\psi}_{22}^2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} Q_A^1 & \varphi_+^A & \psi_{-B} & \bar{Q}_1^B & Q_A^1 & \varphi_+^A & \psi_{-B} & \bar{Q}_2^B \\ Q_A^2 & \varphi_+^A & \psi_{-B} & \bar{Q}_1^B & Q_A^2 & \varphi_+^A & \psi_{-B} & \bar{Q}_2^B \end{pmatrix} \quad (48.V)
\end{aligned}$$

Por outro lado, se efetuarmos o produto  $Q\varphi_- \bar{\psi}_+ \bar{Q}$ , também obtemos expressão análoga. Uma combinação linear desses dois produtos gera uma expressão também análoga à (48.V). A expressão (48.V) coincide com a lei de transformação de um espinor ordinário de 2ª ordem sem índices p, misto. Por isso vamos defini-la como a lei de transformação de um q-espinor  $\psi$ , de 2ª ordem, sem índices p, misto, isto é:

$$\psi' = Q \psi \bar{Q} \quad (49.V)$$

Os elementos de matriz de um q espinor definido pela lei (49.V) representaremos por  $\psi_{AB}^A$ .

Se tomarmos o transposto do q espinor definido pela (49.V) teremos a lei de transformação do  $(\psi_{AB}^A)$  e, por isso, vamos também passar a indicar, os q espinores por meio de expressões em que os índices apareçam explicitamente, isto é:

$$\left. \begin{aligned}
(\psi'_{AB}) &= Q (\psi_{AB}) Q^T \\
(\psi'_{AB}) &= \bar{Q}^T (\psi_{AB}) \bar{Q}
\end{aligned} \right\} \quad (50.V)$$

$$\left. \begin{aligned}
(\psi'_{\dot{A}\dot{B}}) &= Q^* (\psi_{\dot{A}\dot{B}}) Q^\dagger \\
(\psi'_{\dot{A}\dot{B}}) &= \bar{Q}^\dagger (\psi_{\dot{A}\dot{B}}) \bar{Q}^*
\end{aligned} \right\} \quad (51.V)$$

$$\left. \begin{aligned} (\psi^A_B) &= Q (\psi^A_B) \bar{Q} \\ (\psi^B_A) &= \bar{Q}^T (\psi^B_A) Q^T \end{aligned} \right\} \quad (52.V)$$

Se tomarmos o complexo conjugado dos q-espinores  $\psi^A_B$  e  $\psi^B_A$  teremos, com ajuda das (52.V) as suas leis de transformação:

$$\left. \begin{aligned} (\dot{\psi}^A_B) &= Q^* (\dot{\psi}^A_B) \bar{Q}^* \\ (\dot{\psi}^B_A) &= \bar{Q}^\dagger (\dot{\psi}^B_A) Q^\dagger \end{aligned} \right\} \quad (53.V)$$

As fórmulas supra definem os dois tipos de q espinores mistos de segunda ordem, com índices p.

Se formarmos a expressão  $Q\psi_+ Q^* \psi_+^* + Q\psi_- Q^* \psi_-^*$  e a representarmos matricialmente, teremos as bases da definição do q-espinor de 2<sup>a</sup> ordem contravariante com o 1<sup>o</sup> índice não p, e o segundo sendo um p índice, isto é:

$$(\psi^A \dot{B}) = Q (\psi^A \dot{B}) Q^{*T} = Q (\psi^A \dot{B}) Q^\dagger \quad (54.V)$$

Tomando o complexo conjugado desse quaternion, virá:

$$(\dot{\psi}^A \dot{B}) = Q^* (\dot{\psi}^A \dot{B}) Q^T \quad (55.V)$$

Por processos análogos aos anteriores e a partir da expressão:  $\bar{\varphi}_+ \bar{Q} \bar{\psi}_+^* \bar{Q}^* + \bar{\varphi}_- \bar{Q} \bar{\psi}_-^* \bar{Q}^*$  e de sua complexa conjugada, teremos:

$$(\dot{\psi}^A \dot{B}) = \bar{Q}^T (\dot{\psi}^A \dot{B}) \bar{Q}^* \quad (56.V)$$

e

$$\left( \psi^i \dot{A}_B \right) = \bar{Q}^\dagger \left( \psi_{AB} \right) \bar{Q} \quad (57.V)$$

Essas leis de transformação definem os correspondentes q-espinores de 2<sup>a</sup> ordem.

Analogamente, de  $Q\psi_+ \bar{\psi}_-^* \bar{Q}^*$  ou de  $Q\psi_- \bar{\psi}_+^* \bar{Q}^*$  ou de uma combinação linear dessas duas, tiraríamos a lei de transformação do q-espinoir  $\psi^A \dot{B}$ , isto é:

$$\left( \psi^A \dot{B} \right) = Q \left( \psi^A_B \right) \bar{Q}^* \quad (58.V)$$

Se tomarmos a sua complexa conjugada, temos:

$$\left( \psi^i \dot{A}_B \right) = Q^* \left( \psi^i_B \dot{A} \right) \bar{Q} \quad (59.V)$$

Tomando os transpostos das (58.V) e (59.V) obteremos respectivamente:

$$\left( \psi^i_B \dot{A} \right) = \bar{Q}^\dagger \left( \psi^i_B \dot{A} \right) Q^T \quad (60.V)$$

e

$$\left( \psi^i_B \dot{A} \right) = \bar{Q}^T \left( \psi^i_B \dot{A} \right) Q^\dagger \quad (61.V)$$

A conexão entre os elementos de matriz de um quaternion e as suas componentes na base  $\dot{\sigma}^\alpha$  é obtida a partir da igualdade:

$$\sum_{\alpha=0}^3 \psi_\alpha \dot{\sigma}^\alpha = \begin{pmatrix} \psi^{11} & \psi^{12} \\ \psi^{21} & \psi^{22} \end{pmatrix} \quad (62.V)$$

onde usamos o q-espinoir contravariante de 2<sup>a</sup> ordem apenas para explicitação. Da representação matricial usada para os  $\dot{\sigma}^\alpha$ , ti



ramos:

$$\begin{aligned}
 \psi^{11} &= \psi_0 + \psi_3 \\
 \psi^{12} &= \psi_1 - i\psi_2 \\
 \psi^{21} &= \psi_1 + i\psi_2 \\
 \psi^{22} &= \psi_0 - \psi_3
 \end{aligned}
 \tag{63.V}$$

Sabemos que um quaternion é hermitiano se tôdas as suas componentes  $\psi_\alpha$  são reais.

A partir das fórmulas (63.V) e com a hipótese de que as  $\psi_{(\alpha)}$  sejam reais, é fácil ver que  $(\psi^{AB})^* = \psi^{BA}$ , o que somente será possível se um dos índices for p e o outro não, isto é, se

$$\psi^{A\dot{B}} = \psi^{\dot{B}A} = (\psi^{A\dot{B}})^T^*$$

Reciprocamente, se  $\psi^{A\dot{B}} = \psi^{\dot{B}A}$  então  $\psi_{(\alpha)}$  é real.

Então, um q-espinor de  $2^a$  ordem é hermitiano se contravariante ou covariante com um índice p e outro não e se:

$$\text{ou} \left. \begin{aligned}
 \psi^{A\dot{B}} &= \psi^{\dot{B}A} \\
 \psi_{A\dot{B}} &= \psi_{\dot{B}A}
 \end{aligned} \right\}
 \tag{64.V}$$

Os q-espinores hermitianos de  $2^a$  ordem são de grande importância na formulação espinorial da relatividade.

A matriz de um q-espinor de  $2^a$  ordem hermitiano coincide com a transposta conjugada.

Se um q-espinor é de primeira ordem e se a definição de qua

ternion hermitiano é a de que tenha tôdas componentes reais, então a hermiticidade de um q-espinor de primeira ordem não é conservada pela transformação Q, isto é, por exemplo, se  $\varphi_+$  é hermitiano  $Q\varphi_+$  não é hermitiano em geral, mas um q-espinor de 2<sup>a</sup> ordem hermitiano tem transformado hermitiano.

Veremos que com auxílio dos q-espinores de segunda ordem hermitianos, poderemos formular coerentemente a curvatura no espaço riemanniano.

Devemos chamar a atenção, mais uma vez para o fato de que os quaternions  $\sigma^\alpha$  são hermitianos, mas são quaternions numericamente fixados.

## VI. CONEXÃO ENTRE QUATERNIONS DE LORENTZ E q-ESPINORES DE 2<sup>a</sup> ORDEM HERMITIANOS

No capítulo IV introduzimos os quaternions de Lorentz como quaternions hermitianos cujas componentes  $A_{(\alpha)}$  se transformam como as componentes covariantes de um quadri vetor da relatividade restrita. Da própria definição decorre a realidade de suas componentes e, então, a sua expressão matricial, na base  $\sigma^\alpha$ , é a de uma matriz hermitiana e como sua lei de transformação, (13.IV), é  $X' = Q X Q^\dagger$ , vemos que ela coincide com a lei de transformação (54.V) de um q-espinor de 2<sup>a</sup> ordem, hermitiano da forma  $(\psi^{AB})$ .

Esse resultado é importante pois, além de correlacionar um

quaternion de Lorentz com um q-espinor hermitiano de 2<sup>a</sup> ordem, mostra que o caráter espinorial do quaternion de Lorentz está associado intrinsecamente à sua formulação matricial. O quaternion X tem uma representação quadrivetorial quando expresso em termos dos elementos de base  $\dot{\sigma}^\mu$  e tem uma representação espinorial quando representado matricialmente em termos das matrizes  $\dot{\sigma}^\mu$ . Assim:

$$X = X_{(\mu)} \dot{\sigma}^\mu = \begin{pmatrix} X^{1\dot{1}} & X^{1\dot{2}} \\ X^{2\dot{1}} & X^{2\dot{2}} \end{pmatrix}, \quad (1.VI)$$

com

$$\begin{aligned} X^{1\dot{1}} &= X_{(0)} + X_{(3)}, & X^{1\dot{2}} &= X_{(1)} - iX_{(2)}, \\ X^{2\dot{1}} &= X_{(1)} + iX_{(2)} & X^{2\dot{2}} &= X_{(0)} - X_{(3)}. \end{aligned}$$

De  $X' = Q X Q^\dagger$ , tomando-se o adjunto, virá:

$$\bar{X}' = \bar{Q}^\dagger \bar{X} \bar{Q} \quad (2.VI)$$

Mas essa é a lei de transformação, (57.V) do espinor  $(\psi_{\dot{A}B})$ . É fácil ver que se X é hermitiano,  $\bar{X}'$  é hermitiano também.

As fórmulas (1.VI) e (2.VI) estabelecem uma correspondência biunívoca entre X e  $(X^{\dot{A}B})$  e entre  $\bar{X}$  e  $(X_{\dot{A}B})$  respectivamente.

De  $X_{(\mu)} \dot{\sigma}^\mu = X$ , multipliquemos escalarmente por  $\dot{\sigma}^\nu$  e usando as fórmulas (18.II) e (16.II), virá:

$$\dot{\sigma}^\nu | X = X_{(\mu)} \dot{\sigma}^\nu | \dot{\sigma}^\mu = \dot{\sigma}^0 X_{(\mu)} \dot{\sigma}^{\nu\mu}.$$

A (19.II) nos dará:

$$\dot{\sigma}^\nu | X = \dot{\sigma}^0 X^{(\nu)}. \quad (3.VI)$$

Omitiremos frequentemente o  $\dot{\sigma}^0$ , desde que não haja dúvidas.

Pela (15.II) podemos escrever também

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}^\nu |X &= \frac{1}{2} (\dot{\sigma}^\nu \bar{X} + \overline{X \dot{\sigma}^\nu}) = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\sigma}^\nu \bar{X} + \overline{\dot{\sigma}^\nu \bar{X}}) = \frac{1}{2} \text{tr} (\dot{\sigma}^\nu \bar{X}),\end{aligned}\quad (4.VI)$$

onde usamos a (8.III).

Como os  $X_{(\mu)}$  são elementos do corpo dos escalares, se  $X$  é da forma  $(X^{\dot{A}\dot{B}})$  então os  $\dot{\sigma}^\mu$  são da forma  $(\dot{\sigma}^{\mu\dot{A}\dot{B}})$ . A hermiticidade de  $X$  decorre da realidade dos  $X_{(\mu)}$  e da hermiticidade dos  $\dot{\sigma}^\mu$ . Reciprocamente se  $X$  é hermitiano e os  $X_{(\mu)}$  reais, então os  $\dot{\sigma}^\mu$  são hermitianos. Dessa análise a (4.VI) poderá ser escrita como:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}^\nu |X &= X^{(\nu)} = \frac{\dot{\sigma}^0}{2} \text{tr}(\dot{\sigma}^\nu \bar{X}) = \\ &= \frac{\dot{\sigma}^0}{2} \dot{\sigma}^{\nu\dot{A}\dot{B}} X_{\dot{B}\dot{A}}\end{aligned}\quad (5.VI)$$

Essa fórmula dá as componentes do quadrivector associado ao q-espinoer hermitiano  $X$  quando conhecemos a sua representação espinorial. Por outro lado, a fórmula (1.VI), é uma igualdade entre a matriz  $X$  e a combinação linear das matrizes  $\dot{\sigma}^\mu$  e se fixarmos o elemento de matriz  $\dot{A}\dot{B}$  no primeiro membro, deveremos fixá-lo no segundo membro, isto é:

$$X^{\dot{A}\dot{B}} = X_{(\mu)} \dot{\sigma}^{\mu\dot{A}\dot{B}}. \quad (6.VI)$$

Esta fórmula é a inversa da (5.VI), pois nos dá as componentes da representação espinorial do quadrivector  $X$  quando conhecemos as suas componentes de universo (que chamaremos a sua representação tensorial).

A fórmula (2.VI) e o fato de que se  $X = X_{(\alpha)} \dot{\sigma}^\alpha$ , então  $\bar{X} = X_{(\alpha)} \overline{\dot{\sigma}^\alpha}$ , nos leva aos  $\overline{\dot{\sigma}^\alpha}$  como tendo a representação espinorial ( $\dot{\sigma}_{BA}^\alpha$ ).

Então,  $X_{BA} = X_{(\mu)} \dot{\sigma}_{BA}^\mu$  é a fórmula obtida da igualdade entre elementos de matriz, quando representamos matricialmente a expressão  $\bar{X} = X_{(\alpha)} \overline{\dot{\sigma}^\alpha}$ .

A realidade dos quadritensores é mantida pela transformação de Lorentz e a correspondência (5.VI) entre quaternions de Lorentz e q-espinores hermitianos é biunívoca. Nesse modo, somente podemos representar quadrivetores de universo por q-espinores hermitianos de 2<sup>a</sup> ordem.

O cálculo espinorial ordinário se baseia no produto direto de espinores para formar espinores de ordem superior. Neste trabalho usamos os quaternions para representar espinores de primeira e segunda ordens. Para a formulação da curvatura no espaço riemanniano não precisaremos sair da álgebra dos quaternions e isto quer dizer que nos bastarão os q-espinores de 2<sup>a</sup> ordem. Se quisermos representar espinores de ordem superior à segunda por quaternions, necessitaremos de introduzir a operação de produto direto de quaternions.

## VII. QUATERNIONS EM ESPAÇO DE RIEMANN

### (I.VII) Tetradas e Quaternions

Associemos a cada ponto P do continuum espaço-tempo um conjunto de quatro vetores de universo, normalizados e linearmente independentes. Três dos vetores serão do gênero espaço e um deles será do gênero tempo. Ao conjunto dos quatro vetores num ponto P chamaremos tetrada em P.

Cada vetor da tetrada tem por componentes quatro funções de ponto, reais,  $h^\mu(P)_\alpha$ , onde  $\mu$  é o índice de componente e  $\alpha$  indica o quadrivetor da tetrada. Faremos  $\alpha$  e  $\mu$  variarem de 0 a 3.

A independência linear dos vetores da tetrada é caracterizada pelo não anulamento do determinante:

$$\begin{vmatrix} h^0(P)_0 & h^0(P)_1 & h^0(P)_2 & h^0(P)_3 \\ h^1(P)_0 & h^1(P)_1 & h^1(P)_2 & h^1(P)_3 \\ h^2(P)_0 & h^2(P)_1 & h^2(P)_2 & h^2(P)_3 \\ h^3(P)_0 & h^3(P)_1 & h^3(P)_2 & h^3(P)_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.I.VII)$$

Definir a tetrada em cada ponto P do espaço-tempo corresponde a definir 16 funções reais  $h^\mu(P)_\alpha$ . Com essas 16 funções podemos construir o tensor métrico  $g^{\mu\nu}(P)$ , de modo unívoco, através das equações:

$$g^{\mu\nu}(P) = h^\mu(P)_\alpha h^\nu(P)^\alpha \quad (2.I.VII)$$

com

$$h^\nu(P)^\alpha = h^\nu(P)_\beta \eta^{\beta\alpha} \quad (3.I.VII)$$

e  $\eta^{\beta\alpha} = 0$  se  $\beta \neq \alpha$ ,  $\eta^{00} = 1 = -\eta^{11} = -\eta^{22} = -\eta^{33}$ .

Podemos definir  $\eta_{\alpha\beta}$  de modo único, tal que  $\eta_{\alpha\beta} \eta^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$ , onde  $\delta_{\alpha}^{\gamma}$  é o símbolo de Kronecker.

Vamos introduzir o quaternion  $\sigma^{\mu}(P)$  por meio da equação:

$$\sigma^{\mu}(P) = h^{\mu}(P)_{\alpha} \dot{\sigma}^{\alpha} \quad (4.I.VII)$$

Como índice  $\alpha$  á agora também índice de componente quaterniônica vamos escrevê-lo, como anteriormente, entre parênteses, isto é:

$$\sigma^{\mu}(P) = h^{\mu}(P)_{(\alpha)} \dot{\sigma}^{\alpha} \quad (4'.I.VII)$$

Com a definição (4'.I.VII) haverá a coincidência entre  $\eta^{\alpha\beta}$  e  $\dot{g}^{\alpha\beta} = \dot{\sigma}^{\alpha} | \dot{\sigma}^{\beta}$ ; entre  $\eta_{\alpha\beta}$  e  $\dot{g}_{\alpha\beta} = \dot{\sigma}_{\alpha} | \dot{\sigma}_{\beta}$ .

Se fizermos o produto escalar de  $\sigma^{\mu}(P)$  por  $\sigma^{\nu}(P)$ , virá:

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu}(P) | \sigma^{\nu}(P) &= h^{\mu}(P)_{(\alpha)} h^{\nu}(P)_{\beta} \dot{\sigma}^{\alpha} | \dot{\sigma}^{\beta} = \\ &= h^{\mu}(P)_{(\alpha)} h^{\nu}(P)^{(\alpha)} = g^{\mu\nu}(P) . \end{aligned}$$

Então:

$$\sigma^{\mu}(P) | \sigma^{\nu}(P) = g^{\mu\nu}(P) \quad (5.I.VII)$$

Os quatro quaternions  $\sigma^{\mu}(P)$  definem unívocamente a métrica  $g^{\mu\nu}(P)$  e isto é evidente pela (5.I.VII). Definir o campo  $g^{\mu\nu}(P)$  corresponde a definir um campo de 16 funções reais de argumento  $P$ , mas levando em conta a simetria do  $g^{\mu\nu}(P)$ , vê-se que somente 10 são independentes. Como os quatro quaternions  $\sigma^{\mu}(P)$  correspondem a 16 funções independentes, então os  $g^{\mu\nu}(P)$  não definem unívocamente os  $\sigma^{\mu}(P)$ , que encerram ainda 6 graus de liberdade, que podem ser conectados a seis parâmetros contínuos. Esses

seis parâmetros contínuos permitem definir diferentes tetradas em  $P$ , obtidas umas das outras por rotações no espaço-tempo mas tôdas elas definindo unívocamente a métrica  $g^{\mu\nu}(P)$ .

Uma rotação no espaço-tempo é uma transformação de Lorentz restrita.

O índice  $\mu$  é um índice de componente de quadrivetor. Nas transformações de coordenadas  $X^\nu$  em  $X'^\mu$  num ponto  $P$  admitiremos sempre o jacobiano diferente de zero em alguma vizinhança de  $P$ , isto é:

$$\left| \frac{\partial X}{\partial X'} \right|_P \neq 0 \quad (6.I.VII)$$

Os  $\sigma^\mu(P)$  são quaternions hermitianos devido à realidade dos  $h^\mu(P)_{(\alpha)}$  e da hermiticidade dos  $\dot{\sigma}^\alpha$ . Omitiremos doravante a indicação do argumento  $P$ , salvo em casos convenientes.

Veremos na fórmula (21.I.VII) que vale:

$$\sigma^\mu = g^{\mu\nu} \sigma_\nu ,$$

logo vale:

$$\overline{\sigma^\mu} = g^{\mu\nu} \overline{\sigma_\nu} \quad (7.I.VII)$$

Como o determinante (1.I.VII) é diferente de zero existe a inversa da equação (4.I.VII), isto é:

$$\dot{\sigma}^\alpha = f_{\mu}^{(\alpha)} \sigma^\mu \quad (8.I.VII)$$

onde  $f^{(\alpha)}(P)_\mu$  é o elemento de matriz da inversa da matriz associada à (1.I.VII).

Então, em  $P$  podemos escrever:



$$\begin{aligned} \dot{g}^{\alpha\beta} &= \dot{\sigma}^\alpha | \dot{\sigma}^\beta = f^{(\alpha)}{}_\mu f^{(\beta)}{}_\nu \sigma^\mu | \sigma^\nu = \\ &= f^{(\alpha)}{}_\mu f^{(\beta)}{}_\nu g^{\mu\nu} = f^{(\alpha)}{}_\mu f^{(\beta)}{}_\mu \end{aligned} \quad (9.I.VII)$$

Em particular,

$$\left. \begin{aligned} \dot{g}^{00} &= 1 = f^{(0)}{}_{(P)\mu} f^{(0)}{}_{(P)}{}^\mu \\ \dot{g}^{kk} &= -1 = f^{(k)}{}_{(P)\mu} f^{(k)}{}_{(P)}{}^\mu, \text{ se } k \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.I.VII)$$

Então, o quadrivetor da tetrada em  $P$  cujas componentes  $\mu$  são  $f^{(0)}{}_{(P)\mu}$  é um vetor do gênero tempo e os demais três vetores de componentes  $f^{(k)}{}_{(P)\mu}$  são do gênero espaço. Todos esses vetores estão normalizados.

Existirá o inverso do quaternion  $\sigma^\mu(P)$  desde que  $g^{\mu\mu}(P) \neq 0$ , pois

$$(\sigma^\mu)^{-1} = \frac{\overline{\sigma^\mu} \cdot \overline{\sigma^\mu}}{\sigma^\mu \overline{\sigma^\mu}} = \frac{\overline{\sigma^\mu}}{g^{\mu\mu}}. \quad (11.I.VII)$$

No caso da relatividade restrita, e em coordenadas cartesianas, ortogonais,  $g^{\mu\nu} \equiv \dot{g}^{\mu\nu}$ . Neste caso, podemos fazer as  $\sigma^\mu$  coincidentes com as  $\dot{\sigma}^\alpha$ , o que corresponde a fazer:

$$h_{(\alpha)}^\mu = 0 \quad \text{se } \mu \neq \alpha \quad \text{e } 1 \quad \text{se } \mu = \alpha.$$

A conexão entre as métricas no espaço de universo, (espaço-tempo), e no espaço quaterniônico se dá pela relação:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}(P) &= \sigma^\mu | \sigma^\nu = h^\mu(P)_{(\alpha)} h^\nu(P)_{(\beta)} \dot{\sigma}^\alpha | \dot{\sigma}^\beta = \\ &= h^\mu(P)_{(\alpha)} h^\nu(P)_{(\beta)} \dot{g}^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (12.I.VII)$$

Essa fórmula correlaciona o tensor  $g^{\mu\nu}$  com o "tensor"  $\dot{g}^{\alpha\beta}$ .

Escrevemos "tensor" porque não definimos produto tensorial de quaternions.

De:

$$\dot{\sigma}^\beta | \sigma^\mu = h_{(\alpha)}^\mu \dot{\sigma}^\beta | \dot{\sigma}^\alpha = h^{\mu(\beta)} \quad (13.I.VII)$$

Concluimos que  $h_{(\alpha)}^\mu$  é a projeção do quaternion  $\sigma^\mu$  sobre o quaternion  $\dot{\sigma}_\alpha$ .

Como  $\dot{\sigma}^\beta = f_{(\beta)}^\mu \sigma^\mu$  virá:

$$\dot{\sigma}^\beta | \sigma^\mu = f_{(\beta)}^\nu \sigma^\nu | \sigma^\mu = f^{(\beta)\mu}.$$

Então, de (13.I.VII) concluimos que:

$$f^{(\beta)\mu} = h^{\mu(\beta)}. \quad (14.I.VII)$$

Se tomarmos em um ponto P a expressão correspondente à (8.II), obteremos:

$$\begin{aligned} -2\bar{A}(P) &= \dot{\sigma}_\alpha A(P) \dot{\sigma}^\alpha = f_{(\alpha)\mu} \sigma^\mu A f^{(\alpha)\nu} \sigma^\nu = \\ &= f_{(\alpha)\mu} f^{(\alpha)\nu} \sigma^\mu A \sigma^\nu = g_{\mu\nu} \sigma^\mu A \sigma^\nu, \end{aligned}$$

logo:

$$\overline{A(P)} = -\frac{1}{2} \sigma_\nu A \sigma^\nu. \quad (15.I.VII)$$

Esta fórmula é um modo de associar ao campo  $A(P)$  o seu campo adjunto. Análogamente, em cada ponto P valerá uma equação semelhante à equação (9.II), isto é:

$$A_\beta(P) \dot{\sigma}^0 = \frac{1}{4} \overline{\sigma}_\mu \dot{\sigma}^\beta A(P) \overline{\sigma}^\mu \quad (16.I.VII)$$

onde a  $\sigma^\mu$  depende de P.

Podemos referir os quaternions de Lorentz no ponto P aos

quaternions  $\sigma^\mu(P)$  como se estes constituíssem uma base quaterniônica local. De fato, um quaternion de Lorentz,  $A(P)$  se escreverá:

$$A(P) = A_{(\mu)}(P) \dot{\sigma}^\mu \quad (17.I.VII)$$

A adjunta é:

$$\overline{A(P)} = A_{(\mu)}(P) \overline{\dot{\sigma}^\mu}, \quad (17'.I.VII)$$

sendo

$$A_{(\mu)}(P) \left( \frac{\partial X^{\nu}}{\partial X^{\mu}} \right)_P A^{(\nu)}(P) \quad (18.I.VII)$$

a lei de transformação de quadrivetor em  $P$  quando passamos das coordenadas  $X^\beta$  às  $X'^\beta$ .

Com a ajuda da (8.I.VII), teremos:

$$\left. \begin{aligned} A(P) &= A_{(\mu)}(P) f^{(\mu)}(P)_\nu \sigma^\nu = A_\nu(P) \sigma^\nu(P), \\ \text{com } A_\nu(P) &= A_{(\mu)}(P) f^{(\mu)}(P)_\nu \end{aligned} \right\} \quad (19.I.VII)$$

Então, **concluimos** que as  $\sigma^\nu(P)$  se comportam como uma base local e aparece bem nítido o papel das  $f^{(\mu)}(P)_\nu$  na mudança de índices quaterniônicos para índices de universo.

Se projetarmos  $A(P)$  sobre  $\sigma^\nu(P)$  obteremos:

$$A^\nu(P) = \sigma^\nu(P) | A(P) \quad (20.I.VII)$$

Passaremos a chamar os  $\sigma^\mu(P)$  da q-tetrada em  $P$ .

De (4'.I.VII) e de (8.I.VII) vem:

$$\sigma^\mu(P) = h^\mu_{(\alpha)} \dot{\sigma}^\alpha = h^\mu_{(\alpha)} f^{(\alpha)\nu} \sigma_\nu.$$

Mas, por (14.I.VII),  $f^{(\alpha)\nu} = h^{\nu(\alpha)}$ ,

logo:

$$\sigma^\mu(P) = h^\mu_{(\alpha)} h^{\nu(\alpha)} \sigma_\nu .$$

Mas, por (12.I.VII),  $h^\mu(P)_{(\alpha)} h^{\nu(P)(\alpha)} = g^{\mu\nu}(P)$ , então:

$$\sigma^\mu(P) = g^{\mu\nu}(P) \sigma_\nu(P) \quad (21.I.VII)$$

As fórmulas (4º.I.VII) e (8.I.VII) estabelecem a relação entre a q-tetrada e a base quaterniônica no ponto P. Em cada ponto do espaço curvo temos duas bases, uma independente do ponto,  $\hat{\sigma}^\alpha$ , e outra dependente do ponto, a q-tetrada  $\sigma^\mu$ . Um quaternion local pode ser referido a qualquer uma delas. O fato de que se duas q-tetradas geram o mesmo  $g^{\mu\nu}(P)$  elas devem diferir por uma transformação de Lorentz não dependente de transformação  $X^\mu \rightarrow X'^\mu$ , nos leva a uma lei conectando duas q-tetradas no mesmo ponto:

$$\sigma'^\mu(P) = \Lambda^\mu(P)_\nu \sigma^\nu(P) \quad (22.I.VII)$$

com  $\Lambda^\mu(P)_\nu$  não dependendo da transformação  $X^\mu \rightarrow X'^\mu$ .

As q-tetradas  $\sigma^\mu$  têm caráter tensorial porque contêm o índice  $\mu$  de quadrivetor, mas o fato de serem uma combinação linear das  $\hat{\sigma}^\alpha$  em cada ponto P, a coeficientes reais  $h^\mu(P)_{(\alpha)}$ , lhes dá também caráter espinorial hermitiano.

Se escrevermos a equação matricial (4.I.VII) como uma igualdade entre elementos de matriz correspondentes, obteremos:

$$\sigma^\mu(P)^{AB} = h^\mu(P)_{(\alpha)} \hat{\sigma}^{\alpha AB} . \quad (23.I.VII)$$

Nesta fórmula há três tipos de índices, o tensorial, o quaterniônico e o espinorial, por isto é de grande importância. Vamos que é exatamente do fato de que  $\sigma^\mu$  depende das  $\hat{\sigma}^\alpha$  que decor

re o seu comportamento espinorial.

No caso dos quaternions de Lorentz, na relatividade restrita, tínhamos uma conexão entre os três tipos de índices, com a diferença de que não havia dependência de P, e o índice tensorial estava coincidente com o quaterniônico. De fato:  $X = X_{(\mu)} \dot{\sigma}^\mu$ , se escrito em termos dos elementos de matriz passa a ser:

$$X^{AB} = X_{(\mu)} \dot{\sigma}^{\mu AB}$$

No espaço curvo o índice quaterniônico ( $\mu$ ) se separa nitidamente do índice vetorial  $\mu$ .

A partir da fórmula (8.I.VII), isto é:

$$\dot{\sigma}^\alpha = f^{(\alpha)}(P)_\mu \sigma^\mu(P),$$

teremos

$$\dot{\sigma}^{\alpha AB} = f^{(\alpha)}(P)_\mu \sigma^{\mu AB}(P) \quad (24.I.VII)$$

Sabemos da definição de produto escalar de dois quaternions que:

$$\dot{\sigma}^\alpha | \sigma^\nu(P) = \frac{1}{2} \text{tr} (\dot{\sigma}^\alpha \sigma^\nu(P)) = \frac{1}{2} \dot{\sigma}^{\alpha AB} \sigma^\nu(P)_{BA}$$

logo:

$$\dot{\sigma}^\alpha | \sigma^\nu(P) = f^{(\alpha)}(P)^\nu = \frac{1}{2} \text{tr} (\dot{\sigma}^\alpha \overline{\sigma^\nu(P)}) = \frac{1}{2} \dot{\sigma}^{\alpha AB} \sigma^\nu(P)_{BA} \quad (25.I.VII)$$

Por contração com  $\dot{g}_{\alpha\beta}$  e  $g_{\mu\nu}(P)$  podemos baixar os índices quaterniônico e vetorial, respectivamente, na fórmula supra.

A fórmula (24.I.VII) mostra explicitamente que  $\sigma^\mu(P)$  é um quaternion hermitiano que tem índices espinoriais do tipo  $AB$  e isso decorre, já sabíamos, da sua dependência das  $\dot{\sigma}^\alpha$ . Então, desde que fixamos as coordenadas  $X^\nu$ , a  $\sigma^\mu$  se transformará segundo

a (54.V), isto é:

$$\sigma^{\mu}(P) = Q(P) \sigma^{\mu}(P) Q^{\dagger}(P), \quad (26.I.VII)$$

com

$$\bar{Q}(P) Q(P) = \dot{\sigma}^0.$$

A fórmula (26.I.VII) é obtida com a fixação das coordenadas  $X^{\mu}$  associadas ao ponto P. Se fizermos a transformação que leva os  $X^{\mu}$  nos  $X'^{\mu}$ , as  $\sigma^{\mu}(P)$  se transformarão como:

$$\sigma'^{\mu}(P) = \left( \frac{\partial X'^{\mu}}{\partial X^{\nu}} \right)_P Q(P) \sigma^{\nu}(P) Q^{\dagger}(P) \quad (27.I.VII)$$

De fato, seja  $A(P)$  um quaternion de Lorentz em P e seja  $A'(P)$  o seu transformado induzido pela transformação  $X^{\mu} \rightarrow X'^{\mu}$ . Então,

$$\left. \begin{aligned} A(P) &= A_{(\alpha)}(P) \dot{\sigma}^{\alpha} \\ A'(P) &= A'_{(\beta)}(P) \dot{\sigma}^{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (28.I.VII)$$

onde  $(\beta)$ ,  $(\alpha)$  são índices quaterniônicos mas que também coincidem com o índice vetorial de um quadrivetor, isto é:

$$A'_{(\alpha)}(P) = \left( \frac{\partial X^{(\beta)}}{\partial X'^{(\alpha)}} \right)_P A_{(\beta)}(P). \quad (28'.I.VII)$$

Como  $A(P)$  é representável por uma matriz hermitiana a sua transformada matricial está correlacionada a ela por:

$$A'(P) = Q(P) A(P) Q^{\dagger}(P). \quad (28''.I.VII)$$

Com essas fórmulas, e com a (8.I.VII) virá, (onde omitiremos a indicação do P):

$$Q A Q^{\dagger} = A'_{(\alpha)} \dot{\sigma}^{\alpha} = A'_{(\alpha)} f'^{(\alpha)}_{\mu} \sigma^{\mu}$$

Pela fórmula (19.I.VII),  $A = A_{(\alpha)} \dot{\sigma}^{\alpha} = A_{\nu} \sigma^{\nu}$ , logo:

$$Q A_{\nu} \sigma^{\nu} Q^{\dagger} = A'_{(\alpha)} f'^{(\alpha)}{}_{\mu} \sigma'^{\mu} = A'_{\mu} \sigma'^{\mu},$$

logo

$$A'_{\mu} \sigma'^{\mu} = Q A_{\nu} \sigma^{\nu} Q^{\dagger},$$

ou

$$A_{\nu} \left( \frac{\partial X^{\nu}}{\partial X'^{\mu}} \right) \sigma'^{\mu} = Q A_{\nu} \sigma^{\nu} Q^{\dagger} = A_{\nu} Q \sigma^{\nu} Q^{\dagger},$$

então:

$$\left( \frac{\partial X^{\nu}}{\partial X'^{\mu}} \right) \sigma'^{\mu} = Q \sigma^{\nu} Q^{\dagger}.$$

Invertendo, vem:

$$\sigma'^{\mu}(P) = \left( \frac{\partial X'^{\mu}}{\partial X^{\nu}} \right)_P Q(P) \sigma^{\nu}(P) Q^{\dagger}(P)$$

que é a fórmula (27.I.VII).

Se tomarmos o adjunto do  $\sigma'^{\mu}(P)$  obtemos:

$$\overline{\sigma'^{\mu}(P)} = \left( \frac{\partial X'^{\mu}}{\partial X^{\nu}} \right)_P \overline{Q(P)}^{\dagger} \overline{\sigma^{\nu}(P)} \overline{Q(P)} \quad (29.I.VII)$$

que é a lei de transformação da  $\overline{\sigma^{\nu}(P)}$ .

## (II.VII) Derivada Covariante das $\alpha$ -Tetradas

A derivada covariante de um vetor  $A(P)$ , de componentes  $A^{\mu}(P)$  é, segundo o cálculo tensorial, o tensor cujas componentes são dadas pela expressão:

$$A^{\mu}(P)_{|\nu} = A^{\mu}(P)_{,\nu} + A^{\rho}(P) \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \rho \nu \end{matrix} \right\}_{(P)} \quad (1.II.VII)$$

onde  $A(P)_{,\nu} = \left( \frac{\partial A^\mu(P)}{\partial X^\nu} \right)_P$  e  $\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \rho \ \nu \end{matrix} \right\}_{(P)}$  é o símbolo de Christoffel de 2ª espécie em P e as  $X^\nu$  são coordenadas do ponto .

A generalização para a derivada covariante de um tensor é conhecida e para o caso de um tensor de segundo ordem contravariante será:

$$A^{\mu\nu}(P)|_{\rho} = A^{\mu\nu}(P)_{,\rho} + A^{\lambda\nu}(P) \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \lambda \ \rho \end{matrix} \right\}_{(P)} + A^{\mu\lambda}(P) \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda \ \rho \end{matrix} \right\}_{(P)} \quad (2.II.VII)$$

Sabemos também, do cálculo tensorial no espaço de Riemann, que um vetor é transportado paralelamente a si mesmo, entre dois pontos infinitamente próximos se vale a equação:

$$A^\mu(P)|_{\rho} = 0 \quad (3.II.VII)$$

Em particular, qualquer dos unitários  $e_\mu(P)$  do sistema de coordenadas em P satisfaz à condição:

$$e_\mu(P)|_{\nu} \equiv 0 \quad (4.II.VII)$$

Os q-espinores de primeira ordem e de cada espécie constituem um espaço vetorial de dimensão 2 e, nesse sentido, os índices espinoriais serão índices vetoriais do espaço vetorial considerado. Dessa interpretação decorre que os q-espinores de 2ª ordem poderão ser formados por produtos tensoriais, (produtos diretos), de dois q-espinores de primeira ordem.

No espaço tempo riemanniano os q-espinores ali definidos



constituem um campo espinorial. Nesse mesmo espaço definimos grandezas de universo, como os quaternions de Lorentz, (agora generalizados, no sentido de que são dependentes de P).

Sabemos que os quaternions que representam quadrivetores de universo têm estrutura de q-espinores de 2<sup>a</sup> ordem, hermitianos. Veremos que poderemos expressar entes de universo, importantes, como o tensor curvatura, em função de produtos ordinários de quaternions. Para isso é conveniente a extensão do conceito de derivação covariante e transporte paralelo aos q-espinores definidos no espaço tempo, de modo análogo ao do cálculo tensorial. Como há quatro tipos de índices espinoriais, vamos introduzir quatro expressões que definem a derivada covariante de um q-espinor de 1<sup>a</sup> ordem. Se o q-espinor é do tipo  $(\psi^A)$ , a sua derivada covariante será definida por:

$$\psi_{|\nu} = \psi_{,\nu} + \Gamma_{\nu} \psi \quad (5.II.VII)$$

Matricialmente essa expressão se escreverá:

$$(\psi^A)_{|\nu} = (\psi^A)_{,\nu} + (\Gamma_{\nu}^A_B)(\psi^B), \quad (5'.II.VII)$$

onde  $(\psi^A)_{,\nu} = \left( \frac{\partial \psi^A}{\partial X^\nu} \right)_P$  e onde  $\Gamma_{\nu}$  é um quaternion que chamaremos a q-afinidade espinorial no ponto P.

Se na fórmula (5.II.VII) o índice espinorial A fôsse um índice tensorial  $\mu$ , teríamos exatamente a fórmula (1.II.VII).

Veremos posteriormente que podemos expressar a  $\Gamma_{\nu}$  em função das q-tetradas  $\sigma^\mu$ , de suas derivadas ordinárias e dos símbolos de Christoffel de 2<sup>a</sup> espécie.

Se o q-espinor é do tipo  $(\psi_a)$ , isto é, covariante, então sua derivada covariante será definida como:

$$\psi_{|\nu} = \psi_{,\nu} - \psi \Gamma_{\nu} \quad (6.II.VII)$$

A expressão matricial dessa fórmula será:

$$(\psi_A)_{|\nu} = (\psi_A)_{,\nu} - (\psi_B)(\Gamma_{\nu}^B{}_A) \quad (6'.II.VII)$$

Analogamente, se A fôsse índice tensorial essa fórmula daria a derivada covariante de um vetor covariante.

Estamos omitindo a dependência em P nas fórmulas deste capítulo.

Observemos que a derivada covariante de um q-espinor passa a ter comportamento de quadri vetor covariante quanto ao índice tensorial  $\nu$ .

As derivadas covariantes de espinores da forma  $(\psi^{\dot{A}})$  e  $(\psi_{\dot{A}})$  são obtidas tomando-se as complexas conjugadas das expressões (5.II.VII) e (6.II.VII), respectivamente, isto é:

$$\psi^*_{|\nu} = \psi^*_{,\nu} + \Gamma_{\nu}^* \psi^* \quad (7.II.VII)$$

e

$$\psi^*_{|\nu} = \psi^*_{,\nu} - \psi^* \Gamma_{\nu}^* \quad (8.II.VII)$$

Devemos notar que:

$$\Gamma_{\nu}^* = \begin{pmatrix} \Gamma_{\nu 1}^1 & \Gamma_{\nu 2}^1 \\ \Gamma_{\nu 1}^2 & \Gamma_{\nu 2}^2 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \Gamma_{\nu \dot{1}}^{\dot{1}} & \Gamma_{\nu \dot{2}}^{\dot{1}} \\ \Gamma_{\nu \dot{1}}^{\dot{2}} & \Gamma_{\nu \dot{2}}^{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad (9.II.VII)$$

Para os q-espinores de 2<sup>a</sup> ordem introduziremos a derivação covariante por analogia formal com o caso tensorial. Para os q-espinores de ordem mais elevada é necessário o conceito de produto direto de quaternions, afim de estender-se de modo coerente a noção de derivada covariante. Para um q-espinor do tipo  $(\psi^{AB})$  a derivada covariante terá por expressão:

$$\psi|_{\nu} = \psi_{,\nu} + \Gamma_{\nu} \psi + \psi \Gamma_{\nu}^{\dagger} , \quad (10.II.VII)$$

cuja forma matricial é:

$$(\psi^{AB})|_{\nu} = (\psi^{AB})_{,\nu} + (\Gamma_{\nu}^A_L) (\psi^{LB}) + (\psi^{AL}) (\Gamma_{\nu}^T_L{}^B) , \quad (10'.II.VII)$$

sendo  $\Gamma_{\nu}^{\dagger} = (\Gamma_{\nu}^*)^T$ .

As derivadas covariantes dos demais tipos de q-espinores de 2<sup>a</sup> ordem são obtidas a partir das correspondentes expressões do cálculo tensorial. Em particular, vamos apenas dar a derivada covariante do q-espinor  $(\psi_{AB})$ :

$$\psi|_{\nu} = \psi_{,\nu} - \psi \Gamma_{\nu} - \Gamma_{\nu}^{\dagger} \psi \quad (11.II.VII)$$

cuja expressão matricial é:

$$(\psi_{AB})|_{\nu} = (\psi_{AB})_{,\nu} - (\psi_{AL}) (\Gamma_{\nu}^L_B) - (\Gamma_{\nu}^T_A{}^L) (\psi_{LB}) \quad (11'.II.VII)$$

A derivação covariante de um q-espinor introduz um índice tensorial, de modo que, o quaternion obtido pela derivação covariante de um q-espinor é um ente misto. Se o quisermos derivar novamente, covariantemente, estaremos estendendo a derivação covariante além dos q-espinores porque estaremos derivando não mais

um q-espinor mas um ente misto, com índices espinoriais e tensoriais. Para estendermos a derivação covariante de qualquer ordem de um q-espinor, vamos definir a derivada covariante da derivada covariante de um q-espinor. Vamos defini-la para o caso (5.II.VII), e os demais casos serão obtidos facilmente a partir do exemplo desse caso. Escreveremos primeiramente na forma matricial para que fique mais clara a sua lei de formação:

$$\begin{aligned}
 (\psi^A)_{|\nu\mu} &= ((\psi^A)_{|\nu})_{|\mu} = ((\psi^A)_{|\nu})_{,\mu} - \\
 &- (\psi^A)_{|\rho} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} + (\psi^B)_{|\nu} (\Gamma_{\mu B}^A) \quad (12'.II.VII)
 \end{aligned}$$

onde  $\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$  é o símbolo de Christoffel de 2ª espécie e por isso é uma função escalar.

Essa fórmula se escreve compactamente como:

$$\psi_{|\nu\mu} = \psi_{|\nu,\mu} - \psi_{|\rho} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} + \Gamma_{\mu}^{\nu} \psi_{|\nu} \quad (12.II.VII)$$

A derivação covariante sucessiva é agora de formação óbvia.

A tetrada  $\sigma^{\mu}(P)$  é um quaternion que envolve um índice  $\mu$  de quadrivetor, é hermitiano e sua forma matricial, sabemos, é  $(\sigma^{\mu AB})$ , por isso um ente misto de tipo vetor, espinor de 2ª ordem.

Um campo de quaternions de Lorentz definido no espaço riemanniano associa um campo de quadrivetores de universo a um campo espinorial de 2ª ordem hermitiano.

Se  $A(P) = A_{\mu} \sigma^{\mu}(P)$  é um campo de quaternions de Lorentz, o

campo de quadrivetores será dado por:

$$A^\mu(P) = \sigma^\mu(P) | A(P)$$

e o campo de espinores será dado por:

$$A^{\dot{C}\dot{D}}(P) = A_\mu(P) \sigma^\mu(P)^{\dot{C}\dot{D}}.$$

O que fizemos para quaternions de Lorentz e q-espinores no caso da relatividade restrita o fizemos no espaço riemanniano substituindo as  $\hat{\sigma}^\alpha$  pelas  $\sigma^\mu(P)$ . As q-tetradas  $\sigma^\mu(P)$  fazem o importante papel de referencial local e têm também a propriedade de serem um quaternion hermitiano com um índice vetorial, logo têm a mesma estrutura que as derivadas covariantes de um q-espinor do tipo  $(\psi^{\dot{A}\dot{B}})$ .

Então, como já definimos a derivada covariante da derivada covariante de um q-espinor, podemos definir a derivada covariante das  $\sigma^\mu$ , que será:

$$\sigma^\mu|_\nu = \sigma^\mu_{,\nu} + \sigma^\tau \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \tau \nu \end{matrix} \right\} + \Gamma_\nu \sigma^\mu + \sigma^\mu \Gamma_\nu^\dagger \quad (13.II.VII)$$

A representação matricial desse quaternion derivada covariante é:

$$\begin{aligned} (\sigma^\mu \dot{A}\dot{B})|_\nu &= (\sigma^\mu \dot{A}\dot{B})_{,\nu} + (\sigma^\tau \dot{A}\dot{B}) \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \tau \nu \end{matrix} \right\} + \\ &+ (\Gamma_\nu^A C) (\sigma^\mu \dot{C}\dot{B}) + (\sigma^\mu \dot{A}\dot{D}) (\Gamma_\nu^{\dot{B}}) \end{aligned} \quad (14.II.VII)$$

A derivada covariante da tetrada  $\sigma_\nu = g_{\mu\nu} \sigma^\mu$  é:

$$\sigma_{\mu|\nu} = \sigma_{\mu,\nu} - \sigma_\tau \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \nu \mu \end{matrix} \right\} + \Gamma_\nu \sigma_\mu + \sigma_\mu \Gamma_\nu^\dagger \quad (15.II.VII)$$

Se fizermos a derivada covariante de  $\overline{\sigma^\mu}$  teremos:

$$\overline{\sigma^\mu}_{|\nu} = \overline{\sigma^\mu}_{,\nu} + \overline{\sigma^\alpha} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha \nu \end{matrix} \right\} - \overline{\sigma^\mu} \Gamma_\nu - \Gamma_\nu + \overline{\sigma^\mu} \quad (16.II.VII)$$

cuja expressão matricial é:

$$\begin{aligned} (\sigma^\mu_{AB})_{|\nu} &= (\sigma^\mu_{AB})_{,\nu} + (\sigma^\alpha_{AB}) \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha \nu \end{matrix} \right\} - \\ &- (\sigma^\mu_{AD})(\Gamma_\nu^D{}_B) - (\Gamma_\nu^D{}_A)^T (\sigma^\mu_{LB}) \end{aligned}$$

Como as q-tetradas  $\sigma^\mu(P)$  se comportam como uma base em P, para referir todos quaternions ali definidos e em particular os quaternions de Lorentz, elas fazem papel análogo aos vetores  $e_\mu(P)$ , unitários, associados a um sistema de coordenadas em P. Dentro dessa analogia, vamos impor o anulamento da derivada covariante das  $\sigma^\mu(P)$ , isto é:

$$\sigma^\mu(P)_{|\nu} = 0. \quad (17.II.VII)$$

Essa fórmula é sugerida pela (4.II.VII).

Como  $\sigma^\mu(P)|\sigma^\nu(P) = g^{\mu\nu}(P)$ , tomando-se a derivada covariante dêsse produto escalar, virá como decorrência da (17.II.VII):

$$0 = \sigma^\mu(P)_{|\rho} |\sigma^\nu(P) + \sigma^\mu(P)|\sigma^\nu(P)_{|\rho} = g^{\mu\nu}(P)_{|\rho}$$

logo

$$g^{\mu\nu}(P)_{|\rho} = 0. \quad (18.II.VII)$$

Do anulamento da derivada covariante das  $\sigma^\mu(P)$ , podemos escrever a derivada covariante dos quaternions de Lorentz como:

$$A(P)_{|\rho} = A_\mu(P)_{|\rho} \sigma^\mu(P). \quad (19.II.VII)$$

De  $\sigma^\mu(P) = h^\mu(\alpha) \dot{c}^\alpha$  e de (17.II.VII) decorre que

$$h^\mu(\alpha)_{|\nu} = 0. \quad (20.II.VII)$$

Então:

$$A(P) = A_{\mu}(P)\sigma^{\mu} = A_{\mu}(P)h^{\mu}_{(\alpha)} \dot{\sigma}^{\alpha} = A_{(\alpha)}(P) \dot{\sigma}^{\alpha},$$

logo:

$$A_{(\alpha)}(P)|_{\nu} = A_{\mu}(P)|_{\nu} h^{\mu}_{(\alpha)}(P) = A_{(\alpha)}(P)|_{\nu} \quad (21.II.VII)$$

Esta é a conexão entre a derivada covariante das componentes quaterniônicas de um quaternion de Lorentz e a correspondente derivada covariante de suas componentes quando referido à q-tetra-da local.

Do fato de  $\dot{\sigma}^{\alpha}$  ser um quaternion constante implica em que  $\dot{\sigma}^{\alpha}|_{\rho} = 0$ , mas

$$\dot{\sigma}^{\alpha} = f^{(\alpha)}_{(P)\mu} \sigma^{\mu}(P),$$

e como  $\sigma^{\mu}|_{\rho} = 0$ , então:

$$f^{(\alpha)}_{(P)\mu}|_{\rho} = 0. \quad (22.II.VII)$$

### (III.VII) As q-Afinidades $\overline{\Gamma}_{\nu}(P)$ .

Partindo-se da fórmula (5.II.VII) e tomando-se a sua adjunta, virá:

$$\overline{\psi}_{|\nu} = \overline{\psi}_{,\nu} + \overline{\psi} \overline{\Gamma}_{\nu} \quad (1.III.VII)$$

Vamos demonstrar que  $\overline{\psi}_{|\nu} = \overline{\psi}_{\nu}$ , isto é, que o adjunto da derivada covariante é igual à derivada covariante do adjunto.

Como podemos escrever qualquer quaternion como combinação linear das  $\dot{\sigma}^{\alpha}$  e, conseqüentemente, como combinação linear das  $\sigma^{\mu}(P)$ , então podemos escrever o quaternion  $\psi_{|\nu}$  como:

$$\psi_{|\nu} = (\psi_{|\nu})_{(\alpha)} \dot{\sigma}^{\alpha} = (\psi_{|\nu})_{\mu} \sigma^{\mu}.$$

Tomando-se o adjunto desta equação, obteremos:

$$\overline{\psi}_{|\nu} = (\overline{\psi}_{|\nu})_{(\alpha)} \overline{\dot{\sigma}}^{\alpha}.$$

Por outro lado, tomando-se a derivada covariante de:

$$\overline{\psi} = \psi_{(\alpha)} \overline{\dot{\sigma}}^{\alpha},$$

virá:

$$\overline{\psi}_{|\nu} = (\overline{\psi}_{(\alpha)})_{|\nu} \overline{\dot{\sigma}}^{\alpha} = (\overline{\psi}_{|\nu})_{(\alpha)} \overline{\dot{\sigma}}^{\alpha}$$

Mas então:

$$\overline{\psi}_{|\nu} = \overline{\psi}_{|\nu}, \quad (2.III.VII)$$

como queríamos demonstrar.

A relação (2.III.VII) nos permite obter uma importante propriedade das  $\Gamma_{\nu}$ . Sabemos que se  $\psi$  é um q-espinoz do tipo  $(\psi^A)$ , o seu adjunto  $\overline{\psi}$  se transforma como  $(\psi_A)$ .

A derivada covariante de um q-espinoz do tipo  $(\psi^A)$  é dada pela (5.II.VII), isto é:

$$\psi_{|\nu} = \psi_{,\nu} + \Gamma_{\nu} \psi.$$

Se tomarmos a adjunta desta equação obteremos  $\overline{\psi}_{|\nu} = \overline{\psi}_{,\nu} + \overline{\psi} \overline{\Gamma}_{\nu}$  mas levando em conta a (2.III.VII) temos:

$$\overline{\psi}_{,\nu} + \overline{\psi} \overline{\Gamma}_{\nu} = \overline{\psi}_{|\nu}$$

mas a  $\overline{\psi}_{|\nu}$  é a derivada covariante de um q-espinoz do tipo  $(\psi_A)$ , logo é dada pela equação (6.II.VII), e então:



$$\overline{\psi}_{,\nu} + \overline{\psi} \overline{\Gamma}_\nu = (\psi_A)_{,\nu} - (\psi_A) \Gamma_\nu = \overline{\psi}_{,\nu} - \overline{\psi} \Gamma_\nu$$

Como a  $\psi$  é arbitrária, resulta que:

$$-\overline{\Gamma}_\nu = \dot{\Gamma}_\nu \quad ,$$

ou

$$\Gamma_\nu + \overline{\Gamma}_\nu = 0 \quad . \quad (3.III.VII)$$

Lembrando a (8.III), temos equivalentemente:

$$\text{tr } \Gamma_\nu = 0 \quad , \quad (4.III.VII)$$

isto é, as q-afinidades têm traço nulo.

Do anulamento do traço das  $\Gamma_\nu$  e de sua representação quaterniônica:  $\Gamma_\nu = (\Gamma_\nu)_{(\alpha)} \dot{\sigma}^\alpha$ , temos:

$$(\Gamma_\nu)_{(0)} = 0 \quad . \quad (5.III.VII)$$

É possível expressar as  $\Gamma_\nu$  em função das  $\sigma^\mu$  e de suas derivadas e isto é feito a partir da equação  $\sigma^\mu|_\rho = 0$ , isto é, então:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_\mu \sigma^\mu|_\rho = 0 &= \overline{\sigma}_\mu \left[ \sigma^\mu_{,\rho} + \sigma^\nu \left\{ \nu \begin{matrix} \mu \\ \rho \end{matrix} \right\} + \right. \\ &\left. + \Gamma_\rho \sigma^\mu + \sigma^\mu \Gamma_{\rho\rho}^+ \right] \end{aligned}$$

Mas:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_\mu \sigma^\mu &= h_{\mu(\alpha)} \overline{\dot{\sigma}^\alpha} h^\mu_{(\beta)} \dot{\sigma}^\beta = \\ &= \dot{g}_{\alpha\beta} \overline{\dot{\sigma}^\alpha} \dot{\sigma}^\beta = \overline{\dot{\sigma}^\alpha} \dot{\sigma}_\alpha = 4\dot{\sigma}^0 \end{aligned} \quad (6.III.VII)$$

e

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_\mu \Gamma_\rho \sigma^\mu &= h_{\mu(\beta)} \overline{\dot{\sigma}^\beta} \Gamma_\rho h^\mu_{(\lambda)} \dot{\sigma}^\lambda = \\ &= \dot{g}_{\beta\lambda} \overline{\dot{\sigma}^\beta} \Gamma_\rho \dot{\sigma}^\lambda = \overline{\dot{\sigma}^\beta} \Gamma_\rho \dot{\sigma}_\beta \end{aligned} \quad (7.III.VII)$$

Se expressarmos  $\Gamma_\rho$  como  $(\Gamma_\rho)_{(\delta)} \dot{\sigma}^\delta$  e o levarmos à (7.III.VII), obteremos:

$$\overline{\sigma}_\mu(P) \Gamma_\rho(P) \sigma^\mu(P) = 0 \quad (8.III.VII)$$

O resultado (8.III.VII) é um caso particular de expressão:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_\mu(P) A(P) \sigma^\mu(P) &= 4A_{(0)}(P) \dot{\sigma}^0 = \\ &= [2 \operatorname{tr} A(P)] \dot{\sigma}^0, \end{aligned} \quad (9.III.VII)$$

onde  $A(P)$  é um campo quaterniônico arbitrário.

Com os resultados (6.III.VII) e (8.III.VII), obteremos:

$$\overline{\sigma}_\mu \sigma^\mu|_\rho = 0 = \overline{\sigma}_\mu \left[ \sigma^\mu_{,\rho} + \sigma^\nu \left\{ \nu \rho \right\} + 4\Gamma_\rho^+ \right],$$

ou

$$\Gamma_\rho^+ = -\frac{\overline{\sigma}_\mu}{4} \left( \sigma^\mu_{,\rho} + \sigma^\nu \left\{ \nu \rho \right\} \right)$$

Tomando-se o hermitiano, teremos:

$$\Gamma_\rho = -\frac{1}{4} \left( \sigma^\mu_{,\rho} + \sigma^\nu \left\{ \nu \rho \right\} \right) \overline{\sigma}_\mu \quad (10.III.VII)$$

já que  $\overline{\sigma}_\mu$ ,  $\sigma^\mu_{,\rho}$  e  $\sigma^\nu$  são quaternions hermitianos.

A fórmula (10.III.VII) define a q-afinidade em função das  $\sigma^\mu$ , suas derivadas parciais e dos símbolos de Christoffel de 2<sup>a</sup> espécie os  $\Gamma_\rho$  não são hermitianos.

A fórmula (5.II.VII) mostra que as  $\Gamma_\nu$  se transformam como quadrivetores de universo quanto ao índice  $\nu$ , entretanto  $\Gamma_\nu$  é um quaternion de estrutura matemática mais complexa. Vejamos como se transforma por uma transformação em que estejam fixadas as  $x^\mu$ .

De

$$\psi_{|\nu} = \psi_{,\nu} + \Gamma_{\nu} \psi \quad (5.II.VII)$$

e levando em conta que  $\psi$  é um q-espinor da forma  $(\psi^A)$  e, portanto, deve se transformar como  $\psi^i(P) = Q(P) \psi(P)$ , quando há uma transformação de coordenadas  $X^\mu \rightarrow X'^\mu$  ou quando simplesmente haja uma transformação em P, a  $X^\mu$  fixadas, que conecta uma tetrada  $\sigma^\mu(P)$  com outra  $\sigma'^\mu(P) = \Lambda^\mu(P)_\nu \sigma^\nu(P)$  neste último caso dizemos que temos uma transformação de spin pura.

A transformação de  $(\psi^A)_{|\mu}$  induzida por uma transformação de coordenadas  $X^\nu$ , decorre simultaneamente do seu caráter espinorial e do seu caráter tensorial, respectivamente contidos nos índices A e  $\mu$ . Por isso, a sua lei de transformação é:

$$\psi'^i_{|\mu}(P) = \left( \frac{\partial X^\nu}{\partial X'^\mu} \right)_P Q(P) \psi_{|\nu}(P) \quad (11.III.VII)$$

onde  $Q(P)$  depende da transformação de coordenadas.

Uma transformação pura de spin será um caso particular e de finida por:

$$\psi'^i_{|\mu} = Q(P) \psi_{|\mu} \quad , \quad (12.III.VII)$$

ou

$$\psi'^i_{,\mu} + \Gamma'^i_{\mu} \psi'^i = Q \psi_{,\mu} + Q \Gamma_{\mu} \psi$$

mas  $\psi'^i = Q \psi$ , logo:

$$(Q\psi)_{,\mu} + \Gamma'^i_{\mu} Q\psi = Q\psi_{,\mu} + Q\Gamma_{\mu} \psi,$$

ou

$$Q_{,\mu} \psi + \Gamma_{\mu}^{\nu} Q \psi = Q \Gamma_{\mu}^{\nu} \psi.$$

Da arbitrariedade de  $\psi$  resulta que:

$$Q_{,\mu} + \Gamma_{\mu}^{\nu} Q = Q \Gamma_{\mu}^{\nu},$$

e como

$$Q(P) \bar{Q}(P) = \dot{\sigma}^0,$$

virá:

$$\Gamma_{\mu}^{\nu}(P) = (Q \Gamma_{\mu}^{\nu} - Q_{,\mu})_P \bar{Q}(P). \quad (13.III.VII)$$

Essa é a lei de transformação da q-afinidades quando temos uma transformação pura de spin. Para o caso mais geral de uma transformação de coordenadas, a lei de transformação deve levar em conta o caráter tensorial do índice  $\mu$ , isto é:

$$\Gamma_{\mu}^{\nu}(P) = \left( \frac{\partial X^{\nu}}{\partial X^{\mu}} \right)_P (Q \Gamma_{\mu}^{\nu} - Q_{,\mu})_P \bar{Q}(P) \quad (14.III.VII)$$

onde o ponto P vem indicado por suas coordenadas.

#### (IV.VII) A q-Curvatura $R_{rs}$

Do cálculo tensorial sabemos que o tensor de Riemann-Christoffel é definido em função dos símbolos de Christoffel e de suas derivadas parciais, por meio da expressão.

$$R_{\mu rs}^{\lambda} = \partial_r \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu s \end{matrix} \right\} - \partial_s \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu r \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \theta \\ \mu s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \theta r \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \theta \\ \mu r \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \theta s \end{matrix} \right\}, \quad (1.IV.VII)$$

onde  $\partial_r \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu s \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu s \end{matrix} \right\}}{\partial X^r}$ , as  $X^r$  constituem o sistema de coordenadas e  $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu s \end{matrix} \right\}$  é o símbolo de Christoffel de 2<sup>a</sup> espécie.

No capítulo anterior vimos a correlação que existe entre as

q-afinidades  $\Gamma_\mu$  e os símbolos  $\{\mu^\lambda_s\}$  e essa correlação surgiu na definição da derivada covariante de um q-espinor. Dentro dessa analogia, vamos procurar o quaternion análogo ao tensor de Riemann-Christoffel. Para isso, lembremos que as derivadas covariantes não comutam e que a lei de comutação para a derivada covariante de um quadrivetor  $a^\mu$  é:

$$a^\rho|_{\lambda\mu} - a^\rho|_{\mu\lambda} = a^\theta R_{\theta\rho}{}^{\lambda\mu}. \quad (2.IV.VII)$$

A fórmula (5.II.VII) nos dá a derivada covariante de um q-espinor do tipo  $(\psi^A)$ . Se a derivarmos mais uma vez e trocarmos a ordem das derivadas obteremos dois quaternions, derivadas covariantes segundas de um q-espinor. Se os subtrairmos, obteremos uma certa função que envolve o próprio q-espinor, as q-afinidades e suas derivadas parciais. Essa expressão será indicada por:

$$(\psi|_\nu)|_\mu - (\psi|_\mu)|_\nu = \psi|_{\nu\mu} - \psi|_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \psi \quad (3.IV.VII)$$

A obtenção deste resultado é um pouco trabalhosa e se encontra no apêndice II.

Ao quaternion  $R_{\nu\mu}$  chamaremos q-curvatura.

A expressão matricial da (3.IV.VII) é:

$$(\psi^A)|_{\nu\mu} - (\psi^A)|_{\mu\nu} = (R^A_B)_{\nu\mu} (\psi^B). \quad (3'.IV.VII)$$

Como se pode ver no apêndice II, a q-curvatura  $R_{\nu\mu}$  é dependente das q-afinidades e suas derivadas parciais e sua expressão é:

$$R_{\nu\mu} = \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu + \Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu \quad (4.IV.VII)$$

Comparando-se (4.IV.VII) e (3.IV.VII) com (1.IV.VII) e (2.IV.VII), respectivamente, veremos a analogia entre a q-curvatura  $R_{\nu\mu}$  e o tensor de Riemann-Christoffel.

Do fato de que  $\overline{\Gamma}_\mu + \overline{\overline{\Gamma}}_\mu = 0$  resulta que:

$$R_{\nu\mu} + \overline{R}_{\nu\mu} = 0 \quad (5.IV.VII)$$

ou

$$\text{tr}(R_{\nu\mu}) = 0 \quad (6.IV.VII)$$

A fórmula (4.IV.VII) mostra que  $R_{\nu\mu}$  é antissimétrico nos índices  $\nu$  e  $\mu$ .

Se tomarmos o adjunto da (3.IV.VII) e levarmos em conta a (5.IV.VII), teremos:

$$\overline{\psi}_{|\nu\mu} - \overline{\psi}_{|\mu\nu} = -\overline{\psi} R_{\nu\mu}$$

mas  $\overline{\psi}_{|\nu\mu} = \overline{\overline{\psi}}_{|\nu\mu}$ , logo:

$$\overline{\overline{\psi}}_{|\nu\mu} - \overline{\overline{\psi}}_{|\mu\nu} = -\overline{\overline{\psi}} R_{\nu\mu}$$

Levando em conta que o adjunto de um q-espinor do tipo  $(\psi^A)$  passa a ser do tipo  $(\psi_A)$ , vem:

$$(\psi_B)_{|\nu\mu} - (\psi_B)_{|\mu\nu} = -(\psi_A)(R^A_B)_{\nu\mu} \quad (7.IV.VII)$$

Mas essa é, então, a lei de comutação na derivada covariante de um q-espinor covariante. Ela apresenta grande analogia com a correspondente expressão tensorial.

Como as q-tetradas têm derivada covariante nula, resulta:

$$\sigma^\mu_{|rs} - \sigma^\mu_{|sr} = 0 \quad (8'.IV.VII)$$

efetuando-se os cálculos, que são algo longos e encontram-se no apêndice I, obteremos:

$$\sigma^\lambda R_{\lambda rs}^\mu + R_{rs} \sigma^\mu + \sigma^\mu R_{rs}^\dagger = 0 . \quad (8.IV.VII)$$

Esta fórmula coincide com a expressão encontrada por P. G. Bergmann onde o que esse autor chama de  $\varpi^\lambda$  é a q-tetrada  $\sigma^\lambda$ .

A fórmula (8.IV.VII) estabelece uma importante correlação entre o tensor de Riemann  $R_{\lambda rs}^\mu$  e a q-curvatura e a correlação é feita pelas q-tetradas  $\sigma^\mu$ .

Multiplicando-se à direita ambos membros de (8.IV.VII) por  $\overline{\sigma_\mu}$  e somando-se nos  $\mu$ , virá:

$$\sigma^\lambda R_{\lambda rs}^\mu \overline{\sigma_\mu} + R_{rs} \sigma^\mu \overline{\sigma_\mu} + \sigma^\mu R_{rs}^\dagger \overline{\sigma_\mu} = 0 .$$

Como  $\sigma^\mu \overline{\sigma_\mu} = 4 \dot{\sigma}^0$  e como  $\sigma^\mu R_{rs}^\dagger \overline{\sigma_\mu} = (2 \text{ tr } R_{rs}^\dagger) \dot{\sigma}^0$ , e como de (6.IV.VII) conclue-se que  $\text{tr } R_{rs}^\dagger = 0$ , obteremos:

$$R_{rs} = -\frac{1}{4} \sigma^\lambda R_{\lambda \cdot rs}^\mu \overline{\sigma_\mu} . \quad (9.IV.VII)$$

A q-curvatura é uma função do tensor de Riemann-Christoffel e das q-tetradas. A fórmula (9.IV.VII) mostra que  $R_{rs}$  não é hermitiano.

A inversão da fórmula (9.IV.VII) é obtida se projetarmos a expressão (8.IV.VII) sobre  $\sigma^\theta$ , isto é:

$$\sigma^\theta | (R_{\lambda rs}^\mu \sigma^\lambda + R_{rs} \sigma^\mu + \sigma^\mu R_{rs}^\dagger) = 0$$

ou

$$-\dot{\sigma}^0 (R^{\theta\mu}_{rs}) = \sigma^\theta | [R_{rs} \sigma^\mu + \sigma^\mu R_{rs}^\dagger] . \quad (10.IV.VII)$$

O tensor de Riemann-Christoffel é definido quando conhece-

mos as q-tetradas e a q-curvatura ou, mais explicitamente, quando conhecemos as q-tetradas  $\sigma^\mu$ , as q-afinidades e suas derivadas parciais.

Se levarmos em conta a definição, (15.II), do produto escalar de dois quaternions, mais o fato de que  $\overline{\sigma^\theta} (\mathbb{R}_{rs} \sigma^\mu + \sigma^\mu \mathbb{R}_{rs}^\dagger)$  é o adjunto do  $(\mathbb{R}_{rs} \sigma^\mu + \sigma^\mu \mathbb{R}_{rs}^\dagger) \sigma^\theta$  e também que  $A + \overline{A} = \text{tr } A$ , obtemos a partir de (10.IV.VII) a expressão:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^\theta (R_{rs}^{\theta\mu}) &= -\frac{1}{2} \left[ \overline{\sigma^\theta} (\mathbb{R}_{rs} \sigma^\mu + \sigma^\mu \mathbb{R}_{rs}^\dagger) + \right. \\ &\quad \left. + \overline{(\mathbb{R}_{rs} \sigma^\mu + \sigma^\mu \mathbb{R}_{rs}^\dagger) \sigma^\theta} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \overline{\sigma^\theta} (\mathbb{R}_{rs} \sigma^\mu + \sigma^\mu \mathbb{R}_{rs}^\dagger) \right\} \end{aligned} \quad (10'.IV.VII)$$

$$\mathbb{R}_{rs} + \overline{\mathbb{R}_{rs}} = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^\theta (R_{rs}^{\theta\mu}) &= -\frac{1}{2} \left[ \overline{\sigma^\theta} \mathbb{R}_{rs} \sigma^\mu + \right. \\ &\quad \left. + \overline{\sigma^\theta} \sigma^\mu \mathbb{R}_{rs}^\dagger - \overline{\sigma^\mu} \mathbb{R}_{rs} \sigma^\theta - \mathbb{R}_{rs}^\dagger \overline{\sigma^\mu} \sigma^\theta \right] \end{aligned} \quad (10''.IV.VII)$$

Esta é a fórmula com que P. Bergmann expressa o tensor de Riemann em função das  $\sigma^\mu$  e das  $\mathbb{R}_{rs}$ .

É claro que a partir do tensor de Riemann podemos obter as suas formas contraídas. Assim, de (10.IV.VII) podemos obter:

$$\dot{\sigma}^\theta (R_{\mu s}^{\theta\mu}) = \dot{\sigma}^\theta R_s^\theta = -\sigma^\theta | (\mathbb{R}_{\mu s} \sigma^\mu + \sigma^\mu \mathbb{R}_{\mu s}^\dagger) \quad (11.IV.VII)$$

É possível escrever a fórmula (11.IV.VII) sob forma de



traço ou desdobrada em outras formas equivalentes, mas a forma su  
pra é mais compacta. O tensor  $R^{\theta}_{\ s}$  é também chamado tensor de Ricci.

Se contrairmos a (11.IV.VII) obteremos a curvatura escalar  $R$ , isto é:

$$\overset{\circ}{\sigma} R^{\theta\mu}_{\ \mu\theta} = \overset{\circ}{\sigma} R = -\sigma^{\theta} | (R_{\mu\theta} \sigma^{\mu} + \sigma^{\mu} R^{\dagger}_{\mu\theta}) \quad (12.IV.VII)$$

As fórmulas (10.IV.VII), (11.IV.VII) e (12.IV.VII) dão as expressões quaterniônicas dos tensores de Riemann, de Ricci e a curvatura escalar em função da q-curvatura e das  $\sigma^{\mu}$ .

Para a descrição da curvatura do espaço de Riemann basta o conhecimento das  $\sigma^{\mu}$ ,  $\overline{\sigma^{\mu}}$ , dos  $R_{rs}$  e das  $R^{\dagger}_{rs}$ .

A conexão entre a q-curvatura e o tensor de Riemann-Christoffel tem suas verdadeiras raízes na fórmula (10.III.VII) quando se conecta a q-afinidade com os símbolos de Christoffel de 2<sup>a</sup> espécie.

Dados os  $\sigma^{\mu}$ , e os símbolos  $\left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \nu \ \rho \end{smallmatrix} \right\}$  construiremos as q-afinidades e a q-curvatura, entretanto do mesmo modo que os  $g^{\mu\nu}$  não fixam unívocamente os  $\sigma^{\mu}$ , o tensor de Riemann-Christoffel não fixa unívocamente o  $R_{\mu\nu}$ .

Do ponto a que chegamos, neste trabalho, o caminho natural a prosseguir será o de construir as equações de Einstein na forma quaterniônica ou aplicar o formalismo de quaternions às equações de onda em espaço curvo.

Não o faremos neste trabalho. Também não faremos a cone-

xão entre espinores de ordem superior à segunda e quaternions, o que sòmente seria possível com a introdução do produto direto de quaternions.

### VIII. CONCLUSÃO

Com a obtenção das q-afinidades  $\Gamma_{\nu}$  e da q-curvatura  $R_{\nu\mu}$ , estamos de posse de um instrumento de cálculo para o estudo das teorias relativistas. Em particular, as equações de Einstein da relatividade geral podem ser obtidas na forma quaterniônica. O tratamento da relatividade sob forma quaterniônica permite explicitar a estrutura espinorial da teoria, sob a forma de funções das q-tetradas e suas derivadas.

Levando-se em conta que as q-tetradas  $\sigma^{\mu}$  são generalizações das  $\hat{\sigma}^{\alpha}$ , é natural a descrição das equações de onda em espaço curvo por meio do formalismo quaterniônico aqui introduzido.

O fato de que, tanto a relatividade geral quanto as equações de onda possam ser descritos por um só formalismo, nos leva a supor que uma teoria quântica do campo gravitacional tenha grande conveniência em ser descrita no formalismo de quaternions.

APÊNDICE I

$$\text{CÁLCULO DE } R_{\lambda}^{\mu}{}_{rs} \sigma^{\lambda} + R_{rs} \sigma^{\mu} + \sigma^{\mu} R^{\dagger}_{rs} = 0$$

Trabalharemos no formalismo matricial. A fórmula (14.II.VII) nos dá:

$$\begin{aligned} (\sigma^{\mu AB})_{|r} &= (\sigma^{\mu AB})_{,r} + (\sigma^{\nu AB}) \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu r \end{matrix} \right\} + \\ &+ (\Gamma_r^A C) (\sigma^{\mu CB}) + (\sigma^{\mu AL}) (\Gamma_r^B \dot{L})^T = 0, \end{aligned}$$

onde  $(\Gamma_r^B \dot{L})^T = (\Gamma_r \dot{L}^B)$  e  $\mu, r$  são índices vectoriais.

Derivando essa expressão covariantemente, virá:

$$\begin{aligned} (\sigma^{\mu AB})_{|rs} = 0 &= \left[ \sigma^{\mu AB}_{,r} + (\sigma^{\nu AB}) \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu r \end{matrix} \right\} \right]_{|s} (A, B \text{ fixos}) + \\ &+ (\Gamma_s^A D) (\sigma^{\mu DB})_{,r} + (\sigma^{\mu AD})_{,r} (\Gamma_s^B \dot{D}) + \\ &+ (\Gamma_s^A D) (\sigma^{\nu DB}) \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu r \end{matrix} \right\} + (\sigma^{\nu AD}) (\Gamma_{SD}^B) \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu r \end{matrix} \right\} + \\ &+ (\Gamma_r^A C) (\sigma^{\mu CB})_{|s} + \left[ (\Gamma_t^A C) \left\{ \begin{matrix} t \\ r s \end{matrix} \right\} + (\Gamma_r^A C)_{,s} \right] + \\ &+ (\Gamma_s^A L) (\Gamma_r^L C) - (\Gamma_r^A L) (\Gamma_s^L C) (\Gamma_s^L C) (\sigma^{\mu CB}) + \\ &+ (\sigma^{\mu AC})_{|s} (\Gamma_r^B \dot{C}) + (\sigma^{\mu AC}) \left[ (\Gamma_r^B \dot{C})_{,s} + (\Gamma_{AC}^B) \left\{ \begin{matrix} t \\ r s \end{matrix} \right\} \right] + \\ &+ (\Gamma_r^C \dot{L}) (\Gamma_s \dot{L}^B) - (\Gamma_s^C \dot{L}) (\Gamma_r \dot{L}^B) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ (\sigma^{\mu \dot{A} \dot{B}})_{,r} + (\sigma^{\nu \dot{A} \dot{B}}) \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu \quad r \end{matrix} \right\} \right]_{|s}^{(A, \dot{B} \text{ fixos})} + \\
&+ (\Gamma_{s \dot{D}}^A) \left[ (\sigma^{\mu \dot{D} \dot{B}})_{,r} + (\sigma^{\nu \dot{D} \dot{B}}) \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu \quad r \end{matrix} \right\} + (\Gamma_{r \dot{C}}^D) (\sigma^{\mu \dot{C} \dot{B}}) \right] + \\
&+ \left[ (\sigma^{\mu \dot{A} \dot{D}})_{,r} + (\sigma^{\nu \dot{A} \dot{D}}) \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu \quad r \end{matrix} \right\} + (\sigma^{\mu \dot{A} \dot{C}}) (\Gamma_{r \dot{C}}^{\dot{D}}) \right] (\Gamma_{s \dot{D}}^{\dot{B}}) + \\
&+ (\Gamma_{t \dot{C}}^A) (\sigma^{\mu \dot{C} \dot{B}}) \left\{ \begin{matrix} t \\ r \quad s \end{matrix} \right\} + (\Gamma_{r \dot{C}}^A)_{,s} (\sigma^{\mu \dot{C} \dot{B}}) - \\
&- (\Gamma_{r \dot{L}}^A) (\Gamma_{s \dot{C}}^L) (\sigma^{\mu \dot{C} \dot{B}}) + (\sigma^{\mu \dot{A} \dot{C}}) \left[ (\Gamma_{r \dot{C}}^{\dot{B}})_{,s} + \right. \\
&\left. + (\Gamma_{t \dot{C}}^{\dot{B}}) \left\{ \begin{matrix} t \\ r \quad s \end{matrix} \right\} - (\Gamma_{s \dot{C}}^{\dot{L}}) (\Gamma_{r \dot{L}}^{\dot{B}}) \right].
\end{aligned}$$

Para formarmos a expressão (8.IV.VII) precisamos subtrair, do resultado anterior, o  $\sigma^{\mu}_{|sr}$  e anular a diferença.

A formação do  $\sigma^{\mu}_{|sr}$  é feita análogamente ao  $\sigma^{\mu}_{|rs}$ , (basta do-se comutar na fórmula anterior s por r).

Mas, do cálculo tensorial temos:

$$\begin{aligned}
&\left[ (\sigma^{\mu \dot{A} \dot{B}})_{,r} + (\sigma^{\nu \dot{A} \dot{B}}) \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu \quad r \end{matrix} \right\} \right]_{|s}^{(A, \dot{B} \text{ fixos})} - \left[ (\sigma^{\mu \dot{A} \dot{B}})_{,s} + \right. \\
&\left. + (\sigma^{\nu \dot{A} \dot{B}}) \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu \quad s \end{matrix} \right\} \right]_{|r}^{(A, \dot{B} \text{ fixos})} = (\sigma^{\lambda \dot{A} \dot{B}}) R_{\lambda \cdot rs}^{\mu},
\end{aligned}$$

onde  $R_{\lambda \cdot rs}^{\mu}$  é o tensor de Riemann Christoffel. Esta é a lei de comutação da derivada covariante do cálculo tensorial.

Então:

$$\begin{aligned}
0 &= (\sigma^{\mu AB})|_{rs} - (\sigma^{\mu AB})|_{sr} = (\sigma^{\lambda AB})_{R_\lambda}{}^\mu{}_{rs} - \\
&- (\Gamma_{sD}^A)(\sigma^{\mu DL}) (\Gamma_r \dot{L}^B) - (\Gamma_{rL}^A)(\sigma^{\mu LD}) (\Gamma_s \dot{D}^B) + \\
&+ (\Gamma_{rC}^A)_{,s} (\sigma^{\mu CB}) - (\Gamma_{rL}^A)(\Gamma_{sC}^L)(\sigma^{\mu CB}) + \\
&+ (\sigma^{\mu AC}) \left[ (\Gamma_r \dot{C}^B)_{,s} - (\Gamma_s \dot{C}^L)(\Gamma_r \dot{L}^B) \right] + \\
&+ (\Gamma_{rD}^A)(\sigma^{\mu DL}) (\Gamma_s \dot{L}^B) + (\Gamma_{sL}^A)(\sigma^{\mu LD}) (\Gamma_r \dot{D}^B) - \\
&- (\Gamma_{sC}^A)_{,r} (\sigma^{\mu CB}) + (\Gamma_{sL}^A)(\Gamma_{rC}^L)(\sigma^{\mu CB}) - \\
&- (\sigma^{\mu AC})(\Gamma_s \dot{C}^B)_{,r} + (\sigma^{\mu AC})(\Gamma_r \dot{C}^L)(\Gamma_s \dot{L}^B) .
\end{aligned}$$

Então, com a omissão dos termos cancelados, teremos:

$$\begin{aligned}
0 &= (\sigma^{\lambda AB})_{R_\lambda}{}^\mu{}_{rs} + \left[ (\Gamma_{rC}^A)_{,s} - (\Gamma_{rL}^A)(\Gamma_{sC}^L) - \right. \\
&- (\Gamma_{sC}^A)_{,r} + (\Gamma_{sL}^A)(\Gamma_{rC}^L) \left. \right] (\sigma^{\mu CB}) + \\
&+ (\sigma^{\mu AC}) \left[ (\Gamma_r \dot{C}^B)_{,s} - (\Gamma_s \dot{C}^L)(\Gamma_r \dot{L}^B) - (\Gamma_s \dot{C}^B)_{,r} + \right. \\
&+ (\Gamma_r \dot{C}^L)(\Gamma_s \dot{L}^B) \left. \right] .
\end{aligned}$$

Escrevendo em forma compacta e levando em conta a definição da q-curvatura  $\mathbb{R}_{rs}$ , dada em (2.IV.VII), virá:

$$\sigma^\lambda R_{\lambda rs}{}^\mu + R_{rs} \sigma^\mu + \sigma^\mu R_{rs}^\dagger = 0 \quad \text{c.q.d.}$$

\* \* \*

### APÊNDICE II

A fórmula (5.II.VII) nos dá a expressão da derivada covariante de um espinor de 1ª ordem do tipo  $(\psi^A)$ :

$$\psi_{|\nu} = \psi_{,\nu} + \Gamma_\nu \psi \quad (5.II.VII)$$

Se derivarmos novamente a (5.II.VII), obteremos:

$$(\psi_{|\nu})_{|\mu} = \psi_{|\nu\mu} = (\psi_{,\nu} + \Gamma_\nu \psi)_{,\mu} - \psi_{|\rho} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} + \Gamma_\mu \psi_{|\nu} \quad (1.A.II)$$

O símbolo de Christoffel  $\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu \nu \end{matrix} \right\}$  surgiu porque  $\psi_{|\nu}$  além de espinor tem caráter tensorial devido ao índice  $\nu$ . Comutando-se a ordem dos índices  $\nu, \mu$  em (1.A.II), virá:

$$(\psi_{|\mu})_{|\nu} = \psi_{|\mu\nu} = (\psi_{,\mu} + \Gamma_\mu \psi)_{,\nu} - \psi_{|\rho} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \nu \mu \end{matrix} \right\} + \Gamma_\nu \psi_{|\mu} \quad (2.A.II)$$

Subtraindo-se (2.A.II) de (1.A.II) e levando em conta a simetria dos símbolos de Christoffel nos índices  $\mu, \nu$ , virá:

$$\begin{aligned} \psi_{|\nu\mu} - \psi_{|\mu\nu} &= \cancel{\psi_{,\nu\mu}} + \Gamma_{\nu,\mu} \psi + \Gamma_\nu \psi_{,\mu} + \Gamma_\mu \psi_{|\nu} - \\ &\quad - \cancel{\psi_{,\mu\nu}} - \Gamma_{\mu,\nu} \psi - \Gamma_\mu \psi_{,\nu} - \Gamma_\nu \psi_{|\mu} = \\ &= \Gamma_{\nu,\mu} \psi + \cancel{\Gamma_\nu \psi_{,\mu}} + \Gamma_\mu (\cancel{\psi_{,\nu}} + \Gamma_\nu \psi) - \end{aligned}$$

$$- \Gamma_{\mu,\nu} \psi - \cancel{\Gamma_{\mu} \psi_{,\nu}} - \Gamma_{\nu} (\cancel{\psi_{,\mu}} + \Gamma_{\mu} \psi)$$

ou

$$\psi_{|\nu\mu} - \psi_{|\mu\nu} = [\Gamma_{\nu,\mu} + \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} - \Gamma_{\mu,\nu} - \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu}] \psi \quad (3.A.II)$$

Comparando essa fórmula com a correspondente fórmula do cálculo tensorial, escreveremos:

$$\psi_{|\nu\mu} - \psi_{|\mu\nu} = \mathbb{R}_{\nu\mu} \psi \quad , \quad (3'.A.II)$$

onde

$$\mathbb{R}_{\nu\mu} = \partial_{\mu} \Gamma_{\nu} + \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu} - \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu}.$$

Mas esta é a fórmula (4.IV.VII), que dá a q-curvatura.

Em (3.A.II) se trocarmos  $\mu$  por  $\nu$ , obteremos:

$$\psi_{|\mu\nu} - \psi_{|\nu\mu} = \mathbb{R}_{\mu\nu} \psi \quad (4.A.II)$$

Comparando (4.A.II) com (3'.A.II) e levando em conta a arbitrariedade da  $\psi$ , concluímos que:

$$\mathbb{R}_{\mu\nu} = -\mathbb{R}_{\nu\mu} \quad (5.A.II)$$

\* \* \*

BIBLIOGRAFIA:

1. W. L. Bade e H. Jehle, *Revs. Modern Phys.* 25, 714 (1953).
2. W. C. Parke e H. Jehle, *Lectures in Theoretical Physics*, vol. VII A, 297 (1965).
3. P. G. Bergmann, *Phys. Rev.*, vol. 107, nº 2, 624 (1957).
4. R. Penrose, *Annals of Phys.* 10, 171 (1960).
5. C. G. Oliveira e C. Marcio do Amaral, *Phys. Letters*, vol. 22, nº 1, 64 (1966);  
C. G. Oliveira e C. Marcio do Amaral, *Nuovo Cimento*, serie X, vol. 47, 9 (1967).
6. P. Rastall, *Revs. Modern Phys.*, vol. 36, 820 (1964).
7. M. Sachs, *Nuovo Cimento*, vol. XLVII A, nº 4, 759 (1967).
8. T. Kahan, *Théorie des Groupes en Physique Classique et Quantique*, tome I, pg. 52, 1960, Dunod, Paris.

\*O\*O\*O\*